



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

## **Estudando caos por meio de mapas e gráficos de recorrência**

Acadêmico: Raul de Palma Aristides

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá 2017

Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Raul de Palma Aristides

## Estudando caos por meio de mapas e gráficos de recorrência

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, realizado sob orientação da Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Banca Examinadora: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira (Orientador)  
Prof. Dra. Hatsumi Mukai  
Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro

Maringá  
2017

# Sumário

Resumo	ii
Introdução	1
<b>1 Mapas unidimensionais</b>	<b>3</b>
1.1 Órbitas e Pontos fixos . . . . .	3
1.1.1 <i>Cobwebs</i> . . . . .	5
1.2 Mapa Logístico . . . . .	6
1.2.1 Duplicação de período . . . . .	11
1.2.2 Expoente de Lyapunov . . . . .	12
1.2.3 Janela de periodicidade . . . . .	14
1.3 Pêndulo forçado e amortecido . . . . .	16
<b>2 Gráficos de Recorrência</b>	<b>18</b>
2.1 Análise Quantitativa de Recorrência . . . . .	18
2.1.1 Gráficos de recorrência . . . . .	18
2.1.2 O parâmetro $\varepsilon$ . . . . .	19
2.1.3 Estruturas nos gráficos de recorrência . . . . .	19
2.1.4 Medidas de complexidade . . . . .	20
2.2 Aplicação ao mapa logístico . . . . .	22
2.2.1 Parâmetro $r = 3,679$ . . . . .	23
2.2.2 Parâmetro $r = 3,720$ . . . . .	24
2.2.3 Parâmetro $r = 3,830$ . . . . .	26
2.2.4 Parâmetro $r = 4,0$ . . . . .	27
2.2.5 Medidas de complexidade do mapa logístico . . . . .	29
Conclusões	30
A Diagrama de bifurcações	31
Referências Bibliográficas	32

# Resumo

Sistemas caóticos podem evoluir de forma irregular e imprevisível. Além disso, apresentam forte dependência nas condições iniciais, isto é, pequenas mudanças nas condições iniciais implicam em resultados completamente diferentes a longo prazo. Neste trabalho de conclusão de curso, primeiramente, introduzimos os mapas unidimensionais. Que são os sistemas dinâmicos mais simples que apresentam comportamento caótico, e são apresentados os conceitos de órbitas e pontos fixos. Além disso, estudamos o mapa logístico, que para certos valores do parâmetro  $r$ , apresenta comportamento caótico. Em um segundo momento, expõe-se o estudo sobre os gráficos de recorrência, uma ferramenta de análise de sistemas dinâmicos que se baseia na recorrência nestes sistemas. Em seguida, aplicamos a análise quantitativa de recorrência ao mapa logístico.

# Introdução

Jules Henri Poincaré (1854-1912) iniciou no final do século XIX o que hoje conhecemos como Teoria do Caos [1]. Na época, Poincaré estudava o problema das órbitas de três corpos celestiais submetidos a atração gravitacional mútua. Considerando o comportamento das órbitas a partir de condições iniciais, Poincaré mostrou que as órbitas se tornavam complexas e irregulares, comportamento hoje conhecido como caótico. Por seu trabalho, Poincaré ganhou um prêmio do rei Oscar II, tal prêmio seria entregue para quem provasse matematicamente a estabilidade do Sistema Solar [2].

Após o trabalho de Poincaré, os trabalhos de George D. Birkhoff (1884-1944), Andrei Kolmogorov (1903-1987), Vladimir Arnold (1937-2010) e Jurgen Moser (1928-1999) contribuíram muito para o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos [3]. O surgimento dos computadores permitiu um grande avanço na análise de sistemas dinâmicos não-lineares [4], em especial Edward Lorenz (1917-2008) mostrou que um conjunto de equações diferenciais não-lineares apresentava o mesmo comportamento caótico observado por Poincaré [5].

Na época, a comunidade de meteorologistas desenvolvia modelos lineares de previsão. Lorenz estudava um modelo meteorológico de 12 equações diferenciais, com o objetivo de demonstrar que algum fator, ainda desconhecido, limitava o sucesso dos modelos lineares [4]. Ao longo de seu trabalho, Lorenz descobriu o que hoje é chamado de dependência nas condições iniciais, ou seja, pequenas diferenças nas condições iniciais causam grandes diferenças conforme o sistema evolui. No caso meteorológico, pequenos erros nas medidas da atmosfera seriam ampliados rapidamente, levando a previsões meteorológicas erradas. Além disso, por meio de um modelo simplificado, de 3 equações diferenciais, Lorenz observou um comportamento caótico [3].

A década de 70 foi marcada por um grande fluxo de trabalhos na era da dinâmica não-linear e caos. Em especial, podemos citar o trabalho do ecologista Robert May, que descobriu um comportamento caótico em processos iterativos presentes na biologia, e o trabalho do físico-matemático Mitchell Feigenbaum, que observou, apesar do comportamento complexo do caos, a existência de padrões na maneira com que certos sistemas se tornam caóticos, esse trabalho estabeleceu a base entre o caos e transições de fase. Hoje, sabemos que o comportamento caótico pode ser observado em diversas áreas da ciências: o movimento de Plutão, circuitos eletrônicos e reações químicas são exemplos de sistemas que apresentam tal comportamento.

No presente trabalho, estudaremos mapas unidimensionais, tais mapas são os sistemas mais simples capazes de apresentar comportamento caótico [1]. Podemos definir um mapa como uma função ou regra matemática que possui o seu domínio e imagem no mesmo espaço. De forma genérica, podemos escrever a equação de recorrência:

$$x_{n+1} = f(x_n) , \tag{1}$$

onde  $x_n$  representa o estado da variável  $x$  e  $f(x_n)$  é a função que governa a evolução do sistema. A órbita do mapa é o conjunto de pontos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde  $x_0$  é o valor inicial da órbita. O estudo de mapas se faz importante uma vez que a abordagem discreta torna a análise mais simples sem perder as propriedades do comportamento caótico.

Também estudaremos gráficos de recorrência, que são ferramentas de análise de sistemas dinâmicos, inclusive não-lineares e caóticos. Jean-Pierre Eckmann, físico-matemático suíço, introduziu os gráficos de recorrência em 1987, para visualizar recorrências em sistemas dinâmicos, uma vez que essas são uma propriedade de sistemas não-lineares e caóticos [6]. A recorrência de estados, no sentido que estados são próximos no espaço de fase após certo tempo, surge em processos naturais e foi introduzida por Poincaré em 1890. O estudo da recorrência sofreu um grande desenvolvimento com os avanços tecnológicos, uma vez que esse depende em grande parte de métodos numéricos [6].

Optamos por estruturar este trabalho em dois capítulos, apresentando os mapas unidimensionais e o gráficos de recorrência da seguinte forma:

No Capítulo 1 abordamos os mapas unidimensionais. Na seção 1.1 introduzimos os conceitos de órbitas e pontos fixos por meios de exemplos. Além disso, discutimos a estabilidade dos pontos fixos em um mapa unidimensional e como determinar os mesmos, por meio algébricos e gráficos, como pelo uso de *cobwebs*. *Cobwebs* são ferramentas gráficas capazes de determinar os pontos fixos de um mapa unidimensional. Na seção 1.2 apresentamos o mapa logístico, em um primeiro momento discutimos sobre a estabilidade dos pontos fixos do mapa logístico e em seguida apresentamos o diagrama de bifurcações do mapa, em tal diagrama é possível visualizar a dinâmica do mapa em relação ao parâmetro  $r$ . Ainda na seção 1.2, discutimos o mecanismo de duplicação de período, responsável pelo surgimento do comportamento caótico no mapa logístico [5], as janelas periódicas presentes no diagrama de bifurcações do mapa e apresentamos o expoente de Lyapunov, tal expoente é utilizado para determinar a sensibilidade às condições iniciais, característica de sistemas dinâmicos caóticos. Na seção 1.3 apresentamos um exemplo de aplicação do mapa logístico, onde vemos que a dinâmica de um pêndulo forçado e amortecido pode apresentar características vistas no mapa logístico para determinados valores dos parâmetros envolvidos em sua equação de movimento.

O Capítulo 2 foi dedicado a apresentação dos estudos dos gráficos de recorrência, uma ferramenta numérica que explora o fato de sistemas dinâmicos apresentarem recorrência. Na seção 2.1 introduzimos os gráficos de recorrência e em seguida discutimos a importância do parâmetro  $\varepsilon$ . Esse parâmetro, também conhecido por *threshold* é responsável pela qualidade do gráfico de recorrência, uma vez que as estruturas nos gráficos podem variar para diferentes valores de  $\varepsilon$  [6]. Além disso, discutimos as estruturas formadas nos gráficos de recorrência e apresentamos algumas medidas de complexidade. Por meio das medidas de complexidade é possível analisar quantitativamente as estruturas formadas nos gráficos de recorrência, permitindo identificar estados laminares e transições de estado [7]. Na seção 2.2, aplicamos a análise quantitativa de recorrência ao mapa logístico e discutimos os resultados comparando-os com os obtidos no capítulo anterior.

A última parte do trabalho é reservada às conclusões.

# Capítulo 1

## Mapas unidimensionais

Mapas unidimensionais são os sistemas dinâmicos mais simples capazes de apresentar comportamento caótico [1]. Um sistema dinâmico consiste em um conjunto de possíveis estados, que juntamente com uma regra, determina o presente estado em termos dos estados anteriores [4]. Se a regra é aplicada de forma discreta, chamamos o sistema discreto de mapa, que pode ser escrito como

$$x_{n+1} = f(x_n) , \quad (1.1)$$

sendo que  $x_{n+1}$  representa o próximo estado,  $x_n$  o estado atual e  $f(x_n)$  é a regra, ou função que governa a evolução do sistema. Devido a sua simplicidade, os mapas oferecem diversas vantagens em relação a equações diferenciais, a partir deles podemos estudar a sensibilidade às condições iniciais, evolução de informação e outras propriedades que ajudam a compreensão do comportamento caótico [8]. Ao longo deste capítulo, estudaremos mapas unidimensionais. Analisaremos as propriedades dos mapas que são encontradas em sistemas caóticos e ao final do capítulo apresentamos as aplicações estudadas sobre à dinâmica de um pêndulo.

### 1.1 Órbitas e Pontos fixos

Mapas envolvem iteração, ou seja, calculamos o valor de uma função  $f(x_n)$  para um dado  $x_n$ , e então usamos o resultado para calcular novamente  $f(x_n)$ . Por exemplo, se apertarmos o botão “cos” de uma calculadora para um dado  $x_0$  repetidamente, estaremos executando uma iteração, que pode ser escrita como o seguinte mapa

$$x_{n+1} = \cos(x_n). \quad (1.2)$$

que é um exemplo de mapa unidimensional, pois os pontos  $x_n$  pertencem ao espaço unidimensional dos números reais. A órbita desse mapa é a sequência  $x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0)$ . Podemos representar a órbita do mapa (1.1) graficamente, se tomarmos  $x_0 = 0, 2$ , temos o resultado da Figura 1.1

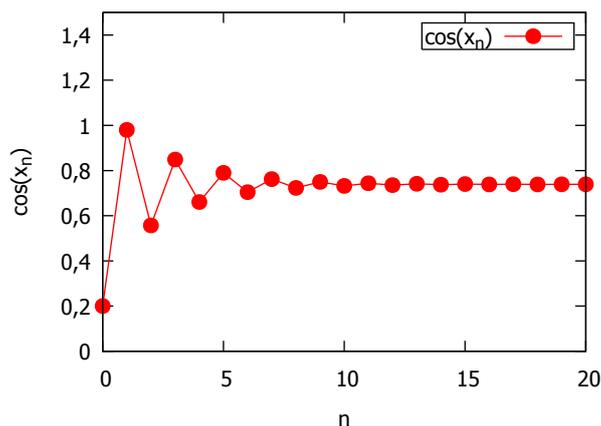


Figura 1.1: Representação da órbita do mapa  $x_n = \cos(x_n)$  para  $x_0 = 0, 2$ .

Na Figura 1.1, os resultados de cada iteração são representados pelos pontos vermelhos, enquanto a linha que os conecta é apenas ilustrativa. Vemos que após doze iterações, os valores tendem assintoticamente para um valor fixo ao redor de 0,7. Esse comportamento pode ser explicado se introduzirmos o conceito de ponto fixo. Um ponto fixo  $x_n = x^*$  satisfaz a seguinte propriedade:

$$f(x^*) = x^*. \quad (1.3)$$

Logo, se o valor de entrada da iteração for um ponto fixo  $x^*$  então a saída também será o ponto fixo  $x^*$ . Podemos determinar o ponto fixo de um mapa analiticamente e determinar a estabilidade do mesmo. Para isso, vamos considerar uma órbita próxima a  $x^*$  dada por

$$x_n = x^* + \eta_n, \quad (1.4)$$

sendo  $\eta_n$  a diferença infinitesimal entre um ponto da órbita  $x_n$  e o ponto fixo  $x^*$ . Podemos escrever

$$x_{n+1} = x^* + \eta_{n+1} = f(x^* + \eta_n) \quad (1.5)$$

e expandir o termo  $f(x^* + \eta_n)$  em série de Taylor, uma vez que o termo  $\eta_n$  é muito pequeno, levando a

$$f(x^* + \eta_n) \approx f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \quad (1.6)$$

Substituindo esse resultado na equação (1.5), temos

$$x^* + \eta_{n+1} \approx f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \quad (1.7)$$

Mas, pela equação (1.3), temos que  $f(x^*) = x^*$ , então,

$$\eta_{n+1} \approx f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \quad (1.8)$$

Negligenciando os termos quadráticos da expansão, obtemos o mapa que descreve como a diferença  $\eta$  evolui a cada iteração,

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n. \quad (1.9)$$

Uma vez que  $\eta_0$  pode ser escolhido, o que determina se a distância  $\eta$  aumenta ou diminui após  $n$  iterações é o autovalor, no caso o fator  $f'(x^*)$ , que chamaremos de  $\lambda$ . Sendo assim, se  $|\lambda| < 1$ , então  $\eta_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e o ponto fixo  $x^*$  é linearmente estável. Se  $|\lambda| > 1$ , então  $\eta_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e o ponto  $x^*$  é linearmente instável. Ainda que essas conclusões sejam baseados no mapa linear (1.9), elas são válidas para mapas não-lineares [3]. Porém, não podemos concluir nada sobre o caso  $|\lambda| = 1$ , nesse caso os termos quadráticos determinam a estabilidade do ponto fixo.

### 1.1.1 Cobwebs

Podemos analisar os pontos fixos de um mapa utilizando a ferramenta gráfica conhecida como *cobweb*. Uma *cobweb* é uma representação gráfica da órbita de um mapa, que consiste em um gráfico da função  $f$  do mapa com a linha diagonal  $y = x$  [4]. Os pontos fixos do mapa em questão estão localizados nas intersecções de  $f$  com a linha  $y = x$ . Para ilustrar o mecanismo da *cobweb*, vamos considerar o mapa  $x_{n+1} = 2x_n$ , como ilustrado na Figura 1.2.

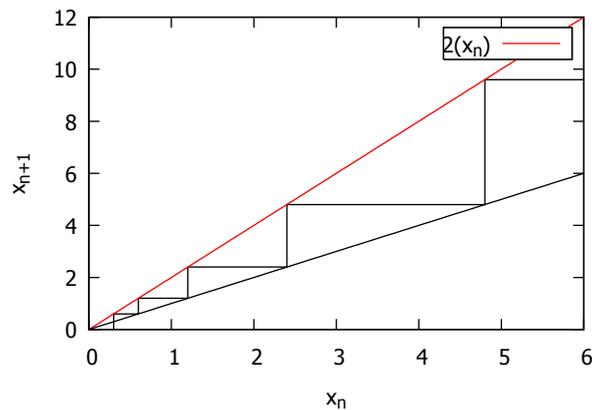


Figura 1.2: *Cobweb* correspondente ao mapa  $x_{n+1} = 2x_n$  para  $x_0 = 0,3$ .

Na Figura 1.2, dada uma condição inicial  $x_0$ , foi traçada uma linha vertical até que mesma tocasse o gráfico de  $f$  (linha em vermelho), o valor de  $y$  nessa altura é igual o valor de  $x_1$ . O próximo passo foi traçar uma linha horizontal da altura  $x_1$  até a linha  $y = x$ , e então traçamos uma linha vertical a partir desse ponto até a o gráfico de  $f$  para obter  $x_2$ . Esse processo pode ser repetido  $n$  vezes para obter  $n$  pontos da órbita de um mapa. Vimos anteriormente na Figura 1.1 que o mapa  $x_{n+1} = \cos(x_n)$  tende a um valor próximo de  $0,7$  quando  $x \rightarrow \infty$ . Se fizermos essa operação em uma calculadora, repetindo a operação  $\cos$ , obteremos o valor  $0,739\dots$ . Esse número é a solução da equação transcendental  $x = \cos(x)$  [3] e vem a ser o ponto fixo do mapa (1.2), como podemos ver com clareza na *cobweb* do mapa na Figura 1.3:

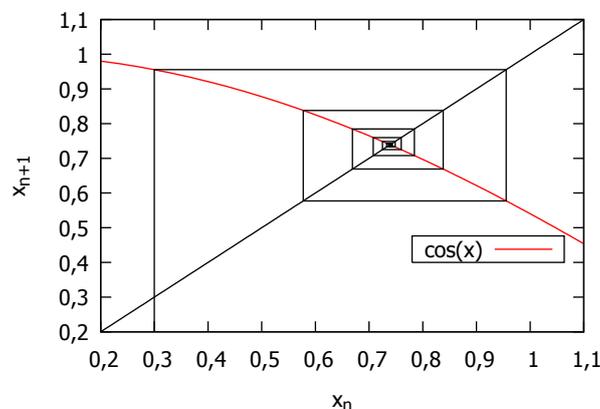


Figura 1.3: *Cobweb* correspondente ao mapa  $x_{n+1} = \cos(x_n)$  para  $x_0 = 0,3$ .

## 1.2 Mapa Logístico

O estudo do mapa logístico foi proposto pelo físico teórico e ecologista Robert May, em 1976, com o objetivo de mostrar que até mesmo mapas não-lineares simples são capazes de apresentar uma dinâmica complexa [3]. O mapa logístico é dado pela equação

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) , \quad (1.10)$$

que é análoga a equação diferencial que descreve o crescimento logístico, proposta por P. F. Verhulst em 1845 [8]

$$\frac{d}{dt}x = rx(1 - x) . \quad (1.11)$$

O mapa logístico (1.10) pode ser interpretado como um modelo ecológico das variações de uma população de insetos. Assumindo condições constantes todos os anos, como clima, predação, etc., podemos dizer que a população no ano  $n$  determinará a população no ano  $n + 1$  [1]. Na análise do mapa logístico, o valor de  $x$  fica limitado ao intervalo  $0 \leq x \leq 1$  quando parâmetro  $r$  está no intervalo  $0 \leq r \leq 4$ . A seguir, temos o gráfico do mapa logístico (1.10) para algumas possibilidades do parâmetro  $r$ .

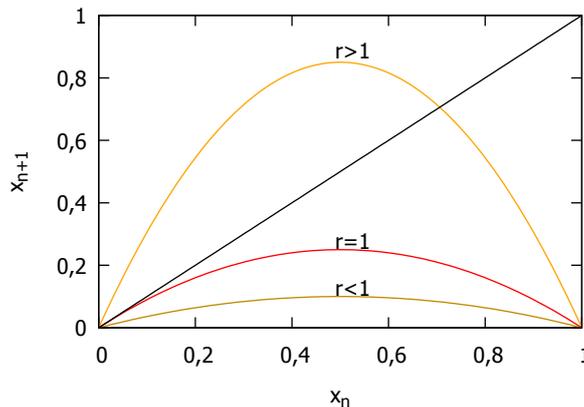


Figura 1.4: Gráficos do mapa logístico para diferentes valores de  $r$ .

Como vemos na Figura 1.4, o comportamento do mapa depende diretamente de  $r$ . Quando o parâmetro  $r$  assume valores menores ou iguais a um, o mapa possui apenas um ponto fixo, que é a origem, uma vez que esse é o único ponto que intersecta a reta  $y = x$ . O caso onde  $r$  é maior do que um, outro ponto intersecta a reta  $y = x$ , temos então dois pontos fixos. Lembrando que para pontos fixos temos  $f(x^*) = x^*$ , podemos encontrar o segundo ponto fixo do mapa,

$$x^* = rx^*(1 - x^*) , \quad (1.12)$$

dividindo ambos os lados por  $x^*$

$$1 = r(1 - x^*) , \quad (1.13)$$

e resolvendo para  $x^*$

$$x^* = 1 - \frac{1}{r} . \quad (1.14)$$

A estabilidade dos pontos fixos é determinada pelo multiplicador  $\lambda$ , que no caso do mapa logístico é dado por  $f'(x^*) = r - 2rx^*$ . Para o ponto fixo  $x^* = 0$  temos que,

$$\lambda = r , \quad (1.15)$$

e então, como definido na seção anterior, o ponto  $x^* = 0$  é estável quando  $r < 1$  e instável quando  $r > 1$ . Para o ponto fixo  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ , temos

$$\lambda = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r, \quad (1.16)$$

a estabilidade desse ponto é limitada ao intervalo  $-1 < 2 - r < 1$ , ou seja,  $1 < r < 3$ . Para qualquer  $r > 3$  o ponto é instável. Vamos observar como as órbitas do mapa diferem para diferentes valores de  $r$  na Figura 1.5.

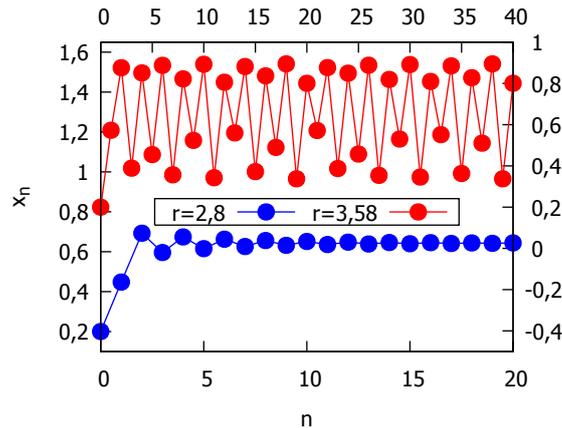


Figura 1.5: Órbitas do mapa logístico para diferentes valores de  $r$ . Os eixos inferior e esquerdo são referentes ao gráfico de  $r = 2,8$ , enquanto os eixos superior e direito são referentes ao gráfico de  $r = 3,58$ .

Na Figura 1.5 vemos que as órbitas são completamente diferentes para diferentes valores de  $r$ . Para o caso  $r = 2,8$  (curva azul na Figura 1.5) vemos que o mapa se comporta de maneira esperada, e após 20 iterações é possível identificar que o sistema se torna estável. Porém, quando  $r = 3,58$  (curva vermelha na Figura 1.5) o mapa não apresenta equilíbrio e assume diversos valores ao longo das iterações. Dessa forma, não podemos dizer nada sobre  $x_{n+1}$  se não conhecermos  $x_n$ . Podemos ainda ver como o mapa logístico evolui para diferentes valores de  $r$  por meio de *cobwebs*, como nas figuras 1.6, 1.7 e 1.8.

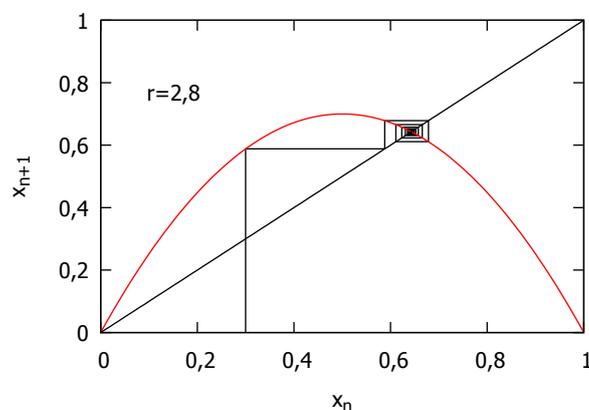


Figura 1.6: *Cobweb* do mapa logístico para  $r = 2,8$  e  $x_0 = 0,3$ .

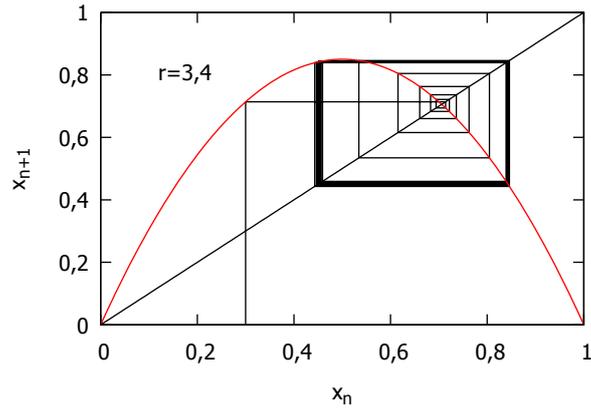


Figura 1.7: *Cobweb* do mapa logístico para  $r = 3,4$  e  $x_0 = 0,3$ .

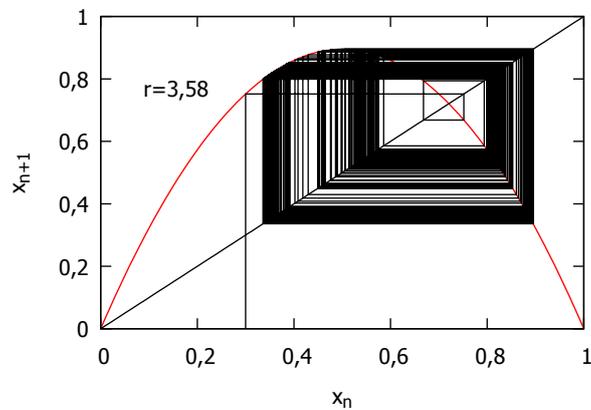


Figura 1.8: *Cobweb* do mapa logístico para  $r = 3,58$  e  $x_0 = 0,3$ .

Na Figura 1.6 vemos que a *cobweb* evolui para o ponto fixo, como esperado. Para  $r = 3,4$ , vemos na Figura 1.7 a formação de um retângulo na *cobweb*, o que indica um comportamento periódico. Finalmente, na Figura 1.8 vemos que a *cobweb* se comporta de maneira diferente e ocupa grande parte do gráfico, isso porque para  $r = 3,58$  o sistema assume diversos valores, como visto na Figura 1.5. Para melhor analisarmos como o mapa logístico se comporta conforme o parâmetro  $r$  é variado, foi confeccionado um diagrama de bifurcações do mapa, como visto na Figura 1.9:

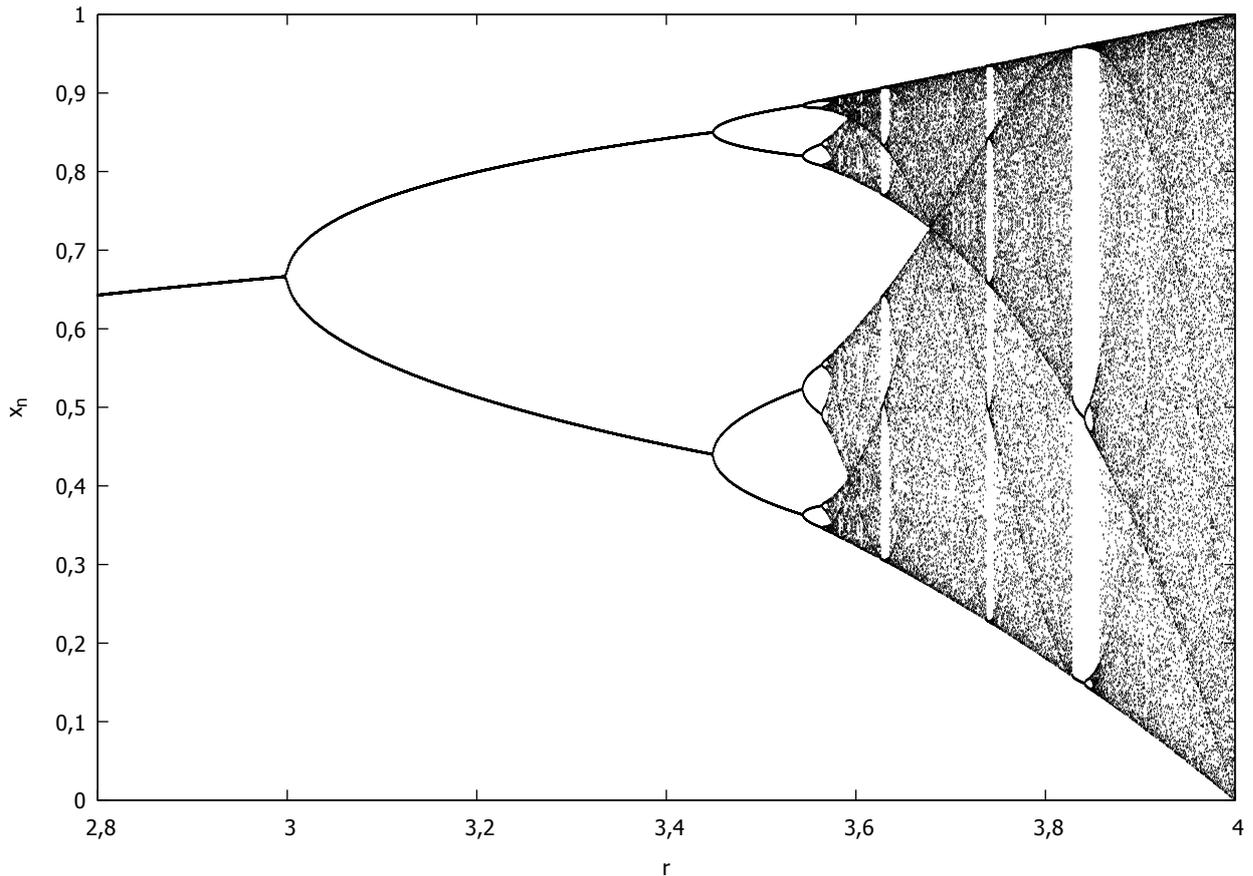


Figura 1.9: Diagrama de bifurcações do mapa logístico.

O diagrama de bifurcações na Figura 1.9 foi confeccionado a partir de dados gerados por um programa escrito em linguagem C++ disponível no Apêndice A. Nesse programa, o parâmetro  $r$  foi variado de  $r = 2,8$  até  $r = 4$ , primeiramente, para cada valor de  $r$ , iteramos o mapa logístico 1000 vezes, a fim de eliminar qualquer comportamento transitente. Após isso, iteramos o mapa mais 1000 vezes salvando os resultados de cada iteração. Vemos na Figura 1.6, que de 2,8 até 3, o sistema tende ao ponto fixo  $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ , como visto anteriormente. No ponto  $r = 3$  temos uma bifurcação do tipo *pitchfork*, que literalmente quer dizer forquilha, uma vez que graficamente essa bifurcação lembra uma forquilha. Nesse ponto o mapa passa a oscilar em dois valores, ou seja, ocorre uma duplicação de período. Uma característica do diagrama de bifurcações do mapa logístico, é seu comportamento fractal, isso é, vemos uma miniatura do diagrama se ampliarmos uma determinada região [3], como mostrado na sequência das Figuras 1.10-1.12.

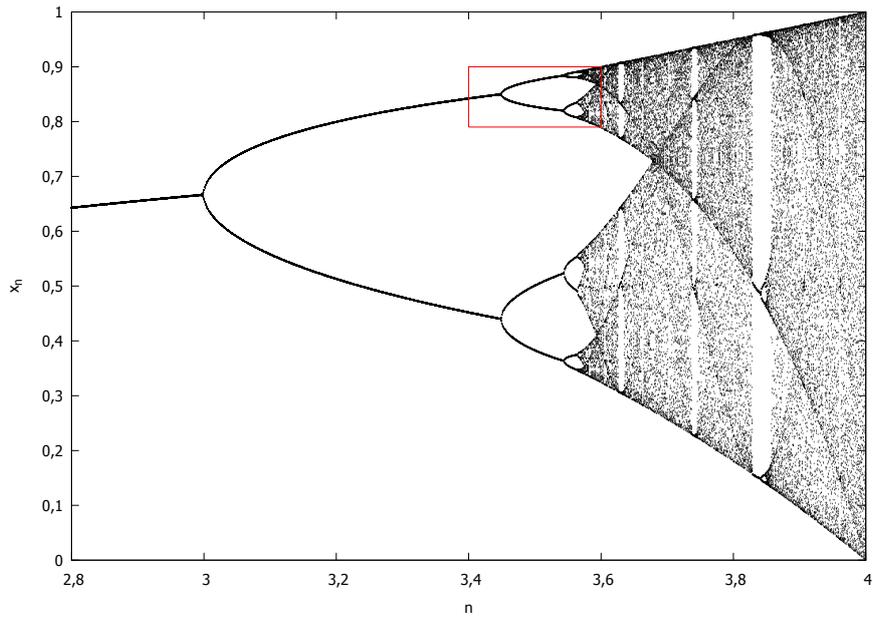


Figura 1.11: Diagrama de bifurcações do mapa logístico.

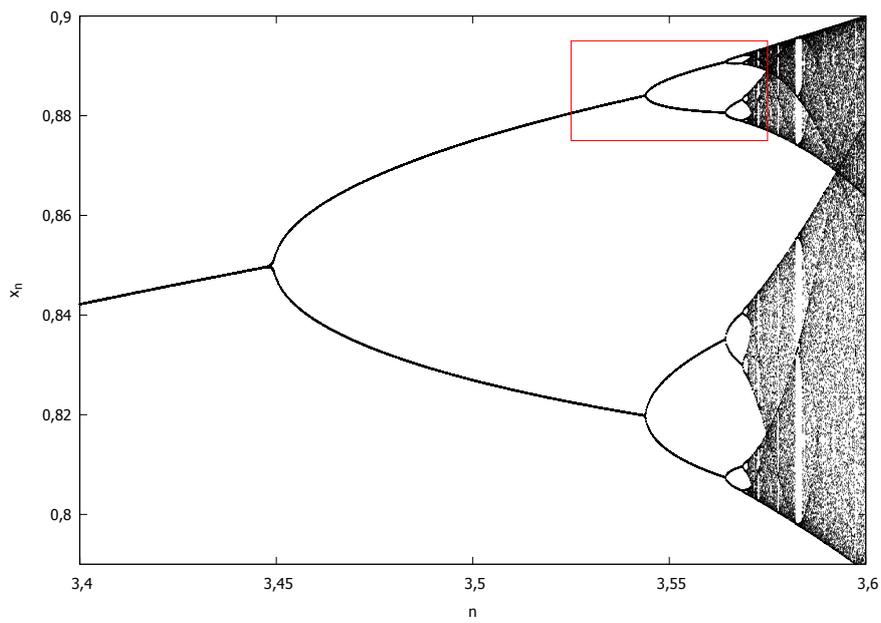


Figura 1.10: Diagrama de bifurcações do mapa logístico.

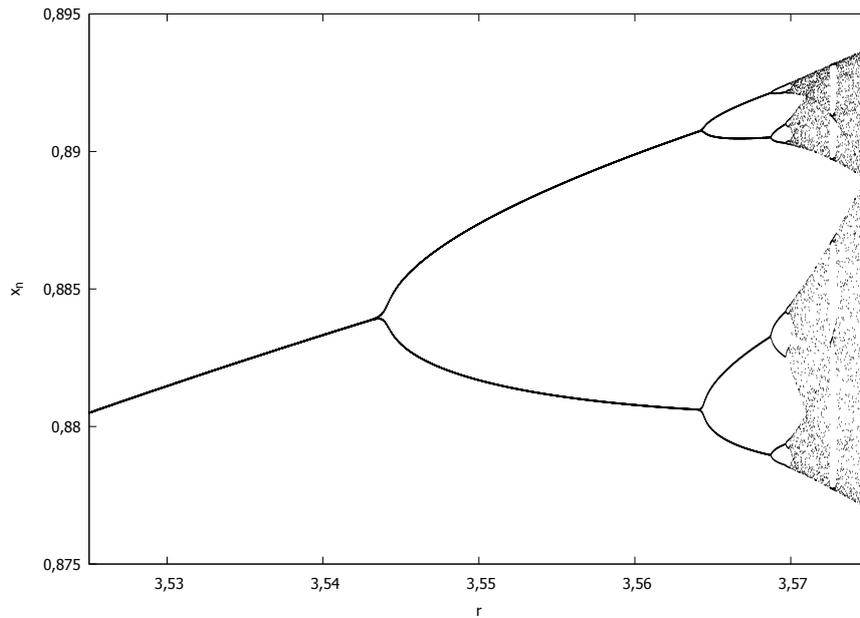


Figura 1.12: Diagrama de bifurcações do mapa logístico.

Na Figura 1.10 temos o diagrama de bifurcações do mapa logístico, vemos a área ampliada marcada pelo retângulo vermelho, o resultado é visto na Figura 1.11, onde vemos uma série de bifurcações semelhantes à da Figura 1.10. Ainda, o resultado da ampliação na Figura 1.11 é visto na Figura 1.12, onde vemos o mesmo comportamento das figuras anteriores.

### 1.2.1 Duplicação de período

Podemos observar na Figura 1.9 que no ponto  $r = 3$  ocorre uma bifurcação *pitchfork*, e então o mapa passa a oscilar entre dois valores a cada iteração [8], por exemplo, para  $r = 3,2$ , já para  $r = 3,5$  o mapa oscila entre quatro valores. Vemos na Figura 1.13 esse comportamento oscilatório.

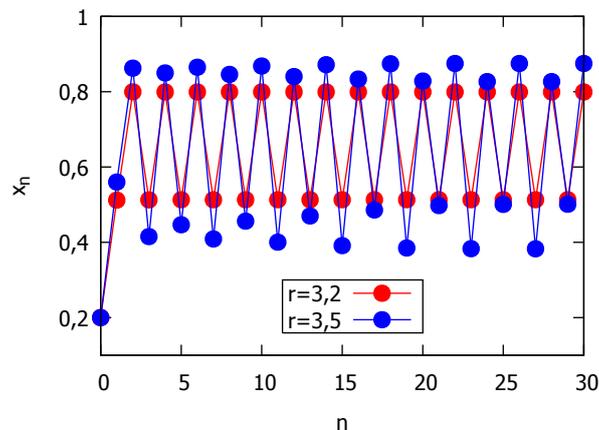


Figura 1.13: Representações de órbitas do mapa logístico para  $r = 3,2$  (vermelho) e  $r = 3,5$  (azul).

Para esse caso, dizemos que o mapa logístico possui periodicidade 2 quando  $r = 3,2$ .

Podemos observar ainda, que quando  $r = 3,44$ , outras duas bifurcações *pitchfork* ocorrem, e então o mapa assume uma periodicidade 4, variando entre 4 valores diferentes, como podemos ver na Figura 1.9 com  $r = 3,5$ . Note que conforme  $r$  cresce, novas bifurcações surgem até que para  $r = 3,569946\dots$  o mapa se torna caótico [3], esse ponto também é chamado de ponto de bifurcação infinito. Esse efeito é conhecido como *period-doubling* e é um mecanismo que leva um sistema dinâmico ao caos. Ainda, esse mecanismo pode ser caracterizado por constantes universais que não dependem de certa forma do mapa em questão [8]. Uma delas é a constante de Feigenbaum, que recebe esse nome em homenagem à Mitchell Feigenbaum, um físico-matemático que a descobriu em 1975 [9]. A constante de Feigenbaum é uma propriedade universal de *period-doubling* em mapas com um máximo quadrático, como o mapa logístico. Se a primeira bifurcação ocorre em  $r_1$ , a segunda em  $r_2$  e assim por diante, a constante de Feigenbaum é escrita como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = \delta = 4,66920160910. \quad (1.17)$$

Na Figura 1.14 apresenta-se uma representação gráfica da constante de Feigenbaum:

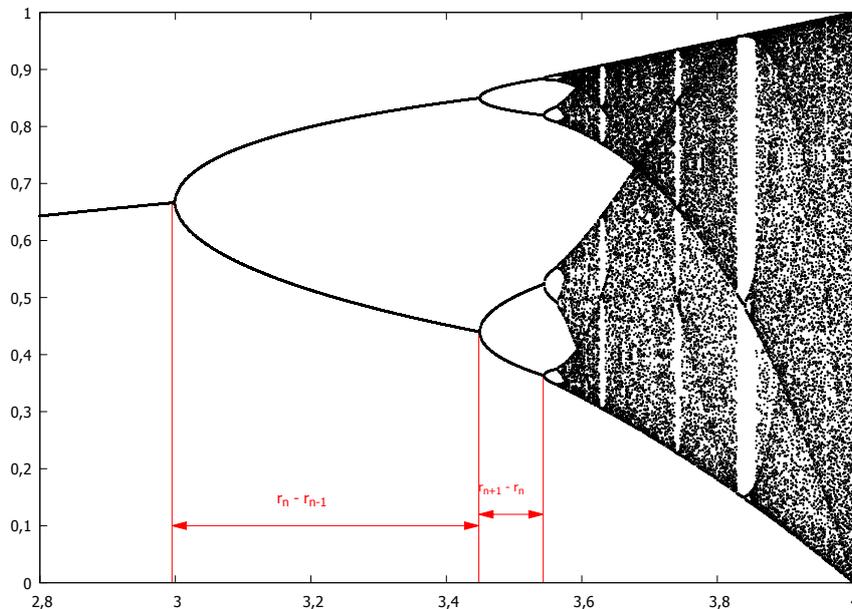


Figura 1.14: A constante de Feigenbaum é a razão entre os espaços entre as bifurcações de um mapa.

## 1.2.2 Expoente de Lyapunov

Em 1892, Aleksandr Lyapunov (1857-1918), um grande matemático russo, defendeu sua tese de doutorado *The general problem of the stability of motion*, dentre vários conceitos desenvolvidos por ele em sua tese, estava o número característico de uma função no tempo, hoje conhecido por expoente de Lyapunov. O expoente de Lyapunov é utilizado para caracterizar a evolução de um sistema dinâmico, em especial, a sensibilidade as condições iniciais, que é uma das características do comportamento caótico [8]. Considere uma condição inicial  $x_0$  e outra muito próxima, separada por uma distância infinitesimal  $\delta_0$ ,  $x_0 + \delta_0$ . Se um sistema, no presente caso um mapa  $f^n(x)$ , evolui a partir dessas condições iniciais, vemos que a distância entre as duas órbitas após  $n$  iterações é dada pela

seguinte expressão [3],

$$|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{\Lambda n}, \quad (1.18)$$

sendo  $\Lambda$  o expoente de Lyapunov. Podemos ainda, escrever  $\delta_n$  como

$$|\delta_n| = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0) \quad (1.19)$$

assim, igualando as equações (1.18) e (1.19), temos

$$|\delta_0|e^{\Lambda n} \approx f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0). \quad (1.20)$$

Aplicando a função  $\ln$  na equação (1.20) e resolvendo para  $\lambda$ , temos

$$\Lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (1.21)$$

Como consideramos a distância  $\delta_0$  infinitesimal, o logaritmando da equação (1.21) pode ser escrito como a derivada do mapa  $f^n(x)$ , calculada no ponto  $x_0$

$$\Lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{d}{dx} f^n(x_0) \right|. \quad (1.22)$$

Utilizando a regra da cadeia, podemos escrever a derivada de  $f^n(x_0)$  como

$$\frac{d}{dx} f^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i), \quad (1.23)$$

uma vez que  $f^n$  é a  $n$ ésima iteração do mapa em questão, ou seja,  $f^n(x_0) = f(f(f(\dots(f(x_0)))))$ . Substituindo a equação (1.23) na equação (1.21), temos

$$\Lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|. \quad (1.24)$$

Lembrando da propriedade logarítmica

$$\log(a.b) = \log(a) + \log(b), \quad (1.25)$$

podemos reescrever o logaritmo na equação (1.24) como

$$\Lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (1.26)$$

O expoente de Lyapunov fica definido quando tomamos o limite de  $n \rightarrow \infty$  [3],

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right). \quad (1.27)$$

Portanto, o expoente de Lyapunov nos mostra como a distância entre os pontos das órbitas evoluem. Temos três possíveis valores significativos para o expoente de Lyapunov:

- $\Lambda < 0$ , o ponto em questão é fixo ou periódico;
- $\Lambda = 0$ , ocorre uma bifurcação no ponto;

- $\Lambda > 0$ , o ponto é instável e caótico.

Na Figura 1.15, temos uma representação do expoente de Lyapunov para o mapa logístico:

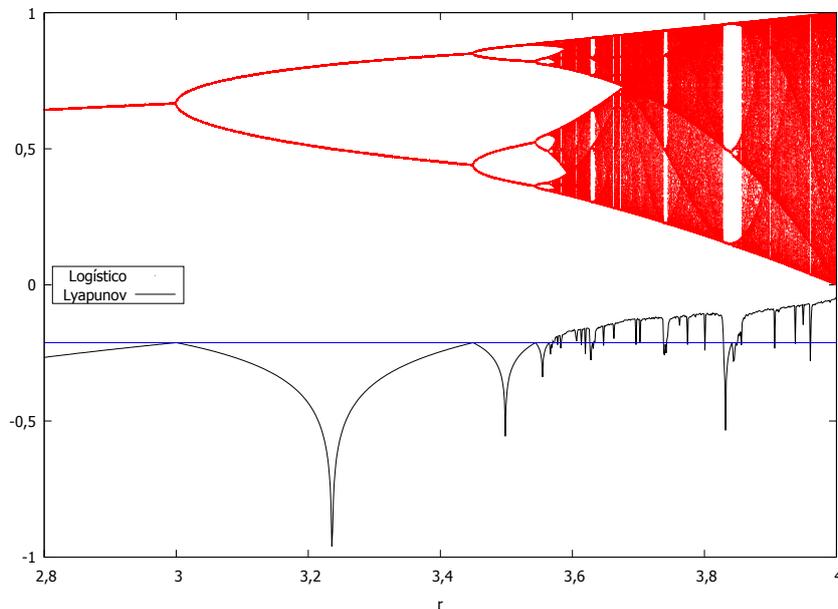


Figura 1.15: Diagrama de bifurcações e Expoente de Lyapunov do mapa logístico.

No gráfico da Figura 1.15, vemos como o expoente de Lyapunov varia em função do parâmetro  $r$ , juntamente com o diagrama de bifurcações do mapa logístico. Os dados para o gráfico do expoente de Lyapunov foram obtidos a partir de um programa escrito em linguagem C++. Vemos na Figura 1.15 que os valores do expoente de Lyapunov estão de acordo com a análise feita anteriormente. Em especial, podemos verificar que a região onde  $r > 3,5969946\dots$ , de comportamento instável, tem caráter caótico. Porém, vemos que a região caótica é interrompida por janelas de periodicidade, em tais regiões vemos que o expoente de Lyapunov se torna negativo.

### 1.2.3 Janela de periodicidade

Como visto, as regiões de comportamento caótico são interrompidas por janelas de periodicidade no diagrama de bifurcações do mapa logístico. A maior delas ocorre nas proximidades de  $r \approx 3,83$ , como vemos na Figura 1.16.

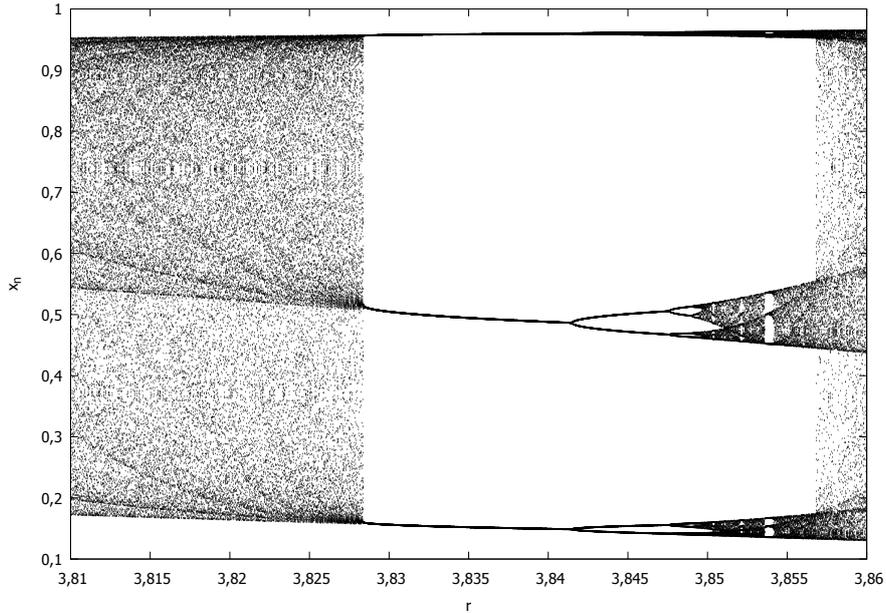


Figura 1.16: Janela periódica do mapa logístico ao redor de  $r = 3,83$ .

O mecanismo responsável pelo surgimento dessa janela periódica está ligado ao mapa da terceira iteração. Se  $f(x) = rx(1-x)$ , então o mapa logístico é dado por  $x_{n+1} = f(x_n)$ , e  $x_{n+2} = f(f(x_n))$ , ou  $x_{n+2} = f^2(x_n)$ , e de forma análoga  $x_{n+3} = f^3(x_n)$ . Como visto anteriormente, em uma órbita de período 3, um ponto se repete a cada três iterações, e por definição, os pontos que satisfazem  $x^* = f^3(x^*)$  são pontos fixos do mapa da terceira iteração [3]. Para encontrarmos tais pontos fixos, podemos utilizar o gráfico de  $f^3(x)$ , uma vez que não podemos encontrar as raízes de  $f^3(x)$  explicitamente.

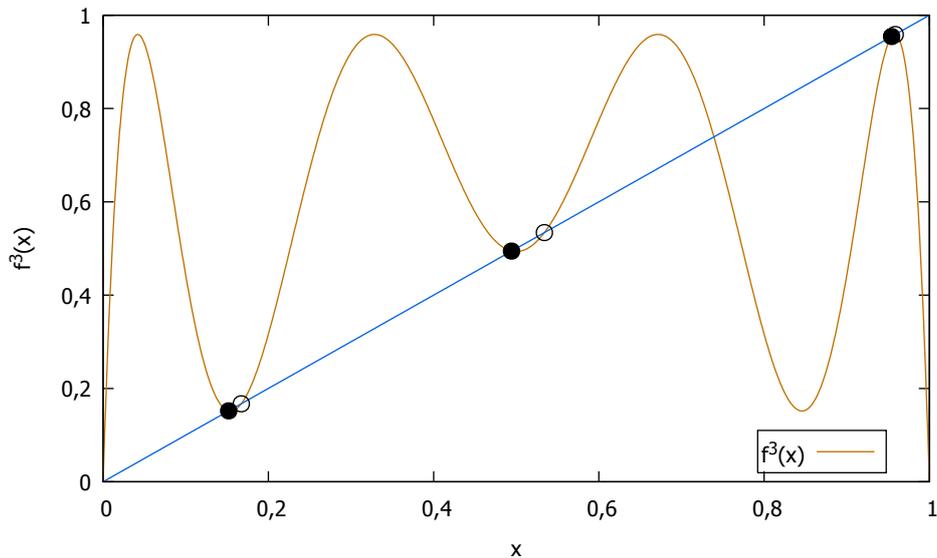


Figura 1.17: Gráfico de  $f^3(x)$  para  $r = 3,835$ .

As intersecções entre  $f^3(x)$  e reta  $f(x) = x$  apresentadas na Figura 1.17 correspondem a soluções de  $f^3(x) = x$ , mas apenas seis são solução de período 3, estas são marcadas por pontos na Figura 1.17. Os pontos fechados correspondem à períodos estáveis, ou

seja, órbitas que oscilam em três valores. A transição que ocorre no começo da janela vista na Figura 1.16 é devida a esses três pontos, vemos que o diagrama de bifurcações sai de uma região caótica para uma de periodicidade definida, esse tipo de transição é chamada de *tangent bifurcation*, ou seja, bifurcação tangente. Já os pontos abertos são pontos instáveis. Note que a inclinação de  $f^3(x)$  é negativa nos pontos estáveis e positiva nos pontos instáveis. O sistema permanece no período 3 até o parâmetro  $r$  atingir um valor próximo de 3,842, nesse ponto vemos o mecanismo de duplicação de período, que continua até o surgimento de bandas caóticas em  $r \approx 3,857$ . A seguir, apresentaremos uma aplicação desta teoria ao estudo do pêndulo forçado e amortecido.

### 1.3 Pêndulo forçado e amortecido

A não-linearidade embora não seja garantia de caos, é essência para que haja. Por exemplo, a equação de movimento para o pêndulo simples, de massa  $m$  e comprimento  $L$ , é dada por

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL \text{sen}(\phi) \quad (1.28)$$

em que  $\phi$  é o ângulo que denota a amplitude do movimento. Note que não consideramos a aproximação  $\text{sen}(\phi) \approx \phi$  e mesmo para grandes amplitudes o pêndulo simples nunca apresenta comportamento caótico [10]. Agora, se adicionarmos a força de amortecimento  $-bv = -bL\dot{\phi}$  e uma força de impulso  $F(t)$ , temos a equação de movimento do pêndulo forçado e amortecido:

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL \text{sen}(\phi) - bL^2\dot{\phi} + LF(t) . \quad (1.29)$$

Vamos assumir que a força de impulso  $F(t)$  é senoidal e dada por  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ . Onde  $\omega$  é a frequência do impulso e  $F_0$  a amplitude do impulso. Dessa forma, podemos reescrever a equação (1.29) como

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{m}\dot{\phi} + \frac{g}{L} \text{sen}(\phi) = \frac{F_0}{mL} \cos(\omega t) . \quad (1.30)$$

Introduzimos agora, a constante de amortecimento  $\beta$ , de forma que

$$\frac{b}{m} = 2\beta , \quad (1.31)$$

em que  $\beta$  é proporcional à força de amortecimento. Ainda, o coeficiente  $\frac{g}{L}$  é igual a  $\omega_0^2$ ,

$$\frac{g}{L} = \omega_0^2 , \quad (1.32)$$

sendo  $\omega_0$  a frequência natural do pêndulo. Por último, vamos introduzir o parâmetro adimensional  $\gamma$ , tal que,

$$\gamma = \frac{F_0}{mL\omega_0^2} = \frac{F_0}{mg} , \quad (1.33)$$

ou seja,  $\gamma$  é a razão entre a amplitude de impulso  $F_0$  e o peso  $mg$ . O parâmetro  $\gamma$  mede o poder da força de impulso. Se  $\gamma < 1$ , a força de impulso é menor que a força peso e pouco afeta o movimento do pêndulo. Por outro lado, se  $\gamma \geq 1$ , a força de impulso é maior que o peso e induz movimentos significativos no pêndulo. Substituindo os parâmetros apresentados, a equação de movimento do pêndulo fica

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \text{sen}(\phi) = \gamma\omega_0^2 \cos(\omega t) . \quad (1.34)$$

Resolvendo numericamente a equação (1.33), obtemos a solução  $\phi(t)$  e podemos verificar como a dinâmica do pêndulo varia de acordo com o parâmetro  $\gamma$ . A melhor forma de observar essa variação é por meio de um diagrama de bifurcações. Com a solução de  $\phi(t)$  em mãos, consideramos apenas a dinâmica para valores de  $t$  tais que não existam transientes, nesse caso, valores de  $t = 501$  até  $t = 600$ . Então, para cada valor de  $\gamma$ , os pontos  $\phi(501), \phi(502), \dots, \phi(600)$  correspondentes são calculados, formando o diagrama de bifurcação que vemos na Figura 1.18.

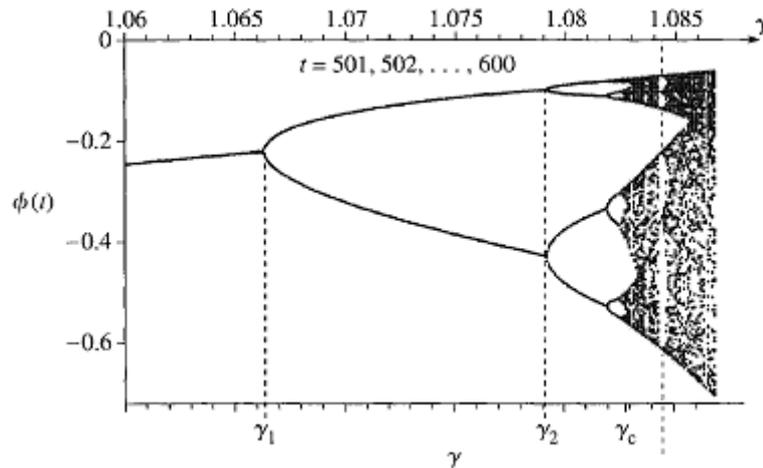


Figura 1.18: Diagrama de bifurcações de  $\phi$  em função de  $\gamma$ . Fonte: J. R. Taylor, *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.

O diagrama de bifurcações apresentado na Figura 1.18, retirado de [10] é semelhante ao da Figura 1.9, o parâmetro  $\gamma$  foi variado de 1,06 até 1,087. Vemos que de 1,06 até 1,6603 o diagrama apresenta uma única curva, o que fisicamente significa que para esse intervalo o sistema possui periodicidade 1 e, logo, os valores se repetem. Após esse valor, vemos a duplicação de período, assim como no mapa logístico e, então, para  $\gamma = 1,0829$  vemos que o sistema assume diversos valores de forma caótica [10]. No próximo capítulo apresentamos o estudo do mapa logístico por meio dos gráficos de recorrência.

# Capítulo 2

## Gráficos de Recorrência

Diversos sistemas, desde do movimento de galáxias até a sinapse dos neurônios possuem algo em comum: eles se comportam de uma maneira determinística, no sentido em que podemos prever sua evolução uma vez que sabemos suas condições iniciais [6]. Entretanto, caos pode surgir em sistemas, como na dinâmica populacional ou em um fluido turbulento, e em outros sistemas [11]. Tais sistemas, mesmo que determinísticos são sensíveis às condições iniciais, como visto no capítulo anterior, o que torna a predição a longo termo muito complicada. Ainda assim, predições de curto termo são possíveis [6]. Uma característica presente em diversos sistemas dinâmicos, incluindo caóticos, é a recorrência, ou seja, os sistemas voltam a estados iguais à estados anteriores. O conceito de recorrência em sistemas dinâmicos foi proposto por Henri Poincaré, no fim do século XIX. No entanto, o estudo da recorrência, que depende em grande parte de métodos numéricos, se desenvolveu graças aos avanços tecnológicos na área da computação. Nesse contexto, Jean-Pierre Eckmann introduziu em 1987 os gráficos de recorrência com o objetivo de analisar sistemas dinâmicos por meio de suas recorrências [6]. Sendo  $[\vec{x}_i]_{i=1}^N$  a trajetória de um sistema em seu espaço de fase, os componentes dos vetores  $\vec{x}_i$  podem ser por exemplo, a posição e velocidade de um pêndulo, logo, a evolução do sistema pode ser descrita por uma série desses vetores, representando uma trajetória. Assim, o gráfico de recorrência é baseado na seguinte matriz de recorrência:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{x}_i \sim \vec{x}_j \\ 0 & \text{se } \vec{x}_i \neq \vec{x}_j \end{cases}$$

onde  $i, j = 1, \dots, N$ , em que  $N$  o número de estados. Ainda,  $x_i \sim x_j$  significa que  $x_i$  é aproximadamente igual a  $x_j$  considerando um erro  $\varepsilon$ , que é conhecido como distância de limiar ou *threshold*. Neste capítulo estudaremos os gráficos de recorrência, apresentando medidas de complexidade e aplicando essa ferramenta ao mapa logístico.

## 2.1 Análise Quantitativa de Recorrência

### 2.1.1 Gráficos de recorrência

A ferramenta utilizada para medir a recorrência de estados em um sistema dinâmico é o gráfico de recorrência [6]. O gráfico de recorrência expressa de forma eficiente as recorrências de um sistema, ele pode ser definido formalmente pela matriz:

$$R_{i,j}(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|), \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

em que  $N$  é o número de pontos  $\vec{x}_i$ ,  $\varepsilon$  é a distância de limiar e  $\Theta$  a função de Heaviside ( $\Theta(x) = 0$  se  $x < 0$ , e  $\Theta(x) = 1$  para  $x > 0$ ). Sendo assim, para os estados na vizinhança  $\varepsilon$  temos:

$$\vec{x}_i \sim \vec{x}_j \iff R_{i,j} . \quad (2.2)$$

O gráfico de recorrência é obtido por meio da matriz dada pela equação (2.1), usando cores diferentes para cada entrada. Se as coordenadas  $(i, j)$  são tais que  $R_{i,j} = 1$ , então é marcado um ponto preto, se  $R_{i,j} = 0$  é marcado um ponto branco. Uma vez que, por definição  $R_{i,i} = 1 \big|_{i=1}^N$ , o gráfico de recorrência sempre possui uma linha diagonal principal preta, a linha de identidade. Ainda, o gráfico de recorrência é simétrico em relação a linha diagonal, ou seja,  $R_{i,j} = R_{j,i}$ .

### 2.1.2 O parâmetro $\varepsilon$

Um parâmetro essencial na confecção do gráfico de recorrência é o limiar  $\varepsilon$ , uma vez que a partir dele analisamos se há ou não recorrência. Se  $\varepsilon$  é muito pequeno, então  $\Theta(x < 0) = 0$  e quase não temos pontos de recorrência, e assim não podemos analisar as estruturas formadas no gráfico de recorrência. Por outro lado, se  $\varepsilon$  é muito grande, então  $\Theta(x > 0) = 1$  e temos muitos pontos nas vizinhanças de outros pontos. O resultado são estruturas diagonais, mais longas e mais espessas no gráfico de recorrência. Devemos levar em conta, que ruídos podem distorcer as estruturas formadas no gráfico de recorrência, mas que para limiares maiores, as estruturas são preservadas [6]. Algumas das regras para determinar o valor de  $\varepsilon$  incluem tomar  $\varepsilon$  de forma que ele não exceda 10 por cento do diâmetro máximo do espaço de fase. Outra sugere escolher  $\varepsilon$  a partir da densidade de pontos de recorrência do gráfico de recorrência. Para processos quasi-periódicos, as estruturas diagonais do gráfico de recorrência podem ser usadas para otimizar o valor do limiar  $\varepsilon$ . Consideramos a densidade de distribuição de pontos de recorrência ao longo das linhas diagonais paralelas a linha de identidade. Dessa densidade, o número de picos significativos  $N_\rho$  é contado. Em seguida, o número médio de vizinhos  $N_n$  que cada ponto possui é calculado. O limiar  $\varepsilon$  é escolhido de forma que  $N_\rho$  é máximo e  $N_n$  se aproxima do valor de  $N_\rho$ . Assim, uma boa escolha para  $\varepsilon$  deve minimizar o parâmetro  $\beta$ :

$$\beta(\varepsilon) = \frac{|N_n(\varepsilon) - N_\rho(\varepsilon)|}{N_n(\varepsilon)} .$$

Existem diversas formas de encontrar um valor adequado para o limiar  $\varepsilon$ , porém a escolha depende do sistema dinâmico considerado.

### 2.1.3 Estruturas nos gráficos de recorrência

Gráficos de recorrência apresentam padrões típicos que estão ligados ao comportamento sistema dinâmico. Padrões de larga escala, são classificados em homogêneo, periódico, *drift* e interrompido.

- Homogêneo: esse padrão surge em gráficos de recorrência referentes a sistemas estacionários, nos quais o tempo de relaxamento é pequeno quando comparado com o tempo que o gráfico de recorrência abrange.
- Periódico e quasi-periódico: esses sistemas apresentam estruturas periódicas no gráfico de recorrência. A complexidade das estruturas depende da frequência do sistema

em questão e mesmo em sistema onde as oscilações não são identificadas facilmente os gráficos de recorrência podem ser úteis.

- *Drift*: esse padrão surge em sistemas com parâmetros que variam lentamente, como sistemas não-estacionários. A característica desse padrão é a intensidade do gráfico de recorrência, que é inversamente proporcional a distância da linha de identidade.
- Interrompido: esse padrão é causado por mudanças abruptas na dinâmica do sistema, o resultado são bandas brancas no gráfico de recorrência. Por meio do gráfico de recorrência é possível identificar os eventos que estão associados a tais mudanças na dinâmica do sistema.

Existem também estruturas específicas em pequena escala nos gráficos de recorrência:

- Pontos de recorrência isolados: podem ocorrer se o estado associado é raro, ou existe por um período curto de tempo ou se oscila fortemente.
- Linhas diagonais: linhas diagonais  $\mathbf{R}_{i+k,j+k} = 1$  ocorrem quando um segmento da trajetória no espaço de fase é quase paralela a outro segmento, para  $l$  unidades de tempo:

$$\vec{x}_i \approx \vec{x}_j, \vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_{i+l-1} \approx \vec{x}_{j+l-1} \quad (2.3)$$

a linha diagonal de largura  $l$  é definida como:

$$(1 - \mathbf{R}_{i-1,j-1})(1 - \mathbf{R}_{i+l,j+l}) \prod_{k=0}^{l-1} \mathbf{R}_{i+k,j+k} = 1 \quad (2.4)$$

O comprimento da linha diagonal é determinado pela duração desse comportamento.

- Linhas verticais: uma linha vertical  $\mathbf{R}_{i,j+k} = 1$  marca um intervalo de tempo no qual um estado não seu altera ou se altera lentamente, tal que:

$$\vec{x}_i \approx \vec{x}_j, \vec{x}_i \approx \vec{x}_{j+1}, \dots, \vec{x}_i \approx \vec{x}_{j+v-1} \quad (2.5)$$

a definição formal da linha vertical é,

$$(1 - \mathbf{R}_{i,j-1})(1 - \mathbf{R}_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} \mathbf{R}_{i,j+k} = 1 \quad (2.6)$$

- Linhas curvas: tais linhas não possuem inclinação constante. A forma de tais linhas depende da relação de tempo local entre trajetórias próximas. Elas podem representar uma mudança no sistema.

## 2.1.4 Medidas de complexidade

Vemos nas seções anteriores as estruturas formadas nos gráficos de recorrência. Para analisar essas estruturas, temos medidas de complexidade, tais medidas são baseadas densidade de recorrência e nas estruturas de linhas dos gráficos de recorrência. Estudos mostram que essa análise quantitativa de recorrência é capaz de identificar pontos de bifurcação, inclusive pontos de transição de caos e ordem [6]. A medida mais simples da análise quantitativa de recorrência é a taxa de recorrência (RR), definida como

$$RR(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{R}_{i,j}(\varepsilon) . \quad (2.7)$$

A taxa de recorrência é a medida de pontos de recorrência no gráfico de recorrência. Note que no limite  $N \rightarrow \infty$ , a taxa de recorrência é a probabilidade de um estado voltar a sua vizinhança dentro do limite  $\varepsilon$ . Temos também, medidas baseadas nas linhas diagonais do gráfico de recorrência, elas são baseadas no histograma  $P(\varepsilon, l)$  de linhas diagonais de comprimento  $l$ , o histograma é definido como

$$P(\varepsilon, l) = \sum_{i,j=1}^N (1 - \mathbf{R}_{i-1,j-1}(\varepsilon))(1 - \mathbf{R}_{i+l,j+l}(\varepsilon)) \prod_{k=0}^{l-1} \mathbf{R}_{i+k,j+k}(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Processos estocásticos e caóticos, resultam diagonais curtas, ou nenhuma diagonal no gráfico de recorrência, por outro lado, processos determinísticos resultam em longas diagonais e poucos pontos de recorrência isolados. Dessa forma, a taxa de pontos de recorrência que formam diagonais, de um comprimento mínimo  $l_{min}$  em relação a todos os pontos de recorrência é dada por

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP(l)}{\sum_{l=1}^N lP(l)}. \quad (2.9)$$

Tal taxa pode ser interpretada como uma medida de predicabilidade do sistema. Para um sistema periódico, temos  $DET = 1$  e para um puramente estocástico temos que  $DET \rightarrow 0$ . Uma linha diagonal de comprimento  $l$  significa que um segmento da trajetória no espaço de fase está mais próximo de outro segmento durante  $l$  unidades de tempo em um tempo diferente. Logo, as diagonais estão relacionadas à divergência de tais segmentos. O comprimento médio das linhas diagonais,

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P(l)} \quad (2.10)$$

é o tempo médio que dois segmentos da trajetória ficam próximos um do outro e pode ser interpretado como o tempo médio de predicabilidade, ainda sobre as linhas diagonais presentes no gráfico de recorrência, temos a medida da maior diagonal,

$$L_{m\acute{a}x} = \max([l_i]_{i=1}^{N_l}) \quad (2.11)$$

e ainda a divergência  $DIV$ ,

$$DIV = \frac{1}{L_{m\acute{a}x}} \quad (2.12)$$

que pode ser utilizada para calcular o maior expoente de Lyapunov do sistema [11]. Podemos também, calcular a entropia de Shannon da frequência de distribuição das linhas diagonais do gráfico,

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln p(l) \quad (2.13)$$

onde  $p(l) = P(l)/\sum_{l=l_{min}}^N P(l)$ . A entropia  $ENTR$  quantifica a complexidade da estrutura determinística do sistema [11]. Temos ainda uma medida que indica transições entre diferentes estados, onde  $RR$  muda mas  $DET$  não, tal medida é definida como  $RATIO$

$$RATIO = \frac{DET}{RR}. \quad (2.14)$$

As medidas apresentadas até agora se baseiam na distribuição das linhas diagonais, existem ainda medidas que se baseiam nas estruturas verticais, como a laminaridade  $LAM$ ,

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N vP_v(l)}{\sum_{v=1}^N vP_v(l)} \quad (2.15)$$

em que  $P_v(l)$  é número de linhas verticais de comprimento  $v$  encontradas no gráfico de recorrência dado pelo histograma

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - \mathbf{R}_{i,j})(1 - \mathbf{R}_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} \mathbf{R}_{i,j+k} . \quad (2.16)$$

Ainda podemos calcular o comprimento médio das linhas verticais,

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N vP(v)}{\sum_{v=v_{min}}^N P(v)} , \quad (2.17)$$

chamado de *trapping time*, que é a estimativa do tempo médio que o sistema pode ficar preso em um determinado estado. Por último, temos o comprimento da maior linha vertical, que analogamente a  $L_{máx}$  é dado por:

$$V_{máx} = \max([v_l]_{l=1}^{N_v}) . \quad (2.18)$$

Na qual  $N_v$  é o número absoluto de linhas verticais. As medidas baseadas em linhas verticais são capazes de identificar transições caos-ordem. Para sistemas periódicos as medidas baseadas em linhas verticais são iguais à zero.

## 2.2 Aplicação ao mapa logístico

Podemos calcular as medidas de complexidade apresentadas na última seção ao mapa logístico estudado no capítulo anterior, dado pela equação (1.10)

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) . \quad (2.19)$$

Os gráficos de recorrência do mapa logístico foram confeccionados a partir das séries temporais para os valores de  $r$  iguais a 3,679, 3,720, 3,830 e 4,0. Dado o valor do parâmetro  $r$ , evoluímos o sistema 1000 vezes para eliminar possíveis transientes, então evoluímos o sistema mais 1000 vezes. O valor do parâmetro  $\varepsilon$  foi definido como

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.20)$$

Os valores obtidos foram utilizados para a confecção dos gráficos de recorrência. A linha de identidade foi excluída dos gráficos de recorrência uma vez que ela não interfere nas análises. Os resultados obtidos podem ser vistos a seguir.

### 2.2.1 Parâmetro $r = 3,679$

Quando o parâmetro assume o valor  $r = 3,679$ , sabemos ao observar o gráfico do expoente de Lyapunov da Figura 2.1, que sistema evolui de forma caótica, uma vez que o expoente de Lyapunov é positivo para esse valor.

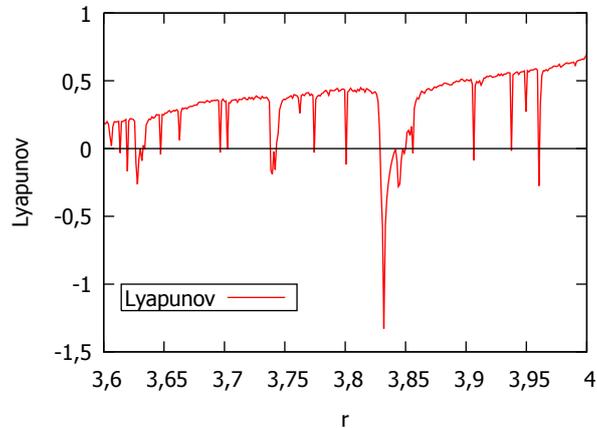


Figura 2.1: Gráfico do expoente de Lyapunov.

Na Figura 2.2 abaixo a série temporal do sistema limitada as 100 primeiras unidades de tempo, para uma melhor visualização.

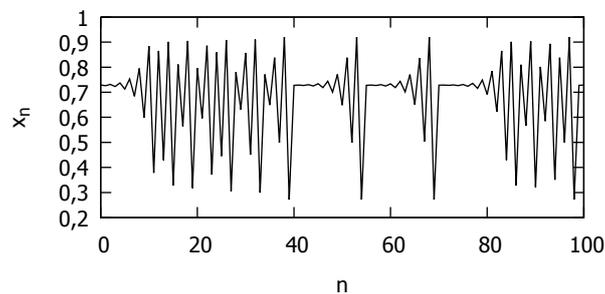


Figura 2.2: Série temporal do mapa logístico para  $r = 3,679$ .

Não é possível identificar nenhum comportamento periódico na série temporal da Figura 2.2, uma vez que se trata de uma região caótica. Na Figura 2.3, temos o gráfico de recorrência para a série temporal mostrada na Figura 2.2, considerando a série temporal inteira.

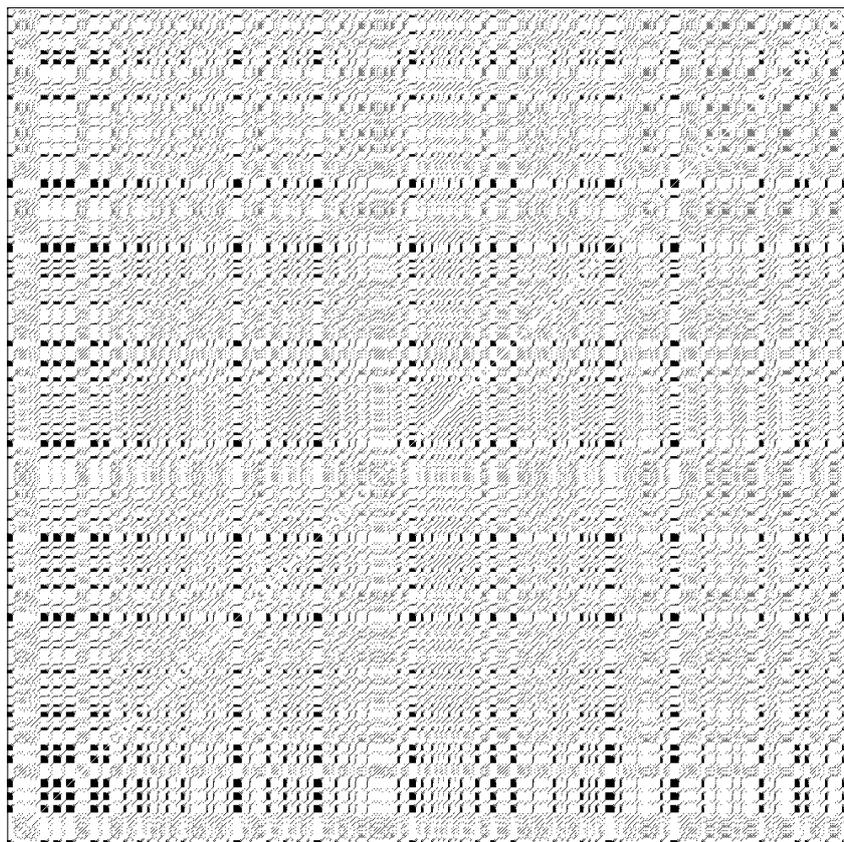


Figura 2.3: Gráfico de recorrência do mapa logístico para  $r = 3,679$ .

Podemos observar no gráfico de recorrência 2.3 áreas retangulares negras, que são aglomerados de linhas verticais e horizontais [6]. Tais estruturas representam estados laminares, ou seja, estados que não mudam ou mudam de forma lenta [7]. Além disso, vemos bandas brancas ao longo do gráfico, essas estruturas indicam a estados raros ou fora do normal, que podem ser consequência de transições.

### 2.2.2 Parâmetro $r = 3,720$

Para  $r = 3,720$ , o mapa logístico evolui de forma caótica novamente, como podemos verificar pelo valor do expoente de Lyapunov na Figura 2.1. Ainda, vemos abaixo a série temporal do sistema limitada as 100 primeiras unidades de tempo, é mostrada na Figura 2.4.

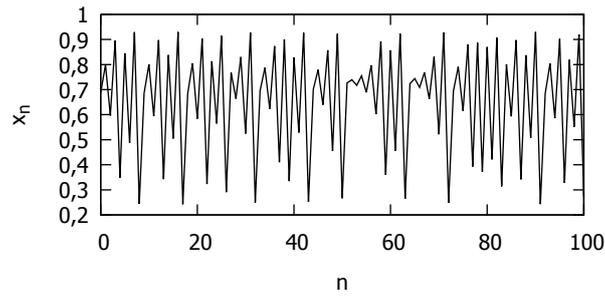


Figura 2.4: Série temporal do mapa logístico para  $r = 3,720$ .

Como esperado, a série temporal vista na Figura 2.4 não apresenta nenhuma periodicidade. Com base nos dados dessa série periódica, foi confeccionado o gráfico da Figura 2.5.

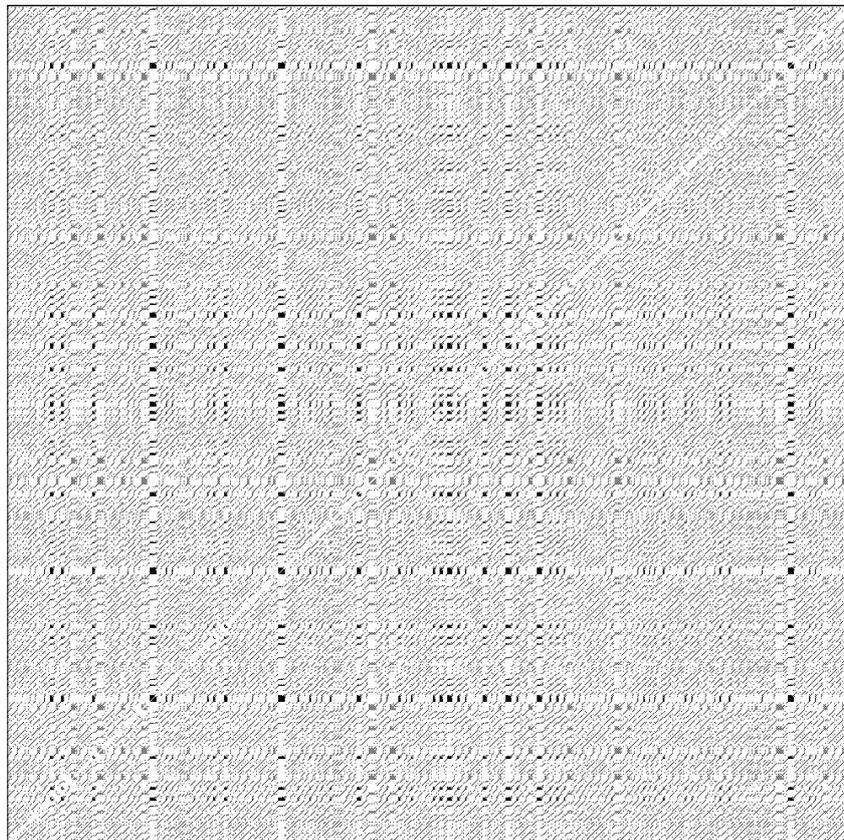


Figura 2.5: Gráfico de recorrência do mapa logístico para  $r = 3,720$ .

De forma semelhante ao gráfico de recorrência para  $r = 3,679$ , vemos no gráfico da Figura 2.5 aglomerados de linhas verticais e horizontais e bandas brancas. Porém, vemos que elas são menos intensas, o que pode indicar menos estados laminares e menos transições de estados.

### 2.2.3 Parâmetro $r = 3,830$

No caso onde  $r = 3,830$  o sistema evolui de forma periódica, como podemos ver na Figura do expoente de Lyapunov (2.1) e na Figura da janela periódica (1.16), ou na série temporal da Figura 2.6.

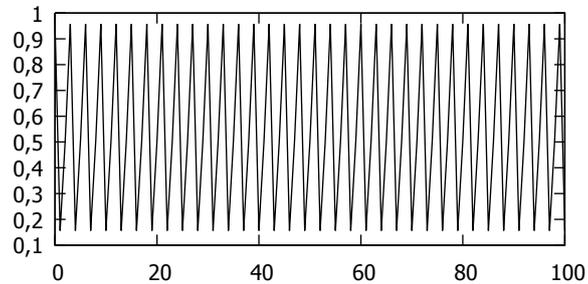


Figura 2.6: Série temporal do mapa logístico para  $r = 3,830$ .

Vemos na Figura 2.6 que o sistema possui um período bem definido, nesse caso igual a 3, como esperado. A partir dos dados dessa série foi confeccionado o gráfico de recorrência mostrado na Figura 2.7.

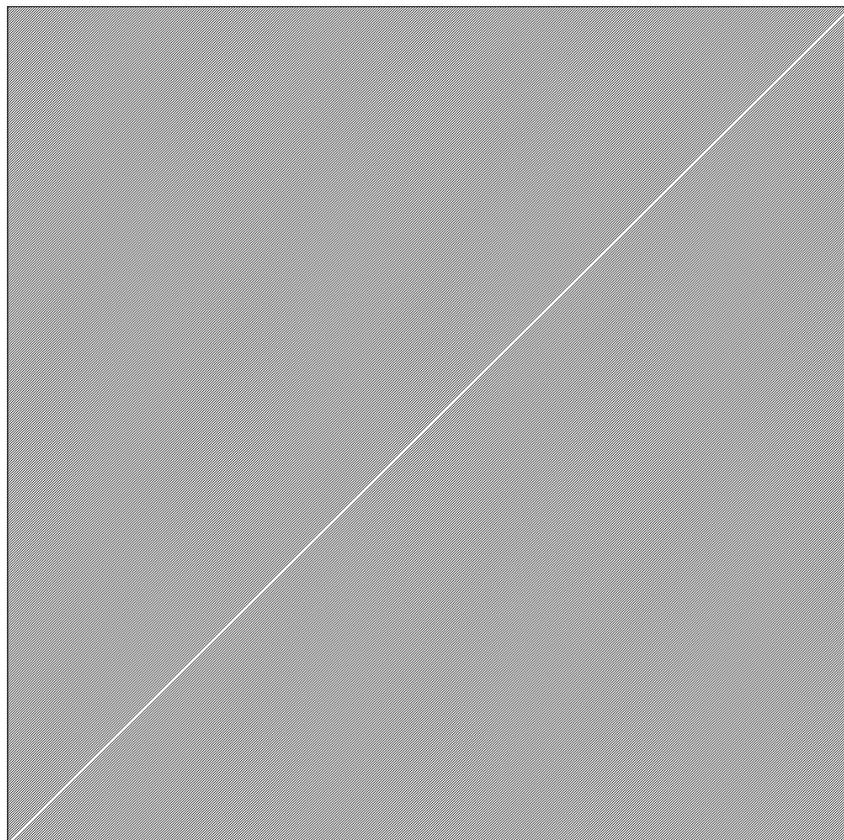


Figura 2.7: Gráfico de recorrência do mapa logístico para  $r = 3,830$ .

Diferente dos gráficos vistos até agora, o gráfico da Figura 2.7 apresenta uma homogeneidade, que como visto anteriormente, está relacionada a estados estacionários. Vemos ainda que o gráfico é formado por linhas diagonais paralelas a linha de identidade, o que indica que o sistema é determinístico [6].

#### 2.2.4 Parâmetro $r = 4,0$

Quando o parâmetro  $r$  é igual a 4, vemos no diagrama de bifurcações 1.9 que o sistema é caótico e tem acesso a mais valores do que para qualquer outro valor de  $r$ , além de possuir o maior valor para o expoente de Lyapunov, como podemos ver na Figura 2.1. Na Figura 2.8 temos a série temporal do sistema para esse valor de  $r$ , na qual observamos um comportamento caótico.

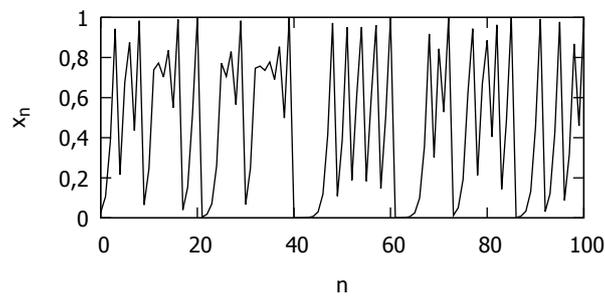


Figura 2.8: Série temporal do mapa logístico para  $r = 4,000$ .

A partir dessa série temporal foi confeccionado o gráfico de recorrência que vemos a seguir.

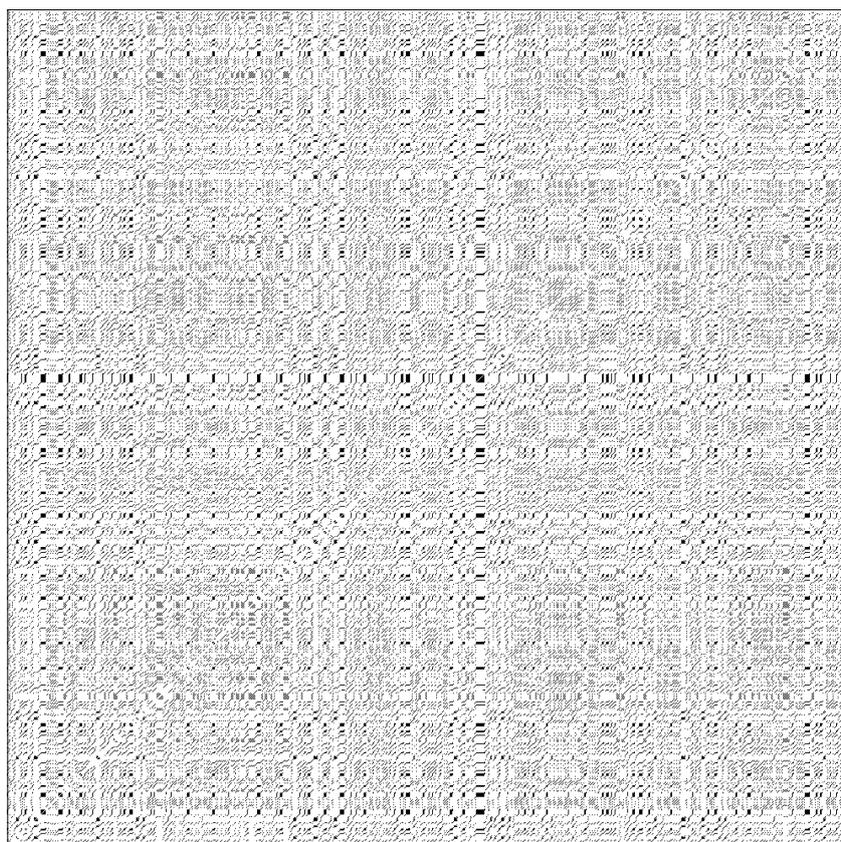


Figura 2.9: Gráfico de recorrência do mapa logístico para  $r = 4,000$ .

Na Figura 2.9 vemos poucas linhas diagonais e verticais, por outro lado, podemos ver diversos pontos singulares ao lado de linhas diagonais. Tais pontos estão relacionados a fortes flutuações de estados e o fato de estarem ao lado de linhas diagonais indica que o sistema é caótico [6].

## 2.2.5 Medidas de complexidade do mapa logístico

Para cada um dos quatro gráficos de recorrência, foram tomadas as suas medidas de complexidade. Os resultados são apresentados na Tabela 2.1.

	$r = 3,679$	$r = 3,720$	$r = 3,830$	$r = 4,0$
$RR$	0,128	0,1172	0,3323	0,1247
$DET$	0,7941	0,7518	1	0,6996
$RATIO$	6,204	6,414	3,009	5,61
$L_{máx}$	36	33	997	15
$L_{mean}$	4,327	4,278	500,5	3,071
$L_{entr}$	1,947	1,999	5,805	1,434
$DIV$	0,02778	0,0303	0,0001	0,066
$LAM$	0,3182	0,08641	0	0,215
$LAM/DET$	0,4008	0,1149	0	0,308
$V_{máx}$	12	9	0	11
$V_{entr}$	2,095	1,654	0	1,322
$TT$	4,862	3,553	0	2,97

Tabela 2.1: Tabela com medidas de complexidade dos gráficos de recorrência.

Como visto anteriormente, os gráficos de recorrência das figuras 2.3 e 2.5 apresentam estruturas semelhantes. Podemos verificar a partir das medidas referentes a  $r = 3,679$  e  $r = 3,720$  na 2.1, que laminaridade discutida a partir das estruturas de ambos os gráficos é de fato menor para  $r = 3,720$ . Ainda, as medidas de  $DET$  que está ligada ao determinismo do sistema e  $L_{mean}$  que é ligado ao tempo de predicabilidade do sistema, também são menores para  $r = 3,720$ . Vemos na Tabela 2.1 que o gráfico de recorrência não apresenta as medidas baseadas em linhas verticais, como o  $TT$ . Tal medida está relacionada ao tempo que o sistema permanece em um dado estado. Nesse caso essa medida não existe pois o sistema é periódico e oscila entre três valores diferentes. Podemos comparar os resultados de  $r = 4,0$  com  $r = 3,679$  e  $r = 3,720$  uma vez que para esses valores de  $r$  o mapa logístico apresenta comportamento caótico. Comparando os valores de  $DET$  e  $L_{mean}$ , que estão ligados ao determinismo e predicabilidade do sistema, vemos que quando  $r = 4,0$  tais medidas são menores, ou seja, o sistema é mais caótico, como previsto.

# Conclusões

Na primeira parte deste trabalho abordamos mapas unidimensionais. Estudamos inicialmente os conceitos de órbitas e pontos fixos. Que apesar de básicos, se mostram essenciais na análise dos mapas. Além disso, discutimos a estabilidade dos pontos fixos e formas de identificá-los em um mapa unidimensional, como por meio de *cobwebs*. Ainda no primeiro capítulo, apresentamos o mapa logístico, um mapa proposto por Robert May como uma ferramenta para o estudo de sistemas não-lineares. Em um primeiro momento, estudamos as órbitas do mapa logístico para diferentes valores do parâmetro  $r$  e, então, para uma análise mais abrangente, apresentamos o diagrama de bifurcações. A partir do diagrama de bifurcações apresentamos o estudo do mecanismo que leva o mapa logístico ao caos, a duplicação de período, e ainda vimos que esse mecanismo está ligado a uma constante universal, a constante de Feigenbaum. O fato da constante de Feigenbaum ser universal nos diz que esse mecanismo está presente em mapas com um máximo quadrático. Em seguida, estudamos o expoente de Lyapunov, que está relacionado à sensibilidade que um sistema apresenta as suas condições iniciais, onde vimos quais regiões do diagrama de bifurcações são caóticas. Ainda, estudamos as janelas periódicas que surgem no diagrama de bifurcações, onde vimos que a raiz delas pode ser encontrada estudando os pontos fixos do mapa. Finalizando o primeiro capítulo, estudamos o pêndulo amortecido e forçado, onde vimos que para certos valores do parâmetro  $\gamma$ , que é relacionado a força de impulso, o pêndulo apresenta um diagrama de bifurcações semelhante ao do mapa logístico. Na segunda parte do trabalho estudamos, de forma introdutória, os gráficos de recorrência, uma ferramenta numérica que permite analisar sistemas dinâmicos a partir da recorrência dos mesmos. Em um primeiro momento apresentamos as estruturas que surgem nos gráficos de recorrência e as medidas de complexidade. Em seguida, estudamos os gráficos de recorrência do mapa logístico para valores distintos do parâmetro  $r$ . Analisando as estruturas formadas nos gráficos obtidos e as medidas de complexidade, vemos que os gráficos de recorrência proporcionam informações de acordo com as análises feitas previamente por outros métodos. Em um trabalho futuro, a confecção de gráficos de recorrência para todos os valores de no intervalo aqui estudado pode gerar análises mais completas e precisas.

# Apêndice A

## Diagrama de bifurcações

Listing A.1: Programa C++ para diagrama de bifurcações

---

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <math.h>
3 #include <cmath>
4
5 #define a_i 2.8
6 #define a_f 4
7 #define x_0 0.4
8 #define step (a_f-a_i)/1000.0
9 #define trans 1000
10 #define N 1000
11
12 int main(int argc, char **argv){
13     int i;
14     double x, a, test;
15     FILE *out;
16     out= fopen("map.dat", "w");
17
18     for(a= a_i; a< a_f; a+= step){
19         x= x_0;
20
21         for(i= 0; i< trans; i++){
22             x= a*x*(1-x);
23         }
24         for(i= 0; i< N; i++){
25
26             x= a*x*(1-x);
27
28             fprintf(out, "%e %e\n", a, x);
29         }
30     }
31     fclose(out);
32 }
```

---

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [2] L. H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2006.
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Book Publishing, L.L.C., 1994.
- [4] J. A. Y. Kathleen T. Alligood, Tim Sauer, *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag New York, 1996.
- [5] R. L. Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Perseus Book Publishing, L.L.C., 1992.
- [6] N. Marwan, M. C. Romano, M. THIEL, and J. Kurths, “Recurrence plots for the analysis of complex systems,” *Physics Reports*, vol. 438, pp. 237–329, jan 2007.
- [7] N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, and J. Kurths, “Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data,” *Phys. Rev. E*, vol. 66, p. 026702, Aug 2002.
- [8] J. P. G. Gregory L. Baker, *Chaotic Dynamics - An Introduction*. Cambridge University Press, 1996.
- [9] J. J. O’Connor and E. F. Robertson, “Mitchell jay feigenbaum,” 2009.
- [10] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [11] M. Thiel, “Recurrences: Exploiting naturally occurring analogues,” 2004.