

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Cálculo Tensorial e Relatividade Geral

Mateus Reinke Pelicer

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Hatsumi Mukai

Maringá - PR

2016

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Cálculo Tensorial e Relatividade Geral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, realizado sob orientação da Prof.^a Dr.^a Hatsumi Mukai como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Maringá - PR
2016

*“lembrem de mim
como de um
que ouvia a chuva
como quem assiste missa
como quem hesita, mestiça,
entre a pressa e a preguiça. ”*

Paulo Leminski

Agradecimentos

Agradeço imensamente a meus pais, por todo carinho, paciência e cumplicidade proporcionados durante esta jornada. Agradeço também a minha namorada, por todo suporte, pela amizade e, claro, pelas bobagens de todo dia, que facilitam o viver. Gostaria também de agradecer meus professores, em especial a Hatsumi Mukai, Luis Carlos Malacarne e Breno Ferraz de Oliveira, pelo apoio dado e por toda dedicação e disposição ao me auxiliar no decorrer do curso.

Obrigado.

Resumo

O presente trabalho trata sobre cálculo tensorial e Teoria da Relatividade Geral (TRG), com maior foco no último. Primeiramente faz-se uma introdução aos tensores, abrangendo de álgebra a tensores de curvatura. Em seguida são apresentados os experimentos mentais (*gedankenexperiment*) que levaram à gênese da TRG, e são obtidas as equações de campo a partir da formulação variacional. Por último é derivada a solução de Schwarzschild e analisadas as consequências decorrentes desta. A importância do estudo da TRG se dá em várias áreas, dentre estas a cosmologia moderna e a gravitação quântica.

Palavras-Chave: Tensores; Gravitação; Relatividade.

Abstract

The present work deals with tensor calculus and Theory of General Relativity (TRG), focusing in the last one. First, an introduction to tensors is made, covering from algebra to curvature tensors. Then, the thought experiments (*gedankenexperiment*) that led to the genesis of TRG are presented, followed by the field equations, which are obtained using the variational formulation. The Schwarzschild solution is derived and its consequences are analyzed. The importance of studying TRG can be seen in many fields, among which modern cosmology and quantum gravitation.

Key-Words: Tensors; Gravitation; Relativity.

Sumário

Introdução	9
1 Tensores	11
1.1 A ideia por trás de tensores	11
1.2 Álgebra Tensorial	12
1.3 O tensor Métrico	16
1.4 Cálculo Tensorial	18
1.5 Geodésicas	20
1.6 Curvatura	22
1.7 Tensores Relativos	24
2 Teoria da Relatividade Geral	26
2.1 Breve Histórico	26
2.2 O Princípio de Equivalência	30
2.3 Equações de Campo	34
2.4 Limite Newtoniano	40
3 Solução de Schwarzschild	43
3.1 A Métrica	43
3.2 Geodésicas e Órbitas	47
3.3 O Periélio de Mercúrio	51

3.4	Desvio Gravitacional da Luz	55
3.5	Coordenadas de Lemaître	58
	Considerações Finais	62
A	Derivação da Equação da Geodésica.	67
B	Expressão para o Divergente	70
C	Simulação das Órbitas	72

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi elaborada no início do século XX, e publicada na forma como é conhecida hoje em 1915, por Albert Einstein e por David Hilbert, ambos trabalhando independentemente [1]. Nos anos seguintes ocorreram estudos sistemáticos na área, envolvendo personalidades como Karl Schwarzschild, Hermann Weyl e Georges Lemaître; como resultado, previsões anteriormente inconcebíveis surgiram, como a existência de buracos negros, a expansão do Universo e a existência de ondas gravitacionais [2].

Com a gênese da relatividade foi estabelecido um novo paradigma na Física. Da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), surgem dois conceitos de extrema importância: o primeiro é a ideia de que espaço e tempo não são entes independentes mas, na realidade, estão correlacionados; o segundo é a geometrização do espaço-tempo. A gravitação, antes entendida como uma força devido à interação a distância entre corpos, agora é interpretada como uma deformação no espaço-tempo, no qual partículas em movimento seguem geodésicas em espaços curvos, ou seja, “retas locais” [3, 4]. A deformação é causada pelo tensor Energia-Momento, havendo uma relação entre massa e energia de um corpo. Apenas destes fatos é possível compreender a importância da TRG tanto na Física como na epistemologia.

O desenvolvimento científico é incessante, e os avanços tardios que ocor-

reram em áreas como mecânica clássica e eletromagnetismo – que datam dos séculos XVI e XIX, respectivamente – levam a ponderar o quanto ainda há a ser desvendado no estudo da relatividade. Seguindo esta linha de raciocínio o presente trabalho foi escrito a partir de uma densa revisão de literatura, tendo como objetivo introduzir e analisar os conceitos matemáticos e conceituais da TRG e suas consequências imediatas, visando possibilitar uma futura pesquisa no campo.

A apresentação deste está exposta da seguinte forma: No Capítulo 1 é dada uma introdução necessária da matemática necessária para o estudo da TRG, focando seu uso como ferramenta matemática. Os tópicos abordados são álgebra, tensor métrico, cálculo tensorial, geodésicas, curvatura e tensores relativos. No Capítulo 2 são abordados os experimentos mentais que levam ao princípio de equivalência, seguido pelas equações de campo, que são deduzidas a partir do princípio variacional. Enfim, é determinada a constante gravitacional relativística a partir do limite clássico de campos fracos. No Capítulo 3 é deduzida a solução de Schwarzschild, uma solução das equações de campo para uma massa esfericamente simétrica, a partir da qual previsões como o avanço do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional da luz e a existência de buracos negros são analisados.

Capítulo 1

Tensores

Neste capítulo será desenvolvida uma introdução aos tensores, abrangendo a sua álgebra, cálculo, geodésicas, tensores de curvatura e tensores relativos, com o intuito de posteriormente aplicá-los no desenvolvimento da TRG.

1.1 A ideia por trás de tensores

O estudo de tensores é de extrema importância na Física, não somente na relatividade geral, mas também em áreas como mecânica clássica e eletromagnetismo, em que são utilizados para descrever grandezas como potenciais, *stress* e momento de inércia (Figura 1.1), e também para escrever algumas equações de forma mais compacta e elegante, como as equações de Maxwell e a de continuidade [7, 8]. São inúmeras as interpretações possíveis para os tensores [9] mas, de acordo com Medrano [10]: “No que se diz respeito ao significado físico dos tensores, pode-se dizer que estes encontram-se relacionados as propriedades físicas, intrínsecas, do meio”. Tensores de ordem 0, 1 ou 2 podem ser representados por matrizes, já os de ordens maiores precisam ser descritos a partir das componentes separadamente.

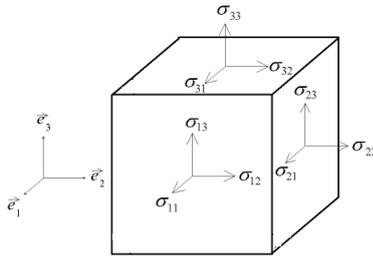
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$


Figura 1.1: Representação das componentes do tensor *stress*.
Fonte: Site: RockMechs. ¹

Neste trabalho será usada uma abordagem clássica, onde se trabalha com as componentes dos tensores. Apesar desta abordagem deixar de lado parte da intuição geométrica, ela é mais elementar e a linguagem empregada no tratamento remete à geometria [11], o que acaba tornando os conceitos de mais fácil compreensão.

1.2 Álgebra Tensorial

Seja V_N um espaço N -dimensional no qual estão definidos os sistemas de coordenadas S e \bar{S} , representados pelas coordenadas x^μ e \bar{x}^μ , respectivamente. As coordenadas do último podem ser escritas como funções das coordenadas do primeiro:

$$\bar{x}^\nu = \bar{x}^\nu(x^0, x^1, \dots, x^{N-1}). \quad (1.2.1)$$

¹Disponível em: <<http://www.rockmechs.com/stress-strain/fundamentals/tensor-transformation-rotation/>> Acesso em: agosto de 2016.

Derivando a equação (1.2.1), é obtida a relação da transformação para deslocamentos infinitesimais

$$d\bar{x}^\nu = \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (1.2.2)$$

A partir daqui serão adotadas duas convenções:

- Convenção de Einstein: Para não ser necessária a escrita da somatória, sempre que um índice se repetir em um lado da equação estará implícito que há uma soma sobre este índice.
- Intervalo dos índices gregos: Os índices gregos que se repetirem são somados entre todo o intervalo entre 0 e $N - 1$.

Assim, a equação (1.2.2) pode ser reescrita como

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (1.2.3)$$

É convencionalizado que os índices das coordenadas sejam sobrescritos pois na relação de transformação, do lado direito, a coordenada que está sendo diferenciada remete ao mesmo sistema do lado esquerdo. Por esta transformação são definidas as componentes de um vetor contravariante

$$\bar{V}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \quad (1.2.4)$$

Por outro lado, são ditas componentes de um vetor covariante aquelas que se transformam por

$$\bar{V}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} V_\nu. \quad (1.2.5)$$

Note que os índices subscritos seguem a mesma lógica empregada para os vetores contravariantes.

Em um espaço bidimensional é possível dar significado geométrico a estas componentes, como se observa na Figura 1.2. As componentes de um vetor contravariante são paralelas aos eixos de coordenadas, enquanto as componentes de um vetor covariante são perpendiculares aos respectivos eixos. Quando se trabalha em espaços euclidianos, não há distinção entre as componentes.

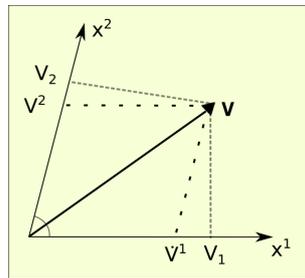


Figura 1.2: Representação das componentes de vetores.
Fonte: Autor (2016).

Um tensor de ordem maior é definido, de modo formal, a partir do produto tensorial entre espaços vetoriais [12]. Porém, uma definição equivalente é aquela que se refere à transformação de coordenadas de suas componentes [10]. A ordem de um tensor pode ser representada por (m, n) , sendo m a ordem das componentes contravariantes e n das covariantes. Caso o tensor tenha somente componentes covariantes (ou contravariantes), refere-se apenas à ordem deste. Tensores contravariantes de segunda ordem são definidos segundo a lei de transformação

$$\bar{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu}, \quad (1.2.6)$$

e tensores covariantes de segunda ordem por:

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} T_{\mu\nu}; \quad (1.2.7)$$

já um tensor que possui ambas componentes é denominado tensor misto:

$$\bar{T}_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T_{\mu}^{\nu}. \quad (1.2.8)$$

Estas definições se estendem para tensores de ordem maior pela adição de índices e termos de derivação respectivos aos índices

$$\bar{T}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{\partial \bar{x}^{\beta_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{\beta_m}}{\partial x^{\mu_m}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial \bar{x}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial \bar{x}^{\alpha_n}} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}. \quad (1.2.9)$$

Esta é a definição mais geral a partir da lei de transformação para um tensor de ordem (m, n) . Nota-se que as relações de transformações são lineares e homogêneas, ou seja, uma relação válida em um sistema de coordenadas é válida em qualquer outro sistema [11]. É evidente pelas definições que vetores são tensores de ordem 1 e, escalares são os de ordem 0, também chamados de invariantes. Estes últimos são grandezas cujo valor independe do sistema de coordenadas adotado e são definidos a partir do produto interno

$$\bar{V}^{\mu} \bar{U}_{\mu} = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\mu}} V^{\omega} U_{\lambda} = \delta^{\lambda}_{\omega} V^{\omega} U_{\omega} = V^{\lambda} U_{\lambda}, \quad (1.2.10)$$

na qual $\delta^{\omega}_{\lambda}$ é a delta de Kronecker ². O produto interno também é chamado de contração visto que, se aplicado a tensores de ordem maior não surgem invariantes, mas a ordem do tensor é subtraída em 2. A contração de um tensor de tipo $(3, 2)$ resulta em outro de tipo $(2, 1)$:

$$T^{\mu\nu}_{\omega} = T^{\mu\lambda\nu}_{\lambda\omega} = A^{\mu\lambda} B^{\nu}_{\lambda\omega}. \quad (1.2.11)$$

Outra operação a ser definida é o produto tensorial (ou externo), já men-

² $\delta^{\omega}_{\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \omega \\ 0 & \text{se } \lambda \neq \omega \end{cases}$

cionado. O produto tensorial entre um tensor de ordem (m, n) e outro de ordem (r, s) gera um tensor de ordem $(m + r, n + s)$, por exemplo, o produto entre um vetor de ordem $(1, 1)$ e outro $(0, 2)$ gera um terceiro de ordem $(1, 3)$, como segue:

$$T^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = A^{\alpha}_{\beta} B_{\mu\nu}. \quad (1.2.12)$$

A combinação linear só é definida para tensores dados no mesmo ponto do espaço e de mesma ordem. Sejam c_1 e c_2 escalares:

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = c_1 A^{\alpha}_{\mu\nu} + c_2 B^{\alpha}_{\mu\nu}. \quad (1.2.13)$$

Tensores também podem apresentar propriedades de simetria. Diz-se que um tensor é simétrico se a troca de dois índices de mesmo tipo não altera o valor da componente, esta definição é válida para tensores de qualquer ordem. Para um tensor de tipo $(0, 2)$, isto significa

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}, \quad (1.2.14)$$

e denomina-se um tensor como antisimétrico se a troca de dois índices do mesmo tipo troca o sinal das componentes, novamente para um tensor covariante de segunda ordem:

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \quad (1.2.15)$$

1.3 O tensor Métrico

Um espaço é dito métrico quando é possível definir a distância infinitesimal ds entre dois pontos em função de um tensor covariante simétrico $g_{\mu\nu}$, denominado tensor métrico (ou fundamental) que é uma função das coorde-

nadas [11]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3.1)$$

Este tipo de espaço possui a propriedade de conexão entre as componentes contravariantes e covariantes do tensor, dada pela relação:

$$g_{\mu\nu} U^\nu = U_\mu. \quad (1.3.2)$$

Um espaço em que não é possível definir tal conexão é denominado espaço afim [13]. Pode-se definir um tensor contravariante $g^{\mu\nu}$, denominado tensor recíproco (ou conjugado) por

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} = \delta^\lambda_\nu, \quad (1.3.3)$$

tal que os vetores covariantes e contravariantes também estejam relacionados por

$$g^{\mu\nu} U_\nu = U^\mu. \quad (1.3.4)$$

O tensor métrico determina algumas propriedades do espaço, como homogeneidade e isotropia, o primeiro ocorre se a métrica independe do ponto escolhido como referência, já o segundo, quando existe um vetor $\vec{v} \neq 0$ tal que $ds^2 = 0$. Uma interpretação física seria, se a métrica é homogênea, dado um tempo fixo, o espaço é o mesmo de qualquer ponto de referência e, se isotrópico, o espaço é o mesmo visto de qualquer direção. Na relatividade geral está diretamente relacionado ao potencial gravitacional. Um espaço que possui propriedades de homogeneidade e isotropia é o esférico bidimensional (Figura 1.3), em que a métrica é dada por $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, onde a é o raio da esfera, θ a colatitude e ϕ o azimute.

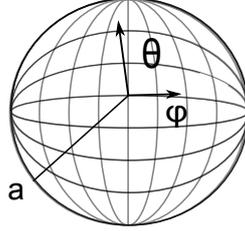


Figura 1.3: Representação de um espaço homogêneo e isotrópico.
Fonte: Autor (2016).

1.4 Cálculo Tensorial

Ao se generalizar vetores e tensores para espaços curvos é necessário abranger alguns conceitos do cálculo em espaços planos. Primeiramente, a derivada de um tensor não é necessariamente um tensor, visto que a transformação de coordenadas toma a forma

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\omega} \bar{T}^{\lambda\omega} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\omega} \bar{T}^{\lambda\omega} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\omega} \frac{\partial \bar{T}^{\lambda\omega}}{\partial \bar{x}^\alpha} \right]. \quad (1.4.1)$$

Para que a diferenciação de um tensor também possua carácter tensorial são construídos os símbolos de Christoffel de primeira e segunda ordem, respectivamente:

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (1.4.2)$$

e

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho\mu\nu}. \quad (1.4.3)$$

Em algumas literaturas, estes são representados por $[\mu\nu, \rho]$ e $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$, respectivamente. São simétricos no índices μ e ν . Os símbolos de Christoffel não

são tensores, sua transformação de coordenadas é dada pela relação:

$$\bar{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^{\rho}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \Gamma^{\omega}_{\sigma\lambda} + \frac{\partial \bar{x}^{\rho}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial^2 x^{\omega}}{\partial \bar{x}^{\mu} \partial \bar{x}^{\nu}}. \quad (1.4.4)$$

Se generaliza o conceito de diferenciação definindo as derivadas covariantes para tensores contravariantes e covariantes, respectivamente:

$$\nabla_{\rho} T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\rho} T^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} T^{\mu\lambda}, \quad (1.4.5)$$

$$\nabla_{\rho} T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} T_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} T_{\mu\lambda}. \quad (1.4.6)$$

Uma propriedade útil é que a derivada do tensor métrico é sempre nula:

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\nu\rho\mu} - \Gamma_{\mu\rho\nu} \\ &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} \right) \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

$$= 0.$$

Agora, seja $x^{\mu} = x^{\mu}(u)$ uma curva parametrizada por u , define-se a derivada absoluta para tensores contravariantes como

$$\frac{\delta T^{\mu\nu}}{\delta u} = \nabla_{\rho} T^{\mu\nu} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial u} \quad (1.4.8)$$

e, para covariantes

$$\frac{\delta T_{\mu\nu}}{\delta u} = \nabla_{\rho} T_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial u}. \quad (1.4.9)$$

Como os símbolos de Christoffel são nulos em espaços planos, as derivadas se reduzem ao caso do cálculo diferencial usual.

1.5 Geodésicas

As geodésicas costumam ser definidas, em espaços planos, como o menor caminho entre dois pontos. Este conceito pode ser generalizado para espaços curvos por uma definição mais formal [11]. Na Figura 1.4 representa-se um conjunto de curvas geodésicas em um espaço curvo, a elipsóide triaxial.

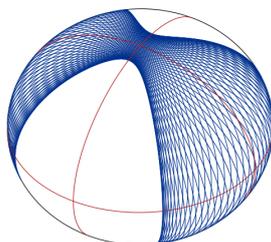


Figura 1.4: Geodésicas em uma elipsóide triaxial.

Fonte: Site: Wikipedia ³.

Definição: Uma geodésica é uma curva cujo valor é estacionário com respeito a pequenas variações arbitrárias, mantendo os extremos fixos.

$$\delta \int_A^B ds = 0. \quad (1.5.1)$$

Supondo que a curva é parametrizada pelo próprio comprimento de arco $x^\mu = x^\mu(s)$ e definindo, por simplicidade, $p^\mu = dx^\mu/ds$ como um vetor unitário tangente à curva

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = p_\nu p^\nu = 1 \quad (1.5.2)$$

³Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Geodesic>> Acesso em: agosto de 2016.

e⁴ $\mathcal{L} = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$. Portanto, a equação da geodésica é dada por ⁵

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = 0, \quad (1.5.3)$$

e que pode ser escrita de modo explícito como

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (1.5.4)$$

As soluções destas equações são determinadas de forma única com as condições iniciais de x^μ e dx^μ/ds . Para um parâmetro t qualquer, a equação tem a seguinte forma

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = - \frac{d^2 t/ds^2}{(dt/ds)^2} \frac{dx^\lambda}{dt}. \quad (1.5.5)$$

Comumente é utilizado um parâmetro tal que $dt/ds = 0$ e a equação (1.5.4) pode ser utilizada. Note que a equação (1.4.8) é idêntica a equação da geodésica, portanto

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0. \quad (1.5.6)$$

diz-se que o vetor p^λ propaga-se paralelamente ao longo da curva. O conceito de transporte paralelo pode ser aplicado para definir a curvatura intrínseca de um espaço. Se um vetor se propaga paralelamente por uma curva fechada em um espaço plano, o vetor final é paralelo ao inicial, já em um espaço curvo, isto não é necessariamente válido.

Um tipo de geodésica que deve ser mencionado são as geodésicas nulas, que ocorrem quando, dado um parâmetro λ , o seguinte conjunto de equações

⁴Na física, esta é a lagrangiana.

⁵Apêndice A

deve ser satisfeito:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\lambda^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (1.5.7)$$

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0. \quad (1.5.8)$$

Estas são as geodésicas que descrevem o movimento da luz na TRG.

1.6 Curvatura

O tensor de Riemann (ou Riemann-Christoffel) descreve a curvatura intrínseca do espaço, e é utilizado para construir outros tensores que auxiliam na descrição da curvatura do espaço-tempo na TRG. Para construir este tensor, assume-se a existência de duas curvas, x^λ e x^ω tal que a junção das duas seja uma curva fechada num espaço curvo. Se um vetor U_μ é transportado paralelamente em relação a estas duas curvas, como já mencionado, o vetor final não é, necessariamente, paralelo ao inicial. Esta afirmação é análoga a de que as derivadas não são comutativas em espaços curvos

$$\nabla_\lambda \nabla_\omega U_\mu \neq \nabla_\omega \nabla_\lambda U_\mu. \quad (1.6.1)$$

Define-se o tensor de curvatura a partir desta diferença:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu U_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu U_\lambda = R^\sigma_{\lambda\mu\nu} U_\sigma \quad (1.6.2)$$

com

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\omega_{\lambda\nu} \Gamma^\sigma_{\omega\mu} - \Gamma^\omega_{\lambda\mu} \Gamma^\sigma_{\omega\nu}, \quad (1.6.3)$$

denominado tensor de Riemann ou de curvatura. Ele têm este nome devido ao teorema que segue [11].

Teorema 1 *É condição suficiente e necessária para que um espaço seja plano que*

$$R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (1.6.4)$$

O teorema também é válido para o tensor de Riemann covariante $R_{\omega\lambda\mu\nu} = g_{\omega\sigma}R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu}$. O tensor de Riemann é anti-simétrico nos dois últimos índices (μ e ν) e tem simetria cíclica nos subíndices

$$R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} + R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} + R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu} = 0. \quad (1.6.5)$$

A partir deste pode-se construir outros tensores de interesse, como o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. O tensor de Ricci é definido pela contração

$$R_{\lambda\nu} = R^\sigma{}_{\lambda\sigma\nu}. \quad (1.6.6)$$

O tensor de Ricci é simétrico. O escalar de curvatura é dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.6.7)$$

Definidos estes tensores, o tensor de Einstein é definido a partir da identidade de Bianchi, dada por

$$\nabla_\rho R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^\sigma{}_{\lambda\rho\nu} + \nabla_\nu R^\sigma{}_{\lambda\rho\mu} = 0 \quad (1.6.8)$$

tal que, com algumas manipulações obtém-se a identidade

$$\nabla_\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (1.6.9)$$

da qual define-se $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ como o tensor de Einstein, que é simétrico e tem derivada covariante nula.

1.7 Tensores Relativos

Tensores relativos são uma subclasse dos tensores [14] e se transformam pela relação

$$\bar{\tau}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^w \frac{\partial \bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{\nu_1}} \cdots \tau^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} \quad (1.7.1)$$

na qual $|\partial x/\partial \bar{x}|$ é o Jacobiano da transformação de x^μ para \bar{x}^ν . O expoente w denota o peso do tensor relativo. Diz-se que τ é um tensor relativo de peso w .

Esta classe de tensores obedece as mesmas propriedades já definidas:

- A soma de dois tensores de mesma ordem (m, n) , mesmo peso w e, definidos no mesmo ponto, resultam em um tensor de mesma ordem e mesmo peso que os anteriores.
- O produto de dois tensores relativos definidos no mesmo ponto, um de ordem (m, n) e peso w e outro de ordem (r, s) e peso u resulta em um tensor de ordem $(m + r, n + s)$ e peso $w + u$.

Dois exemplos importantes de tensores relativos são o determinante do tensor métrico e o elemento infinitesimal de volume. A partir destes se constrói o invariante de volume. Por definição:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu} \quad (1.7.2)$$

portanto,

$$\bar{g} = \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right|^2 g \quad (1.7.3)$$

com \bar{g} e g sendo os determinantes do tensor métrico em relação as respectivas coordenadas. Já o invariante de volume de um espaço quadridimensional se

transforma pela relação:

$$d^4\bar{x} = \left| \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| d^4x \quad (1.7.4)$$

Com estes é construído o invariante de volume quadri-dimensional

$$\sqrt{|\bar{g}|} d^4\bar{x} = \sqrt{|g|} d^4x. \quad (1.7.5)$$

A partir destes tópicos do cálculo tensorial é possível iniciar uma discussão da TRG.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade Geral

Este capítulo tratará do desenvolvimento da TRG. É enunciado o princípio da equivalência e obtidas as equações de Einstein a partir do princípio variacional. Em seguida é verificado que estas retornam a equação de Poisson para o potencial na mecânica Newtoniana usando uma aproximação de campos fracos.

2.1 Breve Histórico

Antes de abordar os tópicos de um assunto qualquer é importante discorrer sobre sua necessidade, visando uma maior compreensão de sua relevância e dos motivos históricos que levaram à sua gênese. Consequentemente propiciando uma visão conceitual mais ampla. Aqui será dada uma breve introdução histórica.

Segundo a teoria da gravitação de Newton, interações entre corpos ocorrem instantaneamente e, mudanças de coordenadas devem obedecer às transformadas de Galileu, fazendo com que as forças sejam independentes do referencial adotado [15].

Com o advento do eletromagnetismo no século XIX surgiram alguns problemas teóricos. As equações de Maxwell não eram invariantes sob transformações galileanas e aparentava ser constante a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas (c) no vácuo [8]. Tais observações trouxeram um rompimento com a mecânica Newtoniana e resultaram no ressurgimento da hipótese de um referencial absoluto, o éter luminífero, um meio sutil no qual as equações de Maxwell seriam válidas. Visando o primeiro problema, no ano de 1903 o físico Hendrick Lorentz desenvolveu as equações hoje conhecidas como transformadas de Lorentz, as quais mantinham as equações de Maxwell invariantes, impondo que a velocidade da luz não pudesse ser alcançada ou ultrapassada. As transformações de Galileu surgiam como caso especial para velocidades baixas [16].

Em 1905, Albert Einstein percebeu que os eventos eletromagnéticos que ocorrem em um sistema de coordenadas devem ocorrer da mesma forma em qualquer outro sistema se movendo com velocidade constante e postulou o princípio de Covariância, ditando que *as leis da física devem ter a mesma forma para quaisquer referenciais inerciais*. A partir deste, viu-se a necessidade de uma teoria mecânica que obedecesse as transformadas de Lorentz, e surge a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) como generalização da mecânica Newtoniana [17].

Em 1908, o físico Hermann Minkowski (Figura 2.1) forneceu uma interpretação geométrica para a TRR, argumentando que espaço e tempo não são entidades distintas, estando conectadas pelo invariante

$$ds^2 = cd\tau^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.1.1)$$



Figura 2.1: Físico Hermann Minkowski.
 Fonte: Site: Space Time Society. ¹

do qual têm-se a métrica de Minkowski, como é conhecida hoje.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

Minkowski também desenvolveu o conceito de linha de Universo (*world line*) de uma partícula, que é a trajetória desta no espaço quadri-dimensional e chamou de ponto do Universo (*world-point*) uma coordenada (ct, x, y, z) [3]. Um aspecto interessante da interpretação geométrica é a análise decorrente dos diagramas de Minkowski (Figura 2.2): na região do cone de luz passado e futuro (em azul), têm-se que $ds^2 > 0$ e este intervalo é dito do tipo-tempo e dois eventos ocorrendo nele podem ter relação causal; na região fora do cone, $ds^2 < 0$, o intervalo é do tipo-espaço e não há relação causal entre eventos; as retas que separam estas regiões ocorrem para $ds^2 = 0$ e definem intervalos tipo-luz [7].

A partir das ideias de geometrização do espaço-tempo e do princípio de

¹Disponível em: <Disponível em: <<http://www.spacetimesociety.org/minkowski.html>>
 Acesso em: setembro de 2016.

Covariância, Einstein postulou o princípio de Equivalência e iniciou uma busca por equações que generalizassem a TRR, de modo a incluir campos gravitacionais. De início, as tentativas se resumiam a englobar os campos dentro do espaço-tempo de Minkowski porém, após vários esforços em vão, surgiu a ideia de que a gravitação fosse causada por uma curvatura no espaço-tempo, causada pela presença de energia ou matéria em determinada região do Universo. Tal curvatura seria totalmente descrita pelo tensor métrico, sendo este o análogo relativístico do potencial.

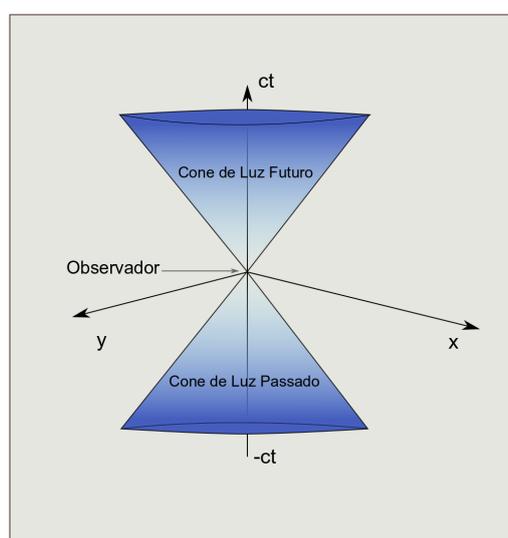


Figura 2.2: Diagrama de Minkowski.
Fonte: Autor (2016).

A base conceitual da TRG estava completa em 1913, sendo necessárias somente as equações de campo. Após diversas tentativas, em novembro de 1915 foram publicadas em sua forma correta [1, 18]. A forma final das equações foram publicadas tanto por Einstein quanto por David Hilbert, o primeiro com um atraso de cinco dias em relação ao último, o que causou uma controvérsia sobre a autoria das mesmas. Uma discussão aprofundada se dá na referência [19].

Logo após a obtenção das equações de campo, novas predições surgiram da teoria, como o avanço do periélio dos planetas e a deflexão gravitacional da luz. A primeira já havia sido observada, porém um planeta em especial -Mercúrio- sofria um avanço muito maior que o previsto pela teoria Newtoniana, sendo explicado somente com a TRG [21]. O segundo foi observado experimentalmente em 1919, mas testes com maior precisão ocorreram apenas na década de 60, corroborando fortemente para a validação da teoria [37]. Outras predições como a existência de buracos negros e de ondas gravitacionais foram verificadas recentemente e hoje a teoria é amplamente aceita, constituindo a base da cosmologia moderna [20].

2.2 O Princípio de Equivalência

O Princípio de equivalência é uma generalização do princípio da mecânica Newtoniana de que não há distinção entre massas gravitacionais e inerciais, também conhecido como formulação fraca do princípio de equivalência, o qual é suportado pelos experimentos de Eötvös e Dicke [23, 24]. Para uma formulação da forma forte toma-se o seguinte experimento de pensamento (*gedankenexperiment*): Sejam dois observadores (1 e 2), ambos dentro de elevadores sem visão do exterior. O primeiro está em repouso e sob ação de um campo gravitacional constante enquanto o segundo não está sob efeitos gravitacionais, mas é acelerado por uma força externa na direção oposta à do campo em 1, como mostra a Figura 2.3.

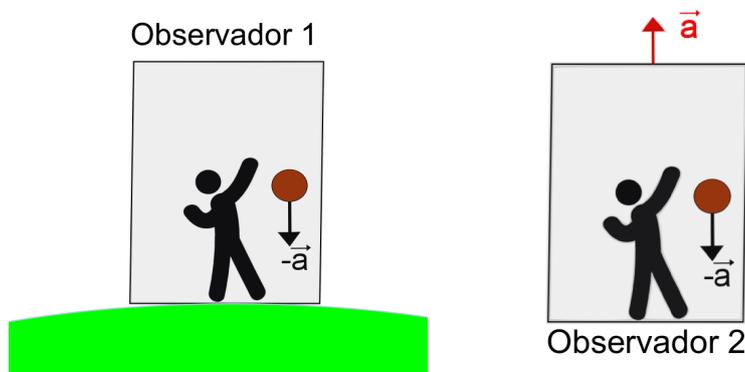


Figura 2.3: Observadores 1 e 2 descrevem o movimento de uma bola em queda livre.

Fonte: Autor (2016).

Supondo que a aceleração aplicada no observador 2 seja igual àquela propiciada pelo campo gravitacional em 1, e que ambos observadores abandonem bolas idênticas, a descrição do movimento que cada observador dará à respectiva bola será a mesma, não sendo possível distinguir o movimento devido a forças inerciais (observador 2) e aquele devido a forças gravitacionais (observador 1). O princípio da equivalência em sua forma forte pode ser escrito como: “*Forças inerciais e gravitacionais são equivalentes do ponto de vista físico, sendo impossível distinguí-las experimentalmente*”. Algumas consequências de grande importância são inferidas diretamente da formulação forte.

- Não existência de referenciais inerciais.

Em um espaço de Minkowski, a linha de Universo de uma partícula livre é uma linha reta, ou uma geodésica [24], representada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.2.1)$$

na qual τ é o tempo próprio. Como a geodésica é definida independentemente do sistema de coordenadas, a equação de movimento em um referencial qualquer é dada por (1.5.4)

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.2.2)$$

na qual os símbolos de Christoffel são interpretados como a soma das forças inerciais e gravitacionais agindo sobre a partícula. Portanto, na presença de um campo gravitacional é impossível tomar $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ em todos pontos e o espaço não pode ser descrito pela métrica de Minkowski. Surge aqui a necessidade das equações de campo da TRG, que devem descrever o tensor métrico. Determinado $g_{\mu\nu}$ é possível descrever a trajetória de um corpo.

Posta a impossibilidade de diferenciar forças gravitacionais e inerciais, conclui-se que não é possível distinguir referenciais inerciais e não-inerciais. Porém, ao se tomar uma região suficientemente pequena do espaço, a métrica pode ser aproximada localmente pela de Minkowski, diz-se que esta região define um referencial localmente inercial [15] no qual é possível utilizar quaisquer equações da TRR.

- *Desvio gravitacional da luz.*

Tomemos dois observadores no elevador, como no experimento mental anterior. Suponhamos que, no lugar de bolas em queda livre exista um pequeno buraco na parede, pelo qual entra um feixe de luz. Um observador em um elevador livre de campos e de aceleração verá a luz se movimentando em linha reta, já um observador em um referencial acelerado perceberá que a luz executa um movimento curvo (Figura 2.4). Como pelo Princípio de equivalência não é possível fazer distinção entre um observador acelerado e um observador inercial em um campo gravitacional, concluí-se que ele só é obedecido se a

luz sofrer um desvio quando sob ação de um campo gravitacional.



Figura 2.4: Feixe de luz visto de um referencial acelerado.
Fonte: Autor(2016).

Este desvio produz um efeito conhecido como lente gravitacional (Figura 2.5), o qual é causado pela deflexão da luz de uma estrela por um outro corpo massivo tal que a luminosidade da estrela é ampliada, sendo possível determinar sua massa[25].

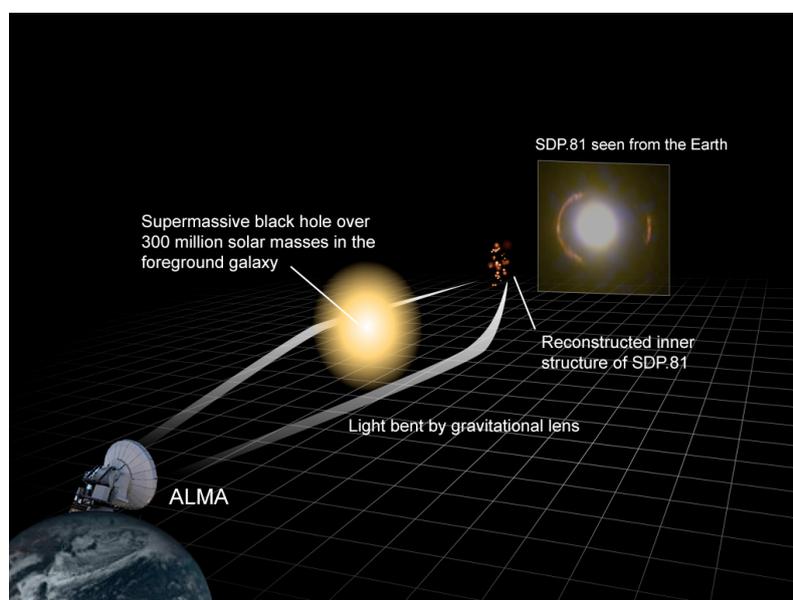


Figura 2.5: Imagem ilustrativa do efeito de lente gravitacional.
Fonte: ALMA (ESO/NAOJ/NRAO)/C. Collao/Japan Meteorological Agency.

2.3 Equações de Campo

As equações de campo da TRG podem ser derivadas pelo princípio variacional, como feito por Chandrasekhar (1972) [26] ou, de forma mais elementar como feito na referência [24]. Aqui será adotada a formulação variacional que, além de maior elegância, provê também um melhor entedimento físico da fonte de campo gravitacional e uma maneira mais fácil de englobar campos eletromagnéticos na teoria [27].

Seja \mathcal{L} a lagrangiana escalar do sistema e Ω um volume no espaço-tempo quadridimensional, a ação é definida como

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.3.1)$$

sendo g o determinante da métrica e o termo $\sqrt{-g} d^4x$ o elemento invariante de volume (o produto $\mathcal{L} \sqrt{-g}$ é denominado densidade lagrangiana). O sinal negativo na raiz se dá devido ao determinante da métrica ser sempre negativo para um espaço-tempo real [28]. Pelo princípio de mínima ação [7]

$$\delta S = 0, \quad (2.3.2)$$

Separando a lagrangiana em dois termos, um para o campo gravitacional e outro para campos externos (agindo como fontes de campo gravitacional): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_G - 2\kappa \mathcal{L}_M$, com κ sendo constante gravitacional relativística e a constante 2 adotada por conveniência. A equação (2.3.2) pode ser reescrita como

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g} (\mathcal{L}_G - 2\kappa \mathcal{L}_M) d^4x = 0. \quad (2.3.3)$$

Para o campo gravitacional, a ação é conhecida como ação de Einstein-Hilbert, e a lagrangiana é dada pelo invariante de Ricci ($\mathcal{L}_G = R$) [29]. Foi

David Hilbert quem postulou este escalar como a lagrangiana. O argumento para a escolha é: as equações de campo devem conter o tensor métrico e suas derivadas de até segunda ordem e as equações surgem de uma variação na ação, portanto, a lagrangiana deve conter derivadas de primeira ordem em $g_{\mu\nu}$ [28, 30]. Porém, é possível manipular as equações para diminuir a ordem das derivadas, sendo o escalar de curvatura uma lagrangina aparentemente aceitável. Retomando a ação

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g} (R - 2\kappa \mathcal{L}_M) d^4x = 0 \quad (2.3.4)$$

expandindo R , pode-se escrever a equação como

$$\delta \int_{\Omega} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x - \delta \int_{\Omega} 2\kappa \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (2.3.5)$$

Primeiramente, analisar-se-á o termo referente ao campo gravitacional:

$$\delta \int_{\Omega} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} \delta (R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} R_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) d^4x, \quad (2.3.6)$$

usando a definição (1.6.3) para o tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \left\{ \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \right\}, \quad (2.3.7)$$

é possível simplificar a expressão usando o seguinte lema da geometria Riemanniana: “É sempre possível escolher um sistema de coordenadas no qual todos os símbolos de Christoffel são nulos em um determinado ponto”, tal sistema de coordenadas é denominado sistema de coordenadas geodésicas [14]. Adotando tal sistema, os símbolos são nulos no ponto e, portanto as

derivadas covariantes condizem com as parciais

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}). \quad (2.3.8)$$

Note que esta é uma equação tensorial e, portanto deve ser válida em qualquer sistema de coordenadas. Como as derivadas covariantes da métrica são sempre nulas

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \{ \nabla_\rho (g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) \}, \quad (2.3.9)$$

que pode ser reescrita fazendo uma troca de índices

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \nabla_\alpha \{ g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} \}. \quad (2.3.10)$$

Nesta, o termo a ser derivado é um tensor contravariante de ordem 1. Sabendo que a expressão do Laplaciano pode ser escrita como ²

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g}V^\mu) \quad (2.3.11)$$

a integral de ação toma a forma

$$\int_\Omega \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) d^4x \quad (2.3.12)$$

usando o teorema de Gauss, e lembrando que os extremos devem ser mantidos fixos, a integral deve ser nula, ou seja,

$$\int_\Omega \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = 0. \quad (2.3.13)$$

²Apêndice B

Agora é necessário analisar o termo com a métrica e o determinante

$$\int_{\Omega} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int_{\Omega} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x + \int_{\Omega} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} d^4x \quad (2.3.14)$$

o segundo termo pode ser escrito como [14]

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.3.15)$$

Quando substituído na expressão (2.3.5), retorna

$$\int_{\Omega} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.3.16)$$

Retomando a ação para o campo gravitacional

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_G \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.3.17)$$

no caso dos campos externos serem nulos ($\mathcal{L}_M = 0$), como $\delta g^{\mu\nu}$ é livre para variar e $\sqrt{-g} \neq 0$, esta equação traz as equações de campo no vácuo em forma covariante:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.18)$$

Caso haja campos externos é necessário desenvolver o termo com \mathcal{L}_M . Supondo que a lagrangiana dependa da métrica e de sua derivada primeira, usando por simplicidade, a notação $g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = \partial g^{\mu\nu} / \partial x^\alpha$

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_M d^4x = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) \delta g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} \right\} d^4x \quad (2.3.19)$$

e notando que

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} [\sqrt{-g}\mathcal{L}_M] \delta g^{\mu\nu},\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} (\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \delta g^{\mu\nu} \right] - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.3.20)$$

a integral anterior pode ser reescrita como

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_M d^4x = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} (\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.3.21)$$

pois o primeiro termo da equação (2.3.20) se anula ao usar o teorema de Gauss na integral. Definindo o tensor energia-momento como [14]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu},\alpha} (\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right] \right\}, \quad (2.3.22)$$

tal que

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g}\mathcal{L}_M d^4x = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.3.23)$$

Portanto, a equação inicial para a ação é escrita como

$$\delta \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (2.3.24)$$

a partir da qual as equações de campo da TRG são obtidas em forma covariante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.3.25)$$

Uma forma alternativa para as equações acima podem ser obtidas multiplicando-as pelo tensor recíproco $g^{\mu\nu}$

$$R = -\kappa T \quad (2.3.26)$$

que, quando substituindo nas equações iniciais retornam

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (2.3.27)$$

A priori não há indícios de que estas equações sejam fisicamente aceitáveis. Tomar-se-á o limite de $v \ll c$ para verificar se estas de fato retornam a equação de Poisson [24]

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.3.28)$$

sendo G a constante Gravitacional, ρ a densidade do corpo e Φ o potencial gravitacional. Também se busca impor uma limitação na constante κ .

É interessante mencionar que uma das soluções das equações de Einstein, a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) prevê um universo em expansão ou em contração [31]. Mas Albert Einstein, como a grande maioria das pessoas da época, era um defensor do Universo estático e eterno. Ao surgir o confronto de previsão e crença, a última foi mais forte e, para que a solução retornasse um universo estático, adicionou outro termo [32]. Com este, as equações tomam a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.3.29)$$

com Λ da ordem de 10^{-12} e denominada constante cosmológica. Mas a solução desta equação não era estável e, em 1929 foi observado por Edwin Hubble que o universo está, de fato, em expansão, e a constante foi retirada. De acordo com Einstein, este foi o maior erro de sua vida. Apesar disto, após algumas décadas a constante foi retomada no estudo de teorias inflacionárias e na teoria quântica de campos [33].

2.4 Limite Newtoniano

O limite Newtoniano assume uma aproximação de campos fracos, com o campo tendo como fonte um fluido perfeito [34]. Também assume-se que a métrica possa ser escrita como a métrica de Minkowski somada a uma pequena perturbação $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.4.1)$$

e que, como $v \ll c$, o elemento de linha possa ser aproximado por

$$ds^2 \approx g_{00}c^2 dt^2. \quad (2.4.2)$$

Primeiramente, verifiquemos a equação de movimento da partícula em relação ao parâmetro $x^0 = ct$

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\omega\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\omega = -\frac{d^2 x^0/ds^2}{(dx^0/ds)^2} x^\mu \quad (2.4.3)$$

com $\dot{x}^\nu = dx^\nu/dx^0$. Para $\mu = 0$, obtém-se a identidade

$$\frac{d^2 x^0/ds^2}{(dx^0/ds)^2} = -\Gamma^0_{\omega\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\omega. \quad (2.4.4)$$

Esta, se substituída na equação inicial, pode ser omitida ao se notar que $\Gamma^\nu_{\omega\lambda} \gg \Gamma^0_{\omega\lambda} \frac{1}{c} \frac{dx^\nu}{dt}$. Convencionando que índices latinos somam somente sobre componentes espaciais, isto é, $i = 1, 2, 3$:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{\omega\lambda} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\omega \approx 0 \quad (2.4.5)$$

e, como $\dot{x}^k \ll \dot{x}^0$

$$\ddot{x}^i \approx -\Gamma^i_{00}. \quad (2.4.6)$$

No limite quasi-estático, os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^i{}_{00} = -\frac{1}{2}g^{i\lambda}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \quad (2.4.7)$$

notando que $g^{\lambda i} \approx -\delta^{\lambda i}$, então

$$\Gamma^i{}_{00} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (2.4.8)$$

Agora, usando as equações de campo na forma (2.3.27), e sabendo que o tensor energia-momento para um fluido perfeito é dado por $T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu + \eta_{\mu\nu}p$, no qual ρ é a densidade, p a pressão e u_μ a velocidade [34], no limite Newtoniano $T_{\mu\nu} \approx T_{00} = \rho c^2$:

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2}\rho c^2. \quad (2.4.9)$$

Usando a definição do tensor de Ricci, e usando o resultado obtido para os símbolos de Christoffel:

$$R_{00} \approx \frac{\partial \Gamma^\lambda{}_{00}}{\partial x^\lambda} \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^k \partial x^k} \quad (2.4.10)$$

portanto

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^k \partial x^k} = \kappa \rho c^2. \quad (2.4.11)$$

A derivada segunda no índice k nada mais é que o laplaciano. Lembrando que na mecânica Newtoniana o potencial é descrito pela equação de Poisson (2.3.28) e que $g_{00} = 1 + h_{00}$, assumindo que

$$h_{00} = \frac{2}{c^2}\Phi \quad (2.4.12)$$

então

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^k} = \frac{\kappa}{2} c^4 \rho \quad (2.4.13)$$

e o limite Newtoniano é obtido com a imposição que

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.4.14)$$

e as equações de campo são escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.4.15)$$

Portanto, verificou-se que a lagrangiana escolhida era fisicamente aceitável e que, deduzidas as equações de campo, estas retornavam o limite Newtoniano. Esta verificação é essencial para a aceitação da teoria, dado o sucesso experimental da mecânica Newtoniana nos séculos que precederam a TRG. Debruçemo-nos agora sobre as previsões feitas pela solução de Schwarzschild.

Capítulo 3

Solução de Schwarzschild

Este capítulo tratará da solução das equações de campo para um corpo esfericamente simétrico no vácuo, denominada solução de Schwarzschild. Após determinada a métrica serão tratadas quantitativamente algumas previsões da solução.

3.1 A Métrica

As equações de campo são não-lineares, possuindo soluções exatas de difícil obtenção. Algumas das soluções conhecidas são as já mencionadas de Schwarzschild e FLRW. Sendo a primeira, o caso mais simples a ser pensado, representando o campo gravitacional de um ponto material no vácuo. A Figura 3.1 visa dar um entendimento geométrico desta curvatura em uma analogia com um espaço bidimensional. A equação a ser resolvida é

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{3.1.1}$$

A solução da equação acima foi obtida pela primeira vez por Karl Schwarzschild¹ em 1916 e é uma boa aproximação para tratar do campo gravitacional de estrelas [35].

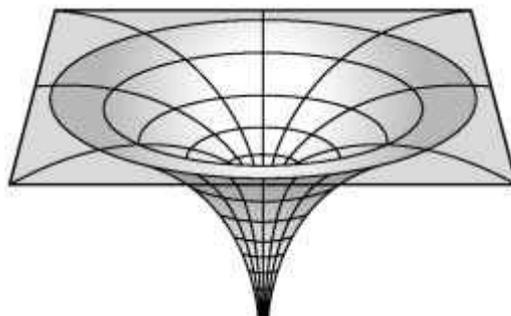


Figura 3.1: Um análogo bidimensional do espaço-tempo de Schwarzschild.
Fonte: Site: What When How. ²

Tomando (t, r, θ, ϕ) como as coordenadas que descrevem o espaço-tempo (denominadas coordenadas de Schwarzschild), sendo θ e ϕ coordenadas polares, t uma coordenada tipo-tempo e r uma coordenada radial. Assume-se que

- O campo é estático: $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$;
- A solução é espacialmente simétrica com respeito a origem do sistema de coordenadas;
- A solução é assintoticamente plana para $r \rightarrow \infty$.

Uma métrica que satisfaz os requisitos impostos [34] é do tipo

$$ds^2 = F(r)dt^2 - G(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (3.1.2)$$

¹Karl Schwarzschild foi um físico alemão que além de TRG, participou de estudos em Mecânica Quântica e Espectroscopia. Viveu entre 1873 e 1916.

²Disponível em: <<http://what-when-how.com/string-theory/stretching-the-fabric-of-space-time-into-a-black-hole-string-theory/>> Acesso em: outubro de 2016.

na qual $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Se o campo é assintoticamente plano, deve-se ter como condições de contorno

$$\begin{cases} F(r \rightarrow \infty) = c^2, \\ G(r \rightarrow \infty) = 1. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

As equações de campo deverão determinar as funções F e G . Primeiramente é necessário analisar os símbolos de Christoffel. Os componentes não-nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{F'}{2F}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{F'}{2G}, \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{G'}{2G}, & \Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{G}, \\ \Gamma^1_{33} &= -\frac{r \sin^2 \theta}{G}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^3_{23} &= \cot \theta. \end{aligned}$$

Partindo da equação (1.6.3), o tensor de Ricci possui os termos não-diagonais nulos. Já os diagonais são

$$R_{00} = -\frac{F''}{2G} + \frac{F'}{4G} \left(\frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} \right) - \frac{F'}{rG} = 0, \quad (3.1.4)$$

$$R_{11} = \frac{F''}{2F} - \frac{F'}{4F} \left(\frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} \right) - \frac{G'}{rG} = 0, \quad (3.1.5)$$

$$R_{22} = \frac{1}{G} - 1 + \frac{r}{2G} \left(\frac{F'}{F} - \frac{G'}{G} \right) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta = 0, \quad (3.1.7)$$

resultando em três equações independentes. Tomando as duas primeiras e,

lembrando das condições de contorno em (3.1.3):

$$\frac{F'}{F} + \frac{G'}{G} = 0 \implies \frac{d}{dr} (FG) = 0 \implies FG = c^2 \quad (3.1.8)$$

que, se substituída em (3.1.7), retorna

$$\frac{dF}{c^2 - F} = \frac{dr}{r}. \quad (3.1.9)$$

Cuja solução é

$$F(r) = c^2 \left(1 + \frac{k}{r}\right), \quad (3.1.10)$$

$$G(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}. \quad (3.1.11)$$

Substituídas as equações (3.1.10) e (3.1.11) na métrica de Schwarzschild (3.1.2), levam ao resultado

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{k}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 + \frac{k}{r}} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.1.12)$$

sendo necessário determinar a constante k . Tomando $r \rightarrow \infty$, como a solução é assintoticamente plana, a aproximação de campos fracos dita que $g_{00} \rightarrow 1 + \frac{2}{c^2}\Phi$ com $\Phi = -GM/r$, portanto $k = -\frac{2GM}{c^2}$ e

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.1.13)$$

Nota-se que se $r = \frac{2GM}{c^2}$ a solução apresenta uma singularidade, com $g_{00} \rightarrow 0$ e $g_{11} \rightarrow \infty$. Tal coordenada é determinada raio de Schwarzschild (r_S) e, para $r \leq r_S$ as coordenadas (t, r, θ, ϕ) deixam de ser válidas, visto que a métrica teria um sinal trocado - a coordenada tipo tempo se tornaria tipo espaço e a coordenada radial, tipo tempo. Porém, o determinante do ten-

sor métrico em r_S é $g = -r^4 \sin^2 \theta$, não apresentando singularidade alguma, portanto, esta não deve ser uma propriedade intrínseca da solução (como em $r = 0$) mas sim das coordenadas utilizadas [14]. Um tipo de transformação de coordenadas que faz com que a singularidade desapareça são as de Eddington-Finkelstein, ou também as de Lemaître, como será visto algumas seções adiante.

3.2 Geodésicas e Órbitas

Definida a métrica de Schwarzschild, é de interesse físico determinar o movimento de uma partícula teste neste espaço. Seja a equação da geodésica (1.5.3), considerando o tempo próprio τ como parâmetro e definindo que $\dot{x} = \partial x / \partial \tau$, a lagrangiana \mathcal{L} é dada por

$$\mathcal{L} = c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) \quad (3.2.1)$$

da qual se obtém quatro equações geodésicas, das quais duas retornam constantes de movimento (E e L) relacionadas a energia e momento angular [2]. Assumindo que o movimento ocorra no plano $\theta = \pi/2$, as equações a serem resolvidas são dadas por:

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + \frac{r_S}{2r^2} c^2 \dot{t}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t} = E, \quad (3.2.3)$$

$$r^2 \dot{\phi} = L. \quad (3.2.4)$$

Como o parâmetro assumido é o tempo próprio, notando que $ds^2 = c^2 d\tau^2$, então $\mathcal{L} = c^2$. Usando as constantes de movimento, a equação inicial é

reescrita como

$$c^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} E^2 c^2 - \frac{L^2}{r^2} - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (3.2.5)$$

que pode ser facilmente reescrita como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Phi_{eff}(r) = \varepsilon, \quad (3.2.6)$$

na qual $\varepsilon = \frac{c^2}{2}(E^2 - 1)$ e

$$\Phi_{eff} = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3}. \quad (3.2.7)$$

Sendo Φ_{eff} o potencial efetivo, que difere daquele da mecânica Newtoniana para uma força central apenas pelo termo com $1/r^3$, que é uma correção relativística e implica em algumas conclusões diferentes das Newtonianas. Primeiramente, o efeito assintótico é invertido, na teoria newtoniana $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{eff} = -\infty$, já na relativística, $\lim_{r \rightarrow 0} \Phi_{eff} = \infty$, como pode ser visto na Figura 3.2.

Também, na mecânica Newtoniana os pontos de equilíbrio existem para qualquer configuração adotada de parâmetros, sendo sempre possível obter órbitas estáveis. Enquanto que na TRG ao se calcular os pontos de equilíbrio por

$$\left. \frac{d\Phi_{eff}}{dr} \right|_{r=r_0} = 0, \quad (3.2.8)$$

obtém-se

$$r_0 = \frac{L^2}{2GM} \left[1 \pm \left(1 - \frac{12G^2 M^2}{c^2 L^2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.2.9)$$

sendo visível que só há órbitas estáveis se $L^2 \geq 12G^2 M^2 / c^2$ e também, que o limite clássico é obtido (Figura 3.2) para $L^2 \gg 12G^2 M^2 / c^2$.

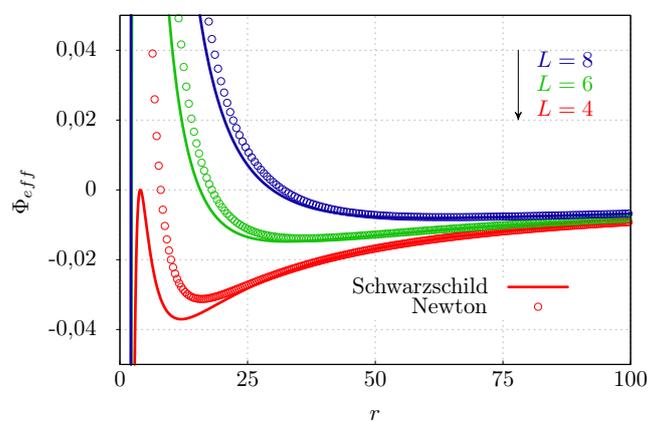


Figura 3.2: Comparação dos potenciais clássicos e relativísticos variando o parâmetro L e assumindo $GM = 1$ e $c = 1$.

Fonte: Autor (2016).

A diferença nas órbitas clássicas e relativísticas podem ser vistas nas Figuras 3.3, 3.4, 3.5. Tais imagens foram feitas em simulações usando o método de Euler ³ para diferentes valores de L .

³Apêndice C

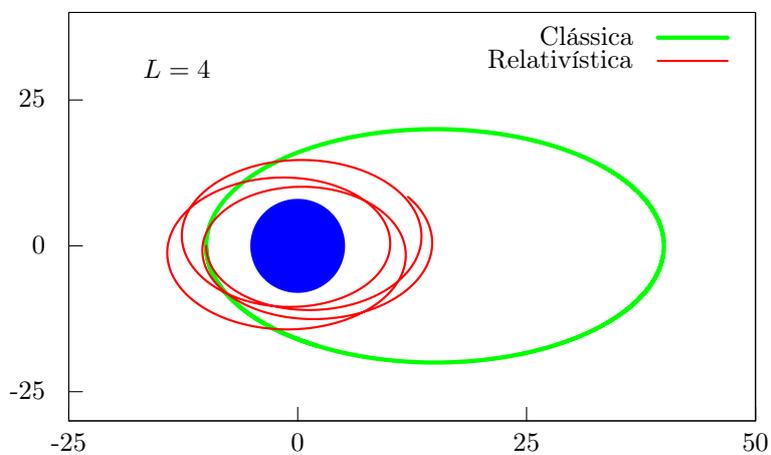


Figura 3.3: Comparação das órbitas clássicas e Relativísticas adotando $GM = 1$, $c = 1$ e $L = 4$.
 Fonte: Autor (2016).

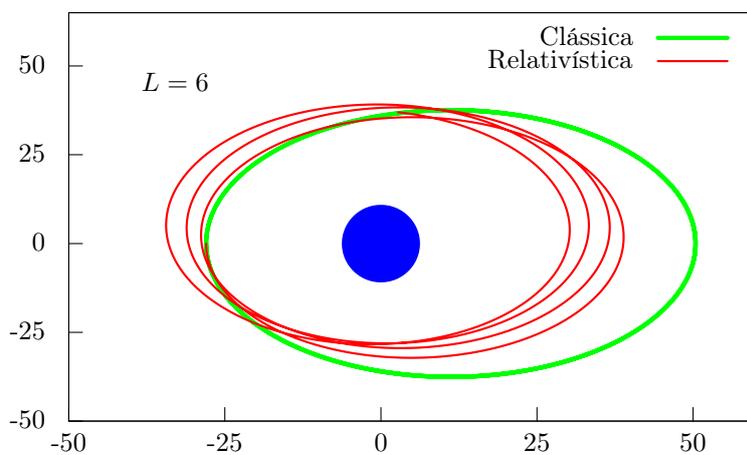


Figura 3.4: Comparação das órbitas clássicas e Relativísticas adotando $GM = 1$, $c = 1$ e $L = 6$.
 Fonte: Autor (2016).

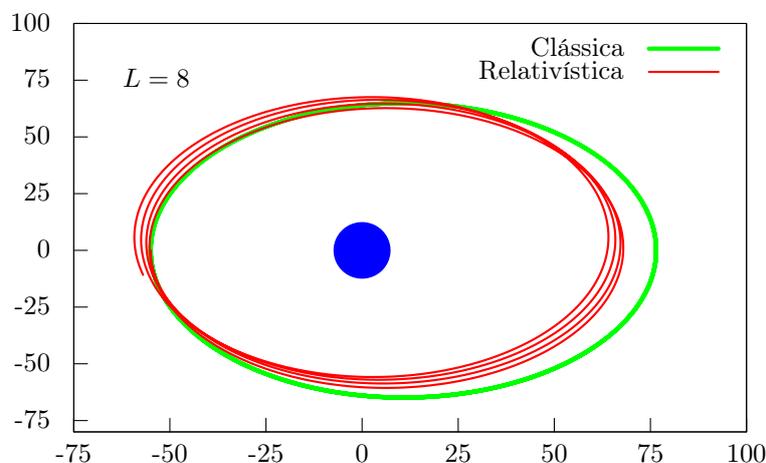


Figura 3.5: Comparação das órbitas clássicas e Relativísticas adotando $GM = 1$, $c = 1$ e $L = 8$.
Fonte: Autor (2016).

Verifica-se que para L muito pequeno a órbita difere radicalmente da predição clássica, mas conforme este cresce as órbitas se tornam próximas, como esperado. Também é possível visualizar que não há órbitas ligadas e o já mencionado avanço no periélio, que será discutido na próxima seção.

3.3 O Periélio de Mercúrio

O periélio é o ponto mais próximo do Sol em uma órbita, e todos planetas sofrem um desvio neste, antes pensado que devido à influência gravitacional dos outros planetas. A Figura 3.6 exemplifica como se dá o avanço do periélio. O de Mercúrio é o mais conhecido, pois apresenta uma anomalia: seu desvio era aproximadamente o dobro do previsto pelos físicos. Com o advento da TRG verificou-se que o avanço no periélio ocorre mesmo sem perturbações externas e, sendo Mercúrio o planeta mais próximo do sol, seu avanço deveria ser maior. A verificação de que a previsão teórica estava de acordo com os dados experimentais foi um dos primeiros testes a corroborarem fortemente

com a teoria. Aqui será determinado qual o avanço do periélio tomando como base as referências [2, 34, 36].

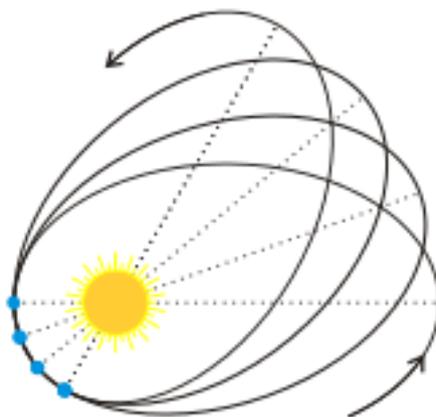


Figura 3.6: Representação do Periélio de um planeta.
Fonte: Site: Wikipedia ⁴.

Na mecânica Clássica, o movimento de um corpo em órbita é descrito por uma elipse fechada, dada pela equação

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi), \quad (3.3.1)$$

na qual e é a excentricidade, ϕ é o azimute, G a constante gravitacional, M a massa do corpo que gera o campo gravitacional e L o momento angular do corpo em órbita. Para determinar a análoga relativística usa-se as equações (3.2.4) e (3.2.6), das quais é obtido

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 \left(1 + \frac{c^2 r^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{c^2 E^2}{L^2} r^4 = 0. \quad (3.3.2)$$

⁴Disponível em: < https://en.wikipedia.org/wiki/apsidal_precession > Acesso em: outubro de 2016.

A qual, com a mudança de variável $u = L^2/(GMr)$ pode ser escrita como

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{2G^2M^2}{L^2c^2}u^3 + u^2 - 2u = \frac{2L^2\varepsilon}{G^2M^2} \quad (3.3.3)$$

que, se derivada em ϕ , é:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} - \frac{3G^2M^2}{L^2c^2}u^2 + u - 1 = 0. \quad (3.3.4)$$

Notando que em $u = 1$ tem-se o ponto de retorno clássico, a equação (3.3.4) pode ser tratada como uma perturbação na equação Newtoniana. Se u_0 corresponde à solução Newtoniana e u_p é uma pequena perturbação

$$u = u_0 + u_p. \quad (3.3.5)$$

Desprezando os termos quadráticos em u_p e os cruzados, pode-se separar (3.3.4) em duas equações. Para o termo u_0 tem-se

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 - 1 = 0, \quad (3.3.6)$$

que tem como solução a equação da elipse (3.3.1). Já para o termo perturbativo u_p :

$$\frac{d^2u_p}{d\phi^2} + u_p = \frac{3G^2M^2}{L^2c^2}u_0^2, \quad (3.3.7)$$

que, quando substituída a solução para u_0 , possui como uma possível solução

$$u_p = \frac{3G^2M^2}{L^2c^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + e\phi \sin \phi - \frac{1}{6}e^2 \cos(2\phi) \right\}. \quad (3.3.8)$$

Notando que o primeiro termo é uma constante e o terceiro oscila em torno da origem, estes podem ser desprezados no cálculo do avanço do periélio.

O segundo termo, que é cumulativo a cada órbita, deve ser considerado [2].

Têm-se como resultado

$$u = 1 + e \cos \phi + 3e \frac{G^2 M^2}{L^2 c^2} \phi \sin \phi. \quad (3.3.9)$$

Portanto, a solução pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2} \{1 + e \cos [\phi (1 - \sigma)]\} \quad (3.3.10)$$

com $\sigma = 3G^2 M^2 / L^2 c^2$. A forma anterior é retomada expandindo o coseno em torno de σ .

O período da órbita pode ser aproximado por uma aproximação binomial como

$$T \approx 2\pi \left(1 + \frac{3G^2 M^2}{L^2 c^2} \right) \quad (3.3.11)$$

portanto, o avanço do periélio é dado pela expressão

$$\delta\phi = \frac{6\pi G^2 M^2}{L^2 c^2}. \quad (3.3.12)$$

Para substituir o momento angular L , compara-se (3.3.1) com a equação da elipse

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \phi}{a(1 - e^2)} \quad (3.3.13)$$

na qual a é o semieixo maior. Podemos aproximar $L^2 \approx GMa(1 - e^2)$, tal que

$$\delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (3.3.14)$$

Usando os valores tabulados pela agência *Nasa*⁵, para o planeta Mercúrio

⁵Disponível em: <<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>> Acesso em outubro de 2016.

a precessão do periélio é

$$\delta\phi \approx 0.103''/\text{órbita} \approx 43''/\text{século} \quad (3.3.15)$$

Apesar de ser o maior avanço de periélio do sistema solar, este valor ainda é consideravelmente baixo, isto representa que a cada século há um avanço de 43 segundos de arco. Apesar do valor baixo, a medida está de acordo com o valor determinado experimentalmente [20].

3.4 Desvio Gravitacional da Luz

Como já discutido anteriormente, uma das implicações do princípio de equivalência é o desvio gravitacional da luz. Nesta seção este desvio será tratado de forma quantitativa dentro do espaço de Schwarzschild. Supondo um feixe de luz que passa nos arredores de uma estrela, a deflexão sofrida por este pode ser determinado fazendo uso das equações geodésicas. Feixes de luz percorrem geodésicas nulas, que nas teorias relativísticas também são chamadas geodésicas tipo-luz, implicando que a equação 3.2.1 não possui mais valor c^2 , mas valor nulo. Será usado um parâmetro λ , visto que o tempo próprio não é válido. Usando as equações (3.2.3) e (3.2.4), pode-se escrever

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{L^2}{r^2} - E^2 c^2 = 0 \quad (3.4.1)$$

que pode ser colocada em função de ϕ :

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 - \frac{E^2 c^2}{L^2} r^4 = 0. \quad (3.4.2)$$

Pimeiramente, admitindo que seja possível uma órbita fechada circular para o feixe ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$), procura-se sob quais condições isto é satisfeito. Com

auxílio da equação acima e de (3.2.2)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{c^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \dot{t}^2, \quad (3.4.3)$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{GM}{r^3} \dot{t}^2. \quad (3.4.4)$$

Igualando (3.4.3) e (3.4.4), verifica-se que a luz pode percorrer trajetórias circulares se, e somente se, $r = 3GM/c^2$. Como a condição é extremamente restritiva, uma perturbação qualquer fará com que o feixe saia de órbita.

Em seguida, vamos analisar a deflexão que sofre um feixe passando próximo a um corpo massivo. Tomando a equação (3.4.2) escrita em função da variável $u = L^2/(GMr)$, e derivando-a em ϕ :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3G^2 M^2}{c^2 L^2} u^2. \quad (3.4.5)$$

No caso em que $M = 0$, a equação acima tem como solução

$$u = u_0 \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.4.6)$$

que resulta em uma reta no espaço. Como é esperado que, para $M \neq 0$, o desvio seja pequeno [24], vamos aproximar o termo de segunda ordem pela equação acima, tal que

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3G^2 M^2}{c^2 L^2} u_0^2 \cos^2(\phi - \phi_0). \quad (3.4.7)$$

Uma das possíveis soluções desta é dada por

$$u = u_0^2 \frac{G^2 M^2}{c^2 L^2} [1 + \sin^2(\phi - \phi_0)]. \quad (3.4.8)$$

Sem perda de generalidade, supondo que $\phi_0 = 0$, a solução geral para $1/r$ é a soma da última equação com aquela para $M = 0$, podendo ser escrita como

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \phi + \frac{3GM}{2r_0^2 c^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right]. \quad (3.4.9)$$

Supondo que o feixe passa próximo ao corpo gerador de campo gravitacional e segue para $r \rightarrow \infty$: para o caso em que $M = 0$, $\phi = \pm\pi/2$ e o feixe não sofre deflexão; no caso $M \neq 0$, se $\phi = \pm\pi/2 + \alpha$, a solução pode ser escrita como

$$-\frac{1}{r_0} \sin \alpha + \frac{GM}{r_0^2 c^2} (1 + \cos^2 \alpha) = 0 \quad (3.4.10)$$

aproximando as funções senóides por série de Taylor em primeira ordem, obtém-se o valor de α :

$$\alpha = \frac{2GM}{r_0 c^2} \quad (3.4.11)$$

Mas pela equação (3.4.9) vê-se que o desvio é duas vezes este valor, portanto

$$\delta\phi = \frac{4GM}{r_0 c^2}. \quad (3.4.12)$$

Para se ter noção da ordem de grandeza deste desvio, consideremos o Sol. O Sol tem raio de aproximadamente $6,967 \times 10^8$ m, supondo que $r_0 = 7 \times 10^8$ m, então

$$\delta\phi = 8,423 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 1.74'' \quad (3.4.13)$$

O primeiro teste experimental a medir este desvio da luz foi feito em 1919 por Sir Eddington em Sobral, no Ceará, Brasil. No experimento foram utilizadas dois tipos de lentes, uma detectando $1,98''$, e a outra $0,93''$. Em 1979 testes de maior precisão foram feitos, corroborando fortemente com a TRG [37,38]. Atualmente, o desvio é a base da técnica de lente gravitacional, já mencionada. Esta é usada na determinação da distribuição de massa de

galáxias distantes [39].

3.5 Coordenadas de Lemaître

Dada a necessidade de adotar um novo sistema de coordenadas para descrever o espaço-tempo para $r \leq r_S$, nesta seção tais coordenadas serão apresentadas. Antes disto, será apresentado um argumento mais concreto da necessidade de novas coordenadas. Seja um raio de luz que se move radialmente em direção a um corpo - fonte de campo gravitacional. Têm-se $ds^2 = d\Omega^2 = 0$ e, portanto

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right). \quad (3.5.1)$$

Supondo que o fóton está em $r_0 > r_S$ em um tempo inicial t_0 :

$$t = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_S}{c} \ln \left(\frac{r_0 - r_S}{r - r_S} \right) + t_0. \quad (3.5.2)$$

Note que, se $r \rightarrow r_S$, então $t \rightarrow \infty$, sugerindo que a luz se aproxima de r_S , mas nunca o alcança, conclusão claramente absurda. A solução para tal declaração é que ela reflete a impossibilidade de descrever o espaço-tempo em $r \leq r_S$ usando as coordenadas de Schwarzschild. Ao mesmo tempo, é evidente na métrica que para $r < r_S$, a coordenada temporal é tipo espaço e a radial é tipo tempo, não havendo partículas estacionárias [40].

Quando estas ideias primeiramente vieram a tona, havia uma crença de que não houvessem corpos cujos raios fossem da ordem do próprio raio de Schwarzschild, contudo, estudos mostraram que estrelas de Nêutrons podem colapsar e formar corpos com raio menor que o de Schwarzschild. Tais objetos são denominados Buracos Negros [41].

Em $r = r_S$ define-se a esfera de Schwarzschild. Para extrair alguma propriedade do interior da esfera há várias transformações de coordenadas possíveis, aqui serão usadas as coordenadas de Lemaître (T, R) , que formam um sistema síncrono ($g_{00} = 1$) [28]. São definidas como:

$$cT = ct + \int \frac{F(r)dr}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}, \quad (3.5.3)$$

$$R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) F(r)}, \quad (3.5.4)$$

tal que

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_S}{r}}{1 - F(R)^2} (c^2 dT^2 - F(R)^2 dR^2) - r^2 d\Omega^2. \quad (3.5.5)$$

Pode-se tomar $F(r) = \sqrt{r_S/r}$, tal que a métrica de Schwarzschild, nas coordenadas de Lemaître seja

$$ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_S} (R - cT)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2r_S} (R - cT)\right]^{4/3} d\Omega^2. \quad (3.5.6)$$

A partir das definições de R e T , obtém-se que

$$r = \left[\frac{3}{2} (R - cT)\right]^{2/3} r_S^{1/3}. \quad (3.5.7)$$

Notando que para $r = r_S$, têm-se $r_S = \frac{3}{2} (R - cT)$ e, portanto, a singularidade é eliminada.

Nestas novas coordenadas, supondo novamente um raio de luz se movendo na direção radial e, usando as relações obtidas para r e r_S , têm-se

$$dR = \pm \sqrt{\frac{r_S}{r}} cdT. \quad (3.5.8)$$

que, quando substituída nas definições de R e T :

$$dr = \left(\pm 1 - \sqrt{\frac{r_S}{r}} \right) cdT. \quad (3.5.9)$$

Portanto, nota-se que para raios menores que o de Schwarzschild ($r < r_S$) é necessário que $dr < 0$, e o único movimento possível para o raio de luz é o decrescente ($r \rightarrow 0$). Sendo este o motivo da nomenclatura buraco negro [41].

Para exemplificar de maneira geométrica, faz-se uso de um diagrama de cT por R (Figura 3.7): se r é constante, então $R - cT$ também será, produzindo um conjunto de retas. Pelas inequações acima fica evidente que retas com $r > r_S$ estão dentro do cone definido em $r = r_S$ (Ponto B), raios de luz nesta região conseguem escapar para $r \rightarrow \infty$; no entanto aquelas com $r < r_S$ estão fora do cone (Ponto A), e fadadas a ir em direção à singularidade.

$$\begin{cases} |c \frac{dT}{dR}| < 1, & r > r_S \\ |c \frac{dT}{dR}| > 1, & r < r_S. \end{cases} \quad (3.5.10)$$

Dos últimos parágrafos conclui-se que não é possível que uma partícula dentro do raio de Schwarzschild cruze a superfície em $r = r_S$, que, por este motivo, também é chamada horizonte de eventos [24]. Esta prisão de partículas impossibilita a verificação do comportamento de partículas na região interior à superfície de Schwarzschild.

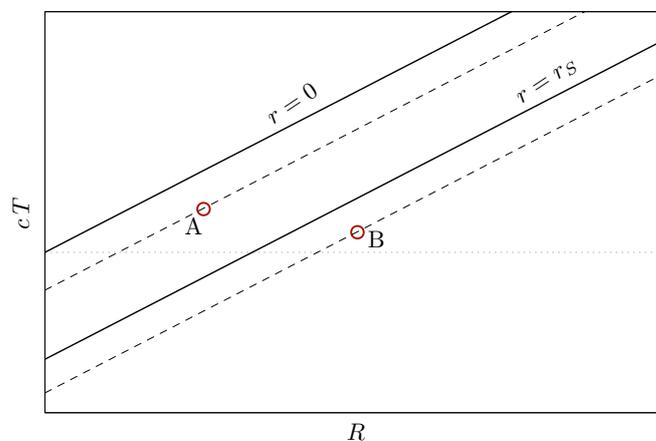


Figura 3.7: Diagrama de cT por R .
Fonte: Autor(2016).

Os buracos negros ainda são alvo de muitas controvérsias e pesquisa, sendo importante ressaltar que o buraco negro de Schwarzschild é considerado o mais simples, visto que não há rotação ou carga. Há aproximadamente 50 anos teorizou-se, a partir do uso de um espaço-tempo curvo dentro da teoria quântica de campos, que deve haver radiação (radiação Hawking) sendo expulsa do horizonte de eventos de buracos negros. Apesar de ainda não haver comprovações experimentais. Este é um dos motivos pelo qual se busca uma unificação das teorias quânticas e gravitacionais: um maior entendimento do comportamento de buracos negros. É finalizada esta exposição da TRG com a expectativa de que, futuramente, áreas como a citada acima possam ser pesquisadas.

Considerações Finais

Neste trabalho estabeleceu-se uma base matemática e conceitual da Teoria da Relatividade Geral, proporcionando o conhecimento necessário para o início da pesquisa em um leque de áreas. Algumas áreas que podem ser citadas neste quesito são: a gravitação quântica e a teoria de cordas, que visam unificar a TRG com teorias quânticas, visto que há problemas na conciliação destas ao se tratar da evolução de buracos negros ou de teoremas de singularidade [5, 42]; a emissão de radiação por buracos negros, conhecida por radiação Hawking, que surge ao tomar a teoria quântica de campos em espaços curvos [2]; teorias $f(R)$, ou teorias de gravitação modificadas, que visam modificar a ação de Einstein-Hilbert, resultando em termos invariantes de curvatura de ordem maior, que são relevantes no estudo de eventos próximos a singularidade do buraco negro e do Universo primitivo [22, 43]; entre outras.

Referências Bibliográficas

- [1] NORTON, J. How Einstein found his field equations: 1912-1915. *Historical studies in the physical sciences*, v. 14, n. 2, p. 253–316, 1984.
- [2] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An introduction to general relativity*. 1. ed. San Francisco: Addison-Wesley Professional, 2003. 513 p.
- [3] MINKOWSKI, H. Space and time. In: *The Principle of Relativity*. EUA: Dover Publications, Inc, 1952. p. 73–91.
- [4] WEATHERALL, J. O. Inertial motion, explanation, and the foundations of classical spacetime theories. Acesso em: novembro de 2016. 2012, Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1206.2980>>.
- [5] KOX, A. J.; EISENSTAEDT, J. *The Universe of General Relativity*. Boston: Birkhäuser, 2006. 383 p.
- [6] BERTI, E. et al. Testing general relativity with present and future astrophysical observations. *Classical and Quantum Gravity*, v. 32, n. 24, p. 1–179, 2015.
- [7] LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 396 p.
- [8] GRIFFITHS, D. J.; COLLEGE, R. *Introduction to Electrodynamics*. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 628 p.
- [9] BISHOP, R. L.; GOLDBERG, S. I. *Tensor Analysis on Manifolds*. New York: Dover Publications, Inc, 2012. 288 p.
- [10] MEDRANO, R. A. *Campos vetoriais, espaços lineares e tensores na física*. São José dos Campos, SP: Transtec editorial, 1994. 355 p.
- [11] SYNGE, J. L.; SCHILD, A. *Tensor calculus*. New York: Dover Publications, Inc, 1969. 336 p.

- [12] DAS, A. *Tensors: The mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. New York: Springer Science & Business Media, 2007. 290 p.
- [13] CATTANI, M. Dedução das equações da teoria de gravitação de Einstein em um curso de graduação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 1, p. 27–37, Março 1998.
- [14] CARMELI, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1982. 670 p.
- [15] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Vol. 4: Ótica, relatividade e física quântica*. 1. ed. São Paulo: Editora Blücher, 1998. 437 p.
- [16] LORENTZ, H. A. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light. In: *The Principle of Relativity*. EUA: Dover Publications, Inc, 1952. p. 9–34.
- [17] EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. In: *The Principle of Relativity*. EUA: Dover Publications, Inc, 1952. p. 35–65.
- [18] EINSTEIN, A. The foundations of the general theory of relativity. In: *The Principle of Relativity*. EUA: Dover Publications, Inc, 1952. p. 100–164.
- [19] EARMAN, J.; GLYMOUR, C. Einstein and Hilbert: Two months in the history of general relativity. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 19, n. 3, p. 291–308, 1978.
- [20] WILL, C. M. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, v. 17, n. 4, 2014. Acesso em: agosto de 2016. Disponível em: <<http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4>>.
- [21] VANKOV, A. A. General Relativity problem of Mercury’s perihelion advance revisited. Acesso em: dezembro de 2016. 2010, Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1008.1811>>.
- [22] SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ Theories of gravity. Acesso em: dezembro de 2016. 2010, Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0805.1726>>.
- [23] CASTELLANI, O. C. Discussão dos conceitos de massa inercial e massa gravitacional. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 23, p. 356–359, Setembro 2001.

- [24] PAPANETROU, A. *Lectures on General Relativity*. Dordrecht-Holanda: D. Reidel Publishing Company, 2012. 218 p.
- [25] REFSDAL, S.; BONDI, H. The gravitational lens effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 128, n. 4, p. 295–306, Agosto 1964.
- [26] CHANDRASEKHAR, S. On the “derivation” of Einstein’s field equations. *American Journal of Physics*, v. 40, n. 2, p. 224–234, 1972.
- [27] OLIVEIRA, T. B. R. d. F. *Teorias f (R) de Gravidade na Formulação de Palatini*. 103 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal - RN, Julho 2010.
- [28] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields: Course of theoretical physics Volume 2*. 4. ed. Oxford: Butterworth-Heinenann, 2013. 402 p.
- [29] CORRY, L.; RENN, J.; STACHEL, J. Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 278, n. 5341, p. 1270–1273, Novembro 1997.
- [30] BRADING, K. A.; RYCKMAN, T. A. Hilbert’s ‘Foundations of Physics’: Gravitation and electromagnetism within the axiomatic method. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, v. 39, n. 1, p. 102–153, Janeiro 2008.
- [31] FRIEDMANN, A. 125. On the curvature of space. *Zeitschrift für Physik*, v. 10, p. 377–386, 1922.
- [32] EINSTEIN, A. Cosmological considerations on the general theory of relativity. In: *The Principle of Relativity*. EUA: Dover Publications, Inc, 1952. p. 175–188.
- [33] STRAUMANN, N. The history of the cosmological constant problem. Acesso em: setembro de 2016. 2008, Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0208027>>.
- [34] FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. *A short course in General Relativity*. 3. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2010. 292 p.
- [35] SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, v. 1, p. 189–196, 1916.

- [36] BIESEL, O. The precession of mercury's perihelion. Acesso em: setembro de 2016. 2008, Disponível em: <<https://www.math.washington.edu/~morrow/papers/>>.
- [37] DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 220, n. 571-581, p. 291–333, Janeiro 1920.
- [38] KENNEFICK, D. Testing relativity from the 1919 eclipse—a question of bias. *Physics Today*, v. 62, n. 3, p. 37–42, Março 2009.
- [39] REFSDAL, S. On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 128, n. 4, p. 307–310, 1964.
- [40] CHOW, T. L. *Gravity, Black Holes, and the Very Early Universe: An introduction to general relativity and cosmology*. New York: Springer Science & Business Media, 2008. 300 p.
- [41] FROLOV, V.; NOVIKOV, I. *Black Hole Physics: Basic concepts and new developments*. Dordrecht-Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2012. 795 p.
- [42] KIEFER, C. Quantum gravity (general) and applications. In: *Compendium of Quantum Physics*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 565–572.
- [43] FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. f(R) Theories. *Living Reviews in Relativity*, v. 13, n. 3, 2010. Acesso em: novembro de 2016. Disponível em: <<http://www.livingreviews.org/lrr-2010-3>>.

Apêndice A

Derivação da Equação da Geodésica.

Sejam $x^\nu = x^\nu(u, v)$ uma família de infinitas curvas, com o parâmetro v fixo sobre cada curva, e u variando (Figura A.1).

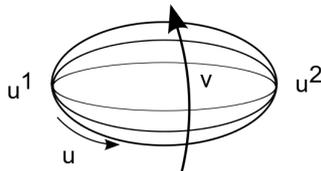


Figura A.1: Família de curvas x^μ
Fonte: Autor(2016).

O elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu du^2, \quad (\text{A.0.1})$$

com $p^\mu = dx^\mu/du$. Seja L o arco de curva, tal que

$$L = \int_A^B ds \quad (\text{A.0.2})$$

e, $\mathcal{L}(x^\mu, p^\mu) = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$. Então:

$$L = \int_{u^1}^{u^2} \sqrt{\mathcal{L}} du, \quad (\text{A.0.3})$$

derivando em relação a v :

$$\frac{dL}{dv} = \int_{u^1}^{u^2} \left[\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} + \frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial p^\lambda} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial u} \right) \right] du. \quad (\text{A.0.4})$$

Reescrevendo o último termo na integral, obtém-se

$$\frac{dL}{dv} = \int_{u^1}^{u^2} \left\{ \frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial p^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial p^\lambda} \right) \frac{\partial x^\lambda}{\partial v} \right\} du \quad (\text{A.0.5})$$

que com uma integração por partes resulta em

$$\frac{dL}{dv} \delta v = \delta L = \left[\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial p^\lambda} \delta x^\lambda \right]_{u^1}^{u^2} + \int_{u^1}^{u^2} \left[\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial p^\lambda} \right) \right] \delta x^\lambda du, \quad (\text{A.0.6})$$

o primeiro termo é nulo, pois os extremos são mantidos fixos e δL deve ser nulo. Portanto,

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial p^\lambda} \right) - \frac{\partial \sqrt{\mathcal{L}}}{\partial x^\lambda} = 0 \quad (\text{A.0.7})$$

que é a equação contraída da geodésica. Para a obtenção do resultado explícito, primeiramente é necessário expandir a equação acima, note que v se torna uma constante da curva e não mais um parâmetro:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\lambda} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\lambda} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{L}}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\lambda}, \quad (\text{A.0.8})$$

considerando $u = s$ e $d\mathcal{L}/ds = 0$:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p^\lambda} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = 0. \quad (\text{A.0.9})$$

Substituindo a expressão para \mathcal{L} e simplificando alguns termo, reescrevemos a equação (A.0.9) como

$$\frac{d}{ds} (2g_{\lambda\mu} p^\mu) - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} p^\mu p^\nu = 0, \quad (\text{A.0.10})$$

que, ao se expandir o primeiro termo, é

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} p^\mu p^\nu + g_{\lambda\mu} \frac{dp^\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} p^\mu p^\nu = 0. \quad (\text{A.0.11})$$

Escrevendo

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} p^\mu p^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} \right) p^\mu p^\nu, \quad (\text{A.0.12})$$

a equação da geodésica fica

$$g_{\lambda\mu} \frac{d^2 x^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (\text{A.0.13})$$

que, multiplicada pelo tensor recíproco, retorna a equação da geodésica em forma explícita

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (\text{A.0.14})$$

Apêndice B

Expressão para o Divergente

Pela definição de derivada covariante, o divergente de um tensor contra-variante de ordem 1 é

$$\nabla_{\mu} V^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} V^{\nu} \quad (\text{B.0.1})$$

com $\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}$. O determinante do tensor métrico é dado por

$$g = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\dots N} g_{1\alpha} g_{2\beta} \cdots g_{Nn}, \quad (\text{B.0.2})$$

na qual $\epsilon^{\alpha\beta\dots N}$ é o tensor de Levi-Civita, que possui a seguinte propriedade: $\epsilon^{\Lambda\alpha\beta\dots N} = (-1)^{\Lambda+1} \epsilon^{\alpha\beta\dots N}$. Portanto, a derivada do determinante pode ser escrita como

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^{\mu}} (-1)^{1+\alpha} \epsilon^{\beta\gamma\dots N} g_{2\beta} \cdots g_{nN} + \cdots + \frac{\partial g_{nN}}{\partial x^{\mu}} (-1)^{N+n} \epsilon^{\alpha\beta\dots N-1} g_{1\alpha} \cdots g_{m(N-1)}. \quad (\text{B.0.3})$$

O cofator do elemento $g_{\mu\nu}$ é definido como $\Delta g_{\Lambda\mu} = (-1)^{\Lambda+\mu} g_{1\alpha} g_{2\beta} \cdots g_{nN}$, mas pode ser escrito como $\Delta g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g$, portanto

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} g. \quad (\text{B.0.4})$$

Voltando para a equação do divergente

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{V^\nu}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} \quad (\text{B.0.5})$$

que, claramente, pode ser escrita como

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (V^\mu \sqrt{g}), \quad (\text{B.0.6})$$

como esperado.

Apêndice C

Simulação das Órbitas

Para a simulação das órbitas foram escritos dois programas em linguagem C. Como há mudança em apenas duas linhas do código (linhas 19 e 20), abaixo segue o código completo para o caso relativístico e, em seguida, a alteração feita para o caso clássico.

Simulação das órbitas para o potencial Relativístico

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4
5 #define G 1
6 #define M 1
7 #define L 8
8 #define c 1
9 #define r0 55
10 #define p0 M_PI
11 #define vr0 0.0
12 #define R 1e-5
```

```
13 #define t0 0.0
14 #define tf 12000
15 #define dt 1e-5
16 #define mult (int) (tf/(dt*10000))
17
18 double f(double r){
19     return (-1.0)*G*M/(r*r) + L*L/(r*r*r) -
20           3*G*M*L*L/(c*c*r*r*r*r);
21 }
22
23 double g(double vr){
24     return vr;
25 }
26
27 double h(double r){
28     return L/(r*r);
29 }
30
31 int main(int argc, char **argv ){
32
33     int counter= 0;
34     double r= r0, p= p0, t= t0, vr= vr0;
35     double f1, g1, h1;
36     FILE* outp= fopen("rel.dat", "w");
37
38     while(t< tf){
39
40         if(counter%mult == 0){
41             fprintf(outp, "%e□%e□%e\n", r*cos(p), r*sin(p), t);
```

```
41     }
42     f1= f(r);
43     g1= g(vr);
44     h1= h(r);
45
46     r+= dt*g1;
47     vr+= dt*f1;
48     p+= dt*h1;
49     t+= dt;
50     counter++;
51 }
52
53 fclose(outp);
54 return 0;
55 }
```

Mudança feita para o caso clássico

```
1 double f(double r){
2     return (-1.0)*G*M/(r*r) + L*L/(r*r*r);
3 }
```