Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Relatividade Especial, Gravitação e Formulação Covariante das Equações de Maxwell em um Espaço-tempo Curvo via Formas Diferenciais

Acadêmico: Matheus Augusto Fabri

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Hatsumi Mukai

Maringá, janeiro de 2017

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Relatividade Especial, Gravitação e Formulação Covariante das Equações de Maxwell em um Espaço-tempo Curvo via Formas Diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação da Prof[a]. Dr[a]. Hatsumi Mukai, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmico: Matheus Augusto Fabri

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Hatsumi Mukai

Maringá, janeiro de 2017

Sumário

Lista de Figuras **iii**

Agradecimentos **iv**

Resumo **v**

Abstract **vi**

Introdução **1**

Convenções e Notação **2**

1 Tópicos de Topologia, Análise Tensorial e Variedades Diferenciáveis **3**
1.1 Topologia . . . 3
1.1.1 Espaços Topológicos . . . 4
1.1.2 Espaços Métricos e Topologia da Métrica . . . 5
1.1.3 Continuidade e Compacticidade . . . 6
1.2 Análise Tensorial . . . 8
1.2.1 Tensores . . . 8
1.2.2 Operações Tensoriais . . . 10
1.2.3 Simetrias . . . 12
1.3 Geometria Diferencial . . . 13
1.3.1 Variedades Diferenciáveis . . . 13
1.3.2 Tensor Métrico e Isomorfismo Musical . . . 17
1.4 Conexão de Levi-Civita . . . 18
1.4.1 Operador derivativo . . . 18
1.4.2 Derivada Covariante e Transporte Paralelo . . . 20
1.5 Curvatura Riemanniana . . . 24
1.5.1 Tensor de Riemann . . . 24
1.5.2 Curvatura de Ricci . . . 26
1.5.3 Tensor de Einstein . . . 28
1.5.4 Tétradas . . . 28
1.6 Geodésicas . . . 30
1.6.1 Equação das Geodésicas . . . 30
1.6.2 Desvio Geodésico . . . 33
1.6.3 Coordenadas Normais de Riemann . . . 34

2 Cálculo Exterior **36**
2.1 Formas Diferenciais 36
2.1.1 Produto Exterior 37
2.1.2 Diferencial Exterior 39
2.1.3 Dual de Hodge 41
2.2 Integração em Variedades 42

3 Teorias da Relatividade **46**
3.1 Física Pré-Relativística e Início da Relatividade 46
3.2 Relatividade Especial 49
3.2.1 Espaço-tempo de Lorentz-Minkowski 50
3.2.2 Grupo de Lorentz 53
3.2.3 Princípios Variacionais na Relatividade Especial 56
3.3 Relatividade Geral 62
3.3.1 Equações de Campo de Einstein 63
3.3.2 Linearização das Equações de Campo 67
3.3.3 Limite Newtoniano 69
3.3.4 Ação de Hilbert 71

4 Electromagnetismo Covariante **74**
4.1 Covariância Restrita das Equações de Maxwell 74
4.1.1 Existência do Tensor Eletromagnético e Leis de Maxwell 75
4.1.2 Quadripotencial e Ondas Eletromagnéticas 77
4.2 Covariância Geral das Equações de Maxwell 79
4.3 Formulações Variacionais da Eletrodinâmica 82

Considerações Finais **85**

Referências Bibliográficas **86**

Lista de Figuras

1.1 Bolas abertas em diferentes métricas 6
1.2 Espaço tangente à uma variedade 15
1.3 Transporte paralelo e conexão 22
1.4 Falha do transporte paralelo em uma esfera 26

2.1 Representação geométrica das formas diferenciais 39

3.1 Cone de luz 53
3.2 Representação de forças inerciais em uma variedade curva 64
3.3 Detecção de ondas gravitacionais pelo LIGO 69

Agradecimentos

À Profª. Drª. Hatsumi Mukai pela orientação e muita paciência, além é claro de toda assistência dada e aos Professores Dr. Breno Ferraz de Oliveira e Dr. Paulo Ricardo Garcia Fernandes pelos conselhos dados no desenvolvimento do trabalho e nos seminários.

Aos vários professores que durante a graduação compartilharam o seu conhecimento, em especial aos: Profª. Drª. Claudete Matilde Webler Martins, Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes, Prof. Dr. Josiney Alves de Souza, Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro, Profª. Drª. Francielle Sato, Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath, entre tantos outros.

Aos G. F. Bernhard Riemann, A. Einstein, C. F. Gauss, T. Levi-Civita, Elon L. Lima, R. M. Wald, S. Weinberg, David J. Griffiths, J. J. Sakurai, C. Misner, Kip Thorne, J. A. Wheeler, entre outros, por tudo que me ensinaram indiretamente por meio de suas obras.

Aos meus colegas do Curso de Física, Raul, Mateus, Giorgio, entre outros.

Aos meus familiares, em especial a minha irmã Ana Paula Fabri Konart, a quem devo tudo que conquistar.

E por último, mas não menos importante, à minha namorada Adriely Zambiasi Boller pelo apoio e por ter me aguentado todo este tempo.

Resumo

As teorias da relatividade especial e geral fazem parte dos pilares do panorama da física atual. Não é por menos que há inúmeros esforços para a unificação destas com a mecânica quântica, pois evidentemente uma descrição da natureza sem uma destas fica incompleta. Além de todo o seu sucesso empírico estas duas teorias modificaram a física como um todo, dado que iniciaram a sua geometrização. Nesta monografia apresentamos o estudo, com ferramentas da geometria diferencial, para a descrição dos campos gravitacional e eletromagnético. Primeiramente discutimos tópicos de geometria diferencial e formas diferenciais, feito isso analisamos brevemente as teorias da relatividade especial e geral, por fim apresentamos uma formulação do eletromagnetismo compatível com as duas últimas.

Palavras chave: análise tensorial, geometria diferencial, formas diferenciais, relatividade especial, gravitação, eletromagnetismo covariante.

Abstract

The theories of special and general relativity are part of the cornerstones of today's physics landscape. It is no small matter that there are many efforts to unify them with quantum mechanics, because evidently a description of nature without one of these is incomplete. In addition to all their empirical success these two theories modified physics as a whole, since they began its geometrization. In this monograph we present the study, with tools of differential geometry, of the description of the gravitational and electromagnetic fields. Firstly, we discuss topics of differential geometry and differential forms, as we briefly analyze the theories of special and general relativity, finally we present a formulation of electromagnetism compatible with the last two.

Keywords: tensor analysis, differential geometry, differential forms, special relativity, gravitation, covariant electromagnetism.

Introdução

Os conceitos de tempo e espaço absolutos foram introduzidos por Sir Isaac Newton (1643-1727) em seu *Principia* em 1687 e perduraram na física até o século XIX, os quais foram abalados pelo desenvolvimento da eletrodinâmica clássica. As questões da não existência de um meio propagador de ondas eletromagnéticas e da incompatibilidade das equações de Maxwell com a mecânica clássica culminaram na formulação da relatividade especial.

Esta teoria procurou formular as leis da física de tal maneira que sejam covariantes por transformações entre referenciais inerciais. Sendo assim no seu desenvolvimento tomou-se como guia dois princípios fundamentais: a invariância das leis físicas em referenciais inerciais e a constância da velocidade da luz no vácuo. Como consequência disto, temos a unificação do espaço e tempo em uma entidade denominada espaço-tempo, introdução do formalismo tensorial e da ideia de métrica na física, transformações de Lorentz, dilatação do tempo, unificação da eletricidade e magnetismo no tensor eletromagnético, entre outros. Apesar do rompimento com os postulados fundamentais da mecânica clássica, muitos conceitos foram reaproveitados, em específico as formulações hamiltoniana e lagrangiana.

A teoria da relatividade especial é uma das ideias mais testadas e comprovadas da história da Física. Portanto, múltiplos esforços foram feitos para unificá-la com a mecânica quântica e generalizá-la para conter a gravitação, resultando, respectivamente, na teoria quântica de campos e na teoria da relatividade geral, sendo estas os pilares da física moderna. Nesta última, a gravidade é uma força inercial gerada pela curvatura do espaço-tempo. Agora este deixou de ser um pano de fundo para os eventos físicos para se tornar parte destes. Além disso, as leis da física eram invariantes por quaisquer transformações de coordenadas. Com estas teorias já formuladas, restava-se naquele momento unificá-las com as outras, a primeira delas foi o eletromagnetismo.

Na presente monografia mostraremos um breve estudo da relatividade especial e geral, além da descrição do eletromagnetismo nestas teorias, com o uso de geometria diferencial. Desta forma dividimos o trabalho em quatro partes. Nos dois primeiros capítulos apresentamos, respectivamente, o formalismo da geometria diferencial e das formas diferenciais. No Capítulo 3 descrevemos as teorias da relatividade especial e geral. Já no Capítulo 4 apresentamos uma descrição do eletromagnetismo covariante, sendo a covariância tanto restrita como geral. Por fim, encerramos mostrando algumas conclusões sobre os tópicos abordados.

"*A mathematician is a machine for turning coffee into theorems.*"
Rényi, Alfréd.

Convenções e Notações

- $\mathbb{R}$ é a reta e $\mathbb{R}^n$ o espaço real n-dimensional;
- Diremos que o conjunto/elemento A pertence B e não pertence a B, respectivamente, por $A \in B$ e $A \notin B$;
- Diremos que o conjunto A está contido em B e não está contido em B, respectivamente, por $A \subseteq B$ e $A \nsubseteq B$;
- $P(A)$ é o conjunto potência de A, isto é, $P(A) = \{X; X \subseteq A\}$;
- $A \cup B$ representa a união dos conjuntos A e B;
- $A \cap B$ representa a interseção dos conjuntos A e B;
- $A - B$ representa o conjunto diferença, isto é, $A - B = \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$;
- $A \times B$ representa o produto cartesiano, isto é, $A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$;
- Nos Capítulos 1 e 2 utilizaremos índices com caracteres latinos e gregos indiscriminadamente, dado que a análise é realizada sobre espaços vetoriais quaisquer, todavia nos Capítulos 3 e 4 os índices latinos serão somados somente no espaço e os gregos no espaço-tempo;
- No presente texto adota-se o tensor de Riemann, $\boldsymbol{R}$, com a seguinte convenção de sinal:
$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = -\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} + \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} + \nabla_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w};$$
- Convencionamos a métrica de Lorentz em uma base ortonormal como
$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 1

Tópicos de Topologia, Análise Tensorial e Variedades Diferenciáveis

Ao decorrer do texto usaremos muitas ferramentas da análise tensorial e geometria diferencial, consequentemente, neste capítulo, desenvolveremos um pouco sobre estes assuntos de uma percepção matemática. Começaremos discutindo, na Seção 1.1, espaços topológicos, dado que estes são de fundamental importância para a construção de abertos em uma variedade, definição de subvariedade e integração em variedades. Na Seção 1.2 veremos tensores em um espaço vetorial qualquer, para então analisar os casos de interesse que são campos tensoriais em variedades.

Começaremos na Seção 1.3 o estudo de variedades diferenciáveis, espaços tangente e cotangentes, subvariedades, campos de vetores, fibrados tangente e cotangente, fibrados tensoriais. Além disso, definiremos o tensor métrico e o isomorfismo musical. Dada então a estrutura básica de variedades, na Seção 1.4, apresentamos como construir um operador derivativo que denominaremos de conexão. Introduziremos então a derivada covariante e veremos como encontrar a única conexão que é livre de torção e que é compatível com a métrica, ou seja,definiremos a conexão de Levi-Civita.

Na Seção 1.5 introduziremos curvatura riemanniana, Ricci e escalar. Feito isso, construiremos um tensor solenoidal da curvatura de Ricci, o tensor de Einstein, sendo este fundamental nas equações de campo. Além disso, mostraremos como calcular o tensor de Riemann em uma base ortonormal em termos dos coeficientes de rotação de Ricci.

Por fim, na Seção 1.6 discutiremos geodésicas, desvio geodésico e como utilizá-las para construir um sistema de coordenadas localmente euclidiano, ou seja, as coordenadas normais de Riemann.

1.1 Topologia

A topologia é ubíqua em toda a matemática, pois serve de base a vários ramos desta, como, por exemplo, geometria diferencial, análise, álgebra, entre outros. É difícil definir exatamente um propósito para esta, todavia pode-se pensar nesta como a maneira mais geral de se construir uma estrutura de abertos e continuidade em um espaço qualquer. Esta teoria tem dois elementos básicos: espaços topológicos e homeomorfismos.

1.1.1 Espaços Topológicos

Espaços topológicos são conjuntos com uma estrutura de abertos dada nestes. Mais precisamente [1, 2]:

Definição 1.1.1. *Um espaço topológico (X, τ) consiste em um conjunto X e uma classe de subconjuntos de X denotada por τ, tal que os elementos desta gozam das seguintes propriedades:*

i. A união arbitrária de quaisquer elementos de τ está nesta classe;

ii. A interseção finita de elementos de τ está na classe;

iii. $X, \emptyset \in \tau$.

A classe τ é denominada topologia de X e os elementos de τ são denominados abertos. O interessante desta estrutura é que temos uma definição de abertos sem sequer falarmos do conceito de distância e mesmo assim esta definição de abertos satisfaz as mesmas propriedades daqueles definidos no contexto da análise na reta [3]. Um conjunto pode ter diferentes topologias, como veremos nos exemplos à seguir.

Exemplo 1.1.1. *Seja $\tau = P(X)$, em que $P(X)$ é o conjunto potência de X. É trivial provar que τ satisfaz a definição e portanto é uma topologia de X. Esta é denominada topologia discreta.*

Exemplo 1.1.2. *Seja $\tau = \{X, \emptyset\}$. É fácil verificar que τ é uma topologia de X, sendo esta chamada de topologia trivial ou indiscreta.*

Exemplo 1.1.3. *Sejam $X = \mathbb{R}^n$ e τ a união arbitrária de todas as bolas abertas de raio r e centro $y \in \mathbb{R}^n$, definidas como*

$$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - y| < r\}.$$

Então τ é uma topologia de $\mathbb{R}^n$. Para provar que a classe dada satisfaz os axiomas dados, basta usar propriedades básicas de bolas abertas [3]*. Esta é denominada topologia usual do $\mathbb{R}^n$.*

Assim como temos subespaços vetoriais, subgrupos, podemos ter espaços topológicos imersos em outros e com isso construir uma topologia denominada induzida ou do subespaço. Mais precisamente temos que [1, 2]:

Definição 1.1.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. A topologia induzida ou relativa, α, de A é*

$$\alpha = \{A \cap C | C \in \tau\}.$$

Então (A, α) é um espaço topológico.

Com isso podemos construir uma topologia em qualquer subconjunto de X. Em específico considere a topologia usual do $\mathbb{R}^n$, assim da Definição 1.1.2 temos que $\mathbb{R}^m$, com $m < n$, já possui α automaticamente definida e além disso essa é igual a topologia usual do $\mathbb{R}^m$.

Outra maneira de construir espaços topológicos por meio de exemplos conhecidos é pelo produto cartesiano [1, 2].

Definição 1.1.3. *Sejam (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) espaços topológicos. Definamos τ por*

$$\tau = \{A \times B | A \in \tau_1 \text{ e } B \in \tau_2\}.$$

Então τ é uma topologia de $X_1 \times X_2$ denominada topologia produto.

Portanto, dada a topologia usual em $\mathbb{R}$ podemos definir a de $\mathbb{R}^n$. Para isso basta utilizar a topologia produto n vezes.

1.1.2 Espaços Métricos e Topologia da Métrica

Em certos tipos de espaços podemos medir distâncias, estes são denominados espaços métricos. Temos que [4]:

Definição 1.1.4. *Uma métrica d em um conjunto A é um função $d : A \times A \to \mathbb{R}$ que goza das seguintes propriedades*

i. $d(x, x) = 0$;

ii. *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

iii. $d(x, y) = d(y, x)$;

iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Sendo assim, o par (A,d) é denominado espaço métrico.

Claramente estas propriedades satisfazem as características intuitivas que damos ao conceito de distância. Temos que as duas primeiras garantem a não-degenerescência da métrica, *i.e.*, a distância entre dois elementos é positiva ou nula, e além disso é nula se, e somente se, estes são iguais. Vários espaços não cumprem (i) e (ii), *e.g.*, o espaço de Minkowski que será explicitado no Capítulo 3. A condição (iv) é denominada desigualdade triangular, intuitivamente esta nos diz que a soma de dois lados de um triângulo é sempre maior que o outro.

Com d podemos definir de maneira geral uma bola aberta em um espaço métrico (A, d), temos:

$$B_r(y) = \{x \in A;\ d(x, y) < r\}.$$

A seguir, temos exemplos de como imbuir um espaço com diferentes métricas e as suas respectivas bolas abertas.

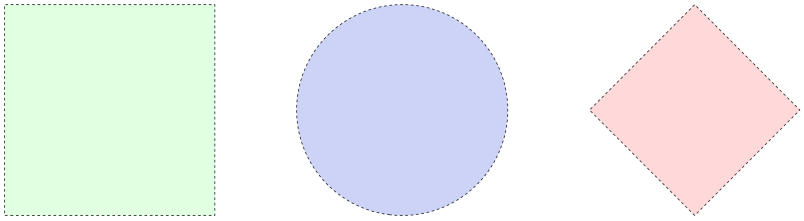
Exemplo 1.1.4. *Consideremos o $A = \mathbb{R}^n$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, a métrica l_p é definida por meio da seguinte relação:*

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = 2$ temos a norma euclidiana usual do $\mathbb{R}^n$ e no limite $p \to \infty$ obtém-se

$$d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|).$$

Na Figura 1.1 *temos gráficos de bolas abertas características para certos valores de p.*



(a) $p = 1$ (b) $p = 2$ (c) $p = \infty$

Figura 1.1: Bolas abertas, respectivamente, para l_1, l_2 e l_∞.

Exemplo 1.1.5. *Podemos definir métricas até em espaços mais abstratos, e.g., o espaço das funções integráveis e definidas em* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Neste, uma possível métrica é dada por*

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Podemos construir uma topologia em um espaço métrico que é análoga a topologia usual do $\mathbb{R}^n$. Sendo assim tem-se que [4]:

Definição 1.1.5. *Seja* (A, d) *um espaço métrico, a topologia métrica, denotada por* τ*, de* A *é composto por todo conjunto de* A *que é a união arbitrária de bolas abertas, sendo assim* (A, τ) *formam um espaço topológico.*

Existem diversas maneiras de se classificar um espaço topológico. Contudo, aqui utilizaremos a denominada espaço T_2 ou de Hausdorff [1, 2]:

Definição 1.1.6. *Um espaço topológico* (X, τ) *é dito de Hausdorff se para todo* $p_1, p_2 \in X$ *existem abertos* $O_{p_1}, O_{p_2} \in \tau$*, tais que* $p_1 \in O_{p_1}$ *e* $p_2 \in O_{p_2}$ *com*

$$O_{p_1} \cap O_{p_2} = \emptyset.$$

Isto é, um espaço topológico é T_2 se neste existem dois pontos distintos que podem ser separados por abertos disjuntos. Intuitivamente é difícil pensar em um espaço que não seja T_2, contudo vários não cumprem esta condição, em especial o espaço de Minkowski. Claramente um espaço métrico, com a topologia usual, é de Hausdorff, o que é dado pelo teorema a seguir [1, 2].

Teorema 1.1.1. *Sejam* M *um espaço métrico e* τ *a sua topologia usual. Então* (M, d) *é um espaço de Hausdorff.*

1.1.3 Continuidade e Compacticidade

Como dito anteriormente uma das noções básicas em topologia é a de continuidade. Consequentemente definamos esta:

Definição 1.1.7. *Sejam* (X, τ_1) *e* (Y, τ_2) *espaços topológicos e* $f : X \to Y$*. A aplicação* f *é dita contínua se dado um aberto* $A \subset Y$ *temos que* $f^{-1}(A)$ *é um aberto de* X*.*

Logo, uma função é contínua se a imagem inversa de um aberto é também um aberto. Pode-se questionar qual a relação entre o conceito de continuidade analítica (definição usando intervalos) e a topológica, na realidade é possível provar que as duas definições são equivalentes [3]. Um tipo de aplicação contínua de relevância é o homeomorfismo.

Definição 1.1.8. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e $f : X \to Y$ um mapa invertível. A aplicação f é dita um homeomorfismo caso f e f^{-1} sejam contínuas.*

A importância deste conceito consiste no fato de que várias características topológicas passam de um espaço para o outro por meio de homeomorfismos, como veremos a seguir. Um exemplo particular de homeomorfismo é o difeomorfismo, sendo estes uma ideia central na geometria diferencial [5].

Definição 1.1.9. *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e $f : X \to Y$ um mapa invertível. A aplicação f é dita um difeomorfismo caso f e f^{-1} sejam diferenciáveis.*

Para finalizar vamos discutir mais alguns conceitos topológicos, em especial conjuntos fechados e compacticidade. Um conjunto fechado em um espaço topológico é definido como:

Definição 1.1.10. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Então um conjunto $A \subset X$ é dito fechado se $X - A$ é aberto.*

Sendo assim, temos que um conjunto pode ser fechado, aberto, os dois ou ainda nenhum, *e.g.*, a união de uma bola aberta e outra fechada, sendo estas disjuntas, é semi-aberta ou semi-fechada. Por outro lado, $\mathbb{R}$ e $\emptyset$, em análise, são abertos e fechados ao mesmo tempo [3]. Por meio das relações de Morgan temos o seguinte lema [6]:

Lema 1.1.1. *Seja $\{A_i\}$ uma família de fechados em um espaço topológico (X, τ). Sendo assim temos que esta goza das seguintes propriedades:*

i. A interseção arbitrária de A_i é fechada;

ii. A união finita de A_i é fechada.

Exemplos nos quais a união infinita de fechados não é necessariamente fechada podem ser encontrados na ref. [3]. Da Definição 1.1.10 conclui-se que um conjunto é aberto se, e somente se, seu complementar for fechado. Temos também a noção de conexidade.

Definição 1.1.11. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Temos que X é dito conexo se os únicos conjuntos abertos e fechados, ao mesmo tempo, deste são X e $\emptyset$.*

Sendo assim, intuitivamente, um conjunto conexo é aquele que não pode ser separado em abertos disjuntos, isto é, em partes. Em análise um conjunto é conexo se, e somente se, admite cisão trivial, *exempli gratia*, o $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ [3].

Podemos também fechar um conjunto, isto é:

Definição 1.1.12. *Seja (X, τ) um espaço topológico. O fecho de um conjunto $A \subset X$, denotado por $\overline{A}$, é a interseção de todo fechado em X que contém A.*

Por definição temos que o fecho é fechado e que um conjunto A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$. Já o interior de um conjunto é definido como:

Definição 1.1.13. *Seja (X, τ) um espaço topológico. O interior de um conjunto $A \subset X$, denotado por $\mathrm{int}(A)$, é a união de todo aberto em X que está contido em A.*

Conclui-se então que A é aberto se, e somente se, $A = \text{int}(A)$, além disso o interior de um conjunto é, por definição, aberto. A fronteira de A, aqui denotada por ∂A, é definida como

$$\partial A = \overline{A} - \text{int}(A).$$

Podemos também estudar compacticidade em topologia. Porém, primeiro definamos cobertura.

Definição 1.1.14. *Sejam (X, τ) um espaço topológico, $A \subset X$ e $\{O_\alpha\}$ uma família de abertos de τ, tal que $A \subset \cup_\alpha O_\alpha$. Então $\{O_\alpha\}$ é uma cobertura, ou cobertura aberta, de A.*

Com isto definimos um conjunto compacto como:

Definição 1.1.15. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$. Então A é dito compacto se admite subcobertura finita.*

Estes gozam de uma série de teoremas conhecidos. Em especial destacam-se que a compacticidade é preservada por homeomorfismo, o teorema de Heine-Borel e o que afirma que o espaço produto de compactos é compacto [1, 2].

1.2 Análise Tensorial

Com o início da geometria diferencial moderna precisou-se desenvolver um conceito matemático para descrevê-la, este tinha que ser independente do sistema de coordenadas. Foi com essas ideias em mente que G. Ricci-Curbastro (1853-1925), T. Levi-Civita (1873-1941) e A. Einstein (1879-1955) desenvolveram o cálculo tensorial no século XIX. Além disso, este conceito matemático é de essencial importância na Física para a construção de uma teoria que satisfaça o princípio da covariância geral, ou mesmo a covariância restrita [7].

1.2.1 Tensores

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então definamos [8]:

Definição 1.2.1. *Um funcional linear ou vetor dual de V é uma transformação linear de V em $\mathbb{R}$, isto é, $\boldsymbol{T} : V \to \mathbb{R}$. O conjunto de todos os funcionais lineares é um espaço vetorial, sendo este denominado de espaço dual de V e denotado por V^*.*

Da mesma maneira que se definiu V^* podemos definir V^{**} que será o espaço bi-dual de V, isto é, o conjunto de todas as transformações lineares do tipo $\boldsymbol{T} : V^* \to \mathbb{R}$.

Todo espaço vetorial e o seu dual são isomorfos. Para provar isso basta construir uma base em V^*. Seja $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ uma base de V, podemos definir $\boldsymbol{v}^{*i} \in V^*$ por meio da seguinte relação[1]

$$\boldsymbol{v}^{*i}(\boldsymbol{v}_j) = \delta^i{}_j. \tag{1.1}$$

Em que $\delta^i{}_j$ é o delta de Kronecker. Pode-se provar que $\{\boldsymbol{v}^{*1}, \boldsymbol{v}^{*2}, ..., \boldsymbol{v}^{*n}\}$ é um conjunto linearmente independente e que gera V^*. Consequentemente esta é base de V^* e é chamada de base dual de $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$. Portanto V^* tem a mesma dimensão de V, sendo assim são isomorfos. Analogamente, podemos obter que V^{**} e V são também isomorfos.

[1] Existem outras maneiras de se construir esta base, *exempli gratia*, em variedades utiliza-se o isomorfismo musical.

No presente texto representaremos uma base em V por índices inferiores de maneira que um vetor $\boldsymbol{w} \in V$ seja dado por

$$\boldsymbol{w} = \sum_{\mu=1}^{n} w^{\mu} \boldsymbol{v}_{\mu}.$$

Em que w^{μ} são as componentes de $\boldsymbol{w}$ na base $\{\boldsymbol{v}_{\mu}\}$. Logo, podemos utilizar a notação de Einstein, na qual se realizarmos uma soma sobre um índice inferior e outro superior podemos ocultar o símbolo do somatório. Ou seja, $\boldsymbol{w}$ é escrito como

$$\boldsymbol{w} = w^{\mu} \boldsymbol{v}_{\mu},$$

portanto o vetor dual de $\boldsymbol{w}$ é dado por:

$$\boldsymbol{w}^* = w_{\mu} \boldsymbol{v}^{*\mu},$$

sendo que as componentes w_{μ} de $\boldsymbol{w}^*$ são dadas por meio da Equação (1.1). Denominaremos os vetores de V, com índice superior, de contravariantes e os de V^*, com índice inferior, de covariantes.

Definamos agora uma generalização da ideia de transformação linear: os mapas multilineares.

Definição 1.2.2. *Seja $\{V_1, ..., V_r\}$ uma família de espaços vetoriais. Uma aplicação multilinear, neste caso r-linear, $\boldsymbol{T} : V_1 \times \cdots \times V_r \to \mathbb{R}$ é um mapa que goza da seguinte propriedade*

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1, ..., \alpha \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{u}_r) = \alpha \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{u}_r) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{w}_2, ..., \boldsymbol{u}_r).$$

Para todo $\boldsymbol{u}_i \in V_i$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, uma transformação multilinear é um mapa linear em cada uma das suas variáveis, e com isso pode-se definir um tensor:

Definição 1.2.3. *Sejam V um espaço vetorial e V^* o seu dual. Um tensor $\boldsymbol{T}$ do tipo (k, l) sobre V é um mapa multilinear definido por $\boldsymbol{T} : (V^*)^k \times V^l \to \mathbb{R}$. O conjunto de todos os tensores do tipo (k, l) sobre V é o conjunto $\mathcal{T}(k, l)$.*

De maneira usual podemos definir soma e produto por escalar de tensores. Sejam $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in \mathcal{T}(k, l)$ então

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)(\boldsymbol{v}^*, ..., \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{u}, ..., \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{v}^*, ..., \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{u}, ..., \boldsymbol{t}) \\ + \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{v}^*, ..., \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{u}, ..., \boldsymbol{t});\end{aligned}$$

$$(\alpha \boldsymbol{T}_1)(\boldsymbol{v}^*, ..., \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{u}, ..., \boldsymbol{t}) = \alpha \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{v}^*, ..., \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{u}, ..., \boldsymbol{t}).$$

Portanto $\mathcal{T}(k, l)$, é um espaço vetorial. A seguir temos alguns exemplos de tensores.

Exemplo 1.2.1. *Um vetor dual, $\boldsymbol{v} : V \to \mathbb{R}$, é um tensor do tipo $(0, 1)$. Já um vetor bi-dual, $\boldsymbol{w} : V^{**} \to \mathbb{R}$, é um tensor do tipo $(1, 0)$. Logo $V^* = \mathcal{T}(0, 1)$ e $V^{**} = \mathcal{T}(1, 0)$. A seguir usaremos estes para construir uma base para $\mathcal{T}(k, l)$. Pode-se ainda identificar $\mathcal{T}(0, 0)$ com o conjunto dos campos escalares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.2.2. *Seja V um espaço vetorial com um produto interno, $\boldsymbol{g} : V \times V \to \mathbb{R}$, definido neste. Temos que este goza das seguintes propriedades:*

i. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$;

ii. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})$;

iii. $\boldsymbol{g}(\alpha\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$;

iv. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq 0$;

v. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v} = 0$.

Logo da bilinearidade de $\boldsymbol{g}$*, propriedade* (ii) *em conjunto com a* (iii)*, segue que este é um tensor do tipo* $(0,2)$.

1.2.2 Operações Tensoriais

Temos algumas operações de interesse com tensores: contração, produto tensorial, simetrização, anti-simetrização, derivação e produto exterior. Com exceção das duas últimas, que necessitam de uma estrutura de variedades, as demais podem ser definidas em um espaço vetorial qualquer. Vejamos primeiramente a contração.

Definição 1.2.4. *Sejam* $\{\boldsymbol{v}_i\}$ *uma base de* V *e* $\{\boldsymbol{w}^i\}$ *a base dual correspondente, em que* V *é um espaço vetorial* n*-dimensional. Dados* i,j *naturais, com* $1 \leq i \leq k$ *e* $1 \leq j \leq l$*, uma contração é um mapa* $\mathrm{Tr}_{(i,j)} : \mathcal{T}(k,l) \to \mathcal{T}(k-1,l-1)$ *definido por*

$$\mathrm{Tr}_{(i,j)}(\boldsymbol{T}) = \sum_{\sigma=1}^{n} \boldsymbol{T}(...,\boldsymbol{w}^\sigma,...,\boldsymbol{v}_\sigma,...),$$

em que a soma é efetuada, respectivamente, na i*-ésima entrada de vetores duais e na* j*-ésima dos vetores contravariantes.*

Portanto, a contração leva um tensor (k,l) em um do tipo $(k-1,l-1)$. Já o produto tensorial é definido como:

Definição 1.2.5. *Sejam* $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}(k,l)$ *e* $\boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}(k',l')$*. O produto tensorial de* $\boldsymbol{T}$ *com* $\boldsymbol{T}'$*, denotado por* $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}'$*, é um tensor do tipo* $(k+k', l+l')$ *e é definido por*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{u}^{*1},...,\boldsymbol{u}^{*k+k'},\boldsymbol{w}_1,...,\boldsymbol{w}_{l+l'}) =& \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^{*1},...,\boldsymbol{u}^{*k},\boldsymbol{w}_1,...,\boldsymbol{w}_l) \\ & \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{u}^{*k+1},...,\boldsymbol{u}^{*k+k'},\boldsymbol{w}_{l+1},...,\boldsymbol{w}_{l+l'}).\end{aligned}$$

Consequentemente o produto tensorial leva dois tensores (k,l) e (k',l') em um terceiro do tipo $(k+k', l+l')$. O interessante é que podemos definir produto tensorial até entre espaços vetoriais, algo usado na teoria formal da adição do momento angular em mecânica quântica [9].

Do produto tensorial podemos construir um tensor do tipo (k,l) somente com vetores contravariante e covariantes. Como V^{**} é isomorfo a V, pode-se identificar V com $\mathcal{T}(1,0)$. Logo, partindo de uma base em V dada por $\{\boldsymbol{v}_i\}$ e a base dual correspondente $\{\boldsymbol{w}^i\}$ pode-se construir o tensor

$$\boldsymbol{v}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{\mu_k} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_l},$$

que é do tipo (k,l). Além disso, tem-se que o conjunto $\{\boldsymbol{v}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{\mu_k} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_l}\}$ forma uma base em $\mathcal{T}(k,l)$. Por multilinearidade dados quaisquer $\boldsymbol{u}_i \in V$, $\boldsymbol{q}^i \in V^*$ e $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}(k,l)$ tem-se que

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{q}^1,\cdots,\boldsymbol{q}^k,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_l) = q^1_{\mu_1}\cdots q^k_{\mu_k} u_1^{\alpha_1}\cdots u_l^{\alpha_l} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{w}^{\mu_1},\cdots,\boldsymbol{w}^{\mu_k},\boldsymbol{v}_{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{\alpha_l}).$$

Em que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{w}^{\mu_1}, \cdots, \boldsymbol{w}^{\mu_k}, \boldsymbol{v}_{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\alpha_l})$ são as componentes de $\boldsymbol{T}$ na base $\{\boldsymbol{v}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{\mu_k} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_l}\}$, para simplificar a notação coloquemos que

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{w}^{\mu_1}, \cdots, \boldsymbol{w}^{\mu_k}, \boldsymbol{v}_{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\alpha_l}) = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_l}.$$

Consequentemente para todo $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}(k,l)$ existe uma única lista de coeficientes, $\{T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_l}\}$, tal que

$$\boldsymbol{T} = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_l} \boldsymbol{v}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{\mu_k} \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\alpha_l}.$$

Caso a dimensão de V seja n, tem-se que o número de componentes independentes do tensor é n^{k+l}, isto é, $\dim \mathcal{T}(k,l) = n^{k+l}$. Em analogia aos vetores de V e V^*, os índices μ_i são os contravariantes e α_i os covariantes. O *rank* ou ordem de um tensor é o número de índices destes, neste caso o *rank* é $k+l$.

Em termos das componentes, a contração e o produto tensorial são dados por

$$(\mathrm{Tr}_{(i,j)} T)^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_{l-1}} = T^{\mu_1 \cdots \sigma_i \cdots \mu_k}{}_{\alpha_1 \cdots \sigma_j \cdots \alpha_l};$$
$$(T \otimes T')^{\mu_1 \cdots \mu_{k+k'}}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_{l+l'}} = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_l} T'^{\mu_{k+1} \cdots \mu_{k'}}{}_{\alpha_{l+1} \cdots \alpha_{l'}}.$$

Note que as operações dadas não são escritas em nenhuma base especial, ou seja, as definições dadas são válidas em qualquer sistema de coordenadas. A seguir, temos como exemplo de um tensor em termos das suas componentes o tensor de Levi-Civita.

Exemplo 1.2.3. *Seja $M(n \times n)$ o espaço das matrizes quadradas reais de ordem n. Consideremos cada linha da matriz como um vetor em $\mathbb{R}^n$, assim o determinante pode ser visto como um tensor $\boldsymbol{\epsilon} : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, isto é, um tensor do tipo $(0,n)$. Em que:*

$$\det(A) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n),$$

tal que $\boldsymbol{v}_j$ é a j-ésima linha da matriz $A \in M(n \times n)$. Em termos de suas componentes temos que

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} v_1^{\mu_1} \cdots v_n^{\mu_1}.$$

Em termos de uma base ortonormal e positiva temos que $\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n}$, em que $\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ é o símbolo de Levi-Civita, sendo este definido por

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = (-1)^N,$$

sendo N o número de permutações de $(1, 2, 3, \cdots, n)$ necessárias para se obter $(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ e $\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} = 0$ caso haja índices repetidos. Devido a esta anti-simetria temos que $\det(A)$ possui somente $n!$ termos distintos. O determinante também é denominado tensor de Levi-Civita, a expressão para este em uma base qualquer será deduzida no Capítulo 2, Seção 2.2.

Fisicamente define-se um tensor como todo objeto de vários índices que se transforma como um vetor. Vejamos então a mudança de base em tensores. Seja Λ uma matriz de mudança de base em um espaço vetorial V, temos as seguintes relações para todo $\boldsymbol{u} \in V$ e $\boldsymbol{q} \in V^*$

$$u'^{\mu} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha} u^{\alpha} \qquad \text{e} \qquad q'^{*}_{\mu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu'} q^{*}_{\alpha}.$$

Dada as bases $\{\boldsymbol{v}_\mu\}$ de V e $\{\boldsymbol{w}^\mu\}$ de V^*, as novas bases, obtidas por meio das relações acima, são $\{\boldsymbol{v}'_\mu\}$ e $\{\boldsymbol{w}'^{\mu}\}$. Sendo assim, um tensor $\boldsymbol{T}$ do tipo (k,l) na nova base é

$$\boldsymbol{T}' = T'^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\alpha_1 \cdots \alpha_l} \boldsymbol{v}'_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}'_{\mu_k} \otimes \boldsymbol{w}'^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}'^{\alpha_l}.$$

Usando as transformações de mudança de base e a definição das componentes de $\boldsymbol{T}$ temos que

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\gamma_1}\cdots\Lambda^{\mu'_k}{}_{\gamma_k}\Lambda^{\rho_1}{}_{\alpha'_1}\cdots\Lambda^{\rho_l}{}_{\alpha'_l}T^{\gamma_1\cdots\gamma_k}{}_{\rho_1\cdots\rho_l}. \tag{1.2}$$

Que é a definição física de tensores, portanto esta e a definição algébrica dada previamente são análogas. A Equação (1.2) é denominada Lei de Transformação dos Tensores. Para que uma aplicação $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots\alpha_l}$ seja um tensor é necessário que satisfaça esta regra.

1.2.3 Simetrias

Para finalizar tensores discutiremos a simetrização destes. Consideremos primeiramente um tensor $\boldsymbol{T}$ do tipo $(0,2)$, isto é, um tensor totalmente contravariante de *rank* 2. Podemos construir dois tensores a partir deste:

$$T_{(\mu\alpha)} = \frac{T_{\mu\alpha} + T_{\alpha\mu}}{2};$$

$$T_{[\mu\alpha]} = \frac{T_{\mu\alpha} - T_{\alpha\mu}}{2}.$$

O tensor $T_{(\mu\alpha)}$ é simétrico, isto é, qualquer troca nos seus índices não altera o valor da componente. Contudo, $T_{[\mu\alpha]}$ é anti-simétrico, *i.e.*, trocando os seus índices invertemos o sinal da componente. Sendo assim temos que todo tensor do tipo $(0,2)$ pode ser escrito como uma soma de um tensor simétrico com outro anti-simétrico[2], neste caso,

$$T_{\mu\alpha} = T_{(\mu\alpha)} + T_{[\alpha\mu]}.$$

Podemos generalizar esta noção de simetria para tensores de *ranks* superiores. Consideremos agora um tensor $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}(0,p)$. Sendo assim definamos dois tensores

$$T_{(\mu_1\cdots\mu_p)} = \frac{\sum_\sigma T_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}}}{p!};$$

$$T_{[\mu_1\cdots\mu_p]} = \frac{\sum_\sigma \varepsilon_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} T_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}}}{p!}.$$

Em que as somas são realizadas sob todas as permutações σ da lista $(\mu_1,\cdots,\mu_p)$. Temos que $T_{(\mu_1\cdots\mu_p)}$ é um tensor totalmente simétrico, sendo assim qualquer troca nos índices não altera o valor da componente. Todavia $T_{[\mu_1\cdots\mu_p]}$ é um tensor totalmente anti-simétrico, pois uma permutação par dos seus índices não troca o sinal da componente, porém uma permutação ímpar o faz. Como dito no Exemplo 1.2.3, um tensor totalmente anti-simétrico do tipo $(0,p)$ possui $p!$ componentes distintas em módulo. O tensor $T_{[\mu_1\cdots\mu_p]}$ é denominado tensor alternado de $\boldsymbol{T}$, sendo este denotado por $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{T})$.

Quando índices de um tensor tiverem entre parênteses temos que este é totalmente simétrico nestes índices, caso estejam entre colchetes então o tensor é totalmente anti-simétrico nestes. As vezes não há um só tipo de simetria em um dado tensor. Por exemplo, o tensor $T_{(\mu_1\mu_2)}{}^{\mu_3[\mu_4\mu_5]\mu_6}$ é anti-simétrico em relação à μ_4 e μ_5 e simétrico em μ_1 e μ_2.

[2]Fato este que não é generalizável para tensores de *ranks* superiores, dado que a simetrização e anti-simetrização não contém toda a informação do tensor.

1.3 Geometria Diferencial

A geometria iniciou-se na Grécia antiga com o estudo de figuras planas, porém esta baseava-se fortemente em construções geométricas. Todavia nos séculos XVIII e XIX, com o advento do cálculo infinitesimal, floresceu a geometria diferencial na sua forma moderna, entre os seus pioneiros estavam Gaspard Monge (1746-1818), este considerado o pai da área [7]. O ponto máximo foi atingido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) com o seu trabalho em superfícies [10].

Entretanto, na geometria clássica, quando se define uma superfície geralmente supõe-se a existência de uma espaço de dimensão superior, $\mathbb{R}^n$, no qual ela está imersa. Logo buscou-se uma maneira de definir superfícies, ou mesmo entes de dimensão maior, sem a necessidade do espaço exterior ou ainda de um sistema de coordenadas fixo, como por exemplo o cartesiano. Neste contexto surgiu a geometria riemanniana, que iniciou-se com Bernhard Riemann (1826-1866) [11].

1.3.1 Variedades Diferenciáveis

As variedades diferenciáveis são basicamente uma maneira de se definir conjuntos que sejam localmente semelhantes ao espaço euclidiano usual, contudo sejam distintos deste globalmente [5]. Temos então que

Definição 1.3.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de mapas injetivos $\boldsymbol{\psi}_\alpha : U_\alpha \to M$, nos quais U_α é um aberto de $\mathbb{R}^n$ dada a topologia usual, que satisfazem as seguintes condições*

i. $\cup_\alpha \boldsymbol{\psi}_\alpha(U_\alpha) = M$;

ii. Para todo par α, μ *tal que* $\boldsymbol{\psi}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{\psi}_\mu(U_\mu) = W \neq \emptyset$, *os conjuntos* $\boldsymbol{\psi}_\alpha^{-1}(W)$ *e* $\boldsymbol{\psi}_\mu^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e o mapa* $\boldsymbol{\psi}_\mu^{-1} \circ \boldsymbol{\psi}_\alpha$ *é* C^∞;

iii. A família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{\psi}_\alpha)\}$ *é maximal relativa as condições* (i) *e* (ii).

Dado $p \in M$, o mapa $\boldsymbol{\psi}_\alpha : U_\alpha \to M$, com $p \in \boldsymbol{\psi}_\alpha(U_\alpha)$, é denominado parametrização ou sistema de coordenadas de M no ponto p e $\boldsymbol{\psi}_\alpha(U_\alpha)$ de vizinhança coordenada. Da Definição 1.3.1 temos que $\{(U_\alpha, \boldsymbol{\psi}_\alpha)\}$ induz uma estrutura diferenciável e, além disso, topológica em M. No caso $n = 2$ obtém-se o caso particular de superfícies. A terceira propriedade está ali puramente por razões técnicas, pois assim incluímos todos os mapas que dão origem a mesma variedade em M, e podemos retirá-la que não haverá muita alteração na definição dada.

A propriedade (ii) expressa que a mudança de coordenadas é diferenciável. O interessante é que no caso de superfícies no $\mathbb{R}^3$ podemos deixar de defini-la, contudo supõe-se então que $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ é um difeomorfismo, e então podemos obtê-la como um teorema [12]. No presente texto consideraremos somente variedades diferenciáveis que são espaços de Hausdorff e para-compactas, pois nestas podemos definir uma métrica em M [13]. A seguir temos exemplos de variedades.

Exemplo 1.3.1. *Existem variedades com somente uma parametrização, neste caso dizemos que o sistema de coordenadas é global. O exemplo mais trivial é o $\mathbb{R}^n$. Para verificar isto basta utilizar o mapa identidade $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pois este satisfaz as propriedades $(i) - (ii)$. Além disso, temos que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ também é uma variedade diferenciável.*

Exemplo 1.3.2. *Sejam M e M' variedades com as suas respectivas estruturas diferenciáveis $\{(U_\alpha, \boldsymbol{\psi}_\alpha)\}$ e $\{(U'_\alpha, \boldsymbol{\psi}'_\alpha)\}$. Então $M \times M'$ é uma variedade, para isso basta utilizar a família $\{(U_\alpha \times U'_\alpha, (\boldsymbol{\psi}_\alpha, \boldsymbol{\psi}'_\alpha))\}$.*

Dadas duas variedades M e M' podemos definir uma aplicação entre elas $\boldsymbol{f} : M \to M'$. Contudo, pode-se questionar que caso $\boldsymbol{f}$ seja diferenciável em uma parametrização de M se esta continua diferenciável em outro sistema de coordenadas. Para contornar este problema temos a seguinte definição:

Definição 1.3.2. *Sejam M e M' duas variedades, com as respectivas estruturas diferenciáveis $\{(U_\alpha, \boldsymbol{\psi}_\alpha)\}$ e $\{(U'_\alpha, \boldsymbol{\psi}'_\alpha)\}$, e $\boldsymbol{f} : M \to M'$. Então, $\boldsymbol{f}$ é dita diferenciável se para todos os α, β temos que $\boldsymbol{\psi}'^{-1}_\alpha \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\psi}_\beta$ é diferenciável.*

O conjunto de todas as funções diferenciáveis definidas em M com contradomínio em $\mathbb{R}$, também denominadas campos escalares, será denotado por $\mathcal{F}$. Exemplos importantes são difeomorfismos entre variedades, mais especificamente isometrias e aplicações conformes.

Uma variedade diferenciável não possui necessariamente a estrutura de um espaço vetorial, logo o conceito de vetor em M não é trivial de ser dado. Todavia pode-se pensar nestes como deslocamentos infinitesimais em um espaço tangente. Porém, antes de entrarmos em detalhes analisemos a derivada direcional no $\mathbb{R}^n$. Esta pode ser definida como a projeção do gradiente de um campo escalar f na direção de um vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, ou seja

$$\mathrm{D}f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X}_0) = v^k \frac{\partial f}{\partial x^k}(\boldsymbol{X}_0).$$

Consequentemente poderíamos definir um operador derivativo ao longo de $\boldsymbol{v}$ por meio da seguinte relação:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.3}$$

Portanto, em uma variedade, considera-se que um vetor tangente é uma derivada direcional de um campo escalar definido na variedade, o que é análogo a Equação 1.3. Consequentemente define-se [13]:

Definição 1.3.3. *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Um vetor tangente $\boldsymbol{v}$ a M no ponto p é um mapa $\boldsymbol{v} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que é linear e goza da regra de Leibniz, isto é, dados $f, g \in \mathcal{F}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ temos*

i. $\boldsymbol{v}(af + g) = a\boldsymbol{v}(f) + \boldsymbol{v}(g)$;

ii. $\boldsymbol{v}(fg) = f\boldsymbol{v}(g) + g\boldsymbol{v}(f)$.

Das propriedades acima temos que sendo h uma constante, então $\boldsymbol{v}(h) = 0$. Denota-se por T_pM o conjunto de todos os vetores tangentes a variedade no ponto p e este denomina-se espaço tangente. Sejam $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in T_pM$ e $a \in \mathbb{R}$, pode-se definir as seguintes operações:

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)(f) = \boldsymbol{v}_1(f) + \boldsymbol{v}_2(f);$$
$$(a\boldsymbol{v}_1)(f) = a\boldsymbol{v}_1(f).$$

Logo T_pM é um espaço vetorial e além disso com a mesma dimensão de M. Para provar a última afirmação basta construir uma base em T_pM. Definamos uma curva na variedade como uma aplicação $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ que é diferenciável. Temos que a derivada de $f \in \mathcal{F}$ ao longo da curva γ é

$$\frac{d(f(\gamma))}{dt} = \frac{d\gamma^\mu}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}.$$

Em analogia com a Equação 1.3 temos que o vetor tangente a curva, denotado por $\boldsymbol{v}$ é definido por

$$\boldsymbol{v}(f) = \frac{d(f(\gamma))}{dt}.$$

O que nos dá a seguinte equação

$$\boldsymbol{v} = v^{\mu}\partial_{\mu}.$$

Em que ∂_{μ} é a derivada parcial em relação a x^{μ}. Portanto, uma base natural em T_pM é $\{\partial_{\mu}\}$ e esta possui n elementos. Uma representação da ideia aqui utilizada está expressa na Figura 1.2.

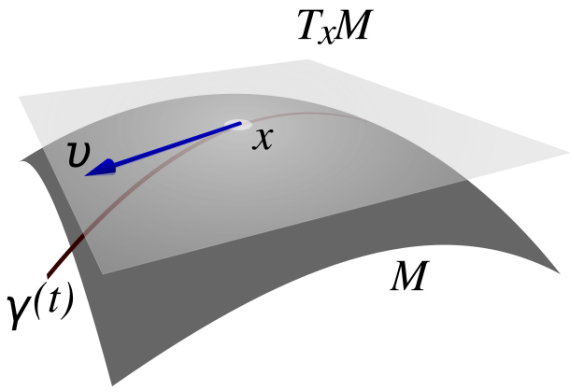


Figura 1.2: Representação pictórica do espaço tangente a uma variedade M em um ponto $x \in M$ e o vetor tangente a uma curva $\boldsymbol{\gamma}$ [14].

Da equação anterior obtém-se que mudando a parametrização de M o vetor tangente nas novas coordenadas é dado por meio da seguinte transformação tensorial

$$v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} v^{\alpha}.$$

Denomina-se o dual de T_pM, denotado por T_p^*M, como o espaço cotangente à variedade M em p. Os seus vetores são denominados vetores duais ou contravariantes e a equação de mudança de base destes é

$$v'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} v_{\alpha}.$$

A base dual de T_p^*M é denotada por $\{\boldsymbol{d}x^{\mu}\}$. Claramente o espaço cotangente é n-dimensional.

Dada uma variedade, não é qualquer subconjunto $U \subset M$ desta que também é uma variedade, ou neste caso, subvariedade, para isso é necessário que U tenha uma estrutura diferenciável. Para definirmos uma subvariedade em M é necessário três conceitos: função inclusão, imersão e mergulho.

Definição 1.3.4. *Seja $B \subset A$. Uma inclusão é um mapa injetivo $f : B \to A$ tal que $f(b) = b$, $\forall b \in B$.*

Basicamente o mapa inclusão nos fornece uma maneira formal de colocar um conjunto dentro de outro. Caso $B = A$ então a inclusão é o mapa identidade. Um mergulho é definido como:

Definição 1.3.5. *Sejam M e N variedades de dimensão n e p, respectivamente, tal que $p \leq n$. Uma imersão $\phi : N \to M$ é um mapa diferenciável, tal que $\mathrm{D}\phi_p : T_pN \to T_{\phi(p)}M$ é injetiva para todo $p \in N$.*

Caso ϕ exista, N é dita imersa em M, o que significa que para todo vetor tangente de T_pN ou T_p^*N existe um único correspondente em $T_{\phi(p)}M$ ou $T_{\phi(p)}^*M$. Contudo, um mergulho transfere as propriedades topológicas de uma variedade para outra.

Definição 1.3.6. *Sejam M e N variedades diferenciáveis com $\dim M \leq \dim N$. Caso $\phi : N \to M$ seja uma imersão e um homeomorfismo com $\phi(N)$, então ϕ é uma mergulho.*

Por fim, podemos definir subvariedades:

Definição 1.3.7. *Sejam M e N variedades com $\dim N \leq \dim M$ e $N \subset M$. Se o mapa inclusão $i : N \to M$ for um mergulho então N é uma subvariedade de M.*

Consequentemente, uma subvariedade possui a estrutura diferenciável e topológica da variedade original. Uma aplicação destes conceitos é o Teorema de Whitney, que afirma basicamente que toda variedade de Hausdorff pode ser imersa e mergulhada em algum $\mathbb{R}^m$, mais precisamente [5, 15]:

Teorema 1.3.1. *Toda variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável de dimensão n pode ser imersa em $\mathbb{R}^{2n}$ e mergulhada em $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Dados os espaços tangente e cotangente podemos definir vários campos sobre M. Contudo, definamos antes os fibrados tangente e cotangente. Estes nos dão uma maneira de juntar todos os espaços tangentes e cotangentes.

Definição 1.3.8. *O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável M é o conjunto*

$$TM = \{(p, \boldsymbol{v}); p \in M \text{ e } \boldsymbol{v} \in T_pM\}.$$

Analogamente o fibrado cotangente de M, denotado por T^*M, é

$$T^*M = \{(p, \boldsymbol{v}); p \in M \text{ e } \boldsymbol{v} \in T_p^*M\}.$$

Com isso, podemos definir uma série de campos em M:

Definição 1.3.9. *Um campo de vetores contravariantes diferenciáveis $\boldsymbol{v}$ em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $\boldsymbol{v} : M \to TM$, isto é, que associa cada ponto $p \in M$ um vetor $\boldsymbol{v} \in T_pM$ diferenciável.*

Definição 1.3.10. *Um campo de vetores covariantes diferenciáveis $\boldsymbol{v}$ em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $\boldsymbol{v} : M \to T^*M$, isto é, que associa cada ponto $p \in M$ um vetor $\boldsymbol{v} \in T_p^*M$ diferenciável.*

Definição 1.3.11. *Um campo de tensores $\boldsymbol{T}$ do tipo (k, l) diferenciáveis em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $\boldsymbol{T} : M \to \mathcal{T}_M(k, l)$, isto é, que associa cada ponto $p \in M$ um tensor $\boldsymbol{T} : (T_p^*M)^k \times (T_pM)^l \to \mathbb{R}$ diferenciável. Em que $\mathcal{T}_M(k, l)$ é o conjunto de todos os campos tensoriais do tipo (k, l) definidos em M.*

Temos que $\mathcal{T}_M(1, 0) = TM$ e $\mathcal{T}_M(0, 1) = T^*M$, logo os campos tensoriais são uma generalização dos campos covariantes e contravariantes.

1.3.2 Tensor Métrico e Isomorfismo Musical

Na geometria de superfícies no $\mathbb{R}^3$ surge naturalmente uma forma quadrática no cálculo do produto interno de vetores no plano tangente, esta é denominada primeira forma fundamental. Todas as propriedades intrínsecas da superfície podem ser escritas em termos desta forma, todavia esta surge devido a presença do espaço externo no qual a superfície está imersa [12]. Portanto, se a primeira forma fundamental fosse definida *a priori* todas as características da superfícies seriam dedutíveis desta e a presença do $\mathbb{R}^3$ seria descartável. Por este motivo, na geometria riemanniana, dada uma variedade definimos um campo tensorial de *rank* 2 sobre esta, que cumpre o papel análogo a primeira forma fundamental: o tensor métrico. Com este computaremos a curvatura de Riemann, os símbolos de Christoffel, entre outros.

O tensor métrico é um campo tensorial $\boldsymbol{g} \in \mathcal{T}_M(0,2)$. Formalmente, em cada ponto da variedade, este nos dá o produto interno entre dois vetores de T_pM, portanto, por definição, este goza das seguintes propriedades, dados quaisquer $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in T_pM$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}); \\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0 \text{ com } \boldsymbol{v} \neq 0 \text{ então } \boldsymbol{u} = 0. \end{aligned}$$

Isto é, $\boldsymbol{g}$ é simétrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, e não degenerado. Em termos das componentes, este é escrito como

$$\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu}\, \boldsymbol{d}x^\mu \otimes \boldsymbol{d}x^\nu.$$

Dado o Teorema Espectral e a Lei da Inércia de Sylvester é sempre possível encontrar uma base em T_pM tal que $\boldsymbol{g}$ seja ortogonal, pelo menos localmente, [8]

$$g_{\mu\nu} = \pm\delta_{\mu\nu},$$

em que $\delta_{\mu\nu}$ é o delta de Kronecker. O sinal do determinante da forma ortonormal de $g_{\mu\nu}$ é denominada assinatura da métrica de M. Métricas com assinatura positiva cuja forma ortogonal possui todos os elementos positivos, são ditas riemannianas e quando $g_{11} = -1$, com as demais componentes sendo positivas, estas são denominadas lorentzianas.

Claramente T_pM e T_p^*M são isomorfos, pois têm a mesma dimensão, todavia a construção do isomorfismo depende, geralmente, da base dada. Uma maneira de contornar este problema é utilizando o isomorfismo musical, sendo este naturalmente induzido pela métrica.

Definição 1.3.12. *Seja M uma variedade diferenciável com $p \in M$. Dado $\boldsymbol{w} \in T_pM$, o isomorfismo musical $\flat : T_pM \to T_p^*M$ é definido por*

$$\flat\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}), \forall \boldsymbol{u} \in T_p^*M.$$

A inversa deste isomorfismo é a aplicação $\sharp : T_p^*M \to T_pM$.

O fato de $\flat$ ser um isomorfismo decorre diretamente da não degenerescência da métrica. A partir da definição tem-se que a ação de $\flat$ em um vetor $\boldsymbol{w}$, em uma base qualquer, é dada por

$$w_\mu = g_{\mu\nu} w^\nu.$$

Em que w_μ são as componentes de $\flat\boldsymbol{w}$, assim indicaremos o dual de um vetor qualquer v^μ por v_μ, deixando, portanto, implícito que este foi calculado utilizando-se o isomorfismo musical. Seja $\boldsymbol{w} \in T_p^*M$, então $\sharp\boldsymbol{w}$ em termos das componentes é

$$w^\mu = (g^{-1})^{\mu\nu} w_\nu.$$

Indicaremos $(g^{-1})^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$, consequentemente é obtido as seguintes relações

$$w_\mu = g_{\mu\nu}w^\nu;$$
$$w^\mu = g^{\mu\nu}w_\nu.$$

Em que a relação entre $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ é

$$g^{\nu\mu}g_{\mu\alpha} = \delta^\nu{}_\alpha.$$

Ou seja, $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ são matrizes inversas, portanto $g^{\mu\nu}$ sempre existe, pois $\boldsymbol{g}$ tem determinante não nulo. Logo $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ podem ser vistos, respectivamente, como tensores que abaixam e levantam índices. Para índices em tensores basta utilizar $\boldsymbol{g}$ para cada índice que se deseja alterar. Um exemplo de uma operação do tipo está dado à seguir.

Exemplo 1.3.3. *Seja T um tensor do tipo $(3,2)$ dado por $T^{ab}{}_{cd}{}^{e}$. Vamos obter o tensor $T_{abc}{}^{de}$. Primeiramente abaixemos os índices a e b:*

$$T_{abcd}{}^{e} = g_{a\mu}g_{b\nu}T^{\mu\nu}{}_{cd}{}^{e}.$$

Agora basta subir o índice d:

$$T_{abc}{}^{de} = g^{d\gamma}T_{abc\gamma}{}^{e}$$

Sendo assim temos

$$T_{abc}{}^{de} = g^{d\gamma}g_{a\mu}g_{b\nu}T^{\mu\nu}{}_{c\gamma}{}^{e}.$$

Utilizando a métrica, o traço de um tensor $A^{\mu\nu}$ seria

$$A = A^\mu{}_\mu, \qquad \textit{ou seja,} \qquad A = g_{\mu\nu}A^{\mu\nu}.$$

1.4 Conexão de Levi-Civita

Toda teoria física pode ser expressa por meio de uma equação diferencial, seja ela parcial, ordinária ou ainda diferencial-integral. Sendo assim, vamos construir a partir da derivada parcial usual um operador diferencial em uma variedade n-dimensional M, sendo que a principal linha de pensamento a seguir é fazer com que este seja independente do sistema de coordenadas. Este operador derivativo foi desenvolvido primeiramente por Tulio Levi-Civita e Gregorio Ricci-Curbastro na construção de um cálculo diferencial absoluto [16].

1.4.1 Operador derivativo

Todo operador derivativo deve satisfazer algumas condições básicas, como por exemplo ser linear, satisfazer a regra de Leibniz, ser consistente com a noção de vetor tangente, entre outros. Portanto, defini-lo-emos como aquele que cumpre essas condições e ainda leva um campo tensorial $\mathcal{T}_M(k,l)$ em outro campo $\mathcal{T}_M(k,l+1)$, o que seria análogo ao gradiente no $\mathbb{R}^n$ que transforma campos escalares em vetores. Portanto, temos:

Definição 1.4.1. *Dados $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_M(k,l)$, $\boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}_M(k',l')$ e $f \in \mathcal{F}$, o operador derivativo $\nabla : \mathcal{T}_M(k,l) \to \mathcal{T}_M(k,l+1)$ é uma aplicação que goza das seguintes propriedades*

i. Linearidade:

$$\nabla(\alpha\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}') = \alpha\nabla\boldsymbol{T} + \nabla\boldsymbol{T}', \forall\alpha \in \mathbb{R};$$

ii. Regra de Leibniz:

$$\nabla(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T}')=\nabla\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{T}'+\boldsymbol{T}\otimes\nabla\boldsymbol{T}';$$

iii. Comuta com a contração:

$$\mathrm{Tr}_{(i,j)}(\nabla\boldsymbol{T})=\nabla(\mathrm{Tr}_{(i,j)}\boldsymbol{T});$$

iv. Dado $\boldsymbol{t}\in V_p$ temos que

$$\boldsymbol{t}(f)=t^a\nabla_a f;$$

v. Livre de torção:

$$\nabla_b\nabla_a f=\nabla_a\nabla_b f.$$

As propriedades $(i)-(iv)$ são razoáveis de serem impostas, embora a última não seja necessária. Caso não a colocássemos existiria um tensor antissimétrico $T^c_{\ [ab]}$, denominado torção, tal que [13]

$$(\nabla_a\nabla_b-\nabla_b\nabla_a)f=T^c_{\ ab}\nabla_c f.$$

Contudo, no presente trabalho, consideraremos que este tensor é nulo.

Existem vários operadores derivativos que satisfazem a definição, contudo $\nabla\boldsymbol{T}$ deve ser um tensor, logo ∇ deve se transformar via Lei de Transformações dos Tensores. Consideremos primeiramente a derivada usual ∂_a, esta não se transforma como um tensor. De fato, seja $\boldsymbol{t}$ um campo contravariante e (x'^a) um novo sistema de coordenadas, logo

$$\partial'_b t'^a=\frac{\partial x'^a}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^b}\partial_\rho t^\nu+\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^b}\frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^\rho x^\nu}t^\nu. \tag{1.4}$$

O primeiro termo da Equação (1.4) é o que esperaríamos caso ∂_a se transformasse como um tensor, todavia devido ao termo extra esta não é um tensor[3].

Portanto, vamos construir um operador derivativo, a partir de ∂_a que satisfaça as propriedades $(i)-(v)$. Da condição (iv) obtemos que a ação de ∇ e ∂_a em um campo escalar f é mesma, isto é,

$$t^a\partial_a f=t^a\nabla_a f.$$

Portanto,

$$(\partial_a-\nabla_a)f=0. \tag{1.5}$$

Consideremos agora um campo tensorial de *rank* superior, mais precisamente um campo covariante w_b. A diferença $(\partial_a-\nabla_a)w_b$ é linear e, além disso, só depende do valor de w_b no ponto p em que se calcula a derivada. Para provar isso basta considerar dois campos covariantes distintos w e v, porém iguais em p. Temos que

$$\begin{aligned}&\nabla_a(v_b-w_b)=0;\\&\partial_a(v_b-w_b)=0.\end{aligned}$$

Subtraindo uma equação da outra é obtido que

$$(\partial_a-\nabla_a)w_b=(\partial_a-\nabla_a)v_b,$$

provando a afirmação anterior. Além disso, para todo $f\in\mathcal{F}$ tem-se que

$$(\partial_a-\nabla_a)(fw_b)=f(\partial_a-\nabla_a)w_b.$$

[3]A não ser que a curvatura de Riemann seja nula em toda a variedade.

Portanto, existe uma lista de coeficientes $C^c{}_{ab}$, não necessariamente um tensor, tal que

$$(\partial_a - \nabla_a)w_b = C^c{}_{ab}w_c.$$

Logo, o operador derivativo desejado, aplicado em um campo $\boldsymbol{w} \in T^*M$, é

$$\nabla_a w_b = \partial_a w_b - C^d{}_{ab}w_d. \tag{1.6}$$

Vejamos agora como derivar um campo contravariante t^a. Consideremos o escalar da forma $f = t^b w_b$, então, da Equação 1.5, é obtido que

$$(\partial_a - \nabla_a)(t^b w_b) = 0.$$

Utilizando a regra de Leibniz, propriedade (ii), e a Equação 1.6 tem-se que

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + C^b{}_{ad}t^d. \tag{1.7}$$

Para encontrar a derivada de um campo tensorial do tipo (k, l) basta utilizar um escalar da forma $f = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots\alpha_l}t^{\alpha_1}\cdots t^{\alpha_l}w_{\mu_1}\cdots w_{\mu_k}$, a regra de Leibniz e as Equações 1.6 e 1.7 obtém-se

$$\nabla_a T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} = \partial_a T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} + \sum_{j=1}^{k} C^{\mu_j}{}_{ad}T^{\mu_1\cdots d\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots\alpha_l} - \sum_{j=1}^{l} C^d{}_{a\alpha_j}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\alpha_1\cdots d\cdots\alpha_l}. \tag{1.8}$$

Consequentemente, o operador derivativo ∇ é totalmente descrito dado os coeficientes $C^d{}_{ab}$. A princípio $C^b{}_{ad}$ tem n^3 componentes independentes em uma variedade n-dimensional. Contudo, este é parcialmente simétrico, reduzindo assim este número. De fato, consideremos um campo contravariante dado por $w = \nabla f$, em que f é um campo escalar. Utilizando a Equação 1.6 temos que

$$\nabla_a\nabla_b f = \partial_a\partial_b f - C^d{}_{ab}\partial_d f;$$
$$\nabla_b\nabla_a f = \partial_b\partial_a f - C^d{}_{ba}\partial_d f.$$

Subtraindo as duas equações anteriores e fazendo uso da propriedade (v) segue que

$$C^d{}_{ab} = C^d{}_{ba}.$$

Consequentemente $C^d{}_{ab}$ tem $n^2(n+1)/2$ componentes independentes. Somente com as condições dadas não há como definir de maneira única os coeficientes $C^d{}_{ab}$, para isso é necessário a noção de derivada covariante e transporte paralelo que será abordado a seguir.

1.4.2 Derivada Covariante e Transporte Paralelo

Em analogia à aplicação de vetores tangentes em campos escalares, definimos a derivada de um campo tensorial ao longo de um campo contravariante como:

Definição 1.4.2. *Seja M uma variedade diferenciável com um operador derivativo ∇ definida nesta e $\boldsymbol{t}$ um campo vetorial contravariante. Então, a derivada de um campo $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_M(k, l)$ ao longo do campo de vetores $\boldsymbol{t}$, denotada por $\nabla_t\boldsymbol{T}$, é*

$$\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{T} = \mathrm{Tr}_{(1,2)}(\boldsymbol{t}\otimes\nabla\boldsymbol{T}).$$

Em termos das componentes esta pode ser dada pela seguintes expressões

$$\nabla_t T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = t^c\nabla_c T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l};$$

$$\nabla_t T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = t^c\partial_c T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} + \sum_{j=1}^{k} C^{a_j}{}_{cd}T^{a_1\cdots d\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}t^c - \sum_{j=1}^{l} C^d{}_{cb_j}T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots d\cdots b_l}t^c.$$

Decorre diretamente da definição o seguinte lema:

Lema 1.4.1. *Sejam $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in TM$, $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}_M(k,l)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então o operador derivativo goza das seguintes propriedades:*

i. Linearidade em relação as entradas inferiores:

$$\nabla_{\alpha\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}\boldsymbol{T} = \alpha\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T} + \nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{T};$$

ii. Linearidade em relação as entradas superiores:

$$\nabla_{\boldsymbol{u}}(\alpha\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}') = \alpha\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{T}'.$$

Como vemos na Definição 1.4.2 a derivada de $\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{T}$ não depende de todo o campo $\boldsymbol{t}$, somente do valor deste no ponto a ser derivado. Consequentemente pode-se definir o operador $\nabla_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{T}$ somente ao longo de uma curva, o que origina o conceito de derivada covariante.

Definição 1.4.3. *Sejam I um aberto na reta, M uma variedade diferenciável, $\boldsymbol{\gamma} : I \to M$ uma curva em M dada pelo parâmetro τ e com vetor tangente definido por $t^a = \gamma'^a(\tau)$. Então, a derivada covariante de um campo tensorial $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_M(k,l)$ ao longo da curva $\boldsymbol{\gamma}$, isto é, a derivada de $(\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{\gamma})(\tau)$ é*

$$\frac{D\boldsymbol{T}}{d\tau} = \nabla_{\boldsymbol{t}(\tau)}\boldsymbol{T},$$

ou em termos das componentes

$$\frac{D}{d\tau}T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = t^c\partial_c T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} + \sum_{j=1}^{k} C^{a_j}{}_{cd}T^{a_1\cdots d\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}t^c - \sum_{j=1}^{l} C^{d}{}_{cb_j}T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots d\cdots b_l}t^c,$$

ou ainda[4]

$$\frac{D}{d\tau}T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} = \frac{d}{d\tau}T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} + \sum_{j=1}^{k} C^{a_j}{}_{cd}T^{a_1\cdots d\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}t^c - \sum_{j=1}^{l} C^{d}{}_{cb_j}T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots d\cdots b_l}t^c.$$

Consequentemente, a derivada covariante pode ser vista como um operador linear que leva $\mathcal{T}(k,l)$ em $\mathcal{T}(k,l)$, isto é, esta mantém o *rank* do campo tensorial, ao contrário de ∇. Intuitivamente a derivada covariante pode ser interpretada como a variação do campo $\boldsymbol{T}$ do ponto de vista de um observador na variedade M ao longo da curva $\boldsymbol{\gamma}$. No $\mathbb{R}^3$ isto é bem claro, pois neste caso a derivada covariante é a projeção da derivada total do campo no plano tangente da superfície [12].

Para definir de maneira única os coeficientes $C^d{}_{ab}$ é utilizada a ideia de transporte paralelo, logo definamos este:

Definição 1.4.4. *Sejam I um aberto na reta, M uma variedade diferenciável, $\boldsymbol{\gamma} : I \to M$ uma curva em M dada pelo parâmetro τ e com vetor tangente definido por $t^a = \gamma'^a(\tau)$. Então o campo tensorial $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_M(k,l)$ é dito paralelo em um ponto se*

$$\frac{D\boldsymbol{T}}{d\tau} = 0,$$

neste ponto. Caso $\boldsymbol{T}$ seja paralelo em todo ponto de $\boldsymbol{\gamma}$ dizemos que este é transportado paralelamente ao longo da curva.

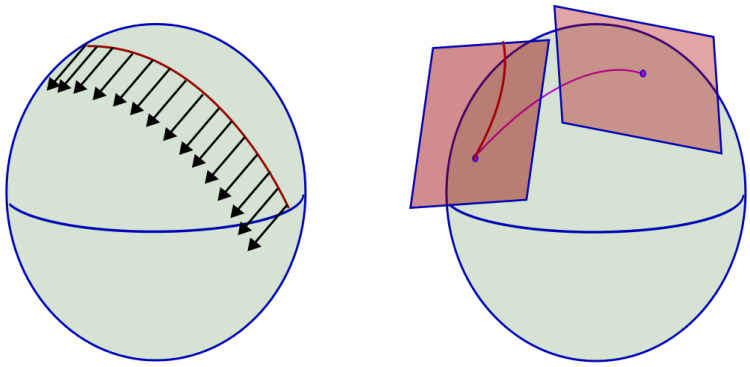
[4]Para esta passagem basta utilizar a regra da cadeia.

Um campo transportado paralelamente ao longo de uma curva pode ser interpretado, do ponto de vista de um observador na curva, como constante. Dado um vetor tangente temos um único transporte paralelo deste ao longo de uma curva. De fato:

Teorema 1.4.1. *Sejam I um aberto na reta, M uma variedade diferenciável, $\boldsymbol{\gamma} : I \to M$ uma curva em M dada pelo parâmetro τ e com vetor tangente definido por $t^a = \gamma'^a(\tau)$. Consideremos que um vetor $\boldsymbol{w}_0 \in V_p$ seja paralelo em $\boldsymbol{\gamma}$. Então, existe um único transporte paralelo $\boldsymbol{w}$ de $\boldsymbol{w}_0$.*

Para provar o Teorema 1.4.1 basta utilizar o Teorema da Existência e Unicidade da Solução de um Sistema de Equações Diferenciais [17].

Como um vetor define somente um transporte paralelo ao longo de uma curva podemos usá-lo para ligar diferentes espaços tangentes por meio de uma aplicação bijetora. Por este motivo, o operador ∇ é denominado também de conexão, pois este conecta os espaços tangentes de uma variedade, como exemplificado na Figura 1.3. Claramente o transporte paralelo de w_0 depende, em geral, da curva dada. Quando isto não ocorre dizemos que a curvatura do espaço é nula e consequentemente os coeficientes $C^d_{\ ab}$ são todos nulos [13].



(a) (b)

Figura 1.3: Representação do transporte paralelo em uma esfera (a) e do conceito de conexão (b) [18].

Com as condições dadas não há como definir de maneira única os coeficientes $C^d_{\ ab}$ e cada conjunto delas nos dá uma conexão diferente. Contudo, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.4.2. *Sejam I um aberto na reta, M uma variedade, $\boldsymbol{\gamma} : I \to M$ uma curva qualquer em M e $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$ campos contravariantes quaisquer transportados paralelamente em $\boldsymbol{\gamma}$. Caso o produto interno de $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, isto é, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, seja constante ao longo de $\boldsymbol{\gamma}$ então a conexão ∇ é única e é denominada conexão de Levi-Civita. Neste caso dizemos que o operador derivativo é compatível com a métrica.*

Para provarmos isto basta encontrar $C^d_{\ ab}$. Temos que

$$\frac{D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}{d\tau} = 0. \tag{1.9}$$

Utilizando $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = g_{ab} w^a v^b$ e a regra de Leibniz encontra-se

$$w^a v^b \frac{Dg_{ab}}{d\tau} + g_{ab} v^b \frac{Dw^a}{d\tau} + w^a g_{ab} \frac{Dv^b}{d\tau} = 0.$$

Como $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{v}$ são transportados paralelamente e $\boldsymbol{\gamma}$ é uma curva qualquer nos resta que a única maneira que a Equação (1.9) seja satisfeita é que

$$\nabla_a g_{bc} = 0.$$

Utilizando a Equação (1.8) tem-se que a derivada de g é

$$\partial_a g_{bc} - C^{\alpha}_{\ ab} g_{\alpha c} - C^{\alpha}_{\ ac} g_{b\alpha} = 0.$$

O que nos resulta em:

$$\partial_a g_{bc} = C_{cab} + C_{bac}. \tag{1.10}$$

Fazendo uma permuta nos índices da Equação (1.10) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \partial_a g_{bc} &= C_{cab} + C_{bac}; \\ \partial_b g_{ac} &= C_{cba} + C_{abc}; \\ \partial_c g_{ab} &= C_{bca} + C_{acb}. \end{aligned}$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo-se a terceira temos que

$$C_{cab} = \frac{1}{2}\left(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}\right).$$

Levantando o índice c é obtido

$$C^{c}_{\ ab} = \frac{g^{cd}}{2}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right).$$

Portanto, $C^{c}_{\ ab}$ é único e é dado pela equação acima, consequentemente a conexão também é única. Para a conexão de Levi-Civita geralmente usa-se $C^{c}_{\ ab} = \Gamma^{c}_{\ ab}$, em que $\Gamma^{c}_{\ ab}$ são denominados símbolos de Christoffel. Logo,

$$\Gamma^{c}_{\ ab} = \frac{g^{cd}}{2}\left(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right). \tag{1.11}$$

A derivada covariante de um campo tensorial é, então, dada por

$$\frac{D}{d\tau} T^{a_1 \cdots a_k}_{\quad b_1 \cdots b_l} = \frac{d}{d\tau} T^{a_1 \cdots a_k}_{\quad b_1 \cdots b_l} + \sum_{j=1}^{k} \Gamma^{a_j}_{\ cd} T^{a_1 \cdots d \cdots a_k}_{\quad b_1 \cdots b_l} t^c - \sum_{j=1}^{l} \Gamma^{d}_{\ cb_j} T^{a_1 \cdots a_k}_{\quad b_1 \cdots d \cdots b_l} t^c.$$

Anteriormente afirmou-se que a diferença $\nabla_a - \partial_a$, sendo esta igual ao símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Civita, não era necessariamente um tensor, de fato utilizando as equações de mudança de variável na Equação (1.11) é obtido que

$$\Gamma'^{a}_{\ cd} = \frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{c}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{d}} \Gamma^{\rho}_{\ \lambda\mu} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{c}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{d}} \frac{\partial^2 x'^{a}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\lambda}}. \tag{1.12}$$

O que não é uma transformação tensorial devido ao termo inomogêneo. Todavia se somarmos a Equação (1.3), aplicada em um campo vetorial, com a (1.11) temos que

$$\frac{Du'^{a}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{a}}{\partial x^{\rho}} \frac{Du^{\rho}}{d\tau}.$$

Para campos de *rank* superior obtém-se uma expressão análoga. Logo, apesar de $\Gamma^{a}_{\ cd}$ e ∂_a não se transformarem como tensores, a conexão se transforma como um, pois os termos inomogêneos na transformação da derivada parcial e dos símbolos de Christoffel se anulam, nos dando assim uma conexão que se transforma como um tensor e cuja definição é independente do sistema de coordenadas [19].

1.5 Curvatura Riemanniana

Quando fala-se em curvatura geralmente se pensa em superfícies curvas, todavia esta não é relacionada necessariamente com o quanto uma superfície deixa de ser plana, mas sim com o quanto o comprimento de uma curva é alterado. De fato, consideremos por exemplo uma superfície cilíndrica, esta pode ser obtida deformando-se isometricamente o plano, logo pelo Teorema Egregium o plano e o cilindro têm a mesma curvatura, que neste caso é nula [12]. Portanto, a noção de curvatura está relacionada com a deformação em superfícies que alteram comprimentos e não simplesmente com o fato desta deixar de ser plana.

Na geometria clássica existem dois meios de se caracterizar curvatura de superfícies, com curvaturas principais ou via aplicação normal de Gauss. A primeira maneira foi desenvolvida por Leonhard P. Euler (1707-1783), este afirmava que a curvatura (K) de uma superfície é dada por

$$K = k_1 k_2,$$

em que k_1 e k_2 são as curvaturas principais [12]. Todavia, na época, ficou-se em dúvida se esta era de fato a melhor definição para curvatura, ou ainda se qualquer outra combinação de k_1 e k_2 era mais adequada para tal propósito [5]. Então em seu trabalho, *General Investigations on Curved Surfaces*, Gauss redefiniu K como a diferencial da aplicação de Gauss e com isso reproduziu o resultado de Euler. Todavia em geometria riemanniana tomou-se um rumo completamente diferente e contra-intuitivo. Definiu-se a curvatura como um tensor obtido da comutação do operador derivativo, todavia este reproduz exatamente os resultados de Euler e Gauss, além disso descreve o comportamento de uma variedade, como veremos a seguir.

1.5.1 Tensor de Riemann

Definamos primeiramente o comutador de dois campos vetoriais:

Definição 1.5.1. *Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in TM$. O comutador de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é*

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]f = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}(f)) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(f)), \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Em termos das coordenadas a expressão para o comutador é

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = (u^b \partial_b v^a - v^b \partial_b u^a)\partial_a.$$

Logo, este é um operador linear e satisfaz as propriedades usuais de comutadores, como anti-simetria e identidade de Jacobi. Com isso o tensor de curvatura de Riemann pode ser definido como um operador linear que atua em TM, mais precisamente [5]:

Definição 1.5.2. *Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in TM$. O tensor de curvatura de Riemann, $\boldsymbol{R}$, é um operador linear que dado um par $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ do fibrado tangente associa um vetor de TM à outro no mesmo espaço, isto é, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : TM \to TM$. Este é dado por*

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = -\nabla_{\boldsymbol{u}}\nabla_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{w} + \nabla_{\boldsymbol{v}}\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} + \nabla_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w}, \quad \forall \boldsymbol{w} \in TM.$$

Como este é definido em termos de tensores, claramente é um tensor. O tensor de Riemann pode ser entendido como uma medida da comutação do operador derivativo[5], além

[5] O último termo $\nabla_{[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]}\boldsymbol{w}$ é inserido para garantir a linearidade, contudo este se anula em uma base, assim a interpretação de $\boldsymbol{R}$ como uma medida de comutação contínua válida.

disso este é linear nas três entradas e possui múltiplas relações de simetria que limitam o número de componentes, que à princípio seriam n^4 em uma variedade n-dimensional.

Vamos escrever o tensor de curvatura em um sistema de coordenadas $\{\partial_a\}$. Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ os elementos da base, logo

$$\boldsymbol{R}(\partial_a, \partial_b)\boldsymbol{w} = R_{abd}{}^{c} w^d \partial_c.$$

Como ∂_a e ∂_b sempre comutam e $\nabla_{\partial_a} = \nabla_a$, então

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w^c = -R_{abd}{}^{c} w^d.$$

Para obtermos o tensor de curvatura aplicado em um vetor dual, basta considerar um campo escalar da forma $f = w^a u_a$ e utilizar o fato de que as derivadas deste sempre comutam, o que é análogo ao que foi feito na Seção 1.4.1 para o operador derivativo. Portanto,

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) u_c = R_{abc}{}^{d} u_d. \tag{1.13}$$

Substituindo a Equação (1.6) em (1.13) e utilizando as propriedades de simetria das derivadas parciais e de $\Gamma^a{}_{bc}$ é obtido que

$$R_{abc}{}^{d} = -\partial_a \Gamma^d{}_{bc} + \partial_b \Gamma^d{}_{ac} - \Gamma^d{}_{ec}\Gamma^e{}_{ab} + \Gamma^f{}_{ac}\Gamma^d{}_{bf}. \tag{1.14}$$

Logo, o tensor de Riemann depende somente de $\Gamma^a{}_{bc}$, consequentemente este é zero somente se estes os símbolos de Christoffel são nulos para todo a, b e c. Quando isso acontece, a métrica é ortonormal e o espaço é dito plano. Sempre que existir um sistema de coordenadas em que isto ocorra a métrica é dita plana.

Em relação as simetrias de $\boldsymbol{R}$ temos o seguinte lema:

Lema 1.5.1. *O tensor de curvatura de Riemman goza das seguintes propriedades de simetria:*

i. $R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}$;

ii. $R_{[abc]}{}^{d} = 0$;

iii. $R_{abcd} = -R_{abdc}$;

iv. $\nabla_{[e} R_{ab]c}{}^{d} = 0$ *(Identidade de Bianchi);*

v. $R_{abcd} = R_{cdab}$.

Para prová-las basta utilizar as equações (1.13), (1.14) e o fato da conexão ser compatível com a métrica [13]. Devido a estas relações o número de componentes de $\boldsymbol{R}$ se reduz de n^4 para

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Consequentemente para variedades bidimensionais temos uma componente independente, sendo esta justamente a curvatura gaussiana, e para quatro dimensões tem-se 20 componentes em vez de 256.

Vejamos como o transporte paralelo está relacionado com a curvatura e nos fornece a definição dada para o tensor de Riemann. Consideremos que o transporte paralelo de um certo campo é independente do caminho escolhido. Portanto, o isomorfismo obtido entre espaços tangentes com o uso da conexão é independente da curva escolhida, para

isto ocorrer é necessário que os símbolos de Christoffel sejam nulos, consequentemente a curvatura é nula. A Figura 1.4 contém uma ilustração de como o transporte paralelo é dependente da curva em uma superfície curvada.

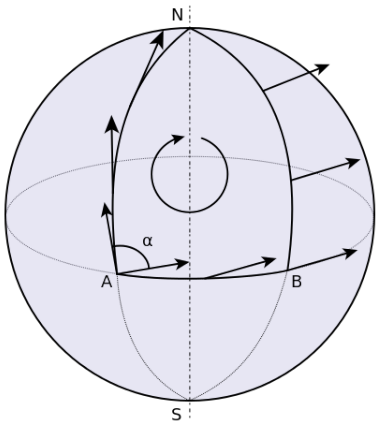


Figura 1.4: Exemplificação da falha do transporte paralelo em uma esfera. Note que apesar do vetor tangente partir do ponto A e ser transportado paralelamente, ao retornar à A este difere do vetor inicial [20].

1.5.2 Curvatura de Ricci

As equações de campo de Einstein exigem um tensor que esteja relacionado com a curvatura, mas que seja de *rank* 2, portanto vejamos as contrações do tensor de Riemann. Este tem somente uma única contração não nula, o tensor de Ricci. De fato, se contrairmos nos dois primeiros índices temos

$$R_c{}^d = g^{b\mu} R_{\mu bc}{}^d$$

Porém, da propriedade (i) do Lema 1.5.1 tem-se

$$R_c{}^d = -g^{b\mu} R_{b\mu c}{}^d$$

Como $g^{b\mu}$ é simétrico nos resulta que

$$R_c{}^d = -R_c{}^d.$$

E, portanto,

$$g^{b\mu} R_{\mu bc}{}^d = 0.$$

Usando-se o mesmo argumento temos que a contração nos terceiro e quarto índices é nula. Logo, resta provar que

$$\mathrm{Tr}_{(1,3)} \boldsymbol{R} = \mathrm{Tr}_{(2,4)} \boldsymbol{R}. \tag{1.15}$$

De fato, temos que

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b \Rightarrow R_{ac} = g^{b\mu} R_{abc\mu} \Rightarrow R_{ac} = -g^{b\mu} R_{bac\mu} \Rightarrow R_{ac} = g^{b\mu} R_{ba\mu c} \Rightarrow R_{ac} = R_{ba}{}^b{}_c.$$

Consequentemente

$$R_{abc}{}^b = R_{ba}{}^b{}_c.$$

O que é a Equação (1.15) em termos das componentes. Sendo assim, a única contração não nula da curvatura é o tensor de Ricci:

Definição 1.5.3. *O tensor de Ricci,* $\boldsymbol{Ric} \in \mathcal{T}_M(0,2)$*, é definido como* $\boldsymbol{Ric} = \mathrm{Tr}_{(2,4)}\boldsymbol{R}$.

Temos ainda que R_{ab} é simétrico, o que segue da definição e da propriedade (v) do Lema 1.5.1:

$$R_{ac} = R_{abc}{}^{b} \Rightarrow R_{ac} = g^{b\mu}R_{abc\mu} \Rightarrow R_{ac} = g^{\mu b}R_{c\mu ab} \Rightarrow R_{ac} = R_{c\mu a}{}^{\mu} \Rightarrow R_{ac} = R_{ca}.$$

Logo, ao invés de n^2 componentes independentes temos $n(n+1)/2$ em uma variedade n-dimensional, *exempli gratia*, para $n = 4$ temos 10 componentes independentes.

Podemos obter o tensor de Ricci em termos dos símbolos de Christoffel. Contraindo a Equação (1.14) obtém-se que

$$R_{ac} = -\partial_a \Gamma^{b}{}_{bc} + \partial_b \Gamma^{b}{}_{ac} - \Gamma^{b}{}_{ec}\Gamma^{e}{}_{ab} + \Gamma^{f}{}_{ac}\Gamma^{b}{}_{bf}. \tag{1.16}$$

Podemos simplificar a equação anterior com o uso de uma identidade para termos contendo $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}$. Da definição dos símbolos de Christoffel é obtido diretamente que

$$\Gamma^{a}{}_{ab} = \frac{g^{cd}}{2}\partial_b g_{cd}.$$

O que pode ser reescrito utilizando o teorema de Jacobi para a derivação de determinantes:

Lema 1.5.2 (Jacobi)**.** *Seja* $A_{\mu\nu}$ *uma matriz quadrada e invertível e* $A = \det(A_{\mu\nu})$*. Então*

$$dA = A(A^{\mu\nu}dA_{\mu\nu}).$$

Assim para o tensor métrico temos que

$$g^{cd}\partial_b g_{cd} = \frac{\partial_b g}{g}.$$

Portanto,

$$\Gamma^{a}{}_{ab} = \frac{\partial_b g}{2g} \Rightarrow \Gamma^{a}{}_{ab} = \frac{\partial_b \ln|g|}{2} \Rightarrow \Gamma^{a}{}_{ab} = \partial_b \ln\sqrt{|g|}.$$

Consequentemente a Equação (1.16) pode ser reescrita como

$$R_{ac} = -\partial_a\partial_c \ln\sqrt{|g|} + \partial_b \Gamma^{b}{}_{ac} - \Gamma^{b}{}_{ec}\Gamma^{e}{}_{ab} + \Gamma^{f}{}_{ac}\partial_f \ln\sqrt{|g|}. \tag{1.17}$$

A contração do tensor de Ricci é a curvatura escalar, sendo esta dada por

$$R = g^{bc}R_{cb}.$$

Das Equações (1.16) e (1.17) podemos escrevê-la em termos da conexão ou do tensor métrico:

$$R = -\partial^a \Gamma^{b}{}_{ba} + \partial_b \Gamma^{ba}{}_{a} - \Gamma^{b}{}_{ea}\Gamma^{e}{}_{ab} + \Gamma^{f}{}_{a}{}^{a}\Gamma^{b}{}_{bf};$$
$$R = -\partial^a\partial_a \ln\sqrt{|g|} + \partial_b \Gamma^{b}{}_{a}{}^{a} - \Gamma^{b}{}_{ea}\Gamma^{ea}{}_{b} + \Gamma^{fa}{}_{a}\partial_f \ln\sqrt{|g|}.$$

1.5.3 Tensor de Einstein

A teoria da relatividade geral necessita de um tensor simétrico de segunda ordem que tenha divergência nula e que esteja relacionado com o tensor de Riemann, este é o tensor de Einstein. Para construirmos este, consideremos a identidade de Bianchi, ou seja, a propriedade (iv) do Lema 1.5.1:

$$\nabla_{[a} R_{bcd]}{}^{e} = 0.$$

Escrevendo todos os termos da equação anterior temos que

$$\nabla_a R_{bcd}{}^{e} + \nabla_b R_{cad}{}^{e} + \nabla_c R_{abd}{}^{e} - \nabla_b R_{acd}{}^{e} - \nabla_c R_{bad}{}^{e} - \nabla_a R_{cbd}{}^{e} = 0.$$

Contraindo nos índices a e e é obtém-se

$$\nabla_a R_{bcd}{}^{a} + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0.$$

Contraindo novamente, porém agora em b e d, resulta em

$$\nabla_a R_{bc}{}^{ba} + \nabla_b R_{c}{}^{b} - \nabla_c R = 0.$$

Todavia utilizando as propriedades de simetria obtém-se que $R_{bc}{}^{ba} = R_{c}{}^{a}$, sendo assim

$$\nabla_a R_{c}{}^{a} - \frac{1}{2}\nabla_c R = 0.$$

O que pode ser reescrito como

$$\nabla^a R_{ca} - \frac{g_{ca}\nabla^a R}{2} = 0.$$

Como a conexão é compatível com a métrica a expressão anterior culmina em

$$\nabla^a \left(R_{ca} - \frac{g_{ca} R}{2} \right) = 0.$$

E assim obtemos o tensor de Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{g_{ab} R}{2}. \tag{1.18}$$

Claramente este é simétrico e tem divergência nula, além disso, em quatro dimensões, é dito que $\boldsymbol{G}$ é o tensor traço reverso de $\boldsymbol{R}$, pois $G^{a}{}_{a} = -R$. A equação tensorial para $\boldsymbol{G}$ é

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{Ric} - \frac{R}{2}\boldsymbol{g}. \tag{1.19}$$

1.5.4 Tétradas

Em uma variedade sempre existe uma base no espaço tangente que ortonormaliza o tensor métrico, a esta damos o nome de tétradas. Em geral, esta base é local, isto é, não existe necessariamente um sistema de coordenadas global no qual $\boldsymbol{g}$ é ortonormal[6], porém dado um ponto sempre existe uma parametrização na qual isto ocorre naquele ponto.

Seja $\{\boldsymbol{e}_\alpha\} \in T_pM$ uma tétrada em um ponto e $\boldsymbol{\eta}$ o tensor métrico na forma ortonormal, logo

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}.$$

[6]Caso exista a variedade é plana.

Reescrevendo a equação acima em termos das coordenadas resulta em

$$g_{\mu\nu}(\boldsymbol{e}_\alpha)^\mu(\boldsymbol{e}_\beta)^\nu = \eta_{\alpha\beta}.$$

Definamos os coeficientes de rotação de Ricci, com base neles escreveremos o tensor de curvatura.

Definição 1.5.4. *Seja $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ uma tétrada. Os coeficientes de rotação de Ricci $\boldsymbol{w}_{\mu\nu}$ são as componentes da uma 1-forma definida por*

$$\boldsymbol{w}_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu)^b \nabla(\boldsymbol{e}_\nu)_b,$$

ou em termos das coordenadas

$$w_{a\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu)^b \nabla_a(\boldsymbol{e}_\nu)_b.$$

Com base nisso, calculemos o tensor de curvatura de Riemann em termos de uma tétrada:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\sigma, \boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu) = R_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

Logo

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{abcd}(\boldsymbol{e}_\rho)^a(\boldsymbol{e}_\sigma)^b(\boldsymbol{e}_\mu)^c(\boldsymbol{e}_\nu)^d \Rightarrow R_{\rho\sigma\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\rho)^a(\boldsymbol{e}_\sigma)^b(\boldsymbol{e}_\mu)^c(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(\boldsymbol{e}_\nu)^d.$$

Utilizemos a seguinte identidade [13]

$$(\boldsymbol{e}_\mu)^c \nabla_a \nabla_b (\boldsymbol{e}_\nu)_c = \nabla_a w_{b\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta} w_{b\alpha\nu} w_{a\beta\mu}.$$

Portanto

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\rho)^a(\boldsymbol{e}_\sigma)^b \left[\nabla_a w_{b\mu\nu} - \nabla_b w_{a\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta}\left(w_{a\beta\mu}w_{b\alpha\nu} - w_{b\beta\mu}w_{a\alpha\nu}\right)\right]. \tag{1.20}$$

Da Definição 1.5.4 temos que como a derivação é feita em um campo escalar podemos substituir o operador derivativo pela derivada parcial. Consequentemente a Equação (1.20) se simplifica, pois não é necessário o cálculo de nenhum símbolo de Christoffel, o que resulta em

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\rho)^a(\boldsymbol{e}_\sigma)^b \left[\partial_a w_{b\mu\nu} - \partial_b w_{a\mu\nu} - \eta^{\alpha\beta}\left(w_{a\beta\mu}w_{b\alpha\nu} - w_{b\beta\mu}w_{a\alpha\nu}\right)\right]. \tag{1.21}$$

Portanto, o tensor de Ricci e a curvatura escalar são dados por:

$$\begin{aligned} R_{\rho\mu} &= (\boldsymbol{e}_\rho)^a(\boldsymbol{e}_\sigma)^b \left[\partial_a w_{b\mu}{}^\sigma - \partial_b w_{a\mu}{}^\sigma - \eta^{\alpha\beta}\left(w_{a\beta\mu}w_{b\alpha}{}^\sigma - w_{b\beta\mu}w_{a\alpha}{}^\sigma\right)\right]; \\ R &= (\boldsymbol{e}^\mu)^a(\boldsymbol{e}_\sigma)^b \left[\partial_a w_{b\mu}{}^\sigma - \partial_b w_{a\mu}{}^\sigma - \eta^{\alpha\beta}\left(w_{a\beta\mu}w_{b\alpha}{}^\sigma - w_{b\beta\mu}w_{a\alpha}{}^\sigma\right)\right]. \end{aligned}$$

Consideremos uma variedade n-dimensional. Pode-se provar que os coeficientes de rotação de Ricci são anti-simétricos em relação aos dois últimos índices, isto é,

$$\boldsymbol{w}_{\mu\nu} = -\boldsymbol{w}_{\nu\mu}.$$

Sendo assim, para o cálculo da curvatura é necessário computar $n^2(n-1)/2$ coeficientes. Todavia, como dito anteriormente, os símbolos de Christoffel têm $n^2(n+1)/2$ componentes independentes. Logo é mais viável se utilizar de tétradas, pois o número de cálculo se reduz significantemente, por exemplo, para $n = 4$ há 24 coeficientes de rotação e 32 símbolos de Christoffel.

1.6 Geodésicas

Geodésicas são curvas que ligam dois pontos em uma variedades, tais que estas extremam o comprimento. Apesar desta definição simples, estas têm importantes aplicações na geometria e relatividade, no presente texto usaremos duas destas: definem o movimento inercial no espaço-tempo e geram uma família de parametrizações denominadas coordenadas normais de Riemann. Portanto, desenvolveremos alguns tópicos sobre geodésicas, em especial a equação que as define e a parametrização de Riemann.

1.6.1 Equação das Geodésicas

Uma curva em uma variedade diferenciável é dita uma geodésica caso a derivada covariante do vetor tangente a curva seja paralelo ao mesmo. Poderíamos pensar que, neste caso, o vetor velocidade da curva é paralelo a aceleração.

Definição 1.6.1. *Sejam M uma variedade, $\boldsymbol{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva diferenciável parametrizada por τ e $\boldsymbol{T} \in TM$ o seu vetor tangente. A curva $\boldsymbol{\gamma}$ é uma geodésica se*

$$\frac{D\boldsymbol{T}}{d\tau} = \alpha(\tau)\boldsymbol{T}.$$

Em que $\alpha \in \mathcal{F}$ é uma função contínua.

Entretanto toda curva pode ser reparametrizadas de maneira que α é sempre nulo. Antes de mostrar isso, provemos primeiramente que

Lema 1.6.1. *Toda curva $\gamma \in M$, tal que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) \neq 0$ em todo ponto desta, pode ser reparametrizada de tal maneira que*

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T})| = 1,$$

A nova curva é dita parametrizada afim.

Para começar a demonstração do Lema 1.6.1 definamos o comprimento de arco de uma curva.

Definição 1.6.2. *O tempo próprio ou comprimento de arco de uma curva diferenciável $\boldsymbol{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, com $T^\mu T_\mu$ não nulo, é dado por*

$$s(t) = \int_{-\epsilon}^{t} d\lambda \, \sqrt{|g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu|}.$$

Pode-se provar que o comprimento de arco é independente da parametrização, para isso basta utilizar o teorema de mudança de variáveis para integral. A partir da definição tem-se que $s : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ é uma aplicação injetora, pois

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{|g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu|} > 0.$$

E consequentemente é invertível, pois é bijetora com a imagem. Reparametrizemos a curva $\boldsymbol{\gamma}$ por s e seja S^μ o vetor tangente neste nova parametrização. Logo

$$S^\mu = \frac{d\gamma^\mu}{ds} \Rightarrow S^\mu = \frac{dt}{ds}\frac{d\gamma^\mu}{dt} \Rightarrow S^\mu = \frac{T^\mu}{\sqrt{|g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu|}}.$$

Sendo assim, temos que

$$S^\mu S_\mu = \frac{T^\mu}{\sqrt{|g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu|}}\frac{T_\mu}{\sqrt{|g_{\mu\nu}T^\mu T^\nu|}} \Rightarrow |S^\mu S_\mu| = 1.$$

Como queríamos demonstrar, agora basta mostrar que com esta parametrização $\alpha = 0$. Da definição de geodésicas na nova parametrização obtém-se

$$S^a \nabla_a S^b = \alpha(s) S^b.$$

Portanto, contraindo com S_b obtemos que

$$S^a S_b \nabla_a S^b = \alpha(s) S_b S^b \Rightarrow S^a \nabla_a (S_b S^b) = 2\alpha(s) S_b S^b \Rightarrow \frac{d(S_b S^b)}{ds} = 2\alpha(s) S_b S^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \frac{d\left(\ln\sqrt{|S_b S^b|}\right)}{ds}.$$

Como o módulo do vetor tangente é constante e unitário na nova parametrização, resulta que $\alpha = 0$. Consequentemente, para curvas parametrizadas afim, a equação das geodésicas é dada por

$$T^a \nabla_a T^b = 0.$$

Consequentemente, temos o seguinte lema:

Lema 1.6.2. *Sejam M uma variedade, $\boldsymbol{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva diferenciável parametrizada por t e $\boldsymbol{T} \in TM$ o seu vetor tangente. A curva $\boldsymbol{\gamma}$ é uma geodésica parametrizada afim se, e somente se,*

$$\frac{D\boldsymbol{T}}{d\tau} = 0.$$

Sejam x^μ as componentes da curva $\boldsymbol{\gamma}$, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0. \tag{1.22}$$

Esta é a equação das geodésicas.

Por definição, a tangente de uma geodésica é transportada paralelamente ao longo de uma curva, logo $T_\mu T^\mu$ é constante na curva, pois a conexão é compatível com a métrica. Sendo assim, pode-se classificar as curvas geodésicas em uma variedade com métrica lorentziana em três tipos:

i. Tipo temporal: $T_\mu T^\mu < 0$;

ii. Tipo espacial: $T_\mu T^\mu > 0$;

iii. Tipo luminoso: $T_\mu T^\mu = 0$.

Como discutido acima, uma geodésica afim não pode mudar de um tipo para outro, pois o módulo de $\boldsymbol{T}$ é constante, logo o tempo próprio está bem definido somente para curvas do tipo temporal ou espacial e não para aquelas que passam de um tipo para outro, ou ainda que são luminosas. A seguir no Capítulo 3 veremos que a classificação acima irá imbuir o espaço-tempo de uma estrutura de causalidade. Em uma variedade riemanniana existem somente curvas do tipo espacial, pois a métrica é positiva definida.

Vejamos agora que uma geodésica possui a propriedade de extremar a integral do comprimento de arco[7]. Consideremos uma curva em uma variedade riemanniana M dada por $\boldsymbol{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to M$. Sejam $a, b \in I$, $\{\boldsymbol{\gamma}(a), \boldsymbol{\gamma}(b)\}$ pontos fixos da curva e x^μ as componentes desta. O tempo próprio pode ser pensado como o seguinte funcional

$$s[x^\mu] = \int_a^b d\tau \; \mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\tau}\right).$$

Em que

$$\mathcal{L}\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}.$$

As equações de Euler-Lagrange associadas que extremam o funcional dado são

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x^\mu} = 0.$$

Como $\mathcal{L}$ depende somente de x^μ e do vetor tangente $\dot{x}^\mu$, as equações de Euler-Lagrange são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right). \tag{1.23}$$

Efetuando-se as derivadas é obtido que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\mathcal{L}}\left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right]; \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = \frac{1}{\mathcal{L}}g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta. \tag{1.25}$$

Substituindo as Equações (1.24) e (1.25) na (1.23) e efetuando-se as derivadas temos que

$$\frac{1}{2\mathcal{L}}\left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right] = -\frac{1}{\mathcal{L}^2}\frac{d\mathcal{L}}{d\tau}g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta + \frac{1}{2\mathcal{L}}\left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right] + \frac{1}{\mathcal{L}}g_{\mu\beta}\ddot{x}^\beta.$$

Rearranjando os termos e multiplicando por $g^{\lambda\mu}$ resulta em

$$\delta^\lambda{}_\beta\ddot{x}^\beta + \frac{g^{\lambda\mu}}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right]\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{d\mathcal{L}}{d\tau}\delta^\lambda{}_\beta\dot{x}^\beta.$$

Consequentemente, utilizando a definição dos símbolos de Christoffel, obtém-se

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{d\ln(\mathcal{L})}{d\tau}\dot{x}^\lambda.$$

Sendo esta justamente a equação das geodésicas dada na Definição 1.6.1 em que

$$\alpha(\tau) = \frac{d\ln(\mathcal{L})}{d\tau}.$$

Consequentemente, as geodésicas extremam o funcional do tempo próprio. É evidente que caso a parametrização seja afim tem-se que $\alpha = 0$, pois $\mathcal{L}$ é unitário.

[7]O formalismo a ser utilizado será desenvolvido em detalhes no Capítulo 3, Seção 3.2.3.

Para uma variedade lorentziana o cálculo continua sendo válido para curvas dos tipos temporal e espacial. Contudo, as suas propriedades extremantes são diferentes de uma curva em uma variedade riemanniana. Quaisquer dois pontos nesta última podem ser conectados por uma curva de tempo próprio arbitrariamente alto, todavia com limite inferior, sendo a curva com o menor comprimento de arco a geodésica que liga os dois pontos.

Já em uma variedade lorentziana, dois pontos nem sempre podem ser conectados por uma geodésica, pois existem casos em que toda curva que conecta estes deve passar de um tipo para o outro e o tipo de uma geodésica nunca muda. Caso dois pontos possam ser conectados por uma curva temporal, o tempo próprio desta não pode ser limitado inferiormente e nem superiormente, contudo podem existir curvas temporais que maximizam o comprimento de arco, mas nunca o minimizam [13].

1.6.2 Desvio Geodésico

Vejamos agora como a curvatura está relacionada com as geodésicas, mais precisamente como estas divergem ou convergem. Sejam $\{\boldsymbol{\gamma}_s; s \in \mathbb{R}\}$ uma família de geodésicas parametrizadas afim e o mapa $\chi : (\tau, s) \longmapsto \boldsymbol{\gamma}_s(t)$ suave e bijetor. Consideremos o vetor $\boldsymbol{T}$ tangente a cada geodésica e $\boldsymbol{X}$ o vetor separação entre duas curvas próximas. Sendo assim temos que

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad X^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}.$$

Calculemos o quanto uma geodésica se afasta de outra, isto é, mais precisamente computemos a variação da aceleração relativa entre duas geodésicas, também denominada desvio geodésico:

$$\frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2}.$$

Primeiramente vejamos que $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{X}$ comutam, de fato

$$[\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}]^\mu = T^\alpha \partial_\alpha X^\mu - X^\alpha \partial_\alpha T^\mu \Rightarrow [\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}]^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} - \frac{\partial T^\mu}{\partial s} \Rightarrow [\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}]^\mu = 0.$$

Consequentemente,

$$T^\mu \nabla_\mu X^\nu = X^\mu \nabla_\mu T^\nu.$$

Sendo assim, o desvio geodésico é

$$\frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2} = \frac{D}{d\tau}(T^\alpha \nabla_\alpha X^\mu) \Rightarrow \frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2} = T^\beta \nabla_\beta (T^\alpha \nabla_\alpha X^\mu).$$

Logo,

$$\frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2} = T^\beta \nabla_\beta (X^\alpha \nabla_\alpha T^\mu) \Rightarrow \frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2} = T^\beta \nabla_\beta (X^\alpha) \nabla_\alpha T^\mu + X^\alpha T^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha T^\mu.$$

Podemos escrever a derivada covariante dupla em termos do tensor de curvatura e obtemos que

$$\frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2} = X^\beta \nabla_\beta (T^\alpha) \nabla_\alpha T^\mu + X^\alpha T^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta T^\mu - R_{\alpha\beta\lambda}{}^\mu T^\lambda T^\beta X^\alpha.$$

Utilizando a regra da cadeia pode-se reescrever esta equação como

$$\frac{D^2 X^\mu}{d\tau^2} = X^\alpha \nabla_\alpha (T^\beta \nabla_\beta T^\mu) - R_{\alpha\beta\lambda}{}^\mu T^\lambda T^\beta X^\alpha.$$

Como a curva dada é uma geodésica afim é obtido que

$$\frac{D^2X^\mu}{d\tau^2} = -R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\mu}T^\lambda T^\beta X^\alpha. \tag{1.26}$$

Esta é a equação do desvio geodésico. Na forma livre de coordenadas esta é

$$\frac{D^2\boldsymbol{X}}{d\tau^2} = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}.$$

Suponhamos que inicialmente a velocidade relativa entre as geodésicas seja nula, isto é, estas sejam paralelas:

$$\frac{DX^\mu}{d\tau} = 0.$$

Caso isto ocorra e a curvatura for nula então as geodésicas se mantém paralelas, caso contrário estas divergem ou convergem. Logo, para identificar se o espaço é curvo ou não basta verificar se duas geodésicas inicialmente paralelas se mantém paralelas. Claramente em um espaço euclidiano, *exempli gratia*, duas retas, isto é, geodésicas deste espaço, paralelas em um ponto sempre se mantém paralelas, todavia em uma esfera isto não ocorre, pois os grandes círculos, geodésicas da esfera, se interceptam.

1.6.3 Coordenadas Normais de Riemann

A existência e unicidade de geodésicas nos permite definir um sistema de coordenadas local tal que os símbolos de Christoffel se anulam e a métrica é ortonormal. Construamos agora esta parametrização, seja M uma variedade e $p \in M$. Consideremos uma geodésica $\boldsymbol{\gamma} : [0, \epsilon) \to M$ que seja parametrizada afim, tal que

$$\boldsymbol{\gamma}(0) = p \quad \text{e} \quad \dot{x}^\mu(0) = u_0^\mu.$$

Por definição temos que

$$\ddot{x}^\mu(0) = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u_0^\alpha u_0^\beta.$$

Sendo assim, a expansão em série de Taylor de $\boldsymbol{\gamma}$ em torno de zero é

$$x^\mu(\tau) = x^\mu(0) + u_0^\mu \tau - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u_0^\alpha u_0^\beta \frac{\tau^2}{2} + \mathcal{O}(t^3).$$

Os termos de terceira ordem estariam relacionados com o tensor de curvatura e os demais com as derivadas deste [13]. Podemos descrever o vetor tangente em termos de uma tétrada local $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$, sendo assim teríamos que

$$u_0^\mu = \lambda^\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)^\mu.$$

Consequentemente a expansão em série de Taylor é dada por

$$x^\mu(\tau) = x^\mu(0) + \lambda^\alpha(\boldsymbol{e}_\alpha)^\mu \tau - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\lambda^\nu(\boldsymbol{e}_\nu)^\alpha \lambda^\nu(\boldsymbol{e}_\nu)^\beta \frac{\tau^2}{2} + \mathcal{O}(t^3). \tag{1.27}$$

Dada uma geodésica afim que passa por um ponto p , definamos o mapa exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ neste ponto como uma aplicação que leva um vetor tangente a uma geodésica afim associada em um ponto deste na direção do vetor tangente. Mais especificamente seria como se andássemos na geodésica na direção do vetor tangente. Este mapa

sempre está bem definido para uma vizinhança infinitesimal em torno de p e possui as seguintes propriedades.

$$\exp_p(\tau \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\gamma}(\tau);$$
$$\exp_p(0) = p.$$

Em termos desta aplicação a geodésica é dada, pelo menos localmente, por

$$\xi^\mu(\tau) = \xi_0^\mu + \tau\lambda^\mu, \tag{1.28}$$

em que $\boldsymbol{\xi}_0 = p$. Temos que variando o vetor tangente, iríamos obter outro ponto da variedade e outra aplicação exponencial, em suma existe uma vizinhança de p que é totalmente parametrizada pelas geodésicas que passam por este ponto [5]. Portanto, localmente uma variedade sempre pode ser parametrizada de tal maneira que as geodésicas sejam retas (Equação (1.28)). De fato, substituindo a Equação (1.28) na (1.27) é obtido

$$x^\mu = x^\mu(0) + (\xi^\alpha - \xi_0^\alpha)(\boldsymbol{e}_\alpha)^\mu - \frac{\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}}{2}(\xi^\delta - \xi_0^\delta)(\xi^\sigma - \xi_0^\sigma)(\boldsymbol{e}_\delta)^\alpha(\boldsymbol{e}_\sigma)^\beta + \mathcal{O}((\xi_\mu)^3). \tag{1.29}$$

Esta expansão está bem definida para uma vizinhança de p, portanto o sistema de coordenadas (ξ^μ) existe e é denominado Coordenadas Normais de Riemann.

Como as geodésicas na nova parametrização são dadas pela Equação (1.28), temos que

$$\ddot{\xi}^\mu = 0.$$

Comparando esta com a equação das geodésicas conclui-se que $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ são nulos na vizinhança em que (1.29) é válida. Consequentemente, a primeira derivada de $g_{\mu\nu}$ é nula, assim a expansão do tensor métrico em série de Taylor é

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}((\xi_\mu)^2).$$

Portanto, localmente, no sistema de coordenadas normais de Riemann o tensor métrico assume a forma ortonormal e os símbolos de Christoffel se anulam. Fato este que será de grande utilidade na transição da relatividade especial para a geral, pois fornece uma base matemática para o Princípio da Equivalência Forte. Todavia o tensor de curvatura não se anula, pois estes estão relacionados com termos de ordem superior na expansão e pelo fato de que nenhuma mudança de coordenadas pode eliminar a curvatura em uma variedade, além disso os coeficientes de rotação de Ricci não são necessariamente nulos [5].

Neste primeiro capítulo desenvolvemos o formalismo necessário ao estudo das teorias da relatividade especial e geral no Capítulo 3, todavia à seguir desenvolveremos o formalismo necessário à análise das Leis de Maxwell em um espaço-tempo curvo.

Capítulo 2

Cálculo Exterior

As formas diferenciais são uma maneira natural de generalizar o produto vetorial, área orientada e operações de derivação com vetores, *e.g.*, divergência, rotacional, gradiente e laplaciano, para dimensões maiores e até mesmo para campos de vetores em variedades. Além disso, estas nos fornecem um maneira natural de se escrever as Equações de Maxwell de forma independente do sistema de coordenadas, isto é, de maneira puramente geométrica, e mais, temos uma elegante generalização do Teorema de Stokes. O criador deste formalismo foi Élie Joseph Cartan (1869–1951) [7].

Primeiramente definiremos p-formas, para então nas Seções 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 vermos, respectivamente, o produto exterior, a diferencial exterior, e o dual de Hodge. Por fim, na Seção 2.2, usaremos estes conceitos para definirmos integrais em variedades.

2.1 Formas Diferenciais

Sendo assim, definamos p-formas:

Definição 2.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma p-forma ou forma diferencial de rank p é um campo tensorial $\boldsymbol{w} \in \mathcal{T}_M(0,p)$ totalmente anti-simétrico.*

O conjunto das p-formas definidas em M no ponto $x \in M$ é denotado por Λ^p_x e este é um subespaço vetorial de $\mathcal{T}_M(0,p)$. Temos ainda que as 0-formas são os campos escalares e as 1-formas os campos duais de M, *id est*, $\mathcal{F} = \Lambda^0_x$ e $T^*_x M = \Lambda^1_x$. Devido a anti-simetria de $\boldsymbol{w}$, toda componente deste que possui índices repetidos é nula, sendo assim formas com $p > n$, sendo n a dimensão do espaço M, são sempre nulas. Isto é,

$$\Lambda^p_x = \{0\}, \forall p > n.$$

Novamente da anti-simetria, temos que para $p \leq n$ o número de componentes independentes de $\boldsymbol{w}$ é a quantidade de combinações de $(1, \cdots, n)$ em grupos de p elementos, pois $\boldsymbol{w}$ tem p índices e qualquer troca destes nos fornecem a mesma componente com o sinal trocado ou não dependendo da paridade da permutação. Consequentemente,

$$\dim \Lambda^p_x = \binom{n}{p}, \forall\ p \leq n.$$

Logo, para uma variedade n-dimensional existem $p+1$ formas possíveis que são não nulas. Além disso, o maior tensor totalmente anti-simétrico que pode ser construído em M é um múltiplo do tensor de Levi-Civita, este que será definido formalmente na Seção 2.2, pois $\dim \Lambda^n_x = 1$.

2.1.1 Produto Exterior

O produto externo generaliza a noção de produto vetorial para tensores, este pode ser entendido como uma anti-simetrização do produto tensorial e uma maneira de se gerar novas p-formas. Logo:

Definição 2.1.2. *O produto externo de duas formas $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^p$ e $\boldsymbol{w}' \in \Lambda_x^q$ é um mapa $\wedge : \Lambda_x^p \times \Lambda_x^q \to \Lambda_x^{p+q}$ definido por*

$$\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}' = \binom{p+q}{p \quad q} \mathrm{Alt}(\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}').$$

Da definição obtém-se as seguintes propriedades para o produto externo:

Lema 2.1.1. *Sejam $\boldsymbol{u} \in \Lambda_x^p$, $\boldsymbol{v} \in \Lambda_x^q$, $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^r$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, o produto externo goza das seguintes propriedades:*

i. $\boldsymbol{u} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w}$;

ii. $\boldsymbol{u} \wedge (\alpha \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \alpha(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{w}$ *para* $q = r$;

iii. $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (-1)^{pq}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u})$.

Claramente se $p + q > n$ então o produto exterior é sempre nulo. Da associatividade, propriedade (i), podemos generalizar o produto tensorial para várias formas, seja $\boldsymbol{w}_j \in \Lambda_x^{p_j}$ temos que :

$$\boldsymbol{w}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_n = \binom{p_1 + \cdots + p_n}{p_1 \quad \cdots \quad p_n} \mathrm{Alt}(\boldsymbol{w}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_n).$$

Exemplo 2.1.1. *O produto vetorial de um vetor com outro paralelo sempre resulta em um vetor nulo, todavia isto não ocorre para p-formas em geral. No entanto, sendo $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^p$ com p ímpar, logo $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w} = 0$. Para provar isto basta utilizar a propriedade (iii) do Lema* 2.1.1.

Usando a equação anterior e o Lema 2.1.1 podemos escrever uma base para o espaço das p-formas em termos da base dual. Consideremos primeiramente duas 1-formas $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{w}'$ em uma variedade n dimensional. Logo, o produto externo das duas é dado por

$$\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}' = (w_a \boldsymbol{d}x^a) \wedge (w'_b \boldsymbol{d}x^b),$$

utilizando as propriedades enunciadas no Lema 2.1.1 é obtido

$$\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}' = (w_a w'_b - w_b w'_a) \boldsymbol{d}x^a \wedge \boldsymbol{d}x^b.$$

Sendo a soma realizada para $a > b$, para retiramos esta condição basta inserir um fator $1/2$

$$\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}' = \frac{(w_a w'_b - w_b w'_a)}{2} \, \boldsymbol{d}x^a \wedge \boldsymbol{d}x^b.$$

Agora a soma é realizada para todo a e b. Logo, a 2-forma $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}'$ é dada em termos da base $\{\boldsymbol{d}x^a \wedge \boldsymbol{d}x^b\}$. Podemos generalizar o argumento para qualquer p-forma, basta

multiplicar p vezes as 1-formas, consequentemente uma base de Λ_x^p é $\{\boldsymbol{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^{a_p}\}$. Logo qualquer que seja $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^p$ temos que[1]

$$\boldsymbol{w} = \frac{w_{a_1 \cdots a_p}}{p!}\, \boldsymbol{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^{a_p}.$$

Por definição tem-se que

$$\boldsymbol{d}x^{a_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^{a_p} = p!\ \mathrm{Alt}(\boldsymbol{d}x^{a_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{d}x^{a_p}).$$

Além disso, temos que as componentes de $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^n$ em uma variedade n-dimensional gozam da seguinte identidade que será utilizada mais adiante:

$$w_{a_1 \cdots a_n} = w_{1 \cdots n} \varepsilon_{a_1 \cdots a_n}.$$

Em que $\varepsilon_{a_1 \cdots a_n}$ é o símbolo de Levi-Civita.

A seguir temos dois exemplos, sendo que o primeiro deles estabelece uma relação entre o produto exterior e o vetorial [21].

Exemplo 2.1.2. *Seja $M = \mathbb{R}^3$. Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ dois vetores duais de seus correspondentes no $\mathbb{R}^3$ e $\{\boldsymbol{d}x, \boldsymbol{d}y, \boldsymbol{d}z\}$ a base de $T_p^*\mathbb{R}^3$. Logo*

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = (u_x v_y - u_y v_x)\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y + (u_x v_z - u_z v_x)\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z + (u_y v_z - u_z v_y)\boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z.$$

O que são justamente as componentes de $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Exemplo 2.1.3. *Seja $M = \mathbb{R}^3$ e $\{\boldsymbol{d}x, \boldsymbol{d}y, \boldsymbol{d}z\}$ a base de $T_p^*\mathbb{R}^3$. Consideremos as seguintes formas:*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\varphi} = x\ \boldsymbol{d}x - y\ \boldsymbol{d}y; \\ &\boldsymbol{\psi} = z\ \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y + x\ \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z; \\ &\boldsymbol{\theta} = z\ \boldsymbol{d}y. \end{aligned}$$

Logo $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta} \in \Lambda_x^1$ e $\boldsymbol{\psi} \in \Lambda_x^2$. Sendo assim, temos que $\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}$ e $\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}$ são

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi} = x^2\ \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z; \\ &\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi} = 0. \end{aligned}$$

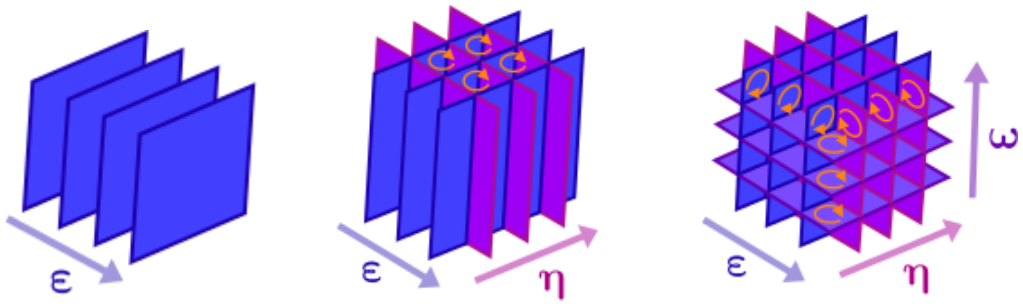
O segundo produto nem precisa ser efetuado, visto que $\Lambda_x^p = \{0\}$ para $p > 3$.

Podemos interpretar geometricamente as p-formas como uma sucessão de planos no espaço. De fato, consideremos $M = \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Lambda_x^1$. As superfícies de nível de $\boldsymbol{\varepsilon} : T_x\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são dadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(k) = \{\boldsymbol{v} \in T_x\mathbb{R}^3; \varepsilon_1 v_x + \varepsilon_2 v_y + \varepsilon_3 v_z = k\}.$$

Logo as superfícies de nível $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(k)$ são sempre planos com $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ como vetor normal, consequentemente uma 1-forma é uma sequência de planos no $\mathbb{R}^3$ com esta sendo um vetor normal à estes. Seja $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda_x^1$, de maneira análoga podemos interpretar a 2-forma $\boldsymbol{\varepsilon} \wedge \boldsymbol{\eta} : T_x\mathbb{R}^3 \times T_x\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como uma sequência de planos. Fixemos a primeira entrada e variemos a segunda, temos uma sequência de planos normais a $\boldsymbol{\eta}$ e fazendo o mesmo para a primeira entrada é obtido uma sequência de planos normais a $\boldsymbol{\varepsilon}$. Assim, em cada ponto $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\eta}$ nos dão uma área orientada na interseção destes planos. Para um 3-forma o procedimento é o mesmo, todavia teremos um volume orientado dado na interseção dos três planos [22]. A Figura 2.1 contém ilustrações destes conceitos.

[1] O fator $1/p!$ serve para cancelar o múltiplo $p!$ que aparece quando realiza-se todas a soma sobre todo a_j, assim como foi feita a introdução do fator $1/2$ anteriormente em $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w}'$.



(a) $\boldsymbol{\varepsilon}$ (b) $\boldsymbol{\varepsilon} \wedge \boldsymbol{\eta}$ (c) $\boldsymbol{\varepsilon} \wedge \boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\omega}$

Figura 2.1: Representação geométrica da 1-forma (a), 2-forma (b) e 3-forma (c).

2.1.2 Diferencial Exterior

A diferencial exterior é outro meio de se produzir p-formas a partir de outras. Esta é obtida por meio de uma anti-simetrização da derivada de um tensor. De fato, temos:

Definição 2.1.3. *A diferencial exterior é um operador linear* $\boldsymbol{d} : \Lambda_x^p \to \Lambda_x^{p+1}$ *em que, dado* $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^p$*, esta é definido por*

$$\boldsymbol{dw} = (p+1)\mathrm{Alt}(\nabla \boldsymbol{w}).$$

Em termos das componentes a expressão para este seria dado por

$$dw_{ba_1\cdots a_p} = (p+1)\nabla_{[b} w_{a_1\cdots a_p]}.$$

Todavia consideremos uma 1-forma $\boldsymbol{w}$, então a diferencial exterior desta seria

$$dw_{ab} = 2\nabla_{[a} w_{b]}.$$

Substituindo a expressão para a derivada de $\boldsymbol{w}$ temos que

$$dw_{ab} = 2(\partial_{[a} w_{b]} - \Gamma^c{}_{[ab]} w_c).$$

Entretanto os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores, logo $\Gamma^c{}_{[ab]} = 0$. Consequentemente,

$$dw_{ab} = 2\partial_{[a} w_{b]},$$

isto é, para as 1-formas pode-se utilizar a derivada parcial em vez da conexão para computar a diferencial exterior. Para formas de dimensão superior o argumento é facilmente generalizado e assim obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *Uma definição equivalente para a diferencial exterior de* $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^p$ *é*

$$dw_{ba_1\cdots a_p} = (p+1)\partial_{[b} w_{a_1\cdots a_p]}.$$

Claramente as definições 2.1.0 e consequentemente a 2.1.3 é independente do sistema de coordenadas e portanto transforma-se de forma covariante de um sistema de coordenadas para outro, sendo assim compatível com o princípio da relatividade. Uma maneira de se computar a diferencial exterior, com um óbvio abuso de notação, seria por meio da seguinte relação:

$$\boldsymbol{dw} = (\partial_b\, \boldsymbol{dx}^b) \wedge \left(\frac{w_{a_1\cdots a_p}}{p!}\, \boldsymbol{dx}_1^a \wedge \boldsymbol{dx}_p^a \right),$$

note que esta não é uma definição do ponto de vista formal, contudo nos fornece uma maneira rápida de se calcular $\boldsymbol{dw}$. Pode-se pensar nesta como uma regra análoga à do determinante para o cálculo do produto vetorial ou rotacional. A seguir, temos dois exemplos que nos dão aplicações deste conceito.

Exemplo 2.1.4. *Seja $M = \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{v} \in \Lambda^1_x$ e $\{\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{dy}, \boldsymbol{dz}\}$ a base de $T^*_p\mathbb{R}^3$. Logo*

$$\boldsymbol{dv} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \boldsymbol{dx} \wedge \boldsymbol{dy} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \boldsymbol{dx} \wedge \boldsymbol{dz} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \boldsymbol{dy} \wedge \boldsymbol{dz}.$$

O que são justamente as componentes de $\nabla \times \boldsymbol{u}$. Esta ainda não é a generalização do rotacional, para isso vamos precisar do dual de Hodge.

Exemplo 2.1.5. *Consideremos novamente as formas do Exemplo* 2.1.3*, logo*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= x\ \boldsymbol{dx} - y\ \boldsymbol{dy}; \\ \boldsymbol{\psi} &= z\ \boldsymbol{dx} \wedge \boldsymbol{dy} + x\ \boldsymbol{dy} \wedge \boldsymbol{dz}; \\ \boldsymbol{\theta} &= z\ \boldsymbol{dy}. \end{aligned}$$

Consequentemente, as diferenciais exteriores são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d\varphi} &= 0; \\ \boldsymbol{d\psi} &= 2\ \boldsymbol{dx} \wedge \boldsymbol{dy} \wedge \boldsymbol{dz}; \\ \boldsymbol{d\theta} &= \boldsymbol{dz} \wedge \boldsymbol{dy}. \end{aligned}$$

Temos ainda que a diferencial exterior satisfaz as seguintes propriedades que são muito utilizadas durante os cálculos com estas:

Lema 2.1.2. *Sejam M uma variedade n-dimensional, $\boldsymbol{w} \in \Lambda^p_x$, $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^q_x$ e $c \in \mathbb{R}$, temos que a diferencial exterior goza das seguintes propriedades*

i. $\boldsymbol{d}(c\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\alpha}) = c\boldsymbol{dw} + \boldsymbol{d\alpha}$*, para $p = q$;*

ii. $\boldsymbol{dw} = 0$*, para $p = n$;*

iii. $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{dw} \wedge \boldsymbol{\alpha} + (-1)^p \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{d\alpha}$*;*

iv. $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{dw}) = 0$.

A última das propriedades nos diz que $\boldsymbol{d}^2$ é sempre nulo. Isso decorre diretamente do Teorema 2.1.1 e da comutação das derivadas parciais. Este fato é uma generalização dos teoremas que dizem que o rotacional do gradiente e o divergente do rotacional são nulos [21]. Seja $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p_x$, caso $\boldsymbol{d\alpha} = 0$ dizemos que α é fechada, para estas formas existe o seguinte lema:

Lema 2.1.3 (Poincaré)**.** *Seja $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p_x$. Temos que $\boldsymbol{\alpha}$ é uma forma fechada se, e somente se, existe $\boldsymbol{w} \in \Lambda^{p-1}_x$ tal que $\boldsymbol{dw} = \boldsymbol{\alpha}$.*

Este lema pode ser pensado como uma recíproca da propriedade (iv) do Lema 2.1.2.

2.1.3 Dual de Hodge

Note que em nenhum momento necessitou-se do tensor métrico para definir ou mesmo realizar operações com p-formas, assim os conceitos dados servem tanto para variedades com métrica definida quanto para as que não gozam desta condição. No entanto para definirmos as ferramentas à seguir será necessário o uso de g_{ab}. Definamos primeiramente o produto interno de duas p-formas.

Definição 2.1.4. *Seja M uma variedade diferenciável com métrica definida e $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p_x$. Então o produto interno de $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ é uma aplicação $\langle , \rangle : \Lambda^p_x \times \Lambda^p_x \to \mathbb{R}$, sendo esta bilinear, simétrica e definida por*

$$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \frac{w^{a_1 \cdots a_p} \alpha_{a_1 \cdots a_p}}{p!},$$

ou analogamente

$$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \frac{g^{a_1 b_1} \cdots g^{a_p b_p} w_{b_1 \cdots b_p} \alpha_{a_1 \cdots a_p}}{p!}.$$

Claramente esta é uma generalização do produto interno para vetores, visto que dado $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^1_x$ então

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha}) = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha} \rangle.$$

Logo, definimos o dual de Hodge como:

Definição 2.1.5. *Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional com métrica definida e $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p_x$. O dual de Hodge de $\boldsymbol{w}$, denotado por $\star \boldsymbol{w}$, é o única $(n-p)$-forma que satisfaz a seguinte relação*

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge \star \boldsymbol{w} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{\epsilon},$$

para todo $\boldsymbol{\alpha}$, em que $\boldsymbol{\epsilon}$ é a forma volume de M.

Sendo a forma volume, com n sendo a dimensão de M, dada por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{|g|}\ \boldsymbol{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^n.$$

Consequentemente, o dual de Hodge é uma aplicação $\star : \Lambda^p_x \to \Lambda^{n-p}_x$ que em termos das componentes é dado por

$$\star \boldsymbol{w} = \frac{w^{a_1 \cdots a_p} \epsilon_{a_1 \cdots a_p b_1 \cdots b_{n-p}} \sqrt{|g|}}{p!(n-p)!}\ \boldsymbol{d}x^{b_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^{b_{n-p}}.$$

Seja s a assinatura da métrica, então temos que

$$\star \star \boldsymbol{w} = (-1)^{p(n-p)} s\ \boldsymbol{w}.$$

Logo, o inverso do dual de Hodge é dado por

$$\star^{-1} = (-1)^{p(n-p)} s \star .$$

Portanto, fica evidente que $\star^{-1}\star = \star\star^{-1}$ é a aplicação identidade. Como $\dim \Lambda^{n-p}_x = \dim \Lambda^p_x$ temos que estes espaços são isomorfos e como o dual de Hodge é uma injeção linear tem-se que este é um isomorfismo entre Λ^p_x e Λ^{n-p}_x. Consequentemente, analisar $\boldsymbol{w}$ e $\star \boldsymbol{w}$ é equivalente, *i.e.*, não há perda de informação quando se utiliza a p-forma original ou o seu dual de Hodge. A seguir temos um exemplo de como generalizar o gradiente, rotacional e o divergente para variedades. Este será utilizado mais adiante, no Capítulo 4, como justificativa para deduzirmos as Equações de Maxwell relativísticas.

Exemplo 2.1.6. *Consideremos $M = \mathbb{R}^3$ e $\{\boldsymbol{d}x, \boldsymbol{d}y, \boldsymbol{d}z\}$ a base de $T_p^*\mathbb{R}^3$. Seja $f \in \mathcal{F}$, logo, o dual do gradiente de f é dado por*

$$\boldsymbol{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{d}z.$$

Seja $\boldsymbol{w} \in \Lambda_x^1$, então

$$\boldsymbol{dw} = \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y + \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z + \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z.$$

Como $\boldsymbol{dw}$ é uma 2-forma o dual de Hodge deste será uma 1-forma e esta é

$$\star\boldsymbol{dw} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}x + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{d}y + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{d}z.$$

Computemos agora, $\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w}$, temos que calcular $\star\boldsymbol{w}$, que é uma 2-forma, assim

$$\star\boldsymbol{w} = w_z\ \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y - w_y\ \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z + w_x\ \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z.$$

Calculemos agora $\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w}$, logo

$$\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w} = \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z.$$

O que é bem parecido com o divergente, porém este é um escalar e $\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w}$ é uma 3-forma, portanto para obtermos o divergente, que é uma 0-forma, basta computar o dual de Hodge, o que nos fornece

$$\star\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Para obter o laplaciano de $f \in \mathcal{F}$ basta colocar $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d}f$ na expressão anterior, o que resulta em

$$\star\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{d}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Consequentemente todas as identidades do cálculo vetorial podem ser sumarizadas em termos de formas diferenciais. Seja $\vec{\nabla}$ o operador gradiente no $\mathbb{R}^3$, logo

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} f = \sharp\,(\boldsymbol{d}f)\,;\\
&\vec{\nabla} \times (\sharp\boldsymbol{w}) = \sharp\,(\star\boldsymbol{dw})\,;\\
&\vec{\nabla} \cdot (\sharp\boldsymbol{w}) = \star\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w};\\
&\vec{\nabla}^2 f = \star\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{d}f.
\end{aligned}$$

2.2 Integração em Variedades

Quando integra-se em superfícies no $\mathbb{R}^3$ deve-se definir uma orientação para esta, o que geralmente é feito definindo-se um vetor normal em cada ponto da superfície. Contudo em variedades diferenciáveis n-dimensionais não é possível definir exatamente um vetor normal a esta, entretanto podemos utilizar um conceito análogo que são as n-formas. Temos então que:

Definição 2.2.1. *Uma variedade diferenciável n-dimensional M é dita orientável se em todo ponto de M existe uma n-forma $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathcal{T}_M(0, n)$ contínua e não nula.*

Outra maneira de se definir orientabilidade é colocando que o jacobiano da mudança de coordenadas deve ser estritamente positivo [12]. Temos que $\boldsymbol{\epsilon}$ pode ser expresso como

$$\boldsymbol{\epsilon} = h\ \boldsymbol{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^n.$$

Quando $h > 0$ temos que o sistema é dito dextrógiro[2], caso contrário é levogiro. Duas orientações $\boldsymbol{\epsilon}_1$ e $\boldsymbol{\epsilon}_2$ são ditas equivalentes quando existe um escalar $f > 0$ tal que $\boldsymbol{\epsilon}_1 = f\boldsymbol{\epsilon}_2$, isto é, quando a orientação é preservada. Toda variedade simplesmente conexa é orientável e o produto de variedades orientáveis também é orientável [13].

Antes de definirmos a integral de n-formas em M vejamos como $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^n_x$ se transforma sob uma mudança de coordenadas. Seja $\boldsymbol{\alpha}$ dado por

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{1\cdots n}\ \boldsymbol{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^n,$$

logo fazendo-se a mudança de coordenadas para um sistema linha temos que

$$\alpha'_{a_1\cdots a_n} = \alpha_{b_1\cdots b_n}\frac{\partial x^{b_1}}{\partial x'^{a_1}}\cdots\frac{\partial x^{b_n}}{\partial x'^{a_n}} \Rightarrow \alpha'_{1\cdots n} = \alpha_{b_1\cdots b_n}\frac{\partial x^{b_1}}{\partial x'^{1}}\cdots\frac{\partial x^{b_n}}{\partial x'^{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha'_{1\cdots n} = \alpha_{1\cdots n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}\frac{\partial x^{b_1}}{\partial x'^{1}}\cdots\frac{\partial x^{b_n}}{\partial x'^{n}} \Rightarrow \alpha'_{1\cdots n} = \alpha_{1\cdots n}\det\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}}\right).$$

Com isto finalmente podemos definir a integral de uma n-forma em uma variedade:

Definição 2.2.2. *Sejam M uma variedade n-dimensional, $U \subset M$ um aberto, de M e ψ um sistema de coordenadas de U. Então, a integral de uma n-forma $\boldsymbol{\alpha}$ de M em U é dada por*

$$\int_U \boldsymbol{\alpha} = \int_{\psi^{-1}(U)} dx^1\cdots dx^n\ \alpha_{123\cdots n}.$$

Claramente esta definição é independente do sistema de coordenadas utilizado. De fato, caso integremos no sistema linha temos que

$$\int_U \boldsymbol{\alpha}' = \int_{\psi'^{-1}(U)} dx'^1\cdots dx'^n\ \alpha_{123\cdots n}\det\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}}\right).$$

Utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis em Integrais de Jacobi resulta que

$$\int_U \boldsymbol{\alpha}' = \int_{\psi^{-1}(U)} dx^1\cdots dx^n\ \alpha_{123\cdots n}.$$

Consequentemente

$$\int_U \boldsymbol{\alpha}' = \int_U \boldsymbol{\alpha}.$$

Logo a integral é independente do sistema de coordenadas. Isto é de particular importância para definirmos uma ação que satisfaça o princípio da relatividade. A orientação define o sinal da integral, caso inverta-se a orientação da variedade o sinal inverte.

Caso queiramos integrar p-formas quaisquer com p menor que a dimensão da variedade, basta integrar na subvariedade de dimensão p. De fato, consideremos que a variedade N está mergulhada em M, com $\dim N = p$, logo a integral de $\boldsymbol{w} \in \Lambda^p_x$ é

$$\int_N \boldsymbol{w} = \int_{\psi^{-1}(N)} dx^1\cdots dx^p\ w_{123\cdots p}.$$

Um teorema envolvendo integrais de elevada importância é a generalização do Teorema de Stokes:

[2]Intuitivamente um sistema dextrógiro significa que o mapa cumpre a regra da mão direita.

Teorema 2.2.1 (Stokes)**.** *Sejam M uma variedade p-dimensional compacta e orientada com fronteira também orientável e $\boldsymbol{w}$ uma $(p-1)$-forma em M que é de classe C^1. Então*

$$\int_{\text{int}M} \boldsymbol{dw} = \int_{\partial M} \boldsymbol{w}$$

Nos exemplos a seguir deduziremos os teoremas integrais clássicos à partir do Teorema 2.2.1.

Exemplo 2.2.1. *Consideremos a variedade $\mathbb{R}$ e a subvariedade $[a,b] \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja $f \in \mathcal{F}$, assim*

$$\boldsymbol{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\ \boldsymbol{d}x.$$

Pois $[a,b]$ é unidimensional. A orientação de $[a,b]$ é o vetor $\boldsymbol{dn}$, em que este aponta para fora do intervalo, logo $\boldsymbol{dn}(a) = -\boldsymbol{d}x$ e $\boldsymbol{dn}(b) = \boldsymbol{d}x$. Assim o teorema de Stokes aplicado em $\boldsymbol{d}f$ nos dá

$$\int_{[a,b]} \boldsymbol{d}f = \int_{\partial[a,b]} f$$

Como $\partial[a,b] = \{a,b\}$ então obtemos

$$\int_a^b d\lambda\ f(\lambda) = f(b) - f(a).$$

Exemplo 2.2.2. *Consideremos o $\mathbb{R}^3$ e um volume V, neste caso uma subvariedade tridimensional $V \in \mathbb{R}^3$ compacta, orientada e com fronteira orientável. Seja $\boldsymbol{w} \in T_p^*\mathbb{R}^3$, logo do Teorema de Stokes tem-se que*

$$\int_V \boldsymbol{d} \star \boldsymbol{w} = \int_{\partial V} \star \boldsymbol{w}.$$

Podemos identificar a 2-forma

$$\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y - \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z + \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z$$

como a orientação da superfície ∂V, isto é, o vetor normal, $\boldsymbol{n}$, a superfície. Teríamos então que

$$\int_V d^3x\ \vec{\nabla} \cdot (\sharp \boldsymbol{w}) = \int_{\partial V} dS\ \ (\sharp \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n},$$

em que $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a superfície S. Este é o Teorema da Divergência de Gauss.

Exemplo 2.2.3. *Consideremos o $\mathbb{R}^3$ novamente, mas agora uma superfície S, neste caso uma subvariedade bidimensional $S \in \mathbb{R}^3$ compacta, orientada e com fronteira orientável. Seja $\boldsymbol{w} \in T_p^*\mathbb{R}^3$. Do Teorema de Stokes tem-se que*

$$\int_S \boldsymbol{dw} = \int_{\partial S} \boldsymbol{w}.$$

Novamente identificamos a 2-forma

$$\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y - \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z + \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z$$

como uma orientação da superfície, logo

$$\int_S dS\ \ \left[\vec{\nabla} \times (\sharp \boldsymbol{w})\right] \cdot \boldsymbol{n} = \oint_{\partial S}\ d\boldsymbol{l} \cdot (\sharp \boldsymbol{w}),$$

Em que $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a superfície S. Este é o Teorema de Stokes no $\mathbb{R}^3$.

Vejamos agora como integrar uma função escalar em uma variedade n-dimensional M e como definir a forma volume. Temos que integrar uma 0-forma em M é o mesmo que integrar a n-forma obtida pelo dual de Hodge. De fato, seja $f \in \mathcal{F}$ temos que

$$\star f = f\boldsymbol{\epsilon}.$$

Em que $\boldsymbol{\epsilon} \in \Lambda_x^n$ seria a forma volume, para obtermos esta n-forma vamos supor que $\boldsymbol{\epsilon}$ está normalizado, isto é

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon} \rangle = s,$$

em que s a assinatura da métrica. Da definição do produto interno de formas podemos obter

$$g^{a_1 b_1} \cdots g^{a_n b_n} \epsilon_{b_1 \cdots b_n} \epsilon_{a_1 \cdots a_n} = n! s \Rightarrow g^{a_1 b_1} \cdots g^{a_n b_n} \varepsilon_{b_1 \cdots b_n} \varepsilon_{a_1 \cdots a_n} \left(\epsilon_{1 \cdots n}\right)^2 = n! s \Rightarrow$$

$$n! \det\left(g^{ab}\right) \left(\epsilon_{1 \cdots n}\right)^2 = n! s \Rightarrow \epsilon_{1 \cdots n} = \sqrt{|g|}.$$

Aqui podemos escolher duas orientações possíveis, como em uma base ortonormal positiva temos que $\epsilon_{1 \cdots n} = 1$ escolhamos a de sinal positivo, logo

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sqrt{|g|}\ \boldsymbol{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^n.$$

A forma volume também é denominada tensor de Levi-Civita.

Portanto, o dual de Hodge de qualquer função $f \in \mathcal{F}$ é

$$\star f = f\ \sqrt{|g|}\ \boldsymbol{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{d}x^n,$$

o que nos fornece o seguinte resultado para a integral de f na variedade M:

$$\int_M \star f = \int_{\psi^{-1}(M)} dx^1 \cdots dx^n\ f\ \sqrt{|g|},$$

sendo esta, como mostrado acima, independente do sistema de coordenadas.

Exemplo 2.2.4. *Seja $\boldsymbol{T}$ um campo vetorial tangente a uma variedade n-dimensional M, o Teorema de Gauss assume a seguinte forma nesta*

$$\int\limits_M d^n x\ \nabla_\mu (T^\mu) \sqrt{|g|} = \int\limits_{\partial M} d^{n-1} x\ T^\mu n_\mu \sqrt{|\gamma|},$$

em que $\boldsymbol{n}$ e γ são, respectivamente, uma orientação de ∂M e o determinante do tensor métrico em ∂M [23].

No Capítulo 1 desenvolvemos o formalismo matemático necessário para a relatividade especial e geral, já no Capítulo 2 o formalismo para as Leis de Maxwell, agora no Capítulo 3 veremos as teorias da relatividade restrita e geral.

Capítulo 3

Teorias da Relatividade

Neste capítulo será discutido os fundamentos da relatividade especial e a teoria da gravitação de Einstein. Na Seção 2.1 descreveremos brevemente o panorama da física pre-relativística, *i.e.*, pré-1900, neste contexto faremos uma breve análise das transformações de Galileu e do espaço-tempo newtoniano, e discutiremos a incompatibilidade destas com a eletrodinâmica de Maxwell. Além disso, falaremos do início da relatividade especial.

Na Seção 2.2 será feito um desenvolvimento do espaço-tempo de Lorentz-Minkowski com base em postulados e no formalismo da geometria diferencial, aqui será abrangido cinemática e dinâmica relativísticas, grupo de Lorentz e princípios variacionais. Por fim, na Seção 2.3 discutiremos o princípio da covariância geral, gravitação, Equações de Campo de Einstein e Ação de Hilbert.

3.1 Física Pré-Relativística e Início da Relatividade

O objetivo da mecânica clássica é modelar o movimento dos corpos e expressar os seus movimentos em função do tempo. Portanto, estes descrevem trajetórias em um espaço euclidiano de três dimensões espaciais e uma temporal. Dada uma origem e um sistema de coordenadas podemos escrever este espaço como $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ e os seus pontos podem ser dados por (t, x, y, z). Este sistema de coordenadas pode ser introduzido pela presença de um observador com uma fita métrica e um relógio, mapeando assim o espaço.

A estrutura causal deste espaço é bem-definida, temos que o tempo passa de igual maneira para todos os observadores neste, consequentemente quando mudamos de observador somente a parte espacial muda, a temporal não. Isto é, consideremos dois observadores S e S' e os respectivos sistemas de coordenadas (t', x', y', z') e (t, x, y, z). Então a máxima alteração possível no tempo é um *shift* constante, isto é

$$t = t' + \tau.$$

Em que τ é constante, logo a variação de tempo em dois referenciais é sempre igual. Isto significa que classicamente todos os relógios, em movimento ou não, marcam a mesma passagem de tempo para um dado evento, *id est*, o tempo é absoluto. Estas definições são essenciais na mecânica clássica e foram dadas por Isaac Newton (1643-1727) na sua obra *Principia* [24]. A superfície de simultaneidade é dado pelo plano definido por $t = t_0$, isto é, o conjunto de todos os pontos do espaço $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3$ que marcam o mesmo tempo, em que t_0 constante.

O problema agora seria modelar o movimento, isto é, escrever a equação de movimento para o corpo. Existem basicamente três formas de se fazer isso, via mecânica newtoniana

lagrangeana ou hamiltoniana. Cada uma tem suas vantagens e desvantagens, contudo a principal suposição feita para estas formulações é que as equações de movimento são covariantes, isto é, são escritas da mesma forma, em diferentes referenciais inerciais. Sendo assim definamos estes:

Definição 3.1.1. *Um referencial inercial é todo observador no qual a Primeira Lei de Newton é válida, isto é, um corpo livre da ação de forças tende a ficar em repouso ou em movimento contínuo.*

Então para verificarmos se dado observador S é inercial basta deixar um corpo em um movimento livre de forças, caso este acelere então o referencial não é inercial. Dado um referencial inercial S, os únicos referenciais inerciais que podem ser construídos a partir deste são por meio de uma translação, rotação ou translação com velocidade constante. Ao conjunto das transformações entre referenciais inerciais damos o nome de Grupo de Galileu, qualquer outra mudança de referencial que não pertença a este grupo não deixa as equações de movimento covariantes [25].

Uma classe muito especial de transformações do grupo de Galileu são os *boosts* de Galileu, *i.e.*, as translações com velocidade constante. Consideremos que o referencial S' esteja em movimento com velocidade constante $\boldsymbol{V}$ em relação ao referencial inercial S, logo S' é inercial e a transformação de coordenadas é dada por

$$\begin{aligned} t' &= t; \\ \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t. \end{aligned}$$

Supondo é claro que no instante $t = 0$ as origens coincidiam. Consequentemente obtemos a famosa lei de adição de velocidades galileana

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}.$$

Diferentemente das rotações, os *boosts* de Galileu são comutativos e para obtermos as transformações inversas basta fazer a mudança $\boldsymbol{V} \to -\boldsymbol{V}$, isto é, o referencial S se move com velocidade $-\boldsymbol{V}$ em relação a S'. Na forma matricial podemos escrever os *boosts* de Galileu como [25]

$$(TG_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V_x & 1 & 0 & 0 \\ -V_y & 0 & 1 & 0 \\ -V_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Como todas as leis da mecânica são covariantes por transformações pertencentes ao grupo de Galileu podemos estender esta característica a todas as leis da física, o que nos leva a postular:

"*Todas as leis físicas são covariantes por transformações de Galileu.*"

Uma das primeiras pessoas a supor um axioma parecido foi J. H. Poincaré (1854-1912) na sua obra *O Valor da Ciência*, contudo este especificou que as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais, todavia não restringiu sob que classe de transformações a covariância se mantém [26].

No final do século XIX o panorama da física seguia sem grandes mudanças, porém nesta época surgiu a eletrodinâmica sob a forma das Leis de Maxwell. Esta continha uma grande falha, em meio a inúmeros sucessos diga-se de passagem, do ponto de vista clássico:

não era covariante pelo grupo de Galileu. De fato, consideremos um *boost* somente no eixo x dado por

$$\begin{aligned} t' &= t; \\ x' &= x - ut; \\ y' &= y; \\ z' &= z \end{aligned}$$

Em que $\boldsymbol{u}$ é a velocidade do referencial S' em relação a S. E as Equações de Maxwell no vácuo, escritas no sistema internacional de unidades, e em S são dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \mu_0 c^2 \rho;$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0;$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Em que $\boldsymbol{E}$ é o campo elétrico, $\boldsymbol{B}$ o campo magnético, ρ densidade de carga, c a velocidade da luz e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo que vale $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2. Utilizando as transformações dadas e a regra da cadeia podemos obter que estas equações em S' seriam

$$\vec{\nabla}' \cdot \boldsymbol{E} = \mu_0 c^2 \rho;$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \boldsymbol{B} = 0;$$

$$\vec{\nabla}' \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t'} + (\boldsymbol{u} \cdot \vec{\nabla}')\boldsymbol{B};$$

$$\vec{\nabla}' \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t'} - \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \vec{\nabla}')}{c^2} \boldsymbol{E}.$$

Sendo $\vec{\nabla}'$ é o operador derivativo no referencial S'. Como visto acima as leis de Maxwell não são covariantes por *boosts* de Galileu.

Outra incongruência da eletrodinâmica com a mecânica clássica seria o fato de que de acordo com a equação de onda a velocidade da luz é sempre c. Pois estas são obtidas das equações de Maxwell, que a princípio não valem em um referencial inercial específico. Todavia para as ondas sonoras em um meio, a equação de onda é válida em relação a porção do meio em repouso, em analogia a este fato postulou-se que o mesmo ocorre para as ondas eletromagnéticas e o meio de propagação destas seria o éter.

Consequentemente as leis de Maxwell seriam válidas no referencial no qual o éter está em repouso. Na época existiam duas possibilidades: o éter é estacionário e é parcialmente arrastado pela Terra em seu movimento de translação ao redor do Sol ou o éter é completamente arrastado na superfície da Terra. Devido ao experimento de Fizeau[1] preferiu-se a primeira hipótese e, além disso, se a segunda fosse verdadeira não teríamos como verificar a existência do éter via diferenças na velocidade da luz.

Para testar esta hipótese realizou-se o Experimento de Michelson-Morley em 1887 por Albert A. Michelson (1852-1931) e Edward W. Morley (1838–1923). Este consistia na luz sendo emitida por uma fonte e sendo divida por um divisor de feixe em duas direções ortogonais sendo uma delas alinhada com a direção de rotação na Terra. Estes dois

[1]Este foi realizado por H. Fizeau (1819-1896) em 1851 e consiste basicamente em medir a velocidade da luz em uma corrente de água.

feixes deslocavam-se o mesmo comprimento e eram refletidos em um espelho, retornando assim ao divisor de feixe e voltando ser um só feixe que era mostrado em um anteparo. Todavia, devido a lei de adição de velocidades galileana, no feixe paralelo à rotação da Terra a velocidade da luz deveria ser modificada, logo haveria uma diferença de tempo entre os feixes ortogonais, gerando assim um padrão de interferência. Entretanto, este padrão não foi observado, pelo menos não no nível esperado, e então poderia-se concluir que: a velocidade da luz era constante em todos os referenciais inerciais ou o éter era completamente arrastado pela Terra.

Como o nível de precisão do Experimento de Michelson-Morley era baixo, devido aos equipamentos disponíveis na época, com o passar do tempo realizou-se outros testes para comprovar a invariância da velocidade da luz. A maioria dos métodos modernos baseia-se em ressonância ótica, em especial destacamos o trabalho de Mueller *et al.*, que usando feixes de ressonadores óticos criogênicos ortogonais e observações no período de um ano, além de previsões do modelo padrão buscaram anisotropias na velocidade da luz, como resultado obtiveram $\Delta c/c \approx 10^{-15}$, comprovando assim a invariância de c [27].

Para explicar o resultado nulo do Experimento de Michelson-Morley, H. A. Lorentz (1853-1928) publicou dois trabalhos de fundamental importância, sendo estes *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* em 1904 e *Simplified Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Systems* em 1899. Nestes o autor introduziu arbitrariamente um conjunto de transformações para as coordenadas e os campos elétrico e magnético que mantinham as Leis de Maxwell invariantes e a velocidade da luz constante [28]. Estas transformações tinham a propriedade de que o tempo era medido localmente, isto é, para diferentes observadores a passagem de tempo era distinta e, além disso, nenhum corpo poderia possuir uma velocidade maior que a da luz. Devido ao conflito com a física clássica elas foram pontualmente rejeitadas e relegadas a um truque matemático pelo próprio Lorentz, contudo em 1905 iniciou-se uma revolução na Física que viria a confirmar todas estas hipóteses consideradas absurdas: a relatividade restrita[2].

A principal motivação de Albert Einstein (1879-1955) para a formulação da relatividade restrita foi fazer com que todas as leis físicas assumissem a mesma forma sob todos os referenciais inerciais, algo que já havia sido proposto por Poincaré como dito anteriormente, todavia só foi colocado em bases físicas e elevado a *status* de princípio geral por Einstein [28]. Além disso, este baseou-se fortemente no resultado do experimento de Fizeau, mais ainda do que no experimento de Michelson-Morley.

O seu principal guia na construção desta teoria foi a convicção de que a eletrodinâmica estava precisa em suas afirmações sem a necessidade do éter. Portanto, a pergunta que ficou era qual o referencial que a equação de onda é válida? A resposta é: em todos os referenciais inerciais.

3.2 Relatividade Especial

A relatividade restrita pode ser entendida sem geometria diferencial, todavia o poder desta teoria é manifestado somente com a utilização da última. Portanto, no desenvolvimento da primeira ao longo do texto utilizaremos métodos geométricos e uma formulação axiomática para a introdução dos postulados e resultados relativísticos.

[2]Também denominada relatividade especial.

3.2.1 Espaço-tempo de Lorentz-Minkowski

Como visto anteriormente, o espaço físico na mecânica clássica é o $\mathbb{R}^3$, sendo assim, vamos analisar algumas propriedades desta variedade. Esta admite um conjunto de parametrizações usuais, coordenadas cartesianas, e a distância entre dois pontos é independente da parametrização, cartesiana, utilizada e neste caso é dado por

$$D = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Consequentemente o tensor métrico deste espaço é da forma $g_{ab} = \delta_{ab}$ e obtemos as seguintes equações

$$\partial_a g_{bc} = 0 \quad \text{e} \quad \Gamma^a{}_{bc} = 0.$$

Logo, o operador derivativo é somente a derivada parcial e o tensor de curvatura é nulo. Como consequência as geodésicas, parametrizadas afim, deste espaço são da forma

$$x^a(\tau) = A^a\tau + B^a,$$

com A^a e B^a dados pela condição de contorno. Então as geodésicas são retas e o mapa exponencial é global, logo pode-se identificar $\mathbb{R}^3$ com $T_p\mathbb{R}^3$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Em vez de supormos que o $\mathbb{R}^3$ tem o elemento de arco dado anteriormente e que existe um grupo de coordenadas cartesianas que mantém este invariante, basta colocar que:

"*O espaço físico é a variedade* $\mathbb{R}^3$ *com uma métrica riemanniana plana.*"

Somente com esta afirmação podemos retirar todas as suposições feitas. De fato, temos que existe um grupo de transformações entre sistema de coordenadas que preservam a métrica ortonormal. Do tensor métrico temos ainda que as geodésicas seriam retas e com isso construímos o mapa exponencial, que é global pois a curvatura é nula, e temos as coordenadas cartesianas.

Seguindo o mesmo raciocínio enunciaremos postulados que conterão os axiomas propostos por Einstein e nos dirão como é a estrutura do espaço-tempo relativístico.

Postulado (Existência de $\mathbb{L}^4$)**.** *O espaço-tempo físico na relatividade restrita, o espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{L}^4$*, é a variedade* $\mathbb{R}^4$ *com uma métrica lorentziana plana. Um ponto neste espaço é denominado evento.*

Analogamente ao que fizemos anteriormente para o $\mathbb{R}^3$, temos que os símbolos de Christoffel e o tensor de curvatura se anulam. Logo, o $\mathbb{L}^4$ é uma variedade quadridimensional plana, portanto as geodésicas neste espaço são retas e com estas podemos construir um sistema de coordenadas globais da forma

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y \quad \text{e} \quad x^3 = z.$$

Nos quais o tensor métrico é sempre ortonormal

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

O que motiva a seguinte definição,

Definição 3.2.1. *Todo sistema de coordenadas do espaço-tempo na qual o tensor métrico tem a forma ortonormal em todo o* $\mathbb{L}^4$ *é denominado inercial.*

O segundo postulado nos diz como um corpo livre de forças se move em $\mathbb{L}^4$ e nos dão uma estrutura de causalidade para este espaço[3]. Além disso, nos informam que nenhum

[3]O que torna este postulado análogo a lei da inércia.

corpo se move com velocidade maior que a luz.

Postulado (Lei da Inércia)**.** *A trajetória de qualquer corpo no espaço de Lorentz-Minkowski é denominada linha do universo e é sempre do tipo temporal. Além disso, corpos livres da ação de forças movimentam-se em geodésicas do tipo temporal.*

Temos que a equação de movimento de um corpo é dado pela forma relativística da Segunda Lei de Newton. Primeiramente definamos 4-velocidade e 4-momento.

Definição 3.2.2. *Sejam C a trajetória de uma partícula e τ o tempo próprio da partícula. Definamos $\boldsymbol{u} \in TM$*

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{C}}{d\tau}.$$

Esta é a 4-velocidade da partícula.

Temos que o tempo próprio pode ser escrito como

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, cdt,$$

em que v é a velocidade usual no $\mathbb{R}^3$. Consequentemente as componentes da 4-velocidade, em um referencial inercial, são dadas por

$$\begin{aligned} u^0 &= \gamma; \\ u^1 &= \gamma v_x/c; \\ u^2 &= \gamma v_y/c; \\ u^3 &= \gamma v_z/c. \end{aligned}$$

Portanto é diretamente dedutível que $\boldsymbol{u}$ é unitário, isto é

$$u^\alpha u_\alpha = -1.$$

Com a 4-velocidade podemos definir o 4-momento, basta multiplicar pela massa de repouso, sendo esta:

Definição 3.2.3. *A massa de repouso, m, de um corpo é aquela a qual é medida no referencial em que este permanece em repouso.*

Então a massa de repouso é um invariante relativístico, ou seja, é a mesma em todos os referenciais por definição. Portanto o 4-momento é definido de maneira análoga ao caso clássico.

Definição 3.2.4. *Seja $\boldsymbol{u}$ a 4-velocidade de uma partícula, assim definamos o 4-momento desta, $\boldsymbol{p} \in TM$, como*

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}. \tag{3.3}$$

Como consequência da definição temos que o

$$p^\mu p_\mu = -m^2.$$

E as componentes de $\boldsymbol{p}$ são

$$\begin{aligned} p^0 &= m\gamma; \\ p^1 &= \gamma p_x/c; \\ p^2 &= \gamma p_y/c; \\ p^3 &= \gamma p_z/c. \end{aligned}$$

Portanto a Lei de Força Relativística é dada por

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \boldsymbol{H},$$

em que $\boldsymbol{H}$ é a força de Minkowski que será definida na Seção 3.2.3.

Na relatividade especial o 4-momento já engloba a energia e o momento, portanto as leis de conservação destas quantidades podem ser reescritas como

Postulado (Conservação do momento)**.** *Em um sistema fechado e isolado o 4-momento é conservado.*

De fato, as componentes espaciais de $\boldsymbol{p}$ são proporcionais ao momento clássico, enquanto que a componente temporal é proporcional a energia relativística:

$$E = c^2 p^0 \quad \text{ou} \quad E = \gamma mc^2.$$

Fazendo-se o limite clássico em E temos que esta é igual a energia cinética, à não ser um termo mc^2 que é a energia de repouso:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E \approx mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) \Rightarrow E \approx \frac{mv^2}{2} + mc^2.$$

Como dito anteriormente, a Lei da Inércia introduz uma estrutura de causalidade no espaço-tempo. No Capítulo 1 foi dito que um espaço com métrica de Lorentz possui três tipos de vetores tangentes. De maneira análoga podemos classificar intervalos entre eventos. Seja um intervalo entre dois eventos (x^μ) e (y^μ) dado por

$$S^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu).$$

Consequentemente temos que

i. $S^2 > 0$ (Tipo Espacial);

ii. $S^2 < 0$ (Tipo Temporal);

iii. $S^2 = 0$ (Tipo Luminoso).

Para intervalos temporais sempre existe um referencial inercial tal que $x^\mu = y^\mu$ para a parte espacial ($\mu = 1, 2, 3$), ou seja, existe um observador tal que estes eventos ocorrem no mesmo local no espaço, mas em tempos diferentes. Todavia não existe um sistema de coordenadas tal que os eventos sejam simultâneos, dado que neste caso teríamos que $S^2 > 0$. No entanto, caso o intervalo seja espacial existe um referencial no qual os eventos são simultâneos, porém estes nunca ocorrem no mesmo local no espaço. Agora dá-lo-emos uma interpretação causal para estes conceitos.

Dado um evento (y^μ), denominemos o conjunto

$$\{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in M;\ -(x^0-y^0)^2 + (x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2 + (x^3-y^3)^2 = 0\}$$

de cone de luz centrado em (y^μ). Portanto toda linha de universo que passa pelo evento (y^μ) está no interior do cone de luz. Temos que todo evento (x^μ) no interior do cone de luz, é ligado por (y^μ) via um intervalo temporal. Logo, neste caso, (x^μ) é um evento futuro de (y^μ) caso $x^0 > y^0$ e evento passado para $x^0 < y^0$. Portanto, o interior do cone de

luz contém todos os eventos que podem ser ligados causalmente com a origem para algum observador. Consideremos agora eventos no exterior do cone de luz, estes sempre estão separados espacialmente e contém todos os pontos que podem ser simultâneos à origem em algum referencial. A Figura 3.1 contém um diagrama de um cone de luz.

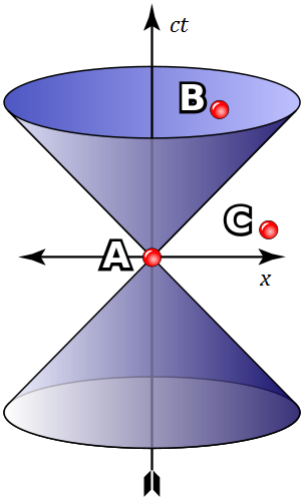


Figura 3.1: Cone de luz centrado no evento A, em que os eventos B e C podem, respectivamente, ser futuro e simultâneo à origem. A parte superior ao cone é denominado cone do futuro e a inferior de cone do passado [29].

Fica evidente na discussão acima que simultaneidade é um conceito relativo e não absoluto. No espaço-tempo newtoniano as hiper-superfícies de simultaneidade, *id est*, conjunto de todos eventos simultâneos, são hiper-planos com tempo fixo, sendo estas iguais para todo observador, a não ser que sejam transladadas paralelamente no caso em que a mudança de coordenadas seja uma translação temporal. Todavia no espaço de Lorentz-Minkowski estas variam de acordo com o referencial, pois eventos simultâneos para um observador podem não ser para outros. Uma consequência disto é que no espaço de Lorentz-Minkowski nem todos os relógios podem ser sincronizados.

3.2.2 Grupo de Lorentz

O último postulado da relatividade especial introduz o Princípio da Covariância Restrita, este que foi o principal guia de Einstein na formulação desta teoria.

Postulado (Covariância Restrita)**.** *As leis da Física são covariantes pelo grupo de Lorentz.*

Vejamos agora o que são estas transformações e como estas nos fornecem o princípio da covariância. Como dito anteriormente, um referencial inercial é todo aquele no qual a métrica é ortonormal, contudo estes não são únicos, na realidade temos um conjunto infinito de sistemas de coordenadas que satisfazem esta propriedade. A transformação entre estes mapas é dado pelo grupo de Poincaré.

Definição 3.2.5. *O grupo de Poincaré, denotado por $\mathcal{P}$, contém toda transformação entre dois sistemas de coordenadas que mantém a métrica ortonormal, isto é, sejam (x^μ) e (x'^μ)*

referenciais inerciais de $\mathbb{L}^4$ *temos que*

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\,\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}, \quad \textit{logo} \qquad \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right) \in \mathcal{P}.$$

Denotemos Λ como a matriz de mudança de coordenadas do grupo de Poincaré, portanto utilizaremos a seguinte notação

$$\Lambda^\alpha{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}.$$

Da definição temos que $\mathcal{P}$ é não-abeliano[4] e que Λ é ortonormal, isto é

$$\det\Lambda = \pm 1.$$

As transformações com determinante positivos são ditas próprias, caso contrário são ditas impróprias. As primeiras preservam a orientação espacial, isto é, o sinal de uma 3-forma em qualquer hiper-superfície espacial de $\mathbb{L}^4$ é mantido, já as impróprias não têm esta propriedade, um exemplo seriam as transformações espelhadas [30]. As mudanças de coordenadas com $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ e $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ são denominadas, respectivamente, orto-crônicas e não orto-crônicas. O primeiro tipo preserva a direção temporal, já o segundo não, ou seja, futuro vira passado e vice-versa. Portanto, pode-se separar $\mathcal{P}$ em quatro classes distintas [30]:

1. $L_{++} = \{\Lambda \in \mathcal{P}; \det\Lambda = 1 \text{ e } \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$;
2. $L_{+-} = \{\Lambda \in \mathcal{P}; \det\Lambda = 1 \text{ e } \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$;
3. $L_{-+} = \{\Lambda \in \mathcal{P}; \det\Lambda = -1 \text{ e } \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$;
4. $L_{--} = \{\Lambda \in \mathcal{P}; \det\Lambda = -1 \text{ e } \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$.

Exemplos de transformações de $\mathcal{P}$ são translações em $\mathbb{L}^4$, rotações espaciais, inversões temporais, inversões espaciais e translações à velocidade constante. Todavia não são todas as transformações de Poincaré que preservam a forma das leis físicas, de fato já demonstrou-se em experimentos a quebra da simetria de paridade[5] na interação fraca por meio do decaimento beta do cobalto-60 [31]. Além disso, a inversão temporal também é rejeitada devido a segunda lei da termodinâmica [30]. Portanto, o grupo de Lorentz, que é a classe das transformações que satisfazem o Princípio da Covariância Restrita, é dado não por todo $\mathcal{P}$, mas somente por uma parte deste, mais especificamente L_{++}. A seguir temos como exemplo de $\Lambda \in L_{++}$ o *boost* de Lorentz.

Analisemos brevemente uma classe específica de transformações de L_{++}: os *boosts* de Lorentz. Consideremos dois referenciais inerciais S e S' em que o primeiro está em movimento com velocidade constante em relação ao segundo, a transformação de Lorentz entre estes é denominada *boost*. Sejam $\boldsymbol{V}$ a velocidade da origem de S' em relação a S e $\boldsymbol{n}$ o vetor unitário na direção e sentido da velocidade. Coloquemos $\beta = V/c$, portanto o *boost* de Lorentz de S para S' é dado por [22]

$$\begin{aligned}
&\Lambda^{0'}{}_0 = \gamma;\\
&\Lambda^{0'}{}_j = \Lambda^{j'}{}_0 = -\beta\gamma n^j;\\
&\Lambda^{j'}{}_k = \Lambda^{k'}{}_j = (\gamma - 1)n^j n^k + \delta^j{}_k.
\end{aligned}$$

[4]Basicamente as transformações não comutam, isto é, $\Lambda_1\Lambda_2 \neq \Lambda_2\Lambda_1$.

[5]Sendo esta uma transformação de inversão espacial, isto é, da classe L_{-+}.

Para obtermos a transformação inversa basta fazer a substituição $\beta \to -\beta$. Na forma matricial temos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma n^1 & -\beta\gamma n^2 & -\beta\gamma n^3 \\ -\beta\gamma n^1 & (\gamma-1)(n^1)^2+1 & (\gamma-1)n^1n^2 & (\gamma-1)n^1n^3 \\ -\beta\gamma n^2 & (\gamma-1)n^2n^1 & (\gamma-1)(n^2)^2+1 & (\gamma-1)n^2n^3 \\ -\beta\gamma n^3 & (\gamma-1)n^1n^3 & (\gamma-1)n^2n^3 & (\gamma-1)(n^3)^2+1 \end{pmatrix}.$$

Note que o boost de Lorentz é uma transformação que afeta somente as direções paralelas a $\boldsymbol{V}$, além disso temos que $\Delta x^0 \neq \Delta x'^0$, portanto o tempo passa de maneira diferente para os dois referenciais, ou seja, relógios em S e S' não podem ser sincronizados. Já o limite clássico destas transformações, em uma direção genérica, é a transformação de Galileu discutida na introdução.

Consideremos um caso particular do *boost* de Lorentz com $\boldsymbol{V}$ no eixo x e no sentido positivo, logo $n^1 = 1$ e $n^2 = n^3 = 0$, além disso seja Λ uma transformação de S' para S. Portanto,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em termos das coordenadas as transformações são dadas por

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left[t' + Vx'/c^2\right]; \\ x &= \gamma\left[x' + Vt'\right]; \\ y &= y'; \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Com isso calculemos agora a famosa Lei de Adição de Velocidades:

Teorema 3.2.1. *Sejam S e S' dois referenciais inerciais, com o segundo movimentando-se com velocidade constante $\boldsymbol{V}$ no eixo x em relação ao primeiro. Consideremos $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}'$, respectivamente, a velocidade de um corpo em S e S'. Logo $\boldsymbol{v}$ goza das seguintes relações:*

$$v^1 = \frac{V + v'^1}{1 + Vv'^1/c^2}, \quad v^2 = \frac{v'^2}{\gamma\left(1 + Vv'^1/c^2\right)}, \quad e \quad v^3 = \frac{v'^3}{\gamma\left(1 + Vv'^1/c^2\right)}.$$

Primeiramente consideremos a diferencial do sistema de equações 3.5:

$$\begin{aligned} dt &= \gamma\left[dt' + Vdx'/c\right]; \\ dx &= \gamma\left[dx' + Vdt'\right]; \\ dy &= dy'; \\ dz &= dz'. \end{aligned}$$

Utilizando a definição de velocidade temos que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\left[dx' + Vdt'\right]}{\gamma\left[dt' + Vdx'/c\right]} \Rightarrow v^1 = \frac{dt'\left[v'^1 + V\right]}{dt'\left[1 + Vv'^1/c\right]} \Rightarrow v^1 = \frac{V + v'^1}{1 + Vv'^1/c^2}.$$

Para as demais direções temos cálculos análogos, *exempli gratia*, para a coordenada y temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left[dt' + Vdx'/c\right]} \Rightarrow v^2 = \frac{v'^2}{\gamma\left(1 + Vv'^1/c^2\right)}.$$

É evidente que o limite clássico do Teorema 3.2.1 é basicamente a Lei de Adição de Velocidades de Galileu, todavia esta goza de uma característica que a sua contraparte clássica não a tem: a invariância da velocidade da luz. Consideremos um feixe de luz em S' na direção x', logo v^2 e v^3 são nulos e

$$v^1 = \frac{V + c}{1 + Vc/c^2} \Rightarrow v^1 = c.$$

Portanto, estas transformações satisfazem de fato o Segundo Postulado de Einstein.

3.2.3 Princípios Variacionais na Relatividade Especial

O princípio da ação estacionária é central no panorama físico atual, pois é a ligação mais imediata das teorias físicas clássicas com as suas versões quânticas, sendo o propagador de Feynmann o que liga estas teorias [32]. Nesta seção especificaremos como o princípio da ação estacionária pode ser utilizado para se obter as equações que regem a dinâmica de um sistema em $\mathbb{L}^4$.

Primeiramente definamos funcional integral:

Definição 3.2.6. *Um funcional integral S é um mapa $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que leva o espaço de funções $\mathcal{F}$ definido em uma variedade M em um número, em que S é dado por uma integral*

$$S[\phi] = \int_M d^n x \ \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \phi, \cdots\right) \sqrt{|g|}.$$

A função $\mathcal{L}$ é denominada lagrangiana.

Daqui para frente consideremos o caso em que $|g| = 1$, temos que sistemas de coordenadas inerciais em $\mathbb{L}^4$ cumprem esta condição. A definição dada é automaticamente generalizável, caso ϕ seja um campo tensorial de qualquer ordem. A aplicação deste conceito na Física consiste em encontrar um funcional integral, que denominamos ação, e variarmos a função de entrada. Feito isso encontramos qual destas extrema o funcional dado, esta função satisfaz um conjunto de equações diferenciais denominadas Equações de Euler-Lagrange. Como exemplo variemos primeiramente uma ação cuja lagrangiana depende de uma campo escalar ϕ e de sua primeira derivada, isto é,

$$S[\phi] = \int_M d^n x \ \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right).$$

Deste modo encontremos a variação de S, δS, em termos da variação em ϕ, ou seja, $\delta\phi$. Sendo assim

$$\delta S[\phi] = \int_M d^n x \ \delta\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right) \Rightarrow \delta S = \int_M d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \delta\phi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_M d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right] - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right]\delta\phi\right)$$

O segundo termo pode ser reescrito utilizando o Teorema de Gauss

$$\int_M d^n x \ \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right] = \int_{\partial M} d^{n-1} x \ n_\mu \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi. \tag{3.5}$$

Em geral fixamos a variação de ϕ em ∂M, o que seria equivalente a especificarmos as condições de contorno, portanto $\delta\phi(\partial M) = \{0\}$. Consequentemente a integral 3.5 é nula, em suma todo termo que pode ser reescrito, utilizando o Teorema de Gauss, em termos de uma integral de superfície é nulo na variação da ação. Portanto,

$$\delta S = \int_M d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \right) \delta\phi.$$

No ponto de extremo tem-se que $\delta S = 0$, porém $\delta\phi$ é uma variação arbitrária, logo para a integral ser sempre nula temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right].$$

Esta é a Equação de Euler-Lagrange que descreve o sistema[6]. A vantagem do método variacional é que este satisfaz automaticamente o Princípio da Covariância Especial[7], dado que a integral é independente do sistema de coordenadas. Como a ação é um escalar, a lagrangiana deve ser um invariante relativístico, portanto esta é geralmente escrita em termos de normas de tensores ou vetores.

O caso realizado anteriormente foi para uma lagrangiana de primeira ordem, ou seja, depende somente das primeiras derivadas de ϕ. Generalizemos o argumento para qualquer ordem.

Teorema 3.2.2. *Seja $S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ a ação de um sistema, sendo esta dada por*

$$S[\varphi] = \int_M d^n x \ \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\mu \varphi, \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\varphi, \partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3}\varphi, \cdots\right),$$

em que $\varphi \in \mathcal{F}$ é de classe C^∞ e $\mathcal{L}$ é de ordem n-ésima ordem. Seja $\phi \in \mathcal{F}$ a função que extrema a ação e η uma variação desta, isto é,

$$\varphi(\epsilon, x^\mu) = \phi + \alpha\eta,$$

tal que $\alpha \in \mathbb{R}$. A variação e suas $(n-1)$-ésimas derivadas gozam de

$$\begin{aligned}
&\eta(\partial M) = \{0\};\\
&\partial_{\mu_1}\eta(\partial M) = \{0\};\\
&\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\eta(\partial M) = \{0\};\\
&\qquad\vdots\\
&\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{n-1}}\eta(\partial M) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Então ϕ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_j}\phi\right)} \right] = 0.$$

[6]Para um campo tensorial de *rank n* teríamos n^r equações.

[7]Na realidade este goza até do Princípio da Covariância Geral.

Provemos este resultado, porém primeiramente temos que para $j < n$

$$\int_M d^n x \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \eta = \int_M d^n x \ (-1)^j \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \right] \eta \quad (3.6)$$

De fato,

$$\int_M d^n x \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \eta = \int_M d^n x \ \partial_{\mu_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{j-1}} \eta \right) + - \int_M d^n x \ \partial_{\mu_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \right) \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{j-1}} \eta.$$

Pelo Teorema de Gauss o primeiro termo é nulo, logo

$$\int_M d^n x \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \eta = - \int_M d^n x \ \partial_{\mu_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \right) \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{j-1}} \eta.$$

Repetindo $j-1$ vezes o processo anterior obtemos o resultado desejado.

Temos então que $S[\varphi]$ é uma função de ϵ, logo

$$S(\epsilon) = \int_M d^n x \ \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\mu \varphi, \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \varphi, \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \varphi, \cdots\right).$$

Portanto o extremo de S ocorre quando

$$\frac{dS}{d\epsilon}(0) = 0,$$

ou seja,

$$\int_M d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \ \eta + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \ \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \eta \right) = 0.$$

Podemos reescrever esta equação utilizando o resultado anterior, portanto

$$\int_M d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \right] \right) \eta = 0.$$

O que ocorre para toda variação η se, e somente se,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi\right)} \right] = 0.$$

Obtemos assim a equação de Euler-Lagrange para uma lagrangiana de n-ésima ordem.

Podemos definir a derivada funcional da ação como

$$\frac{dS}{d\epsilon}(0) = \int_M d^n x \ \frac{\delta S}{\delta \phi} \ \eta.$$

Temos então que a derivada funcional é linear e satisfaz a regra de Leibniz, como esperado de um operador derivativo. Decorre da definição que

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_j} \phi \right)} \right].$$

Consequentemente a equação de Euler-Lagrange é

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0.$$

Exemplo 3.2.1. *Consideremos a seguinte lagrangiana que descreve o campo de Klein-Gordon neutro* [33]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right].$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange associada é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right).$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi.$$

O que nos resulta na equação de Klein-Gordon

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0.$$

Exemplo 3.2.2. *Classicamente a trajetória é obtida extremando-se a ação, sendo esta calculada ao longo da trajetória da partícula*

$$S[q] = \int dt \ \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right).$$

Todavia a ação é um invariante, dado que é um escalar, e na relatividade especial o tempo é uma variável local, isto é, depende do referencial. Sendo assim, é proposta uma nova ação para a partícula livre:

$$S[x^\mu] = \int d\lambda \ \alpha \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}. \tag{3.7}$$

Esta de fato é invariante, dado que é nada mais que o tempo próprio de uma partícula multiplicado por uma constante α que tem como função fornecer o limite clássico e nos dar a dimensão correta.

As Equações de Euler-Lagrange decorrentes de (3.7) *foram calculadas na Seção* 1.6.1 *e é basicamente a equação das geodésicas parametrizadas afim, dado que $\boldsymbol{u}$ é a* 4*-velocidade. Logo*

$$\alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{d\tau} = 0$$

é a equação de movimento da partícula. Consequentemente, utilizando a Equação (3.7) *obtemos a Lei da Inércia. Para calcular α basta realizarmos o limite clássico em* (3.7)*, logo*

$$S[x^\mu] = \int d\lambda \ \alpha \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} \Rightarrow S[x^\mu] = \int d\tau \ \alpha \Rightarrow S[x^\mu] = \int dt \ \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S[x^\mu] \approx \int dt\ \alpha c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Para que o limite clássico faça sentido temos que $\alpha = -mc$*, logo*

$$\Rightarrow S[x^\mu] \approx \int dt\ \left(\frac{mv^2}{2} - mc^2\right).$$

Portanto a ação da partícula livre relativística é dada por

$$S[x^\mu] = \int d\lambda\ \left(-mc^2\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\right). \tag{3.8}$$

Consideremos agora que o sistema está sob a influência de forças externas descritas pela lagrangiana $\mathcal{L}_{ext}$*, portanto a ação seria*

$$S[x^\mu] = \int d\lambda \left(-mc^2\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} + k\mathcal{L}_{ext}\right),$$

em que k *é a constante de acoplamento. Extremando a ação temos que*

$$-mc\frac{du_\alpha}{d\tau} + k\frac{\delta\mathcal{L}_{ext}}{\delta x^\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{du_\alpha}{d\tau} = \frac{k}{c}\frac{\delta\mathcal{L}_{ext}}{\delta x^\alpha}.$$

Portanto, podemos tomar $k = c$*, consequentemente as equação de movimento é*

$$\frac{du_\alpha}{d\tau} = \frac{\delta\mathcal{L}_{ext}}{\delta x^\alpha},$$

sendo assim, a força de Minkowski é

$$H_\alpha = \frac{\delta\mathcal{L}_{ext}}{\delta x^\alpha}.$$

Logo, a ação relativística para a equação de movimento é dada por

$$S[x^\mu] = \int d\lambda \left(-mc^2\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} + c\mathcal{L}_{ext}\right).$$

O método variacional também é útil para se analisar como as simetrias da lagrangiana nos fornecem informações sobre o sistema [33]. Mais precisamente temos o Teorema de Emmy Noether:

Teorema 3.2.3 (Noether)**.** *A todo grupo de transformações contínuas de campo que mudam a lagrangiana no máximo por uma divergência, existe uma corrente em* $T\mathbb{L}^4$ *conservada.*

De fato, consideremos uma lagrangiana de primeira ordem dependente de um campo escalar ϕ e a seguinte mudança contínua deste

$$\phi \to \phi + \delta\phi;$$

desta forma a lagrangiana muda por no máximo uma divergência de um campo S^μ, ou seja,

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu S^\mu.$$

Logo, a variação de $\mathcal{L}$ é nula e é dada por

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu S^\mu \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\partial_\mu\left(\delta\phi\right) = \partial_\mu S^\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\partial_\mu\left(\delta\phi\right) = \partial_\mu S^\mu \Rightarrow \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\ \delta\phi\right) = \partial_\mu S^\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\ \delta\phi - S^\mu\right) = 0.$$

Seja j^μ a corrente conservada, logo

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\ \delta\phi - S^\mu.$$

Para uma lagrangiana de ordem n podemos fazer uma análise análoga e a corrente conservada é

$$j^\mu = \sum_{k=1}^{n}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{k-1}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{k-1}}\phi\right)}\right)\delta\phi - S^\mu.$$

Consequentemente para cada tipo de transformação temos uma corrente conservada, invariâncias por rotações nos dão a conservação do momento angular e por translações em $\mathbb{L}^4$ a conservação da energia e do momento. Analisemos mais profundamente o último caso.

Consideremos translações em $\mathbb{L}^4$ por um vetor infinitesimal, logo

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu,$$

em que ϵ^μ é uma mudança infinitesimal arbitrária. Portanto,

$$\delta\phi = \phi'(x^\mu + \epsilon^\mu) - \phi(x^\mu).$$

Seja ϕ é simétrica por translações, isto é, $\phi'(x^\mu + \epsilon^\mu) = \phi(x^\mu)$. Consequentemente

$$\delta\phi = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi.$$

Calculemos agora a variação em $\mathcal{L}$

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi)) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \Rightarrow \delta\mathcal{L} = -\epsilon^\mu\partial_\mu\mathcal{L}.$$

Consequentemente temos S^μ e $\delta\phi$, substituindo na expressão da corrente conservada é obtido que

$$j^\mu = -\epsilon_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\ \partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right].$$

Como ϵ^μ é arbitrário temos o seguinte tensor conservado

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\ \partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

O tensor $\boldsymbol{\Theta}$ é denominado o tensor energia-momento canônico e satisfaz a seguinte lei de conservação:

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0.$$

Da definição temos que Θ^{00} é a densidade de energia do sistema, Θ^{i0} é a densidade de momento e as componentes Θ^{ij} estão relacionadas ao estresse sofrido pelo sistema.

Exemplo 3.2.3. *O tensor energia-momento associado ao campo de Klein-Gordon é*

$$\Theta^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\phi\ \partial^{\nu}\phi + \frac{1}{2}\left[m^2\phi^2 - \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\phi\right]\eta^{\mu\nu}.$$

Temos, em geral, que o tensor energia-momento canônico não é simétrico, nem é invariante por transformações de calibre ou ainda condiz com o tensor de energia-momento de Hilbert para o caso em que o campo gravitacional é desprezível [33]. Portanto, temos que simetrizá-lo sem que a informação física se perca, isto é, seja $T^{\mu\nu}$ a simetrização de $\Theta^{\mu\nu}$ e Σ uma hiper superfície tridimensional do tipo espacial em $\mathbb{L}^4$, logo

$$\int_{\Sigma} d^3x\ T^{0i} = \int_{\Sigma} d^3x\ \Theta^{0i}.$$

A existência de $T^{\mu\nu}$ é demonstrada pelo seguinte teorema:

Teorema 3.2.4. *A parte anti-simétrica de* $\boldsymbol{\Theta}$ *é dada pela divergência total de um campo tensorial diferenciável* $H^{\alpha\mu\nu}$*, ou seja,*

$$\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = -\partial_{\alpha}H^{\alpha\mu\nu},$$

se, e somente se, existe $T^{\mu\nu}$ *simétrico tal que*

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_{\alpha}B^{\alpha\mu\nu}.$$

Em que $\boldsymbol{B}$ *é o tensor de Belifante e este é dado por*

$$B^{\alpha\mu\nu} = \frac{H^{\alpha\mu\nu} + H^{\mu\nu\alpha} - H^{\nu\alpha\mu}}{2}.$$

Temos que $T^{\mu\nu}$ é denominado tensor de Belifante-Rosenfeld. Do Teorema 3.2.3 pode-se concluir que este é simétrico e solenoidal, além disso é invariante por calibre e é igual o tensor de Hilbert para o caso em que a métrica é sempre ortonormal, portanto este tensor é preferido em relação a $\Theta^{\mu\nu}$. Todavia $B^{\alpha\mu\nu}$ é escrito em termos dos geradores do grupo de Lorentz, portanto não especificaremos este aqui, pois isto foge do escopo do trabalho, porém a expressão explícita deste pode ser encontrada na ref. [32].

Exemplo 3.2.4. *O tensor energia-momento simétrico da partícula livre é dado por* [22]

$$\boldsymbol{T} = \rho c^2\ \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u},$$

em que ρ *é a densidade da partícula.*

3.3 Relatividade Geral

No seu início a relatividade especial era uma teoria que tinha como formalismo matemático basicamente o cálculo diferencial e a geometria euclidiana. Todavia a última tinha uma leve modificação, o número imaginário i era multiplicado na coordenada temporal, de tal maneira que $x^0 = ict$. Utilizando esta alteração era possível definir uma métrica que formalmente era euclidiana, porém que lembrava uma com assinatura de Lorentz.

Todavia H. Minkowski (1864-1909) mudou o panorama da relatividade quando introduziu o $\mathbb{R}^4$ com uma métrica lorentziana plana, eliminando assim a necessidade da

coordenada temporal ser imaginária [28]. Ao mesmo tempo Einstein estava tentando, sem sucesso até o momento, unir a gravitação com relatividade restrita, porém a sua abordagem mudou ao ver o trabalho de Minkowski. A partir desse momento, motivado por Minkowski, Einstein começou uma abordagem geométrica na formulação de uma teoria gravitacional, levando assim a publicação[8] da teoria da relatividade geral em 1910.

3.3.1 Equações de Campo de Einstein

Na relatividade geral a gravidade é vista como uma força inercial gerada pela curvatura do espaço-tempo, sendo esta, assim como o campo eletromagnético, dado por um campo tensorial de segunda ordem. Portanto, discutamos primeiramente como as forças inerciais são escritas em termos dos símbolos de Christoffel e como observadores em um espaço curvo sentem a curvatura como uma força inercial, por fim apliquemos estes argumentos ao campo gravitacional.

As transformações do Grupo de Lorentz preservam a métrica ortonormal, todavia mudanças de coordenadas mais gerais nem sempre nos dão este resultado. Na realidade a equação de movimento da relatividade especial pode ser reescrita como

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = H^\mu \quad \text{em que} \quad \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{para todo } \mu, \alpha \text{ e } \beta.$$

Entretanto em um referencial não-inercial teríamos que os símbolos de Christoffel são não nulos, consequentemente a equação de movimento assumiria a seguinte forma

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = H^\mu,$$

em que identificaríamos $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ como forças inerciais[9]. Em suma forças inerciais gozam das seguintes propriedades:

1. São descritas em termos dos símbolos de Christoffel, portanto em um referencial inercial estas são nulas;

2. Independem de características do corpo em si, isto é, são universais, afetam todos os objetos da mesma maneira;

3. Podem ser eliminadas por mudança de coordenadas, sendo esta tanto local ou global.

O terceiro item dá origem as forças de maré, quando a mudança de coordenadas é local. Estas surgem devido ao fato de que diferentes regiões de um corpo sentem acelerações distintas, portanto o corpo seria esticado.

Vejamos agora que a curvatura introduz forças inerciais. Consideremos a Terra uma esfera perfeita e dois observadores Gauss (G) e Euler (E) em pontos distintos do equador, como mostrado na Figura 3.2. Inicialmente os dois possuem a velocidade paralela e apontando para o polo norte. Caso os dois movam-se com velocidade constante, isto é em uma geodésica, temos que se encontraram no polo. Contudo, a velocidade inicial era paralela, portanto de acordo com um dos observadores deve haver uma força agindo no outro para que a velocidade deixe de ser paralela. Todavia não há forças reais, o que ocorre é que a esfera é uma superfície com curvatura não nula, sendo assim, devido ao desvio geodésico, as trajetórias de E e G se encontram, dando a ilusão de um força. Claramente esta força nunca pode ser eliminada globalmente, pois provém da curvatura.

[8] Muitos autores atribuem a A. Eisntein ou/e a David Hilbert (1862-1943) à formulação da teoria da relatividade geral, tendo em vista que o último encontrou as Equações de Campo por meio de um princípio variacional.

[9] Mais precisamente seriam as acelerações devido as forças inerciais.

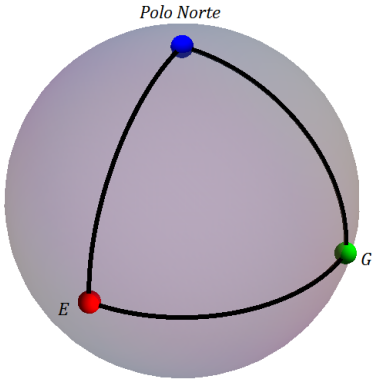


Figura 3.2: Representação de forças inerciais em uma variedade curva, neste caso em específico as geodésicas são os grandes círculos da esfera.

Com estas afirmações justifiquemos a afirmação inicial de que o campo gravitacional pode ser visto como uma força inercial devido a curvatura do espaço-tempo. Consideremos um corpo imerso em um campo gravitacional com potencial ϕ. Seja $\boldsymbol{a}$ a aceleração, então

$$\rho_{ine}\boldsymbol{a} = -\rho_{grav}\overrightarrow{\nabla}\phi \Rightarrow \boldsymbol{a} = -\overrightarrow{\nabla}\phi.$$

Em que ρ_{ine} e ρ_{grav} são, respectivamente, as densidades de massa inercial e gravitacional[10]. Nesta derivação utilizamos de um princípio que é entendido desde Newton, todavia cuja importância foi compreendida somente por Einstein: o Princípio da Equivalência Fraco [19]. Sendo este enunciado como

"*As massas inercial e gravitacional são iguais, id est, a força de atração gravitacional é universal.*"

Sendo este extremamente bem corroborado por inúmeros experimentos, em específico Baessler, *et al.* comprovaram a validade deste até a ordem de 10^{-14} em 1999 utilizando uma balança de torção [34].

Portanto, a atração gravitacional goza da segunda propriedade das forças inerciais, provemos agora que ela satisfaz também a terceira, isto é, pode ser eliminada por uma mudança de coordenadas. Sejam S e S' dois referenciais, no qual o segundo está uniformemente acelerado em relação ao primeiro e a aceleração relativa é $-\vec{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}_0)$, em que $\boldsymbol{r}_0$ é um ponto fixo em S. Consideremos um corpo em queda livre em S, logo a aceleração deste em S' é

$$\ddot{\boldsymbol{x}}' = -\vec{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) + \vec{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}_0).$$

Portanto, em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_0$ a aceleração em S' é nula, isto é, S' é inercial neste ponto, ou seja, a força gravitacional é nula. Consequentemente eliminamos, pelo menos localmente, a força gravitacional, sendo assim a gravidade pode ser visto como uma força de inércia.

Resta agora verificar que a atração gravitacional está relacionada com a curvatura. Consideremos primeiramente forças eletromagnéticas, para medi-las pode-se definir um observador inercial que não sente a força, neste caso um corpo neutro, e então aferir o quanto o movimento de uma carga teste desvia de ser uma geodésica e com a lei de força relativística calcular os campos elétricos e magnéticos. Para a força gravitacional poderíamos tentar o mesmo procedimento, todavia qualquer observador seria afetado

[10] A massa inercial é a que figura na definição da segunda lei de Newton e a gravitacional aquela colocada na lei da atração universal.

pela gravitação, pois esta é uma força universal. Consequentemente, não é possível construir um referencial globalmente inercial, *id est*, a métrica não é ortonormal em todo o espaço-tempo, o que implica na curvatura não-nula deste. Isto nos leva ao Princípio da Equivalência Forte:

"*Em todo ponto do espaço-tempo existe um sistema de coordenadas localmente inercial, ou seja, neste ponto o tensor métrico é ortonormal. Caso o campo gravitacional seja nulo esta parametrização é global.*"

Portanto, a gravidade pode ser vista como uma força inercial devida a curvatura do espaço-tempo. Utilizando o Princípio da Equivalência Forte poderíamos transcrever as leis válidas em $\mathbb{L}^4$ para um espaço-tempo curvo, para isto basta colocá-las em termos de objetos geométricos covariantes e realizar uma mudança de coordenadas[11]. Consequentemente um corpo livre da ação de forças não-gravitacionais moveria-se em uma geodésica deste espaço. Basta agora encontrar uma equação que relaciona $g_{\mu\nu}$ à distribuição de matéria no espaço, cujo limite clássico seja a Equação de Poisson para a gravidade newtoniana [35]:

$$\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho,$$

em que G é a constante de gravitação universal e ρ a densidade de matéria.

A equação do desvio geodésico relaciona a variação da aceleração relativa entre dois corpos movendo-se em geodésicas, contudo para duas partículas em um campo gravitacional esta é dada por

$$-(\boldsymbol{x}\circ\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi$$

em que $\boldsymbol{x}$ é vetor posição relativa. Em termos das coordenadas esta equação pode ser reescrita como

$$-x^i\partial_i\partial^j\phi.$$

Utilizando a equação do desvio geodésico (1.26) podemos supor a seguinte relação

$$x^i\partial_i\partial^j\phi \propto R_{\alpha\mu\nu}{}^j u^\alpha x^\mu u^\nu.$$

Porém, da Equação de Poisson poderíamos supor também que as segundas derivadas do potencial gravitacional são proporcionais a $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, em que $\boldsymbol{T}$ é o tensor-energia momento da partícula livre (Exemplo 3.2.4), pois $T_{00}\propto\rho$. Concluímos assim que

$$R_{\alpha\mu\nu}{}^\mu \propto T_{\alpha\beta}.$$

Consequentemente podemos postular a seguinte equação para o tensor métrico

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}, \tag{3.9}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade que nos fornece a dimensionalidade correta.

A Equação (3.9) foi inicialmente proposta por Einstein, todavia esta é muito restritiva fisicamente. Provemos esta afirmação, na relatividade especial o tensor energia-momento é solenoidal, o que no espaço-tempo curvo pode ser reescrito como

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0.$$

[11]Em alguns casos basta fazer as substituições $\partial_\mu\to\nabla_\mu$ e $\eta_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}$, contudo, em geral, estas regras não válidas pois levam a ambiguidades em algumas leis.

Portanto, teríamos que o tensor de Ricci também seria solenoidal

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0.$$

A derivada de $R_{\mu\nu}$ foi calculada na Seção 1.5.3, utilizando aquele resultado temos que

$$\frac{g_{\mu\nu}}{2}\nabla^\mu R = 0 \Rightarrow \nabla_\nu R = 0.$$

Da contração da Equação (3.9) temos que $R = kT$, sendo $T^\mu_{\ \mu} = T$, logo

$$\nabla_\nu T = 0 \Rightarrow \nabla_\nu T^\alpha_{\ \alpha} = 0 \Rightarrow \nabla_\nu g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow g_{\alpha\beta}\nabla_\nu T^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \nabla_\nu T^{\alpha\beta} = 0.$$

Desta forma, o tensor energia-momento seria constante, o que é altamente restritivo. Portanto, descartemos a Equação (3.9) e coloquemos um tensor que é solenoidal, simétrico e que está relacionado com $R_{\mu\nu}$: o tensor de Einstein. Assim, as Equações de Campo de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad \text{ou} \quad R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu},$$

sendo k escolhida de forma que forneça no limite clássico a Equação de Poisson.

Em vista disso podemos reescrever os postulados da relatividade como:

Postulado (Espaço-tempo)**.** *O espaço-tempo é uma variedade quadridimensional com uma métrica com assinatura de Lorentz que satisfaz as equações de campo de Einstein:*

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

em que $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento definido por

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m,$$

sendo $\mathcal{L}_m$ a lagrangiana da parte não gravitacional do sistema. Além disso, a gravidade é dada pelo tensor métrico.

Postulado (Lei da Inércia e da Força)**.** *A trajetória de qualquer corpo no espaço-tempo é denominada linha do universo e é sempre do tipo temporal. Além disso, corpos livres da ação de forças se movimentam em geodésicas do tipo temporal. Para corpos sob a ação de forças temos que a trajetória satisfaz*

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{d\tau} = \boldsymbol{H},$$

em que $\boldsymbol{H}$ é a força de Minkowski e $\boldsymbol{u}$ a 4-velocidade.

Postulado (Covariância Geral)**.** *As leis da Física são covariantes por transformações entre quaisquer sistemas de coordenadas.*

Como dito anteriormente, o tensor energia-momento é simétrico e solenoidal e no limite da relatividade especial o tensor dado no Postulado do Espaço-tempo é igual a simetrização do tensor energia-momento canônico descrito na Seção 3.2.3. Além disso, a equação

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0,$$

não expressa a conservação de energia na presença de um campo gravitacional, dado que a gravidade executa trabalho devido as forças de maré. A expressão dada para $T_{\mu\nu}$ será justificada com o uso da ação de Hilbert na Seção 3.3.4.

Portanto, na relatividade geral, para encontrar o movimento de um corpo basta resolver as equações de campo, encontrar o tensor métrico, calcular $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ e aplicar a lei de força relativística. Todavia as equações não são lineares, além disso $T_{\mu\nu}$ pode depender do tensor métrico, dificultando ainda mais a solução. Podemos reescrevê-las, de maneira que permita a análise em algumas situações. Contraindo-as temos que

$$R = -\frac{8\pi G}{c^2}T,$$

portanto as equações de Einstein podem ser expressas como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.10}$$

Em geral soluções de interesse são em regiões nas quais $T_{\mu\nu} = 0$, isto é, no vácuo, portanto a Equação (3.10) se simplifica e obtemos

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Existem métodos para a solução das equações de campo, um deles é a linearização que será descrita na seção seguinte.

3.3.2 Linearização das Equações de Campo

A ideia do processo de linearização é escrever uma aproximação da métrica que difira pouco do caso plano, $\eta_{\mu\nu}$, e com isso descartar todos os termos não-lineares nas equações de campo. Logo, admitamos uma métrica da forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

Além disso, usaremos $\eta_{\mu\nu}$ para o isomorfismo musical. O inverso da métrica é dado por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

De fato, multiplicando $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ temos e descartando termos de segunda ordem temos que

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \Rightarrow g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \approx 1.$$

Com isso calculemos os símbolos de Christoffel. Portanto,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\mu\lambda}}{2}\left(\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}\right) \Rightarrow \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}}{2}\left(\partial_\alpha h_{\beta\lambda} + \partial_\beta h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{\eta^{\mu\lambda}}{2}\left(\partial_\alpha h_{\beta\lambda} + \partial_\beta h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta}\right). \tag{3.11}$$

Com a Equação (3.11) podemos calcular o tensor e o escalar de Ricci. Sendo assim, $R_{\mu\rho}$ sem os termos quadráticos em $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ é

$$R_{\mu\rho} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\rho}.$$

Para o segundo termo temos a seguinte identidade

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \alpha\rho} = \frac{\partial_\rho h}{2},$$

em que $h^{\mu}_{\ \mu} = h$. Portanto, o tensor de Ricci linear é

$$R_{\mu\rho} = \frac{\eta^{\alpha\lambda}}{2}\left(\partial_\alpha\partial_\mu h_{\rho\lambda} + \partial_\alpha\partial_\rho h_{\mu\lambda} - \partial_\alpha\partial_\lambda h_{\mu\rho}\right) - \frac{\partial_\mu\partial_\rho h}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\mu\rho} = \partial^\lambda\partial_{(\mu}h_{\rho)\lambda} - \frac{1}{2}(\partial^\alpha\partial_\alpha h_{\mu\rho} + \partial_\mu\partial_\rho h). \tag{3.12}$$

Portanto, contraindo a Equação (3.12) obtemos o escalar de Ricci linear, sendo este

$$R = \partial^\lambda\partial^\mu h_{\mu\lambda} - \partial^\alpha\partial_\alpha h. \tag{3.13}$$

Substituindo as aproximações lineares (3.12) e (3.13) nas equações de campo obtemos

$$\partial^\lambda\partial_{(\mu}h_{\rho)\lambda} - \frac{1}{2}(\partial^\alpha\partial_\alpha h_{\mu\rho} + \partial_\mu\partial_\rho h) - \frac{\eta_{\mu\rho}}{2}\left(\partial^\lambda\partial^\alpha h_{\alpha\lambda} - \partial^\alpha\partial_\alpha h\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\rho}. \tag{3.14}$$

Definamos o tensor traço reverso de $h_{\mu\rho}$, denotado por $\tilde{h}_{\mu\rho}$:

$$\tilde{h}_{\mu\rho} = h_{\mu\rho} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\rho}. \tag{3.15}$$

Consequentemente, a Equação (3.14) se simplifica e obtém-se, finalmente, as Equações Linearizadas de Einstein

$$\partial^\alpha\partial_{(\mu}\tilde{h}_{\rho)\alpha} - \frac{1}{2}\left(\partial^\alpha\partial_\alpha\tilde{h}_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho}\partial^\alpha\partial^\lambda\tilde{h}_{\alpha\lambda}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\rho}. \tag{3.16}$$

Em que a aproximação linear para a métrica também deve ser usada no tensor energia-momento, caso este dependa de $g_{\mu\nu}$. O tensor $\tilde{h}_{\mu\rho}$ contém toda a informação sobre $h_{\mu\rho}$, dado que a Equação (3.15) é invertível, logo encontrar o campo auxiliar $\tilde{h}_{\mu\rho}$ é análogo a determinar $h_{\mu\rho}$. A Equação (3.16) ainda é complicada, todavia $\tilde{h}_{\mu\rho}$ admite uma transformação de calibre, tal que este [13]

$$\partial^\mu\tilde{h}_{\mu\rho} = 0.$$

Portanto a forma linearizada mais simples das Equações de Campo de Einstein é

$$\partial^\alpha\partial_\alpha\tilde{h}_{\mu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\rho}. \tag{3.17}$$

A expressão (3.17) é basicamente uma equação de onda com um termo de fonte, dando origem as ondas gravitacionais. Em geral busca-se soluções de (3.17) nas regiões sem matéria, neste caso $\boldsymbol{T} = 0$, e as soluções teriam a forma, para o caso com amplitude constante,

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}\exp\left(k_\alpha x^\alpha\right).$$

Caso o termo de fonte seja não nulo temos que restringir as soluções ao cone de luz passado, isto é, as alterações na fonte se propagam com velocidade finita no espaço, sendo esta igual a da luz, e somente o estado passado de $T_{\mu\nu}$ influencia o futuro da onda [13]. Devido a sua natureza as ondas gravitacionais têm uma amplitude muito fraca, portanto para a sua detecção é necessário uma fonte muito potente e um instrumento

sensível o suficiente para detectá-las. Feito este, realizado pelo experimento LIGO (sigla do inglês para *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) em 14 de setembro de 2015. O experimento consiste basicamente em um interferômetro de *laser* do tipo Michelson-Morley modificado, com uma fonte Nd:YAG com comprimento de onda de 1064 nm e braços ortogonais, cada um com comprimento aproximado de 4 km, sendo estes denominados *Hanford* e *Livingston*. As ondas gravitacionais gerariam um distúrbio no espaço-tempo aumentando o comprimento de um braço e diminuindo o do outro, gerando assim um padrão de interferência. Para cada tipo de padrão obtido há uma fonte e neste caso esta foi a colisão de dois buracos negros supermassivos [36]. A Figura 3.3 contém o sinal detectado pelo LIGO.

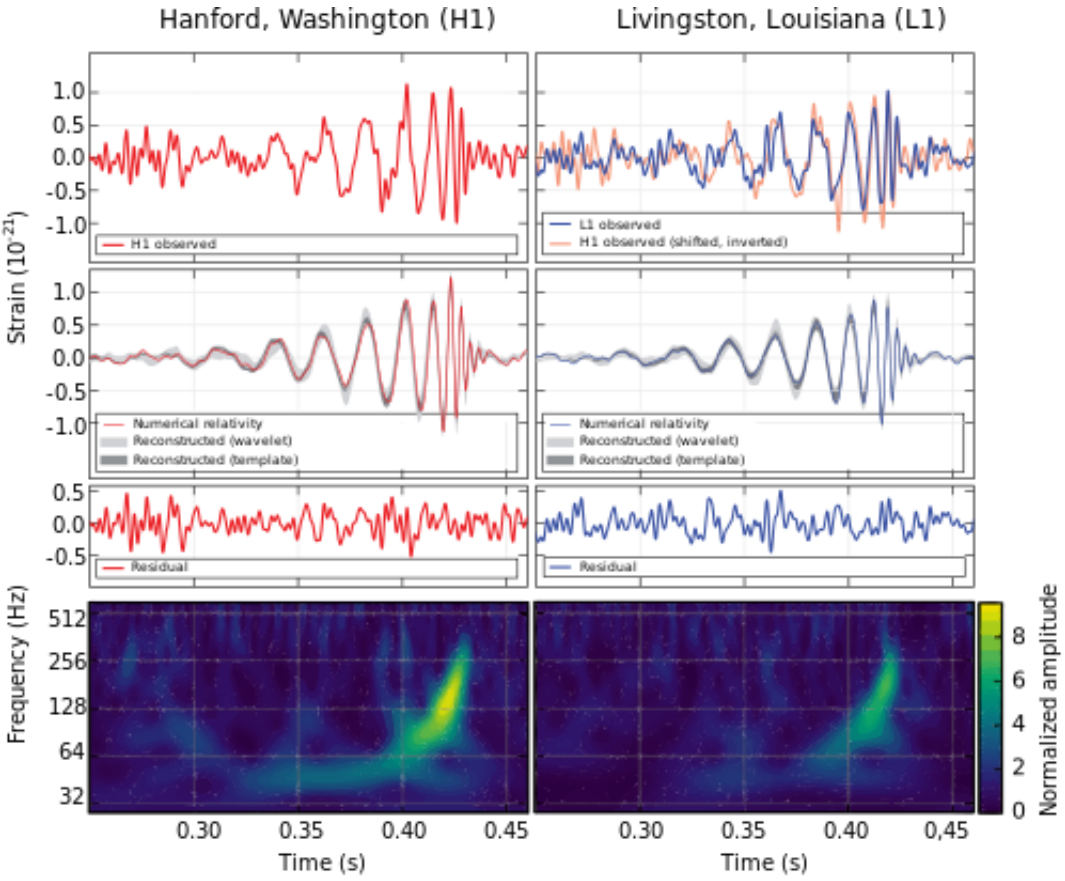


Figura 3.3: Na linha superior no lado esquerdo temos o sinal detectado pelo *Hanford*, enquanto que no lado direito o sinal de *Hanford* e *Livingston* sobrepostos. Na linha inferior temos respectivamente o sinal de cada detector filtrado e comparado com a simulação numérica. Por fim, na última linha temos um gráfico da frequência detectada pelo tempo, mostrando assim um aumento na frequência da onda, o que indica a iminência colisão dos buracos negros - cortesia CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [36].

3.3.3 Limite Newtoniano

Utilizando a aproximação linear vamos deduzir o caso clássico, todavia é necessário as seguintes hipóteses adicionais

1. O campo $h_{\mu\nu}$ é estático, isto é

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = 0;$$

2. As velocidades da fonte do campo gravitacional e das partículas imersas neste são baixas, mais precisamente

$$v^i v^j \ll c^2 \quad \text{ou} \quad \frac{v^i v^j}{c^2} \approx 0.$$

Consideremos um corpo em que livre, consequentemente este move-se ao longo de uma geodésica. Portanto, utilizando a segunda aproximação e a definição da 4-velocidade temos que

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu{}_{00}. \tag{3.18}$$

Da aproximação linear dos símbolos de Christoffel (Equação (3.13)) temos que

$$\Gamma^\mu{}_{00} = \frac{\eta^{\mu\lambda}}{2}\left(\partial_0 h_{0\lambda} + \partial_0 h_{0\lambda} - \partial_\lambda h_{00}\right) \Rightarrow \Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{\partial^\mu h_{00}}{2}.$$

Consequentemente a Equação (3.18) pode ser escrita, desprezando-se a parte temporal pois $\Gamma^0{}_{00} = 0$, como

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\partial^i h_{00} \Rightarrow \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \frac{c^2}{2}\vec{\nabla} h_{00}. \tag{3.19}$$

Comparando-se (3.19) com a equação clássica de movimento conclui-se que, a menos de uma constante aditiva, h_{00} é proporcional ao potencial gravitacional

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad \text{e} \quad g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right). \tag{3.20}$$

Encontremos agora a Equação de Poisson a partir das equações de campo. O tensor energia-momento de uma partícula é dado pela seguinte forma quadrática

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_\mu u_\nu.$$

Devido a segunda aproximação, a única componente não nula seria T_{00}. Substituindo este tensor métrico na Equação (3.10) temos que

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{T}{2}g_{00}\right). \tag{3.21}$$

O segundo termo no lado direito da equação é

$$g_{\mu\nu}T = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta})T_{\alpha\beta} \Rightarrow g_{00}T = (\eta_{00} + h_{00})(\eta^{00} - h^{00})T_{00} \Rightarrow g_{00}T = T_{00}.$$

Substituindo este resultado na Equação (3.21) resulta que

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\frac{T_{00}}{2} \Rightarrow R_{00} = \frac{4\pi G\rho}{c^2}. \tag{3.22}$$

Para encontrarmos R_{00} basta colocar o resultado para h_{00} (Equação (3.20)) em (3.12) e obtemos que

$$R_{00} = \frac{\vec{\nabla}^2\phi}{c^2}.$$

Portanto a Equação (3.22) resulta na Equação de Poisson:

$$\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho.$$

3.3.4 Ação de Hilbert

Na presente seção vamos deduzir as equações de campo do princípio variacional, logo vejamos primeiramente como escrever a ação em um espaço-tempo curvo. Esta pode ser escrita em termos da lagrangiana como

$$S = \int_M \star\mathcal{L} \quad \text{ou} \quad S = \int_M d^4x\ \mathcal{L}\sqrt{-g},$$

em que M é o espaço-tempo relativístico. Portanto, para obtermos as equações desejadas, deve-se extremar S em relação a $\mathcal{L}\sqrt{-g}$ e não somente a $\mathcal{L}$[12].

A lagrangiana para se obter as equações de Einstein, no vácuo, foi primeiramente escrita por David Hilbert em 1915 e esta é

$$\mathcal{L}_{GR} = R.$$

Portanto a ação de Hilbert deve ser extremada variando-se a métrica[13] e esta é dada por

$$S_H[g^{\mu\nu}] = \int_M d^4x\ R\sqrt{-g}.$$

Calculemos a variação de S_H. Primeiramente, escrevamos R como $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Logo, a variação possui três termos

$$\delta S_H = \int_M d^4x \left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g} \right). \tag{3.23}$$

O segundo termo já possui a forma desejada, calculemos agora o terceiro. Temos que a variação do determinante é dada pelo Lema 1.5.2, sendo assim

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \Rightarrow \delta\sqrt{-g} = -\frac{g}{2\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \Rightarrow \delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Substituindo este resultado na Equação (3.23) temos que

$$\delta S_H = \int_M d^4x \left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \delta R_{\mu\nu} + \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} \right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu} \right). \tag{3.24}$$

Resta agora computar o primeiro termo de (3.24). Consideremos a variação do tensor de Riemann

$$\delta R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = -\partial_\mu \left(\delta\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha} \right) + \partial_\nu \left(\delta\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} \right) - \Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\beta}{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha}.$$

Temos que a variação dos símbolos de Christoffel é um tensor, pois neste caso o comportamento não linear da mudança de coordenadas deste é eliminado. Consequentemente pode-se calcular a derivada covariante de $\delta\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}$, sendo assim

$$\nabla_\mu \left(\delta\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} \right) = \partial_\mu \left(\delta\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} \right) - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}.$$

[12] Em alguns textos $\mathcal{L}\sqrt{-g}$ é denominada de densidade lagrangiana [23].

[13] Aqui tanto faz variar $g^{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$, pois uma variação pode ser escrita em termos da outra.

Portanto, a variação do tensor de Riemann pode ser reescrita em termos de $\nabla_\mu \left(\delta\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\right)$, logo

$$\delta R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta} = \nabla_\nu \left(\delta\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}\right) - \nabla_\mu \left(\delta\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}\right).$$

Contraindo em ν e β a equação anterior obtemos a variação do tensor de Ricci:

$$\delta R_{\mu\alpha} = \nabla_\nu \left(\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\right) - \nabla_\mu \left(\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\alpha}\right). \tag{3.25}$$

Substituindo a Equação (3.25) em (3.24) temos que

$$\delta S_H = \int\limits_M d^4x \left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \left[\nabla_\lambda \left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\mu \left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu}\right)\right] + \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\right).$$

Como a conexão é compatível com a métrica, $g^{\mu\nu}$ entra na derivada nos dois primeiros termos, logo

$$\delta S_H = \int\limits_M d^4x \left(\sqrt{-g}\ \left[\nabla_\lambda \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) - \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu}\right)\right] + \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\right). \tag{3.26}$$

Utilizando o Teorema de Gauss nos dois primeiros termos podemos reescrever (3.28) como

$$\delta S_H = \int\limits_{\partial M} d^3x\sqrt{-g}\ \left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu}\right] + \int\limits_M d^4x \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}.$$

A variação é sempre nula na fronteira, portanto a integral em ∂M é zero, o que nos resulta

$$\delta S_H = \int\limits_M d^4x \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}.$$

Consequentemente

$$\frac{\delta\left(\mathcal{L}_{GR}\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}. \tag{3.27}$$

Obtemos assim as equações de campo de Einstein no vácuo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 0.$$

Agora vamos introduzir outras interações na lagrangiana, para isso basta adicionar um termo $\mathcal{L}_m$ que contenha toda a informação não gravitacional do sistema. Desta forma, a lagrangiana total à ser variada é

$$\mathcal{L} = k\mathcal{L}_{GR} + \mathcal{L}_m.$$

Em que k é a constante de acoplamento, note que caso $\mathcal{L}_m = 0$ temos as mesmas equações obtidas anteriormente, pois multiplicar a ação por uma constante não afeta as Equações de Euler-Lagrange. Portanto, a ação é

$$S[g^{\mu\nu}] = \int\limits_M d^4x \left(kR + \mathcal{L}_m\right)\sqrt{-g}.$$

Logo, as equações de Euler-Lagrange são

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow k\frac{\delta\left(R\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta\left(\mathcal{L}_m\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}\right] k\sqrt{-g} = -\sqrt{-g}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \mathcal{L}_m\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\mathcal{L}_m}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\mathcal{L}_m}{2}g_{\mu\nu}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{1}{2k}\left(-2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_m g_{\mu\nu}\right).$$

Comparando com as Equações de Einstein temos que

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad k = \frac{c^4}{16\pi G}.$$

O que nos dá a seguinte ação para acoplarmos gravitação com outros campos

$$S[g^{\mu\nu}] = \int_M d^4x \left(\frac{c^4}{16\pi G}R + \mathcal{L}_m\right)\sqrt{-g}. \tag{3.28}$$

Com a Equação (3.28) encontraremos as equações de Einstein-Maxwell à seguir no Capítulo 4, estas vão acoplar a teoria eletromagnética com a gravitacional. Nos Capítulos 1 e 2 introduzimos o formalismo matemático e neste capítulo as bases físicas, por fim no capítulo seguinte vejamos uma maneira de se escrever uma teoria do electromagnetismo compatível com a relatividade especial e a geral.

Capítulo 4

Electromagnetismo Covariante

Neste capítulo explicitaremos, por meio do formalismo das formas diferenciais, como descrever as Equações de Maxwell em um espaço-tempo curvo quadridimensional. Primeiramente, na Seção 3.1, descreveremos a formulação na relatividade especial das Equações de Maxwell, aqui vamos obter o tensor eletromagnético, definir os vetores 4-corrente e 4-potencial, além de escrever a equação de onda e a conservação da 4-corrente.

Já na Seção 3.2 usaremos todo o maquinário do Capítulo 2, para escrevermos as Leis de Maxwell em um espaço-tempo curvo. Por fim na Seção 3.3 discutiremos a formulação lagrangiana da eletrodinâmica relativística, obtendo então as Equações de Einstein-Maxwell.

4.1 Covariância Restrita das Equações de Maxwell

Antes de começar, introduziremos brevemente a notação clássica do eletromagnetismo que será utilizado adiante. As Equações de Maxwell no sistema internacional de unidades são

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{c^2 \mu_0};$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0;$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};$$

$$\vec{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_c + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Em que $\boldsymbol{J}_c$ é o vetor densidade de corrente. Estas são denominadas, respectivamente, Lei de Gauss, Lei de Gauss para o Magnetismo, Lei de Faraday e Lei de Ampère-Maxwell.

Seja q a carga de uma partícula, $\boldsymbol{p}_c$ o momento clássico e $\boldsymbol{v}$ a velocidade. A Lei de Força de Lorentz, ou seja, a força sofrida por uma partícula carregada devido ao campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, é dada por

$$\frac{d\boldsymbol{p}_c}{dt} = q\left[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right].$$

Já o fluxo de energia eletromagnética Υ é obtido multiplicando a equação anterior por $\boldsymbol{v}$, logo

$$\frac{d\Upsilon}{dt} = q\ \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Os potenciais elétrico, ϕ, e vetor $\boldsymbol{A}_c$ satisfazem as relações

$$\boldsymbol{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \vec{\nabla} \times \boldsymbol{A}_c.$$

A lagrangiana para obter as Equações de Maxwell é

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} - \boldsymbol{B}^2\right) - \phi\rho + \boldsymbol{J}_c \cdot \boldsymbol{A}_c.$$

4.1.1 Existência do Tensor Eletromagnético e Leis de Maxwell

Os campos elétrico e magnético na relatividade especial são descritos por uma amalgama dos dois denominada tensor eletromagnético, vejamos como este pode ser obtido das equações usuais do eletromagnetismo. Como visto no capítulo anterior as componentes espaciais do 4-momento estão relacionadas com o momento usual e a temporal com a energia, e as equações de evolução destas grandezas no eletromagnetismo clássico são

$$\frac{dp^i}{dt} = q\left[E^i + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})^i\right] \quad \text{e} \quad \frac{d\Upsilon}{dt} = q\ \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Fazendo-se as substituições $\Upsilon \to p^0$, $p_x \to p^1$, $p_y \to p^2$ e $p_z \to p^3$ e multiplicando as equações acima por γ/c^2 temos uma relação linear em u^α:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^\mu{}_\alpha u^\alpha, \tag{4.1}$$

em que $F^\mu{}_\alpha$ é o tensor eletromagnético, também denominado tensor de Faraday. Esta seria a forma quadrivetorial da Força de Lorentz. Reescrevendo cada componente da Equação (4.1) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{dp^0}{d\tau} &= q\left(\frac{E_x}{c}u^1 + \frac{E_y}{c}u^2 + \frac{E_z}{c}u^3\right);\\
\frac{dp^1}{d\tau} &= q\left(\frac{E_x}{c}u^0 + \frac{B_z}{c}u^2 - \frac{B_y}{c}u^3\right);\\
\frac{dp^2}{d\tau} &= q\left(\frac{E_y}{c}u^0 + \frac{B_x}{c}u^3 - \frac{B_z}{c}u^1\right);\\
\frac{dp^3}{d\tau} &= q\left(\frac{E_z}{c}u^0 + \frac{B_y}{c}u^1 - \frac{B_x}{c}u^2\right).
\end{aligned}$$

Por comparação com a Equação 4.1 é obtido que

$$(F^\alpha{}_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

A seguir definiremos $\boldsymbol{F}$ como um tensor de *rank* 2 anti-simétrico totalmente covariante, consequentemente:

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Da anti-simetria podemos concluir que $\boldsymbol{F}$ pode ser identificado com uma 2-forma, além disso esta é fechada como veremos a seguir, logo pelo Lema de Poincaré existe uma 1-forma cuja derivada exterior nos dá o tensor eletromagnético.

A Lei de Força de Lorentz pode ser escrita, utilizando (4.2) como

$$\frac{d\,(\flat \boldsymbol{p})}{d\tau} = q\boldsymbol{F}(\cdot, \boldsymbol{u}).$$

Sendo que esta satisfaz claramente a covariância restrita.

Agora à partir das Equações de Maxwell clássicas iremos obter a forma relativística destas, pelo menos na relatividade especial. Primeiramente definamos a 4-corrente como o campo $\boldsymbol{J} \in T\mathbb{L}^4$ cujas componentes são

$$\boldsymbol{J} = c\rho\ \boldsymbol{d}x_0 + J_x\ \boldsymbol{d}x_1 + J_y\ \boldsymbol{d}x_2 + J_z\ \boldsymbol{d}x_3.$$

Este tem divergência nula, de fato utilizando a conservação de carga clássica tem-se que

$$\partial_\mu J^\mu = -c\partial_0\rho + \partial_1 J_x + \partial_2 J_y + \partial_3 J_z \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \circ \boldsymbol{J}_c \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0.$$

Analogamente ao caso clássico podemos escrever a Lei de Força de Lorentz em termos da densidade de 4-momento $\widetilde{\boldsymbol{p}}$, colocando que

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{u}.$$

Consequentemente a lei de Lorentz pode ser reescrita como

$$\frac{d(\flat\widetilde{\boldsymbol{p}})}{d\tau} = \boldsymbol{F}(\cdot, \boldsymbol{J}).$$

Consideremos as Equações de Maxwell em que não aparecem termos de fonte, isto é, a Lei de Gauss para o magnetismo e a Lei de Faraday. Reescrevendo a primeira em termos do tensor eletromagnético temos que

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0. \tag{4.3}$$

Já a segunda nos fornece três equações que levam em conta as derivadas e componentes temporais

$$\begin{aligned} &\partial_2 F_{30} - \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{23} = 0; \\ &\partial_3 F_{10} - \partial_1 F_{30} + \partial_0 F_{31} = 0; \\ &\partial_1 F_{20} - \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{12} = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Somando-se todas as equações do sistema (4.4) com a (4.3) e dividindo por 3! obtém-se que

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0. \tag{4.5}$$

Esta é primeira Equação de Maxwell na relatividade especial.

Levemos em conta agora as equações com termos de fonte, isto é, a Lei de Gauss e a de Ampère. Reescrevendo a primeira tem-se que

$$\partial^1 F_{10} + \partial^2 F_{20} + \partial^3 F_{30} = -\mu_0 J_0. \tag{4.6}$$

E para a Lei de Ampère é obtido que

$$\begin{aligned} &\partial^2 F_{21} + \partial^3 F_{31} + \partial^0 F_{01} = -\mu_0 J_1; \\ &\partial^3 F_{32} + \partial^1 F_{12} + \partial^0 F_{02} = -\mu_0 J_2; \\ &\partial^1 F_{13} + \partial^2 F_{23} + \partial^0 F_{03} = -\mu_0 J_3. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Consequentemente as Equações (4.6) e (4.7) podem ser sintetizadas por meio da seguinte expressão:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 J_\nu. \tag{4.8}$$

Portanto, as leis de Maxwell são reduzidas de quatro equações para duas, sendo assim

$$\begin{array}{ll} \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0; & \text{(Lei de Gauss-Einstein)} \\ \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 J_\nu. & \text{(Lei de Faraday-Ampère)} \end{array}$$

Por meio destas equações e a Lei de Força de Lorentz todo o electromagnetismo clássico pode ser obtido, *exempli gratia*, a 4-corrente é preservada. De fato, calculando a divergência na segunda equação temos

$$\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\mu_0 \partial^\nu J_\nu.$$

Como $\boldsymbol{F}$ é anti-simétrico e as derivadas parciais comutam, $\partial^\nu \partial^\mu = \partial^\mu \partial^\nu$, logo

$$\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = -\partial^\mu \partial^\nu F_{\nu\mu} \Rightarrow \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0.$$

Consequentemente

$$\partial^\nu J_\nu = 0.$$

4.1.2 Quadripotencial e Ondas Eletromagnéticas

Análogo ao que foi feito para a 4-corrente podemos definir um 4-potencial, $\boldsymbol{A} \in T\mathbb{L}^4$, que generaliza a noção de potenciais elétrico e vetor. As componentes deste são

$$\boldsymbol{A} = \frac{\phi}{c}\, \boldsymbol{d}x_0 + A_x\, \boldsymbol{d}x_1 + A_y\, \boldsymbol{d}x_2 + A_z\, \boldsymbol{d}x_3.$$

Logo, podemos obter o tensor eletromagnético por meio de $\boldsymbol{A}$. Para este fim, consideremos a definição do campo elétrico em termos dos potenciais

$$E^i = -\frac{\partial A^i}{\partial t} - \partial^i \phi \Rightarrow \frac{E^i}{c} = -\partial_0 A^i - \partial^i \left(\frac{\phi}{c}\right).$$

As componentes da equação anterior podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F_{10} &= \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1; \\ F_{20} &= \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2; \\ F_{30} &= \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3. \end{aligned}$$

Já para o campo magnético temos que

$$\begin{aligned} F_{23} &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2; \\ F_{31} &= \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3; \\ F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \end{aligned}$$

Portanto, os sistemas de equações anteriores podem ser sintetizadas por meio de

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.9}$$

Em que fica clara a anti-simetria do tensor de Faraday. Da Equação (4.9) decorre diretamente a primeira Equação de Maxwell (Equação (4.5)), pois a expressão acima (4.9) nos

diz que o tensor eletromagnético é a derivada exterior, em termos das coordenadas, do 4-potencial. Logo

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}, \tag{4.10}$$

Consequentemente utilizando o Lema 2.1.2, é obtido que

$$\boldsymbol{dF} = \boldsymbol{d}^2\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{dF} = 0 \Rightarrow \partial_{[\mu}F_{\nu\alpha]} = 0.$$

A segunda lei é de caráter experimental e não pode ser obtida diretamente[1] de (4.10), contudo pode-se obter uma equação de onda para A^μ, ou pelo menos uma forma dela. Porém, determinemos primeiramente a liberdade de calibre do 4-potencial. Seja $\chi \in \mathcal{F}$ diferenciável, façamos a transformação

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi. \tag{4.11}$$

Consequentemente os tensores de Faraday associados à $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A'}$ são iguais,

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\chi) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\chi) \Rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\chi - \partial_\nu\partial_\mu\chi \Rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

Substituindo a Equação (4.9) na Lei de Faraday-Ampère é obtido

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\mu_0 J_\nu \Rightarrow \partial^\mu\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu\partial^\mu A_\mu = -\mu_0 J_\nu.$$

Porém, sempre podemos definir $\boldsymbol{A'}$ de maneira que seja solenoidal, para isso basta utilizar-se da liberdade de calibre e definir χ por meio da seguinte equação

$$\partial^\mu\partial_\mu\chi = -\partial^\mu A_\mu,$$

o que sempre possui solução, esta é basicamente a Equação de Poisson no espaço-tempo de Lorentz-Minkowski [13]. Definamos então o operador D'Alembertiano por

$$\partial^\mu\partial_\mu = \Box^2$$

Consequentemente a equação de onda para o 4-potencial é

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu. \tag{4.12}$$

Esta equação é a versão quadridimensional da equação de Poisson para o 4-potencial, podemos resolvê-la utilizando Funções de Green retardadas, ou seja, limitadas ao cone passado, o que nos resulta as Equações de Jefimenko [37].

Resolvamos a Equação (4.12) em um local sem densidade de cargas ou correntes, isto é,

$$\Box^2 A_\mu = 0. \tag{4.13}$$

Primeiramente vamos supor uma solução exponencial da forma

$$A_\mu(x^\nu) = C_\mu \exp(iS(x^\nu)),$$

em que a amplitude C_μ é constante e S é a fase da onda. Substituindo esta função na Equação (4.13) e utilizando-se do fato que o 4-potencial é solenoidal temos que

$$\partial^\mu\partial_\mu S = 0 \qquad \text{e} \qquad (\partial^\mu S)(\partial_\mu S) = 0.$$

[1] A não ser que especifiquemos como o 4-potencial é gerado pela 4-corrente, neste caso é possível obtê-la. Todavia, em geral, é necessário especificar um mecanismo de interação entre o tensor de Faraday ou o 4-potencial com a 4-corrente.

Definamos $k_\mu = \partial_\mu S$, sendo assim é obtido o seguinte sistema de equações para $\boldsymbol{k} \in T\mathbb{L}^4$

$$\begin{aligned} k^\mu k_\mu &= 0; \\ C_\mu k^\mu &= 0; \\ \partial^\mu k_\mu &= 0. \end{aligned}$$

Primeiramente concluímos que $\boldsymbol{k}$, da terceira equação do sistema anterior, é normal as hiper-superfícies com S constante. Além disso, este é do tipo luminoso, consequentemente as hiper-superfícies com $\boldsymbol{k}$ normal são ditas nulas [13]. Temos ainda que nestas superfícies o vetor $\boldsymbol{k}$ é normal e tangente à variedade ao mesmo tempo, devido a primeira e segunda equação do sistema anterior.

Denominamos $\boldsymbol{k}$ de vetor diretor, este nos dá a direção de propagação da onda. Temos ainda que a onda se propaga em uma trajetória nula, de fato

$$\partial_\mu S \partial^\mu S = 0 \Rightarrow \partial_\nu(\partial_\mu S \partial^\mu S) = 0 \Rightarrow \partial^\mu S \partial_\nu \partial_\mu S = 0 \Rightarrow k^\mu \partial_\nu k_\mu = 0.$$

O que é a equação da geodésicas afins. Logo, as curvas integrais de $\boldsymbol{k}$ são geodésicas nulas e estas geram as superfícies nulas. Portanto, a luz se propaga em geodésicas nulas, justificando assim a denominação cone de luz no Capítulo 3.

Consideremos brevemente as ondas planas, isto é, as superfícies de nível de S são planos. Portanto,

$$S = k_\mu x^\mu.$$

Seja $\boldsymbol{k}_c$ a parte espacial do vetor diretor, a expressão anterior pode ser reescrita, em um sistema de coordenadas inercial, como

$$S = \boldsymbol{k}_c \circ \boldsymbol{r} - \frac{k_0}{c} t,$$

em que $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. A equação acima é justamente a fase de uma onda plana em um meio não dispersivo, portanto podemos fazer a identificação $k_0/c = \omega$, a frequência angular da onda, e obtemos a clássica relação

$$S = \boldsymbol{k}_c \circ \boldsymbol{r} - \omega t.$$

4.2 Covariância Geral das Equações de Maxwell

Como vimos na seção anterior o tensor de Faraday goza da seguinte identidade

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dA}. \tag{4.14}$$

Portanto, obtemos diretamente a Lei de Gauss-Einstein, utilizando é claro a prescrição de Einstein, em um espaço-tempo curvo e esta é

$$\boldsymbol{dF} = 0. \tag{4.15}$$

Na realidade poderíamos postular a Equação (4.15) e juntamente com o Lema de Poincaré teríamos a existência do 4-potencial. Consideremos as leis de Maxwell clássicas, temos que elas são escritas em termos do rotacional e do divergente dos campos magnéticos e elétricos. Como foi visto no Capítulo 2, o rotacional é análogo à $\boldsymbol{d}$, já o divergente é dado por $\boldsymbol{d}\star$, logo calculemos $\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F}$. O dual do tensor de Faraday é dado por

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{F^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{-g}}{2}.$$

Portanto, consideremos o caso particular de uma base ortonormal, logo $\sqrt{-g} = 1$ e o dual de $\boldsymbol{F}$ é

$$(\star F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente as componentes não nulas de $\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F}$, nesta base ortonormal, são[2]

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{012} &= \partial^\mu F_{\mu 3}; \\ (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{013} &= -\partial^\mu F_{\mu 2}; \\ (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{123} &= \partial^\mu F_{\mu 0}; \\ (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{023} &= \partial^\mu F_{\mu 1}. \end{aligned}$$

Utilizando a Lei de Faraday-Ampère, o sistema acima pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{012} &= -\mu_0 J_3; \\ (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{013} &= \mu_0 J_2; \\ (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{123} &= \mu_0 J_0; \\ (\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F})_{023} &= -\mu_0 J_1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Portanto, $\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F}$ é proporcional a $\boldsymbol{J}$, todavia a última é uma 1-forma enquanto que a primeira é uma 3-forma, logo não existe uma relação de igualdade entre estas. Porém, consideremos agora $\star\boldsymbol{J}$ em uma base ortonormal

$$(\star\boldsymbol{J})_{\mu\nu\lambda} = J^\alpha \varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda},$$

ou seja, as componentes não nulas desta 3-forma são

$$\begin{aligned} (\star\boldsymbol{J})_{012} &= -J_3; \\ (\star\boldsymbol{J})_{013} &= J_2; \\ (\star\boldsymbol{J})_{123} &= J_0; \\ (\star\boldsymbol{J})_{023} &= -J_1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Comparando os sistemas (4.16) e (4.17) concluímos que, em uma base ortonormal, a seguinte equação é válida

$$\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F} = \mu_0 \star \boldsymbol{J}.$$

Esta é a Lei de Faraday-Ampère. Esta equação foi deduzida em uma base ortonormal, contudo está escrita em termos de um operador geométrico covariante, portanto as Leis de Maxwell em um espaço-tempo curvo são

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{dF} = 0; && \text{(Lei de Gauss-Einstein)} \\ &\boldsymbol{d} \star \boldsymbol{F} = \mu_0 \star \boldsymbol{J}. && \text{(Lei de Faraday-Ampère)} \end{aligned}$$

A Lei de Gauss-Einstein pode ser reduzida a forma válida na relatividade restrita quando a colocarmos em termo das coordenadas, contudo a Lei de Faraday-Ampère não, pois aparecem termos contendo $\sqrt{-g}$ e as suas derivadas.

Podemos agora escrever as Equações de Maxwell na forma integral. Consideremos a primeira delas, esta deve ser integrada em uma hiper-superfície tridimensional orientada Σ com fronteira orientável. Logo,

$$\int_\Sigma d^3x \; \boldsymbol{dF} = 0.$$

[2]Estas são basicamente as transformações duais discutidas em [37].

Utilizando o teorema de Stokes temos que

$$\int_{\partial\Sigma} d^2x \ \boldsymbol{F} = 0.$$

Consideremos agora a segunda equação. Integrando ainda em Σ temos que

$$\int_{\Sigma} d^3x \ \boldsymbol{d}\star\boldsymbol{F} = \mu_0 \int_{\Sigma} d^3x \ \star\boldsymbol{J} \Rightarrow \int_{\partial\Sigma} d^2x \ \star\boldsymbol{F} = \mu_0 \int_{\Sigma} d^3x \ \star\boldsymbol{J}.$$

Portanto na forma integral as Leis de Gauss-Einstein e Faraday-Ampère são, respectivamente,

$$\int_{\partial\Sigma} d^2x \ \boldsymbol{F} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial\Sigma} d^2x \ \star\boldsymbol{F} = \mu_0 \int_{\Sigma} d^3x \ \star\boldsymbol{J}.$$

Podemos ainda obter a lei de conservação da 4-corrente, de fato consideremos a Lei de Faraday-Ampère, portanto

$$\boldsymbol{d}\star\boldsymbol{F} = \mu_0 \star\boldsymbol{J} \Rightarrow \boldsymbol{d}^2\star\boldsymbol{F} = \mu_0 \boldsymbol{d}\star\boldsymbol{J} \Rightarrow \boldsymbol{d}\star\boldsymbol{J} = 0.$$

Esta é equação de continuidade na relatividade geral. Já a sua forma integral, considerando-se uma subvariedade Ω quadridimensional orientada com uma fronteira orientável, é dada por

$$\int_{\Omega} d^4x \ \boldsymbol{d}\star\boldsymbol{J} = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\Omega} d^3x \ \star\boldsymbol{J} = 0.$$

A simetria de calibre também pode ser reescrita em termos das formas diferenciais. Seja χ um campo escalar diferenciável no espaço-tempo curvo, consideremos o novo 4-potencial dado por

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{d}\chi.$$

Portanto, o tensor de Faraday satisfaz

$$\boldsymbol{dA}' = \boldsymbol{dA} + \boldsymbol{d}^2\chi \Rightarrow \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}.$$

Logo o 4-potencial é invariante por calibre pela adição de uma 1-forma fechada, ou seja, do gradiente de um campo escalar.

Vejamos agora como a equação de onda é escrita em um espaço-tempo curvo. As Leis de Maxwell em termos do 4-potencial são dadas como

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{A} = 0; \\ &\boldsymbol{d}\star\boldsymbol{dA} = \mu_0 \star\boldsymbol{J}. \end{aligned}$$

A primeira é óbvia, contudo aplicando o dual de Hodge na segunda temos que

$$\star\,\boldsymbol{d}\star\boldsymbol{dA} = \mu_0 \star\star\boldsymbol{J} \Rightarrow \star\boldsymbol{d}\star\boldsymbol{dA} = \mu_0\boldsymbol{J}. \tag{4.18}$$

Temos esta é a equação de onda para $\boldsymbol{A}$, o que faz sentido dado que $\star\boldsymbol{d}\star\boldsymbol{d}$ é análogo ao operador laplaciano. Todavia a Equação (4.18) contém termos com as derivadas de $\sqrt{-g}$, porém a luz ainda movimenta-se em geodésicas nulas [13]. Portanto, para verificarmos experimentalmente a curvatura do espaço-tempo basta vermos se a luz se movimenta em trajetórias curvas, o que de fato ocorre e denomina-se Efeito de Lente Gravitacional [22].

4.3 Formulações Variacionais da Eletrodinâmica

O formalismo variacional é essencial no processo de segunda quantização, além disso fornece um meio simples de acoplarmos o eletromagnetismo com a relatividade geral. Consequentemente desenvolveremos alguns aspectos deste assunto, em especial como escrever uma ação invariante e obter as Equações de Maxwell por meio desta.

Podemos reescrever a densidade lagrangiana clássica utilizando-se o tensor de Faraday. Esta deve ser uma quantidade invariante pois é um escalar, logo é dada em termos de produtos internos. Consideremos primeiramente $\mathbb{L}^4$ e utilizemos a seguinte identidade

$$\frac{F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}{2} = -\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} + \boldsymbol{B}^2. \tag{4.19}$$

Claramente $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é um invariante relativístico. A lagrangiana para as Equações de Maxwell pode ser dada por

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}{4\mu_0} + J^\mu A_\mu. \tag{4.20}$$

Portanto, a ação relativística é

$$S[A^\mu] = \int d^4x \ \left[-\frac{F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}{4\mu_0} + J^\mu A_\mu\right].$$

Extremando esta em termos do 4-potencial obtemos a Lei de Faraday-Ampère. As equações de Euler-Lagrange associadas são

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{EM}}{\delta A_\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = \partial^\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right). \tag{4.21}$$

Em termos de $\boldsymbol{A}$ a lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}}{4\mu_0}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + \eta^{\alpha\nu}J_\alpha A_\nu.$$

O termo à esquerda de (4.21) é dado por

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = \eta^{\alpha\nu}J_\alpha\frac{\partial A_\nu}{\partial A_\mu} \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = \eta^{\alpha\nu}J_\alpha\delta_{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = J_\mu. \tag{4.22}$$

Consideremos a seguinte identidade

$$\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}.$$

Portanto, o termo à direita da Equação (4.21) é

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\gamma}}{4\mu_0}[(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\gamma\mu} - \delta_{\gamma\nu}\delta_{\lambda\mu})F_{\alpha\beta} + (\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu})F_{\lambda\gamma}] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4\mu_0}[(\delta^\alpha{}_\nu\delta^\beta{}_\mu - \delta^\beta{}_\nu\delta^\alpha{}_\mu)F_{\alpha\beta} + (\delta^\lambda{}_\nu\delta^\gamma{}_\mu - \delta^\gamma{}_\nu\delta^\lambda{}_\mu)F_{\lambda\gamma}].$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{(F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu})}{4\mu_0} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{F_{\nu\mu}}{\mu_0}. \tag{4.23}$$

Substituindo as Equações (4.22) e (4.23) em (4.21) temos que

$$-\frac{1}{\mu_0}\partial^\nu F_{\nu\mu} = J_\mu \Rightarrow \partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 J_\mu.$$

Sendo esta justamente a Lei de Faraday-Ampère, já a lei de Gauss-Einstein, como dito anteriormente, é obtida diretamente da definição do tensor de Faraday.

No espaço-tempo curvo a lagrangiana é dada fazendo-se a substituição $g^{\mu\nu} \to \eta^{\mu\nu}$, portanto

$$\mathcal{L}_{EM} = -g^{\lambda\alpha} g^{\gamma\beta} \frac{F_{\lambda\gamma} F_{\alpha\beta}}{4\mu_0} + g^{\mu\nu} J_\mu A_\nu. \tag{4.24}$$

Com a definição de dual de Hodge a expressão anterior pode ser escrita de forma independente do sistema de coordenadas

$$\star\, \mathcal{L}_{EM} = -\frac{\boldsymbol{F} \wedge \star \boldsymbol{F}}{2\mu_0} - \boldsymbol{J} \wedge \star \boldsymbol{A}. \tag{4.25}$$

Das expressões (4.20) e (4.25) pode-se obter as Leis de Maxwell em um espaço-tempo curvo.

Calculemos agora o tensor energia-momento eletromagnético. Todavia temos que $\mathcal{L}_{EM}$ não é invariante por transformações de calibre, sendo assim em geral consideramos somente a lagrangiana sem o termo contendo $\boldsymbol{A}$, ou seja,

$$\mathcal{L}_{EM} = -g^{\lambda\alpha} g^{\gamma\beta} \frac{F_{\lambda\gamma} F_{\alpha\beta}}{4\mu_0}.$$

Portanto, o tensor energia-momento neste caso é

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{EM}.$$

Consideremos primeiramente as seguintes identidades

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu \quad \text{e} \quad \frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

Consequentemente

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\mu_0}\left(\delta^\lambda{}_\mu \delta^\alpha{}_\nu g^{\gamma\beta} F_{\lambda\gamma} F_{\alpha\beta} + \delta^\gamma{}_\mu \delta^\beta{}_\nu g^{\lambda\alpha} F_{\lambda\gamma} F_{\alpha\beta}\right) - \frac{g_{\mu\nu}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\mu\nu} = \frac{g^{\alpha\beta}}{\mu_0} F_{\mu\beta} F_{\alpha\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{4.26}$$

O tensor $T_{\mu\nu}$ é simétrico e invariante por transformações de calibre, todavia não possui necessariamente divergência nula. De fato, consideremos o caso particular de $T_{\mu\nu}$ em $\mathbb{L}^4$:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \eta^{\mu\nu}\frac{F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{4}\right).$$

Logo

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\nu \left[F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha\right] - \eta^{\mu\nu}\frac{\partial_\nu \left[F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right]}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\nu}{}_{\alpha}\partial_\nu F^{\mu\alpha} + F^{\mu\alpha}\partial_\nu F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta}}{2}\right) \Rightarrow \partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{F^{\mu}{}_{\alpha}\partial_\nu F^{\nu\alpha}}{\mu_0}.$$

Utilizando a Lei de Gauss-Einstein em $\mathbb{L}^4$ temos que

$$\partial^\nu T_{\nu\mu} = -F_{\mu\alpha}J^\alpha. \tag{4.27}$$

O que é basicamente a Lei de Força de Lorentz escrita em termos da densidade de 4-momento, portanto o tensor energia-momento é solenoidal somente em regiões sem cargas ou correntes. A Equação (4.27) é a forma relativística das leis de conservação do momento e da energia eletromagnéticos [37].

Podemos então escrever as Equações de Einstein-Maxwell que acoplam a teoria da relatividade geral com o eletromagnetismo, isso em uma região com 4-corrente nula. Estas são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4\mu_0}\left[g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right].$$

Como o traço de T é nulo temos que outra forma das Equações de Einstein-Maxwell é dada por

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4\mu_0}\left[g^{\alpha\beta}F_{\mu\beta}F_{\alpha\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right].$$

Considerações Finais

Ao longo do desenvolvimento desta monografia estudamos, brevemente, várias técnicas matemáticas para podermos analisar as teorias da relatividade especial e geral, além é claro do eletromagnetismo covariante. Vimos como definir variedades diferenciáveis e como trabalhar conceitos geométricos nestas, como por exemplo, espaço tangente, derivada covariante e curvatura. Feito isso procuramos o formalismo necessário para generalizar os operadores diferenciais do $\mathbb{R}^n$ para variedades, o que culminou no estudo de formas diferenciais. Portanto, além de ganharmos uma certa experiência com as teorias relativísticas, o desenvolvimento desta monografia nos forneceu uma boa base matemática.

Em estudos futuros o autor se aprofundará na teoria quântica de campos, e usará os conhecimentos adquiridos durante a confecção deste trabalho, em especial relatividade restrita e teoria clássica de campos, para este fim.

Referências Bibliográficas

[1] J. Dugundji, *Topology*. Boston: Universal Book Stall, 1989.

[2] J. Munkres, *Topology*. Featured Titles for Topology Series, Upper Saddle River: Prentice Hall, Incorporated, 2 ed., 2000.

[3] E. L. Lima, *Curso de análise - Volume 1*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 14 ed., 2014.

[4] E. L. Lima, *Espaços métricos*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2 ed., 1983.

[5] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2 ed., 1988.

[6] P. J. Hurley, *A Concise Introduction to Logic*. Boston: Cengage Learning, 11 ed., 2011.

[7] H. Eves and H. Domingues, *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 5 ed., 2004.

[8] E. L. Lima, *Álgebra linear*. Matemática Universitária, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 7 ed., 2009.

[9] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Pearson new international edition, Boston: Pearson, 2 ed., 2013.

[10] C. F. Gauss, *General investigations of curved surfaces*. Raven series in higher mathematics, New York: Raven Press, 1965.

[11] G. Riemann and G. Hoüel, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie: mémoire posthume*. Mémoires de la Société royale des sciences de Göttingue, 1867.

[12] M. P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[13] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 2010.

[14] Wikipedia, "Tangent space." Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tangent_space&oldid=744625778`>. Acessado em 16 de outubro de 2016.

[15] E. L. Lima, *Variedades diferenciáveis*. Publicações matemáticas, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

[16] T. Levi-Civita, "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana," *Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. 42, 1917.

[17] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[18] Wikipedia, "Affine connection." Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Affine_connection&oldid=740758129`>. Acessado em 23 de setembro de 2016.

[19] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Massachusetts: Wiley, 1972.

[20] Wikipedia, "Parallel transport." Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Parallel_transport&oldid=684134956`>. Acessado em 4 de outubro de 2015.

[21] M. P. do Carmo, *Formas diferenciais e aplicações*. Monografias de matemática, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

[22] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 25 ed., 1973.

[23] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Always learning, Chicago: Pearson Education, Limited, 2013.

[24] R. Hutchins, M. Adler, i. Encyclopaedia Britannica, and U. of Chicago, *Great Books of the Western World*. No. v. 34 in Great Books of the Western World, Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952.

[25] V. Arnold, K. Vogtmann, and A. Weinstein, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, Moscow: Springer New York, 2013.

[26] H. Poincaré and M. Martins, *O Valor da Ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

[27] H. Müller, S. Herrmann, C. Braxmaier, S. Schiller, and A. Peters, "Modern michelson-morley experiment using cryogenic optical resonators," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 020401, Jul 2003.

[28] H. A. Lorentz, A. Einstein, and H. Mikowski, *O Príncipio da Relatividade*. Textos Fundamentais da Física Moderna, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 5 ed., 2001.

[29] Wikipedia, "Special relativity." Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Special_relativity&oldid=745840485`>. Acessado em 23 de outubro de 2016.

[30] J. M. F. Bassalo, *Eletrodinâmica Quântica*. São Paulo: Livraria da Física, 2 ed., 2006.

[31] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, "Experimental test of parity conservation in beta decay," *Phys. Rev.*, vol. 105, pp. 1413–1415, Feb 1957.

[32] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. No. 1 in The Quantum Theory of Fields 3 Volume Hardback Set, New York: Cambridge University Press, 1995.

[33] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. São Paulo: EDUSP, 2 ed., 2015.

[34] S. Baeßler, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, U. Schmidt, and H. E. Swanson, "Improved test of the equivalence principle for gravitational self-energy," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 3585–3588, Nov 1999.

[35] K. Symon, *Mechanics*. Addison-Wesley World student series, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 3 ed., 1971.

[36] B. P. Abbott *et al.*, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.

[37] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Always learning, Upper Saddle River: Pearson, 3 ed., 1999.