

**Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física  
Trabalho de Conclusão de Curso**

**Arthur Augusto Barizon Pessa**

**LEIS DE CONSERVAÇÃO NAS MECÂNICAS NEWTONIANA  
E LAGRANGIANA E UMA INTRODUÇÃO AO TEOREMA  
DE NOETHER**

**Orientador: Prof. Dr. César Canesin Colucci**

**Maringá**

**23 de janeiro de 2017**

Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física  
Trabalho de Conclusão de Curso

Arthur Augusto Barizon Pessa

LEIS DE CONSERVAÇÃO NAS MECÂNICAS NEWTONIANA  
E LAGRANGIANA E UMA INTRODUÇÃO AO TEOREMA  
DE NOETHER

*Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito para a obtenção do título de bacharel em Física.*

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. César Canesin Colucci (Orientador)  
Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire  
Prof. Dr. Sergio de Picoli Junior

Maringá

23 de janeiro de 2017

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
<b>1 Mecânica Newtoniana</b>	<b>3</b>
1.1 Leis de Newton	3
1.2 Leis de Conservação	5
1.2.1 Conservação do Momento Linear	6
1.2.2 Conservação do Momento Angular	8
1.2.3 Conservação da Energia	10
<b>2 Mecânica Lagrangiana</b>	<b>14</b>
2.1 Equações de Lagrange	14
2.1.1 Vínculos	15
2.1.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais	16
2.1.3 Princípio de D'Alembert	18
2.2 Leis de Conservação	24
2.2.1 Variações Infinitesimais	25
2.2.2 Conservação do Momento Linear	27
2.2.3 Conservação do Momento Angular	28
2.2.4 Conservação da Energia	29
<b>3 Simetrias e Leis de Conservação</b>	<b>33</b>
3.1 Princípio de Hamilton	33
3.2 Teorema de Noether	35
3.2.1 Leis de Conservação	39
3.2.2 Outras Aplicações do Teorema de Noether	43
Considerações Finais	50
Referências Bibliográficas	52
Apêndice	54

# Agradecimentos

Ao Professor Cané, por ter aceito me orientar durante a produção deste trabalho, pela paciência de ler e reler seus capítulos algumas vezes, por todas as sugestões e correções feitas ao mesmo e pelas nossas divertidas conversas.

Aos professores Fernando e Maurício, por terem gentilmente aceito o convite para participar da banca deste trabalho.

Aos meus pais, por todo incentivo e suporte essenciais durante todos os anos dessa graduação. Aos meus avós por tudo o que com eles aprendo. Ao meu irmão pela camaradagem.

Ao professor Breno pela oportunidade de atuar como preceptor ao longo desse ano e me dar a chance de aprender minimamente a lidar com o  $\text{\LaTeX}$ . Ao Gabriel pelo suporte fornecido em momentos de dificuldade com o mesmo  $\text{\LaTeX}$  e pela ajuda com a formatação deste trabalho.

A todos os amigos que estiveram comigo durante a graduação, mas em especial ao Fabrício, Thiago, Danilo e Raul.

Aos amigos que fiz durante os meus anos de trabalho no Centro de Tecnologia desta universidade, principalmente à D. Inez, Ângela e Éder.

Muito obrigado a todos vocês.

# Resumo

As leis de conservação são resultados centrais e essenciais à Física. Essas leis permitem desde a própria construção de teorias físicas até a solução de um grande número de problemas físicos importantes. Tendo isso em mente, julgamos mais do que pertinente estudá-las neste trabalho fazendo uso de sistemas mecânicos de partículas valendo-nos dos formalismos Newtoniano e Lagrangiano da Mecânica. Após uma investigação dessas leis de conservação nessas duas Mecânicas, partimos da Mecânica de Lagrange para estender ainda mais nossa compreensão acerca desses resultados introduzindo um importante teorema devido a Emmy Noether e, por fim, estabelecer conexões diretas entre as simetrias concernentes a um dado sistema físico e suas correspondentes constantes de movimento.

**Palavras-chave:** leis de conservação, Mecânica Newtoniana, Mecânica Lagrangiana, teorema de Noether.

# Abstract

Conservation laws are central and essential results to Physics. These laws allow both the construction of physical theories itself and the solution of a great number of important physical problems. Keeping that in mind we believe to be more than pertinent to study them in this work by using mechanical systems of particles through the Newtonian and Lagrangian formalisms of Mechanics. After an investigation of those conservation laws in these two Mechanics we start from Lagrangian Mechanics to extend even more our understanding about these results by introducing an important theorem due to Emmy Noether and, at last, establish direct connections between the symmetries concerning a given physical system and its corresponding constants of motion.

**Key words:** conservation laws, Newtonian Mechanics, Lagrangian Mechanics, Noether's theorem.

# Introdução

O grande físico norte-americano Richard P. Feynman (1918 - 1988), no livro *The Character of the Physical Law* [1], compara a tentativa do cientista de desvendar as leis que regem a natureza com o projeto de um observador que se lança a tentar desvendar as regras de um jogo de xadrez jogado pelos deuses apenas assistindo ao movimento das peças. Em seguida, considerando que se impossibilitado de assistir a todos os instantes do jogo o observador perderia valiosas informações sobre suas regras, ele nota que se não existirem determinadas quantidades que se mantém inalteradas (quantidades que se conservam, em uma linguagem muito cara aos físicos), aconteça o que for, durante o período de não observação, a capacidade de previsão do observador estaria arruinada e desvendar as regras do jogo se tornaria uma tarefa ainda mais difícil ou até impossível [1]. É dessa maneira que ele advoga em favor das leis de conservação no processo de construção da Física. Se, agora, lançarmos mão da definição de simetria, também apresentada por Feynman, mas dada pelo matemático alemão Hermann Weyl (1885 - 1955) de que uma “coisa” é simétrica se existe algo que você pode fazer à mesma de modo que quando você termina de fazer este algo a “coisa” lhe parece da mesma maneira que lhe parecia anteriormente [1], é inevitável estabelecer um paralelo entre conservação e simetria e soa-nos fascinante a possibilidade de que quantidades conservadas estejam diretamente ligadas a condições de simetria. É com essas ideias que vamos à Mecânica.

Sabemos que os fundamentos da Mecânica Clássica podem ser estabelecidos de duas maneiras: as leis de movimento de Newton (Mecânica Newtoniana, obviamente) ou o princípio variacional conhecido como princípio de Hamilton (Mecânica Analítica). Essas duas propostas possuem abordagens distintas no proceder até as equações de movimento, mas em última análise são completamente equivalentes, ou posto de outro modo, produzem os mesmos resultados quando aplicadas aos mesmos sistemas mecânicos. Na formulação Newtoniana, uma dada força resultante externa age sobre um corpo e produz um movimento específico, isto é, sempre associamos um efeito particular com uma dada causa. Todavia, de acordo com o princípio de Hamilton, o movimento de um corpo resulta da tentativa da natureza de atingir um certo propósito, que seria minimizar a integral da Lagrangiana no tempo [2].

Com a Mecânica Analítica, o ferramental matemático usado para lidar com problemas físicos deixa de ser os vetores, tão caros à formulação Newtoniana, que são substituídos

por Lagrangianas e funcionais, objetos de estudo do Cálculo das Variações. É aqui, que valendo-nos da profundidade dessa formulação variacional, encontramos pela primeira vez um teorema matemático de grande beleza e elegância, o teorema de Noether, publicado pela primeira vez em 1918, devido a grande algebrista alemã de origem judia Amalie Emmy Noether (1882 - 1935). Ao estudar a invariância dos funcionais quando submetidos a certas transformações é que Emmy Noether encontrou uma maneira de expressar em linhas gerais as conexões entre conservação e simetria [3].

Sendo assim, é no sentido de possibilitar um embasamento sólido em temas centrais e fundamentais em Física que o estudo da Mecânica Clássica é relevante.

Por fim, com o objetivo de comunicar essas ideias, apresentamos a forma como este trabalho encontra-se organizado:

No [Capítulo 1](#), apresentamos as três leis de Newton e seguimos para encontrar as condições sob as quais os momentos linear e angular e a energia de um sistema de partículas se conservam fazendo uma análise final do papel proeminente que a terceira lei de Newton desempenha na obtenção desses resultados.

No [Capítulo 2](#), fazemos uso do trabalho de Newton para construir a Mecânica de Lagrange, um novo método de tratamento de problemas mecânicos. Após isso, mais uma vez, trabalhamos para encontrar as condições necessárias para que os momentos e a energia se conservem, mas no contexto desse novo formalismo.

No [Capítulo 3](#), o último capítulo deste trabalho, introduzimos o princípio de Hamilton e fazendo uso dele apresentamos e demonstramos o teorema de Noether. Munidos desse teorema, produzimos, a partir da análise das simetrias de sistemas físicos, as mesmas conservações dos momentos e da energia. Ainda, aplicamos o teorema de Noether a alguns sistemas físicos dissipativos.

Encerramos o trabalho com as considerações finais acerca dos tópicos expostos.



# Capítulo 1

## Mecânica Newtoniana

Neste primeiro capítulo, exporemos as três leis de movimento devidas a Sir Isaac Newton (1643 - 1727) e realizaremos breves observações acerca das mesmas. Em seguida, empregaremos essas leis na obtenção dos resultados de conservação do momento linear, do momento angular e da energia para o caso de um sistema de partículas.

### 1.1 Leis de Newton

A redação das três leis de movimento aqui apresentada encontra-se muito próxima à do próprio Newton em seu *Principia*<sup>1</sup>. Apesar de sabermos que existem severas e justas críticas a elas e que podem ser enunciadas de outras maneiras, preferimos nos ater às suas primeiras versões. As leis serão expostas e brevemente comentadas.

**Lei I:** *Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.*

A primeira lei é conhecida como Lei da Inércia e uma breve consulta à literatura em Mecânica é patente em indicar que é, e sempre foi, motivo de grande debate desde seu estabelecimento. Contudo, é notório o fato da mesma primeira lei ser usada para definir os limites de observação da validade das leis de Newton na sua forma canônica. As leis de Newton, como aqui enunciadas, são válidas e invariantes (assumem a mesma forma) em uma classe especial de referenciais ditos inerciais e um sistema de referência é definido como sendo inercial se a Lei I é nele válida. Os sistemas inerciais de referência são uma categoria muito particular de referenciais completamente equivalentes entre si<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>As três leis como aqui enunciadas se encontram na referência [4] deste trabalho. A maioria das outras fontes apresenta as mesmas leis em uma linguagem mais moderna e direta. Uma exposição que julgamos interessante e que busca trazer o mesmo conteúdo físico exposto de modo razoavelmente diferente pode ser encontrada na referência [5].

<sup>2</sup>Colocando de outro modo, experimentos mecânicos não podem ser distinguidos entre referenciais

Nesses referenciais, espaço e tempo são ambos homogêneos e o espaço é, ainda, isotrópico. A homogeneidade significa que nenhum ponto do espaço (ou nenhum instante de tempo) é diferente de qualquer outro e a isotropia garante que nenhuma direção espacial é privilegiada [2, 7, 8].

Mais interessante é o fato de conseguirmos relacionar as posições de um corpo em diferentes sistemas de referência translados entre si fazendo uso das transformações de Galileu:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_p, \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{r}}_p, \quad (1.2)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{r}}_p. \quad (1.3)$$

Nas transformações acima,  $\mathbf{r}$  indica a localização de um corpo num determinado referencial inercial,  $\mathbf{r}'$  expressa a localização do mesmo corpo em um segundo referencial (inercial ou não) transladado em relação ao primeiro e  $\mathbf{r}_p$  dá a posição do segundo referencial em relação ao primeiro. O ponto sobre os vetores posição denota, como é usual, sua derivada temporal.

Um exame mais atento das transformações de Galileu revela que um sistema de referência em repouso ou movimento retilíneo uniforme em relação a um sistema de referência inercial é, por sua vez, também, um sistema inercial. Esse resultado é conhecido como o princípio de relatividade Galileano. Essa equivalência entre uma classe de referenciais revela que não existe um referencial privilegiado em relação ao qual todos os outros deveriam ser preteridos na descrição do movimento [7]. Nas transformações de Galileu assumimos que o tempo (ou melhor, os intervalos de tempo) é o mesmo para todos os referenciais. A hipótese de que o tempo é absoluto é um dos fundamentos da Mecânica Clássica [7, 8].

**Lei II:** *A mudança de movimento é proporcional a força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.*

A segunda lei é conhecida como o Princípio Fundamental da Dinâmica e em notação matemática moderna é comumente apresentada, na sua forma mais geral, como

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1.4)$$

com  $\mathbf{F}$  representando a força resultante externa (é fato experimental que um corpo não pode fazer força sobre si mesmo) que atua sobre o corpo e  $\mathbf{p}$  seu momento linear dado pela expressão  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

---

inerciais [6].

Se a massa inercial<sup>3</sup> é constante, a Lei II se reduz à sua forma mais familiar

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1.5)$$

**Lei III:** *A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.*

Matematicamente, a terceira lei pode ser expressa na forma:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (1.6)$$

Como é habitual,  $\mathbf{F}_{ij}$  representa a força atuando sobre o corpo  $i$  devida ao corpo  $j$  e vice-versa.

A Lei III, tal como apresentada acima, é conhecida como a terceira lei de Newton na forma fraca. Quando assumimos que o par de forças de ação e reação, além de ser igual e atuar em sentido oposto deve se restringir à direção da linha reta que une os dois corpos, dizemos esta ser a terceira lei na sua forma forte.

## 1.2 Leis de Conservação

Ao longo de todo este trabalho trataremos de leis de conservação para sistemas (conjuntos) de partículas. Sendo assim, definimos o que é uma partícula no contexto da Mecânica Clássica: uma partícula é um corpo cujas dimensões podem ser negligenciadas na descrição do seu movimento, mas de massa finita [7]. Claramente, esse conceito é uma abstração que visa facilitar a resolução de problemas físicos e a possibilidade de sua aplicação deve ter em conta o problema enfrentado. Ao longo deste trabalho, lidaremos apenas com partículas, individualmente, ou coletivamente no caso de sistemas de partículas.

---

<sup>3</sup>Aqui, chamamos de massa inercial a massa que aparece na Lei II,  $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ , em oposição à massa gravitacional que integra a expressão da Lei da Gravitação Universal,  $\mathbf{F}_{1(2)} = -G \frac{m_{g1}m_{g2}}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$ . Essas duas massas aparecem em dois contextos completamente distintos: a primeira massa, a que compõe a Lei II, é o “coeficiente de inércia” de um corpo e representa como que a “resistência” deste a qualquer mudança no estado do seu movimento (em outras palavras, resistência a aceleração); enquanto isso, a massa que aparece no contexto da interação gravitacional funciona como a “carga” geradora da interação, da mesma forma que as cargas elétricas na Lei de Coulomb. É notável, no entanto, o fato experimental, muito bem estabelecido, de ambas serem iguais, ou seja, que  $m_i = m_g$ . Essa última igualdade teve um papel fundamental no desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein [9].

## 1.2.1 Conservação do Momento Linear

Em um sistema de  $N$  partículas, a força resultante que atua sobre a  $i$ -ésima partícula do sistema sob análise é dada pela segunda lei de Newton,

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(E)}, \quad (1.7)$$

na qual o primeiro termo à direita da igualdade representa a soma de todas as forças internas ao sistema (força de interação entre a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima partículas), e  $\mathbf{F}_i^{(E)}$  representa a força resultante devida a causas externas ao sistema. A distinção entre o que é interno ou externo é meramente formal, uma vez que sempre podemos modificar aquilo que identificamos como o sistema de modo a abarcar elementos que dele antes não faziam parte [8].

O momento linear da  $i$ -ésima partícula é definido como

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \quad (1.8)$$

Conhecida a expressão da força atuando sobre cada partícula, individualmente, a força total atuando sobre todo o conjunto é dada por

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)}. \quad (1.9)$$

Agora, supondo que as forças internas obedecem à terceira lei de Newton, mesmo que apenas na forma fraca (1.6), vamos mostrar que sua soma se anula. É importante notar que os índices  $i$  e  $j$  são apenas índices mudos, logo, temos que

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ji} \quad (1.10)$$

e do uso da equação acima<sup>4</sup> juntamente da terceira lei de Newton (1.6), decorre que

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (\mathbf{F}_{ij} - \mathbf{F}_{ij}) = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

como queríamos demonstrar.

Para tornar mais simples a representação do coletivo de partículas, introduzimos a

---

<sup>4</sup>A equação (1.10) decorre do simples detalhe de que se escolhermos chamar a partícula a qual estamos analisando as forças externas de  $i$  ou de  $j$ , o resultado da soma final, que expressa a força de interação total entre todas os elementos do sistema, é o mesmo. O que nos interessa aqui, é que esse detalhe, conjuntamente com a Lei III, permitirá-nos chegar ao anulamento das forças internas.

definição do centro de massa do sistema:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (1.12)$$

O centro de massa é um ponto, não necessariamente coincidente com a posição de qualquer partícula do sistema, no qual se concentra toda a massa e momento do sistema, bastando para sua representação.

Usando a definição de centro de massa e o resultado da (1.11), podemos trabalhar com a equação (1.9) para representar seu resultado de outra maneira:

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(E)}, \quad (1.13)$$

com  $\mathbf{F}^{(E)}$  sendo a força externa total que atua sobre todas as partículas que compõem o sistema. Usando, mais uma vez, o centro de massa para definir o momento linear total do sistema, obtemos

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (1.14)$$

e, finalmente, podemos escrever

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(E)}. \quad (1.15)$$

Somos, então, levados a concluir um importante resultado.

**Teorema da Conservação do Momento Linear de um Sistema de Partículas:**  
*se a resultante das forças externas sobre um sistema de partículas é nula, o momento linear total do sistema é conservado.*

O teorema acima é válido em sua integralidade para um tipo muito particular de sistema físico, chamado de sistema fechado. Um sistema é fechado se as partículas que o formam interagem entre si (ou não) mas com nenhum outro corpo fora do sistema<sup>5</sup>. Como o momento linear é um vetor, pode acontecer de o momento se conservar em uma direção e não em outra dependendo da força resultante externa que esteja atuando sobre o sistema.

No caso de um sistema com apenas uma partícula é simples notar que o enunciado acima é apenas outra maneira de estabelecer a primeira lei de Newton. Usando o princípio de relatividade Galileano podemos demonstrar que se o momento é conservado em um referencial inercial ele é conservado em todos os referenciais inerciais.

---

<sup>5</sup>O que é outro modo de enunciar a condição central do teorema.

## 1.2.2 Conservação do Momento Angular

O momento angular de um sistema de  $N$  partículas em relação a um ponto  $P$  qualquer do espaço tridimensional, localizado em um determinado referencial inercial, é dado por

$$\mathbf{L}_p = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_p), \quad (1.16)$$

sendo que nos dois últimos termos da equação usamos as transformações (1.1) e (1.2) de maneira conveniente.

Se derivarmos a (1.16) em relação ao tempo, ficamos com

$$\frac{d\mathbf{L}_p}{dt} = \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_p) \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_p) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i - \ddot{\mathbf{r}}_p). \quad (1.17)$$

O primeiro termo à direita da igualdade se anula, pois os vetores são colineares. Rearranjando o segundo termo e aplicando a propriedade distributiva do produto vetorial somos levados a

$$\frac{d\mathbf{L}_p}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_p \quad (1.18)$$

$$= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_p + \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{r}_p \times \ddot{\mathbf{r}}_p. \quad (1.19)$$

Assim como para discutir a conservação do momento linear a Lei III foi essencial, ela também o é para a conservação do momento angular de um sistema de partículas, como logo ficará evidente. Enquanto o enunciado não acontece, vamos avançar com a (1.19) abordando seus termos separadamente. O primeiro termo, obviamente, pode ser reescrito como

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (1.20)$$

Substituindo a (1.7) na (1.20):

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(E)} \right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_i^{(E)}. \quad (1.21)$$

Ainda, o primeiro termo à direita da igualdade na (1.21) pode, com o uso de uma ideia muito semelhante à da equação (1.10), ser expresso por

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_{ij} + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_{ji}]. \quad (1.22)$$

Mais uma vez, para mostrar que também o primeiro à direita da igualdade na (1.21) se anula (sob condições que já anunciaremos), usaremos a terceira lei de Newton na forma da equação (1.6):

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) - (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_p)] \times \mathbf{F}_{ij} \quad (1.23)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} \quad (1.24)$$

Retornando à (1.19), restam-nos dois termos que não enfrentamos. Usando a (1.12), o segundo e o terceiro termos da (1.19), tomados conjuntamente, resultam em

$$- \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_p + \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{r}_p \times \ddot{\mathbf{r}}_p = (-M\mathbf{R} + M\mathbf{r}_p) \times \ddot{\mathbf{r}}_p = -M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_p) \times \ddot{\mathbf{r}}_p. \quad (1.25)$$

O que queríamos com todos os cálculos anteriores era reescrever a (1.19) de modo que a Física contida viesse à tona. Depois destes cálculos, ficamos com

$$\frac{d\mathbf{L}_p}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_i^{(E)} - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_p) \times \ddot{\mathbf{r}}_p \quad (1.26)$$

e se as forças internas obedecem à Lei III, dessa vez na sua forma forte, o primeiro produto vetorial na equação (1.26) se anula (a força  $\mathbf{F}_{ij}$  e  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  são colineares) e a variação temporal do momento angular fica

$$\frac{d\mathbf{L}_p}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_i^{(E)} - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_p) \times \ddot{\mathbf{r}}_p \quad (1.27)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{L}_p}{dt} = \mathbf{N}_p^{(E)} - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_p) \times \ddot{\mathbf{r}}_p \quad (1.28)$$

com o primeiro termo à direita da igualdade representando o torque externo em relação ao ponto P atuando sobre o sistema de  $N$  partículas. É fato que o torque depende do ponto em relação ao qual é medido. Desse modo, se o ponto P está em repouso ou movimento retilíneo uniforme em relação ao referencial adotado, ou P é o centro de massa, o segundo termo também se anula, e

$$\frac{d\mathbf{L}_p}{dt} = \mathbf{N}_p^{(E)}. \quad (1.29)$$

Assim como para o momento linear, inferimos, imediatamente, mais um resultado de grande interesse.

### Teorema da Conservação do Momento Angular de um Sistema de Partí-

**culas:** se a resultante dos torques externos sobre um sistema de partículas é nula, seu momento angular total é conservado.

Mais uma vez, notamos que o teorema acima é válido para um sistema fechado. Além disso, assim como para o momento linear, a natureza vetorial do momento angular possibilita a sua conservação em uma direção independentemente das outras, tudo dependendo das componentes do vetor  $\mathbf{N}_p^{(E)}$ .

### 1.2.3 Conservação da Energia

A energia cinética total de um grupo de partículas, em um referencial inercial, é a soma das energias cinéticas individuais e é representada por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i'^2. \quad (1.30)$$

Se alterarmos a descrição do movimento para o referencial do centro de massa usando a notação  $\mathbf{v}_{CM} = \dot{\mathbf{r}}_p = \mathbf{V}$  e  $\mathbf{v}_i'$  como a velocidade da  $i$ -ésima partícula em relação ao centro de massa, as transformações de Galileu (1.2) nos dão o seguinte resultado:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{v}_i' + \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i'^2 + 2\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}^2), \quad (1.31)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i'^2 + \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{r}_i'}{dt} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}^2, \quad (1.32)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i'^2 + \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i' \right) \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}^2. \quad (1.33)$$

O segundo termo da (1.33) é eliminado com o uso da equação do centro de massa e da transformação de Galileu (1.1):

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i' = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{r}_i - m_i \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i - \left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (1.34)$$

Logo, resta-nos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i'^2. \quad (1.35)$$

Calculamos a expressão para a energia cinética, mas sabemos que podemos ter outra parte importante da energia total do sistema, a energia potencial. Para trazer a energia potencial à análise do problema da conservação da energia, vamos calcular o trabalho total realizado sobre o sistema ao alterar seu estado.



O trabalho total realizado sobre todas as partículas do sistema para levá-lo de uma configuração A até uma configuração B é, no caso mais geral, calculado pela integral

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^N \int_A^B \dot{\mathbf{p}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_A^B m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_A^B m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt. \quad (1.36)$$

Podemos manipular a derivada temporal da velocidade para resolver a integral:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_i^2) = 2 \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \mathbf{v}_i = 2\dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (1.37)$$

Usando o resultado acima, obtemos

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_A^B m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_i^2) dt = \sum_{i=1}^N \int_A^B \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) dt = \sum_{i=1}^N \int_A^B d \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) = T_B - T_A. \quad (1.38)$$

Esse é o famoso Teorema Trabalho-Energia Cinética<sup>6</sup>, resultado bastante conhecido e válido inclusive na Teoria da Relatividade, feitas as devidas modificações. Por outro lado, é evidente que a mesma integral produz

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^N \int_A^B \dot{\mathbf{p}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_A^B (\mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_A^B \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (1.39)$$

Dispondo separadamente de cada um dos dois termos da equação (1.39) vamos supor que as forças externas são conservativas, ou seja, podem ser obtidas a partir de uma função (escalar) energia potencial<sup>7</sup> na forma

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = -\nabla_i U^{(E)}. \quad (1.40)$$

Aplicando esse resultado ao primeiro termo da (1.39) ficamos com

$$\sum_{i=1}^N \int_A^B \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^N \int_A^B \nabla_i U^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i = U_A^{(E)} - U_B^{(E)} \quad (1.41)$$

onde na obtenção da última igualdade fizemos uso do Teorema Fundamental do Cálculo para Gradientes. Para o último termo da (1.39) vamos supor que as forças internas além de serem conservativas, como as forças externas, são centrais (isto é, obedecem a Lei III

<sup>6</sup>No Teorema Trabalho-Energia Cinética igualamos o trabalho da força resultante externa atuando sobre o sistema (o trabalho total) à variação da energia cinética. Como na (1.36)  $\dot{\mathbf{p}}_i$  representa a força resultante externa atuando sobre cada partícula do sistema físico, a soma sobre a contribuição de todas as partículas  $(\sum_{i=1}^N)$ , na mesma (1.36), resulta na força total e, logo, o teorema é válido nesse caso.

<sup>7</sup>Aqui, quando dizemos energia potencial, nos referimos, de fato, à diferença de energia potencial. Essa função escalar, como é bem sabido, é definida a menos de uma constante aditiva arbitrária, o que quer dizer que o nível zero de energia potencial é sempre escolhido convenientemente de acordo com o problema em questão.

na forma forte) e também que  $U_{ij} = U_{ji}$ , com  $U_{ij}$  proporcional a  $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ , ou seja, à distância relativa entre dois elementos do sistema.

Se a terceira lei é válida, usamos das relações entre as energias potencias para escrever:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i U_{ij} = \nabla_j U_{ij} = \nabla_j U_{ji} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (1.42)$$

Considerando, finalmente, o último membro da (1.39) munidos da terceira lei e, mais uma vez, da (1.10), alcançamos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j). \quad (1.43)$$

Ainda é possível rearranjar a (1.43) na forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot (d\mathbf{r}_i - d\mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij}. \quad (1.44)$$

Usando a (1.42) e o Teorema Fundamental do Cálculo para Gradientes, temos

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \int_A^B \nabla_i U_{ij}(r_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N U_{ij}(r_{ij}) \Big|_A^B = U_A^{(I)} - U_B^{(I)} \quad (1.45)$$

com o índice superior ( $I$ ) significando interno, uma vez que essas são as energias potencias correspondentes às interações internas ao sistema nas suas configurações A e B. Logo, das equações (1.39), (1.41) e (1.45), resulta que

$$W_{AB} = T_B - T_A = U_A^{(E)} - U_B^{(E)} + U_A^{(I)} - U_B^{(I)} \quad (1.46)$$

que reagrupada é reescrita na forma

$$T_A + U_A^{(E)} + U_A^{(I)} = T_B + U_B^{(E)} + U_B^{(I)}. \quad (1.47)$$

Definindo,

$$U = U^{(E)} + U^{(I)}, \quad (1.48)$$

a interpretação da (1.47) é evidente.

**Teorema da Conservação da Energia de um Sistema de Partículas:** *se todas as forças, internas e externas, atuando sobre um sistema de partículas são conservativas e as forças internas são, ainda, centrais, a energia total  $E = T + U$  do sistema de partículas é conservada.*

É interessante notar o caráter escalar da energia em oposição aos momentos, que são vetores. Também é curioso perceber que ao contrário dos momentos a energia se conserva mesmo se o sistema interage com o exterior (nesse caso o sistema é dito aberto), mas sujeito apenas a forças externas conservativas. Observamos, também, o papel central que a terceira lei desempenha na dedução desses resultados de conservação e fica claro que sem ela nenhum dos três resultados poderia ser enunciado. Citando o físico alemão Arnold Sommerfeld (1868 - 1951), podemos dizer que a terceira lei de Newton é o ponto eminente na transição da mecânica da partícula para a mecânica dos sistemas [10].

# Capítulo 2

## Mecânica Lagrangiana

Neste segundo capítulo, construiremos a formulação Lagrangiana da Mecânica partindo do princípio de D'Alembert. Em seguida, apresentaremos as mesmas três leis de conservação para sistemas de partículas abordadas no [Capítulo 1](#), mas desta vez na conjuntura da Mecânica de Lagrange.

### 2.1 Equações de Lagrange

Começamos o capítulo anterior deste trabalho rerepresentando as leis de movimento devidas a Newton, que fundam a Mecânica Clássica. A partir de agora, queremos rumar em direção a uma nova formulação, uma nova concepção da Mecânica, mais eficaz, mais elegante e mais geral.

Apesar do grande sucesso do trabalho de Newton ou mesmo por causa dele, novos desenvolvimentos na ciência que estuda o movimento dos corpos continuaram a acontecer e mais marcadamente em 1788 o grande matemático e astrônomo italiano Joseph-Louis Lagrange<sup>1</sup> (1736 - 1813) apresenta o seu trabalho acerca dessa ciência em seu *Mécanique Analytique*<sup>2</sup>. O objetivo geral da Mecânica Analítica<sup>3</sup> continua a ser o mesmo do projeto Newtoniano, a saber, encontrar e resolver as equações que regem o movimento de um

---

<sup>1</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) nasceu em Turim, Itália, em 25 de janeiro de 1736 e morreu em Paris, França, em 10 de abril de 1813. Educado em Turim e inicialmente preparado para se tornar advogado ele voltou, rapidamente, seus interesses em direção à matemática após a entrada na universidade. Trabalhou como professor de matemática na Escola Real de Artilharia em Turim de 1755 (quando tinha apenas 19 anos!) até 1766, quando se muda para Berlim em vista da vacância da posição de Diretor de Matemática na Academia de Berlim, resultado da ida de Leonhard Euler para São Petersburgo. Lagrange foi indicado pelo próprio Euler e também por Jean Le Rond D'Alembert ao rei Frederico II da Prússia para ocupar o posto. Após a morte de Frederico II, em 1786, Lagrange deixa Berlim em meados de 1787 para ir a Paris trabalhar na *Académie des Sciences*. É em Paris que ele publica o seu *Mécanique Analytique* e lá permaneceu até sua morte [11].

<sup>2</sup>Famosamente, Lagrange anuncia no prefácio de sua obra que seus leitores não encontrariam nela figura alguma [12].

<sup>3</sup>O termo Mecânica Analítica é geralmente usado para se referir às formulações Lagrangiana e Hamiltoniana da Mecânica. Como neste trabalho estudaremos apenas o formalismo devido a Lagrange, quando usarmos o termo Mecânica Analítica estaremos nos referindo à Mecânica Lagrangiana.

sistema mecânico.

Diversos são os caminhos possíveis encontrados na literatura para se chegar às equações básicas dessa nova formulação, as famosas equações de Lagrange, sendo que o mais sofisticado deles faz uso de um princípio variacional chamado princípio de Hamilton, o qual encontraremos no [Capítulo 3](#). Em um primeiro momento, obteremos essas equações diferenciais com uma abordagem muito semelhante à do próprio Lagrange, valendo-nos de dois princípios físicos: o princípio dos trabalhos virtuais e o princípio de D'Alembert. Mas antes de nos encontrarmos com as famosas equações, precisamos falar sobre vínculos.

### 2.1.1 Vínculos

A questão das restrições impostas ao movimento é de absoluta importância na Mecânica Analítica. Tais limitações cinemáticas recebem o nome de vínculos. Não que os vínculos não sejam importantes na Mecânica Newtoniana, longe disso, mas quando comparamos o seu papel nessas duas formulações há sutilezas quanto a sua apreciação na questão da determinação do movimento. Quando começamos a estudar Mecânica, através das leis de movimento, estudamos os vínculos pelos seus efeitos sobre a dinâmica de uma partícula: a força normal que o plano inclinado exerce sobre o bloco; a tensão do fio sobre o pêndulo; a tensão sobre a corda na máquina de Atwood. Analisamos os vínculos através de forças que fazem parte das equações de movimento. Queremos, agora, tentar analisar os vínculos pelas restrições diretas que impõem ao movimento de um sistema, ou seja, pelas delimitações que esses trazem sobre o conjunto dos movimentos possíveis: o movimento do bloco, quando da descida sobre um plano inclinado, é restrito à superfície deste plano enquanto o bloco não atinge o chão; quando perturbado, o pêndulo oscila a uma distância fixa do seu ponto de suspensão; a altura que um dos blocos em uma máquina de Atwood sobe é a mesma que o outro tem de descer pois estão ligados por uma mesma corda inextensível.

Para nós é, também, essencial discutir os tipos existentes de vínculo pois tipos diferentes levam a diferentes generalizações da Mecânica Analítica. Neste trabalho, somente estudaremos vínculos ditos holônomos (do grego, *nómos* = lei e *hólos* = inteiro, completo). Esses vínculos são representados por um conjunto de  $p$  equações (caso o sistema esteja sujeito a mais de um vínculo), independentes entre si, e, invariavelmente, dadas na forma

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (2.1)$$

Como é usual,  $\mathbf{r}_i$  representa o raio vetor que localiza a  $i$ -ésima partícula de um sistema de  $N$  partículas. Em um corpo rígido a distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  tem de ser constante. Essa restrição é representada por uma equação do tipo  $|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q| - cte = 0$ . Como durante o movimento a distância entre os pontos não pode se alterar, a condição de rigidez do corpo é, portanto, um bom exemplo de vínculo holônimo. Outro exemplo

de vínculo holônomo é o caso de uma partícula sujeita a se mover sobre uma superfície ou curva no espaço representada por uma equação do tipo  $f(x, y, z, t) = 0$ . Como fica claro na equação anterior, a curva ou superfície não precisa ser fixa no espaço, vide a possibilidade da dependência explícita da equação da superfície em relação ao tempo.

Qualquer tipo de vínculo que se expresse diferentemente da equação (2.1), seja na forma de desigualdade, de diferenciais, ou qualquer outra forma, é dito não-holônomo. Os vínculos, quer sejam holônomos ou não, são, ainda, subdivididos em dois grupos: os escleronômicos (grego para *scléros* = duro, rígido e *nómos* = lei), que não dependem explicitamente do tempo na equação de vínculo e os reonômicos (grego para *réo* = fluir, correr e *nómos* = lei), que, por sua vez, dependem explicitamente do tempo.

Como última observação, fazemos saber que para os propósitos gerais da Mecânica Lagrangiana, todos os vínculos com os quais nos depararmos serão vínculos ideais. Os vínculos são assim chamados quando o trabalho virtual total das suas respectivas forças (as forças de vínculo) é nulo. É claro que sem introduzir o conceito de trabalho virtual a definição anterior parece um tanto sem propósito, mas mesmo assim, anunciamos, desde já, que sem essa condição toda a teoria que visamos construir, ruiria. No decorrer do texto isso ficará evidente.

## 2.1.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais<sup>4</sup> é um princípio físico usado para tratar de situações em que se avalia o equilíbrio dos corpos, ou seja, no estudo da estática. Em palavras, poderíamos estabelecê-lo da seguinte maneira: um sistema mecânico está em total equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual total de todas as forças aplicadas for nulo [13]. Aqui, com forças aplicadas, não queremos dizer, como na maioria dos casos, forças externas a um corpo de uma maneira geral, mas, sim, especificamente, forças externas de origem física, como as da gravidade ou do eletromagnetismo. As forças aplicadas seriam opostas às forças de vínculo, forças que tem origem na geometria do sistema [10].

Se um conjunto de partículas encontra-se em equilíbrio, a força resultante externa que atua sobre o ponto material é nula, o que representaremos por  $\mathbf{R}_i = \mathbf{0}$ . Se a resultante é nula, o trabalho virtual total também se anula e podemos escrever

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.2)$$

onde na equação acima,  $\delta \mathbf{r}_i$  representa um deslocamento virtual ao qual um elemento do sistema é submetido em oposição a um deslocamento real  $d\mathbf{r}_i$ . Agora, como fica evidente, precisamos definir trabalho e deslocamento virtual.

---

<sup>4</sup>Lagrange, no seu *Mécanique Analytique*, atribui a formulação mais geral do princípio dos trabalhos virtuais ao suíço Johann Bernoulli (1667 - 1748). No entanto, o princípio é bem mais antigo remontando a Jordanus no século XIII [12]. Para aplicações desse princípio, ver as referências [10, 13]

Um deslocamento virtual é um deslocamento no mesmo espírito dos modernos *gedankenexperiment* introduzidos por Einstein no contexto das revoluções científicas do início do século passado. A primeira característica de um deslocamento virtual é que olhamos para o sistema em um tempo fixo e analisamos quais são as restrições impostas ao movimento nesse instante<sup>5</sup>. A segunda característica é que dentre toda a classe de deslocamentos possíveis a um sistema físico (isto é, os deslocamentos compatíveis com os vínculos), com o tempo fixado, o deslocamento virtual é um desses deslocamentos possíveis. A terceira e última característica, é a de que esses deslocamentos tem a propriedade de serem infinitesimais. Essas três especificidades definem um deslocamento virtual: tempo fixado, compatibilidade com os vínculos e caráter infinitesimal. O trabalho da força resultante quando tomado junto a um deslocamento virtual é o que chamamos de trabalho virtual.

Mas o que queríamos era o princípio dos trabalhos virtuais, do qual a (2.2) não pode ser a representação matemática uma vez que envolve a força resultante externa (soma tanto das forças de origem física, forças aplicadas, quanto das que tem origem na geometria do sistema, forças de vínculo, forças de reação) e não apenas as forças aplicadas. Para prosseguir, lembramos que, anteriormente, separamos a força resultante sobre uma partícula em uma parte interna e outra externa. Quando tratamos de trabalhos virtuais é útil separar as forças resultantes em forças aplicadas, representadas por  $\mathbf{F}$  e forças de vínculo, expressas como  $\mathbf{f}$ . O próximo grande avanço é dado supondo que os vínculos são ideais. Anteriormente, afirmamos que vínculos são ideais se o trabalho virtual das suas respectivas forças (de vínculo, de reação) é nulo. Aplicando todas essas ideias à (2.2), por fim, chegamos à expressão matemática para o princípio dos trabalhos virtuais:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.4)$$

Aqui, a hipótese da idealidade dos vínculos para a obtenção do último resultado pode parecer demasiadamente geral e restritiva. Além do mais, justificativa alguma foi dada para tornar tal condição mais crível. A verdade é que se considerarmos sistemas sujeitos a vínculos tais como o de rigidez (distâncias fixas entre seus componentes) ou de movimento sobre uma superfície lisa os trabalhos virtuais das forças de vínculo são nulos. Podemos, ainda, argumentar que anteriormente, quando discutimos a lei de conservação da energia no contexto da Mecânica Newtoniana, trabalhamos com a suposição de que o trabalho total das forças internas se anulava e as forças de vínculo são, justamente, forças internas ao sistema. Considerando tudo isso, a exigência de os vínculos serem ideais talvez já não

---

<sup>5</sup>Essa fixação do tempo é uma condição necessária para que o trabalho virtual seja zero, uma vez que o trabalho realizado, quando levamos em conta um deslocamento real, com variação temporal, pode não ser zero [5]

pareça tão desagradável. Entretanto, se as considerações anteriores ainda não inspirarem confiança suficiente, poderíamos, simplesmente, então, seguir as referências [10, 14] e postular que o trabalho virtual realizado pelas forças de vínculo é zero, dada a essencialidade dessa condição para a Mecânica Analítica.

### 2.1.3 Princípio de D'Alembert

O princípio de D'Alembert<sup>6</sup> é como que a generalização do princípio dos trabalhos virtuais uma vez que se aplica aos casos em que os corpos estão sujeitos a uma força resultante não nula, ou seja, ao estudo da dinâmica.

Consideremos, por exemplo, o movimento de uma partícula submetida a uma força resultante não-nula no seu próprio referencial (não-inercial, dado que a partícula é acelerada). É claro que a partícula, no seu próprio referencial, encontra-se em repouso e, logo, deve existir uma força de inércia (força fictícia) que mantém a partícula em repouso. Essa é a ideia fundamental do chamado princípio de D'Alembert. Poderíamos, então, enunciar o princípio da seguinte maneira: as forças de inércia de um sistema estão em equilíbrio com as forças aplicadas<sup>7</sup> ao sistema [10].

Aplicando as ideias de D'Alembert podemos escrever  $\mathbf{R} - \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ , com o termo  $-\dot{\mathbf{p}}$  representando a força de inércia  $\mathbf{R}^*$  devida ao referencial acelerado da partícula e  $\mathbf{R}$  representando a força resultante externa atuando sobre a partícula. Logo, assim como no caso estático, faremos o trabalho virtual se anular. Se trabalharmos mais uma vez com vínculos ideais e separarmos a resultante  $\mathbf{R}$  em forças aplicadas e forças de vínculo, podemos fazer:

$$0 = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} - \dot{\mathbf{p}}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N [(\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) - \dot{\mathbf{p}}_i] \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é a expressão matemática do princípio de D'Alembert. Esse princípio representa um avanço em relação à formulação de Newton pois só leva em consideração as forças aplicadas e nenhuma força de vínculo [5]. É claro que a equação acima pode ser escrita diferentemente de modo a enfatizar o produto da derivada do momento com o

---

<sup>6</sup>Este princípio é devido ao francês Jean Le Rond D'Alembert que nasceu em 17 de novembro de 1717 em Paris, França e morreu na mesma Paris em 29 de outubro 1783. D'Alembert, que era altamente educado (em direito, medicina, ciências e matemática) colaborou entre 1751 e 1772 com Denis Diderot na celebrada *Encyclopédie* ou *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. Nesta, ele escreveu a maioria dos artigos matemáticos e científicos. O princípio de D'Alembert apareceu pela primeira vez em 1743 no livro *Traité de dynamique* que apresenta suas ideias em Mecânica [15]. Para aplicações do princípio de D'Alembert as referências [10, 13, 16] são indicadas.

<sup>7</sup>O termo força aplicada é usado no mesmo sentido que foi usado quando da dedução do princípio dos trabalhos virtuais.



deslocamento virtual,  $\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ , e da força com o deslocamento virtual,  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ . Em alusão ao resultado (2.4), chamaremos o termo que envolve a força de parte estática do princípio de D'Alembert e o termo que envolve o momento de parte dinâmica. É a partir daqui que, definitivamente, rumamos às equações de Lagrange.

Sendo os vínculos aos quais um sistema físico está sujeito holônomos e ideais, é possível introduzir um conjunto muito especial de variáveis na descrição do sistema, chamadas de coordenadas generalizadas e, tradicionalmente, denotadas por  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n$ . Essas coordenadas são compatíveis com os vínculos e representam o número mínimo de variáveis, independentes entre si, suficientes para descrever, completamente, a configuração de um sistema mecânico. O número de coordenadas generalizadas equivale, neste caso, ao número  $n$  de graus de liberdade do sistema dado por<sup>8</sup>  $n = 3N - p$ . O avanço em relação à abordagem vetorial é que temos um número mínimo de equações de movimento a serem resolvidas e as forças de vínculo (forças de reação) não mais aparecem nas equações de movimento.

Para começar a representar o sistema físico com essas novas coordenadas é preciso representar os vetores posição como funções dessas variáveis fazendo

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.7)$$

As equações acima são transformações supostas inversíveis quando levadas em conta as equações de vínculo (2.1). As coordenadas generalizadas são assim chamadas pois podem ser variáveis muito diferentes das usuais coordenadas cartesianas. As derivadas temporais das coordenadas generalizadas,  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_n$ , são suas respectivas velocidades generalizadas.

Agora que passamos a trabalhar com as coordenadas generalizadas, precisamos reescrever a equação (2.6) explicitamente em função dessas novas variáveis. Vamos começar pelos deslocamentos virtuais:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (2.8)$$

Na equação acima, notamos a ausência da derivada temporal. Isso se deve ao fato de que os deslocamentos virtuais são tomados com o tempo fixado.

Depois dos deslocamentos, dirigimo-nos às velocidades, pois como estamos lidando, por suposição, com um sistema de partículas, a massa é constante e a velocidade é essencial à expressão do momento. Da natureza das coordenadas generalizadas decorre que a velocidade, derivada temporal do vetor posição, em função das coordenadas generalizadas

---

<sup>8</sup>Aqui,  $N$  é o número de partículas do sistema mecânico e  $p$  o número de vínculos ao qual o sistema está sujeito, vide a (2.1)

e do tempo, é expressa na forma

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Calculados os deslocamentos virtuais e as velocidades em função das  $q_k$ , tratamos do que chamamos de termo estático da (2.6) que nada mais é que o trabalho virtual:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (2.10)$$

Aqui, faz-se necessária uma pausa para outra definição, a de força generalizada. Na equação anterior, chamamos

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (2.11)$$

de força generalizada, pois em consequência da natureza geral das coordenadas  $q_k$ , o termo  $Q_k$  pode não ter dimensão de força. Apesar disso, da coerência dimensional que deve existir na (2.10), o produto da força generalizada pela respectiva coordenada generalizada tem de ter dimensão de trabalho.

Passamos, então, a lidar com o termo restante do princípio de D'Alembert. Para esse termo os cálculos serão mais envolventes. Começamos com

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (2.12)$$

e observamos que

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \right\}, \quad (2.13)$$

de modo que na obtenção do último resultado empregamos a regra do produto no cálculo de derivadas, mais especificamente,

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} + m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right). \quad (2.14)$$

Apesar do progresso, a equação (2.13) parece confusa e pouco reveladora. A fim de apreendermos seu significado físico vamos fazer alguns cálculos intermediários. Começamos com

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right), \quad (2.15)$$

onde invertemos a ordem das derivadas para conseguir escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left\{ \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad (2.16)$$

e da expressão da velocidade em função das coordenadas generalizadas (2.9) concluir que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}. \quad (2.17)$$

Efetuos todos os cálculos anteriores, se substituirmos na equação (2.13) os resultados obtidos em (2.16) e (2.17), temos que

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \right\}. \quad (2.18)$$

Feitas todas as substituições, a (2.18) não parece muito mais reveladora que a (2.13). Sendo assim, continuamos a rearranjar seus termos no intuito de que algo mais sugestivo apareça. Podemos manipular as derivadas dos vetores velocidade em relação às velocidades generalizadas:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial \dot{q}_k} = 2 \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial q_k} = 2 \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k}. \quad (2.20)$$

De posse dos resultados acima, retornamos à (2.18) e encontramos

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}_i^2}{\partial q_k} \right\} \quad (2.21)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) \right\}. \quad (2.22)$$

A última equação revela o conteúdo físico disfarçado sob a (2.13): o termo dinâmico do princípio de D'Alembert está diretamente ligado à energia cinética de cada uma das partículas do sistema (agora deve ficar claro porque escolhemos chamá-lo de termo dinâmico). Se escrevermos

$$T = \sum_{i=1}^N T_i, \quad (2.23)$$

é fácil perceber que

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} T_i \right\} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \quad (2.24)$$

Depois de todas essas manipulações, os dois termos da equação (2.6), em função das

coordenadas generalizadas, podem ser escritos nas formas

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (2.25)$$

e

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \delta q_k. \quad (2.26)$$

Agora, resta-nos utilizar os dois resultados acima e, simplesmente, efetuar a subtração na expressão matemática do princípio de D'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (2.27)$$

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \delta q_k = 0, \quad (2.28)$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ Q_k - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \right\} \delta q_k = 0. \quad (2.29)$$

Anteriormente, quando introduzimos as coordenadas generalizadas, dissemos que essas eram independentes entre si. Considerando essa independência e a arbitrariedade dos deslocamentos  $\delta q_k$ , a única maneira de a (2.29) ser satisfeita é se cada um dos termos da soma se anular individualmente. Dessa condição, resultam as chamadas equações de D'Alembert-Lagrange [8],

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.30)$$

As equações acima são equações gerais que se aplicam quaisquer sejam as forças aplicadas envolvidas, sendo os vínculos, como sempre, holônomo e ideais.

Entretanto, estamos interessados no caso específico em que as forças sejam deriváveis de um potencial escalar  $U(\mathbf{r}, t)$ , ou seja,

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U(\mathbf{r}, t). \quad (2.31)$$

Aplicando o resultado acima na equação (2.11), na qual defimos força generalizada, temos que

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}. \quad (2.32)$$

É visível que a forma da (2.32) não se ajusta à expressão (2.30). Para resolver esse

problema, temos de efetuar mais alguns cálculos:

$$\sum_{i=1}^N \nabla_i U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \hat{\mathbf{k}} \right) \quad (2.33)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_k} = -Q_k. \quad (2.34)$$

Substituindo a última igualdade da (2.34) na (2.30), ficamos com

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (2.35)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0. \quad (2.36)$$

Como escolhemos trabalhar com potenciais apenas dependentes das posições, tais potenciais não dependem das velocidades generalizadas segundo a (2.7). Assim, é claro que

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (2.37)$$

e reescrevendo, uma última vez, a (2.36),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0. \quad (2.38)$$

A partir de agora, definimos a função de Lagrange, ou Lagrangiana, como sendo a diferença entre as energias cinética e potencial,  $L = T - U$ . Finalmente, escrevemos as famosas equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.39)$$

Em resumo, partimos do princípio de D'Alembert e supondo certas condições chegamos às equações de Lagrange. Na sua forma mais geral a Lagrangiana é uma função do tipo

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.40)$$

com  $n$  representando o número de graus de liberdade do sistema de partículas. Uma vez estabelecida a Lagrangiana para uma situação física de interesse, as equações de Lagrange determinam as equações de movimento e, por conseguinte, a evolução dinâmica do sistema.

Por fim, alertamos que a Lagrangiana deve ser escrita em relação a um referencial inercial. Isso se deve ao fato de que todo o processo de dedução da Mecânica Lagrangiana envolveu o uso das leis de Newton e estas só são válidas, na forma apresentada neste

trabalho, em tais referenciais.

## 2.2 Leis de Conservação

Da mesma forma que falamos sobre leis de conservação no [Capítulo 1](#), abordaremos esse tema mais uma vez, só que agora, usaremos a Mecânica que acabamos de construir. Uma diferença essencial entre as abordagens desse capítulo e do capítulo anterior, que ficará rapidamente evidente, é que mais adiante seremos capazes de estabelecer conexões diretas entre resultados de conservação e propriedades de simetria. Mas antes disso, precisamos de duas definições. A primeira é a de coordenada cíclica e a segunda de momento generalizado.

Considerando uma Lagrangiana que representa um sistema físico dizemos que uma coordenada generalizada  $q_k$  é cíclica ou ignorável quando essa não está presente na Lagrangiana mas sua correspondente velocidade generalizada  $\dot{q}_k$ , está. Atendida a condição anterior, usamos a [\(2.39\)](#) para escrever

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = cte, \quad (2.41)$$

onde  $p_k$  é chamado de momento generalizado associado à coordenada  $q_k$ . O momento na [\(2.41\)](#) é também, às vezes, dito momento conjugado ou, ainda, momento canônico conjugado à coordenada  $q_k$ . Como neste trabalho assumimos que a [\(2.34\)](#) é válida, a igualdade entre as derivadas parciais da Lagrangiana e da energia cinética é apropriada. Em palavras, o momento generalizado associado a uma coordenada cíclica é conservado. É importante esclarecer que o momento conjugado não, necessariamente, representa alguma componente do momento linear do sistema uma vez que as coordenadas generalizadas podem não ter dimensão de comprimento [\[17\]](#). Apesar da natureza bastante geral da [\(2.41\)](#), duas situações importantes podem ser inferidas considerando a equação [\(2.10\)](#).

Seja um sistema físico representado pela Lagrangiana  $L = T - U$  com o potencial independente das velocidades generalizadas (como temos feito) mas, possivelmente, dependente do tempo. Atentemos, a partir deste momento, para as coordenadas do centro de massa do sistema. Translações ou rotações do centro de massa correspondem, naturalmente, a translações e rotações do sistema como um todo. Visivelmente, a energia cinética do sistema não pode se alterar sob variações nas coordenadas generalizadas que especificam o estado do sistema<sup>9</sup> e, portanto, não pode ser função das coordenadas gene-

---

<sup>9</sup>É da natureza dos vetores serem objetos não localizados e, portanto, não afetados por translações. Porém, quando consideramos rotações é certo que suas direções são alteradas e os vetores não são mais os mesmos. O que irá garantir a preservação da energia cinética é o fato da dependência desta com o módulo quadrado da velocidade que é claramente constante tanto sob translações quanto rotações.

realizadas [17]. Dos argumentos anteriores, decorre que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} \quad (2.42)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k, \quad (2.43)$$

logo,

$$\dot{p}_k = Q_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.44)$$

Se, ainda, uma coordenada  $q_k$  tem dimensão de comprimento, para que a (2.10) seja dimensionalmente coerente é necessário que a força generalizada  $Q_k$  correspondente tenha dimensão de força e o momento generalizado  $p_k$  seja o momento linear correspondente à coordenada de posição. Da mesma forma, se a coordenada generalizada é um ângulo (fisicamente, tal coordenada é adimensional) a força generalizada há de ter dimensão de torque e o momento generalizado é o momento angular associado.

Estendendo a nossa análise, suporemos que a coordenada  $q_k$  é cíclica. Sendo assim, se  $q_k$  é uma posição cíclica, o momento linear do sistema nessa direção deve se conservar segundo a (2.41). Caso  $q_k$  seja um ângulo cíclico, o momento angular correspondente deve se manter constante. Da mesma forma, a Lagrangiana permanece inalterada pelo deslocamento de uma coordenada cíclica uma vez que não existe qualquer dependência funcional explícita. Entretanto, segundo a nossa investigação, o deslocamento de uma posição cíclica significa uma translação no todo do sistema, enquanto que a alteração de um ângulo ignorável representa uma rotação. Consequentemente, acabamos de associar a constância dos momentos a propriedades de simetria do sistema que se refletem na Lagrangiana. Essa é apenas uma amostra da capacidade da Mecânica Analítica em estabelecer ligações entre simetrias e quantidades dinâmicas conservadas.

### 2.2.1 Variações Infinitesimais

A partir de agora introduziremos uma nova notação na escrita das equações de Lagrange com base nas referências [5, 7] deste trabalho. Essa notação nos será muito útil no desenvolvimento do texto.

Depois de apresentadas as equações de Lagrange em termos das coordenadas generalizadas, iremos rerepresentá-las usando coordenadas retangulares de modo a explorar a representação simples do gradiente nessas coordenadas. Podemos reescrever a função de Lagrange para um sistema de  $N$  partículas, na sua forma genérica, como

$$L = L(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.45)$$

e as equações de Lagrange ficam

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (2.46)$$

Seguidamente, definimos os vetores, resultados da derivação da função de Lagrange em relação aos vetores posição e velocidade de cada um dos componentes de um sistema sob análise. Eles são dados por

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial L}{\partial y_i} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial L}{\partial z_i} \hat{\mathbf{k}} \quad (2.47)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \hat{\mathbf{k}} \quad (2.48)$$

onde, claramente, a (2.47) é só uma maneira diferente de escrever o gradiente de uma função escalar em relação às coordenadas da  $i$ -ésima partícula.

Quando analisarmos as conservações dos momentos linear e angular, mais à frente, precisaremos analisar como uma Lagrangiana se comporta quando variada sob translações e rotações. Sendo assim, introduzimos os vetores posição e velocidade

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + \delta \mathbf{v}_i, \quad (2.50)$$

representando variações na posição  $\delta \mathbf{r}_i$  e velocidade  $\delta \mathbf{v}_i$  da  $i$ -ésima partícula com o tempo fixado, no mesmo espírito dos deslocamentos virtuais (para nossos propósitos é interessante analisar o sistema em situações diferentes, em um mesmo instante no tempo, no que concerne as posições e velocidades de seus constituintes).

Quando submetida às variações de posição e velocidade dadas nas equações acima, a Lagrangiana é sujeita a uma variação, em relação ao seu estado anterior, que representaremos na forma

$$\delta L = L(\mathbf{r}'_i, \mathbf{v}'_i, t) - L(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t). \quad (2.51)$$

Considerando as variações nas posições e velocidades dadas pelas (2.49) e (2.50), podemos expressar a variação da Lagrangiana fazendo

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \delta \mathbf{v}_i \right). \quad (2.52)$$

A equação acima é apenas uma generalização para o caso de um diferencial total de uma função escalar que depende da posição e das velocidades em três dimensões. Como já anunciamos, desejamos analisar o sistema físico sob diferentes condições em um mesmo instante de tempo, por isso nenhuma variação temporal é levada em conta nas equações



anteriores. Quando chegado o momento de analisarmos o papel da variação temporal na nossa discussão, exporemos os cálculos. Vamos às leis de conservação.

## 2.2.2 Conservação do Momento Linear

Neste trabalho, na seção [Leis de Newton](#), logo após a discussão da primeira lei de movimento, asseguramos que o espaço é homogêneo em um referencial inercial, ou seja, todos os pontos do espaço são equivalentes entre si. Desse fato, decorre que a Lagrangiana de um sistema fechado deve se manter invariante sob translações no espaço<sup>10</sup>.

Consideremos, então, a Lagrangiana de um sistema mecânico fechado, que se reduz à sua energia cinética. Se, mantendo o tempo fixado, transladarmos infinitesimalmente cada um dos componentes do conjunto de  $\delta \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\epsilon}$ , com  $\boldsymbol{\epsilon}$  arbitrário, e impormos a invariância da Lagrangiana, temos

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = 0, \quad (2.53)$$

onde fizemos uso das equações de Lagrange na forma [\(2.46\)](#) e ressaltamos que  $\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i = \mathbf{0} = \delta \mathbf{v}_i$  visto que os vetores velocidade de cada uma das partículas são apenas transladado espacialmente. Agora, usando a [\(2.41\)](#), notamos que

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \quad (2.54)$$

e

$$\delta L = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad (2.55)$$

com  $\mathbf{P}$  correspondendo ao momento linear total do sistema. Como  $\boldsymbol{\epsilon}$  é não-nulo e arbitrário, a única maneira da igualdade ser satisfeita é a variação do momento linear total ser nula, ou seja, o momento linear total de um sistema fechado é constante de movimento. É claro que podem haver outras situações nas quais um sistema possua simetria parcial sob translações de modo que a conservação do momento linear ocorra em direções específicas.

Desse modo, obtemos a primeira relação direta entre simetrias e leis de conservação: a invariância da Lagrangiana sob translações implica na conservação do momento linear. Esse resultado já havia sido por nós sugerido anteriormente, o que fizemos foi apenas uma demonstração mais formal que se aplica diretamente ao caso que havíamos tratado no primeiro capítulo.

---

<sup>10</sup>O estado de movimento de um sistema fechado não pode, simplesmente, alterar-se devido à sua localização ao longo de uma direção do espaço. É necessário que haja a ação de algum agente externo.

### 2.2.3 Conservação do Momento Angular

Depois da homogeneidade, destacamos a isotropia do espaço, que é asserção de que todas as direções do espaço são equivalentes. Agora, a invariância da Lagrangiana de um sistema fechado sob rotações (simetria rotacional) deve ser expressão dessa isotropia.

Se submetermos um sistema fechado a uma rotação infinitesimal arbitrária representada pelo vetor<sup>11</sup>  $\delta\boldsymbol{\phi}$ , as variações nas posições e velocidades das partículas do sistema são

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_i \quad (2.56)$$

e

$$\delta\mathbf{v}_i = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}_i. \quad (2.57)$$

Se impormos a condição de invariância<sup>12</sup> da Lagrangiana obtemos

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \delta\mathbf{v}_i \right) \quad (2.58)$$

$$= \sum_{i=1}^N [\dot{\mathbf{p}}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}_i)] = 0, \quad (2.59)$$

onde usamos a (2.54) para substituir a derivada da Lagrangiana em relação à velocidade e a (2.46) para encontrar a relação entre o gradiente da Lagrangiana e o momento linear. Se usarmos que o resultado de um produto misto se mantém o mesmo sob duas comutações de vetores, podemos rearranjar a (2.59) na forma

$$\delta L = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i) = 0 \quad (2.60)$$

e notando que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (2.61)$$

chegamos ao seguinte resultado:

$$\delta L = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0. \quad (2.62)$$

Mais uma vez,  $\mathbf{L}$  representa o momento angular total do sistema e como o vetor  $\delta\boldsymbol{\phi}$  é não-nulo (de fato, infinitesimal) e arbitrário, a última igualdade implica na conservação

<sup>11</sup>Nos referimos a rotações infinitesimais pois estas possuem caráter sabidamente vetorial ao contrário de rotações finitas [9]. O vetor  $\delta\boldsymbol{\phi}$  representa o vetor axial (segundo a regra da mão direita) cuja direção coincide com a do eixo de rotação e a magnitude indica o ângulo de rotação.

<sup>12</sup>Aqui, a invariância da função de Lagrange vai significar o anulamento dos dois termos da (2.52) ao contrário do que aconteceu para o momento linear, pois, como mencionamos, vetores se mantêm inalterados quando transladados mas mudam quando rotacionados. Logo, a translação de todo o conjunto de partículas não tem efeito algum sobre os vetores velocidade, o que não acontece no caso da rotação.

do momento angular total de um sistema mecânico fechado. Outra vez mais, obtemos o mesmo resultado do primeiro capítulo seguindo um caminho inteiramente diferente.

Assim como para o momento linear, a conservação parcial do momento angular pode ocorrer dependendo das propriedades de simetria do sistema. Um caso importante é o de forças centrais no qual o momento angular na direção ortogonal ao plano de rotação (direção do eixo de rotação) é conservado [7].

## 2.2.4 Conservação da Energia

Por fim, deve ser possível enunciar um teorema de conservação da energia de mesma natureza daquele enunciado no capítulo anterior, mas usando a formulação Lagrangiana. De fato, é possível enunciar um teorema mais geral que sob condições específicas se reduz à conservação da energia. A análise desse caso é razoavelmente diferente da análise dos momentos uma vez que se relaciona à invariância da Lagrangiana sob translações temporais e usaremos coordenadas generalizadas ao invés de coordenadas cartesianas.

Consideremos uma Lagrangiana de um sistema holônomo dada por  $L = T - U$  com energia potencial na forma  $U = U(\mathbf{r})$ . A derivada total da Lagrangiana em relação ao tempo é

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.63)$$

Se usarmos que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k, \quad (2.64)$$

podemos reescrever a (2.63) como

$$\frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.65)$$

ou, ainda,

$$\frac{d}{dt} \left( L - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.66)$$

Fazemos, aqui, uma pausa para uma importante definição. Definimos a quantidade  $h$ , chamada de função energia<sup>13</sup>, como sendo

$$h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (2.67)$$

---

<sup>13</sup>Seguindo as referências [5, 17] evitamos chamar a quantidade  $h = h(q_k, \dot{q}_k, t)$  de Hamiltoniana. A Hamiltoniana é, de fato, uma função do tipo  $H = H(q_k, p_k, t)$ , com os  $q_k$  e  $p_k$  independentes entre si, o que se obtém da nossa função energia efetuando-se uma transformação de Legendre para as velocidades generalizadas. Uma melhor explanação do papel das transformações de Legendre na passagem do formalismo Lagrangiano para o Hamiltoniano é encontrada na referência [14].

Usando da definição acima reescrevemos, então, a (2.66) para encontrar que

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.68)$$

Da equação anterior fica claro que a condição para que  $h$  seja constante de movimento é que a Lagrangiana não dependa explicitamente do tempo. Uma vez que já assumimos que o potencial é independente do tempo, a única outra fonte possível de dependência temporal explícita da Lagrangiana são as equações de vínculo [5, 16, 17]. De qualquer maneira, encontrada a Lagrangiana de um sistema físico, é simples inferir se a função energia é conservada.

Passamos, então, a averiguar as condições necessárias para que  $h$  seja igual à energia, ou seja,  $h = E = T + U$ , de modo que possamos analisar a conservação da energia. Sabendo que a prescrição para encontrar a função de Lagrange é dada por  $L = T - U$ , vemos que a única maneira de a (2.67) ser igual à energia é o primeiro termo ser igual a  $2T$ . Sendo a energia potencial independente das velocidades, a derivada parcial da Lagrangiana em relação às velocidades generalizadas é a derivada da energia cinética em relação a tais velocidades. Por isso, é necessário que investiguemos como a energia cinética se relaciona às coordenadas generalizadas com o auxílio das (2.23) e (2.9). A energia de movimento total do sistema é dada por

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} \cdot \left\{ \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\} \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right\}. \quad (2.70)$$

Para chegar ao último resultado, valemo-nos do fato de que  $k$  e  $l$  são apenas índices mudos para reescrever a (2.69) na forma da (2.70). Distribuindo os termos da (2.70), por sua vez, temos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \dot{q}_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \quad (2.71)$$

ou, notando que o índice de soma  $i$  é precedente em relação aos outros pois designa os elementos do sistema,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (2.72)$$

Se requerermos que as equações (2.7), que relacionam os vetores posição às coordenadas generalizadas não contenham o tempo (essa restrição logo se esclarecerá), a energia

cinética total fica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (2.73)$$

com

$$f_{kl} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l}. \quad (2.74)$$

A função  $f_{kl}$  é, então, uma função das coordenadas generalizadas e a energia cinética uma função homogênea de grau 2 das velocidades generalizadas. Usando o teorema de Euler para funções homogêneas<sup>14</sup>, vemos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T \quad (2.75)$$

que é justamente o resultado que procurávamos e podemos, neste caso, apresentar a (2.67) na forma

$$h = 2T - (T - U) = T + U = E. \quad (2.76)$$

Após todos esses cálculos é oportuno realizar um balanço a respeito do que encontramos. Ao contrário da Mecânica Newtoniana, vemos que na formulação Lagrangiana a conservação da energia é um caso particular da conservação da função energia do sistema. Para que a quantidade  $h$  correspondente a um sistema mecânico permaneça constante durante a evolução do movimento é necessário apenas que a Lagrangiana não dependa explicitamente do tempo. De um modo geral, como já mencionamos, isso equivale à energia potencial ser apenas função das coordenadas generalizadas e as equações de vínculo (2.1) não possuírem qualquer dependência temporal explícita. Por outro lado, para que a energia do sistema seja constante de movimento é necessário que a função energia seja conservada e esta, por sua vez, seja equivalente à energia  $h$  que conseguimos com a condição de que as equações (2.7) não dependam do tempo.

No caso de um sistema fechado, em que a grandeza  $h$  do sistema é igual à energia, a condição de que a Lagrangiana não seja explicitamente dependente do tempo é reflexo da homogeneidade temporal<sup>15</sup> [7]. Ainda, fica claro da nossa discussão que a energia é conservada para potenciais só dependentes das posições das partículas e recuperamos os dois casos de conservação da energia do primeiro capítulo. Enfim, o fato de a energia ser constante de movimento é consequência direta da invariância da Lagrangiana sob translações temporais.

Quando abordamos a conservação da energia partindo das leis de Newton, vimos que ela ocorria para sistemas fechados ou para sistemas sujeitos a forças (internas e externas)

<sup>14</sup>O teorema é demonstrado no [Apêndice](#) deste trabalho.

<sup>15</sup>Mais uma vez, como um sistema fechado não pode alterar o estado do seu movimento, ele deve apresentar uma mesma configuração geral em qualquer instante de tempo. É claro que internamente podem haver mudanças (por isso a derivada parcial e não total em relação ao tempo), mas a condição geral do sistema permanece a mesma.

conservativas com as forças internas obedecendo a terceira lei de Newton na sua forma forte. No entanto, ressaltamos o fato notável de que nas últimas três seções não fizemos qualquer menção à terceira lei de Newton, nem ao menos em sua forma fraca para chegar a qualquer resultado de conservação [5]. Tudo o que usamos foram as suposições de que as Lagrangianas carregam consigo as propriedades de simetria do sistema.

# Capítulo 3

## Simetrias e Leis de Conservação

Neste último capítulo, enunciaremos o princípio de Hamilton, um postulado a partir do qual também podemos obter as equações de Lagrange. Após isso, apresentaremos e demonstraremos o teorema de Noether, um teorema que visa estabelecer uma conexão geral entre condições de simetria e resultados de conservação.

### 3.1 Princípio de Hamilton

Previamente, obtivemos as equações de Lagrange partindo do princípio de D'Alembert que é um princípio diferencial. Usando esse princípio, analisamos o movimento de um sistema mecânico de  $N$  partículas usando o conceito de deslocamento virtual e certas restrições sobre os vínculos e energia potencial aos quais o sistema é submetido. O avanço da teoria Lagrangiana em relação à Newtoniana, dissemos, dá-se no fato de apenas lidarmos com forças que escolhemos chamar de forças aplicadas, forças externas ao sistema tais como as do eletromagnetismo ou da gravidade, não mais com as forças de vínculo, e do fato de que o conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas que introduzimos em seguida correspondia ao exato número de graus de liberdade do sistema, produzindo, através das equações de Lagrange, o número mínimo de equações diferenciais necessárias para a determinação do movimento.

O que deixamos de mencionar é que as coordenadas generalizadas,  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_n$ , formam um espaço  $n$ -dimensional chamado de espaço de configuração em que cada ponto desse espaço descreve uma configuração possível do sistema mecânico sob análise [17]. Também, como cada uma dessas coordenadas é, por sua vez, função do tempo,  $q_k = q_k(t)$ , a evolução temporal do movimento fará com que o ponto representativo do sistema nesse espaço descreva uma curva que chamaremos de caminho do sistema [17]. Como as coordenadas generalizadas não, necessariamente, guardam qualquer semelhança com as coordenadas cartesianas, o movimento no espaço de configuração, em geral, não tem porque guardar qualquer correspondência com o movimento do sistema mecânico no espaço tridimensional.

Tendo isso em conta, rumamos à formulação mais geral da lei que governa o movimento de sistemas mecânicos [7], a saber, um princípio integral, um princípio variacional, chamado de princípio de Hamilton. O princípio recebe esse nome em alusão ao matemático e astrônomo irlandês Sir William Rowan Hamilton<sup>1</sup> (1805 - 1865).

**Princípio de Hamilton<sup>2</sup>:** *dado um sistema mecânico holônomo descrito pela Lagrangiana  $L = T - U$ , seu movimento do instante  $t_i$  ao instante  $t_f$  é tal que a ação, definida por*

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

*é estacionária para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória no espaço de configuração.*

Por fazer a ação  $S$  estacionária queremos dizer que para variações de primeira ordem na função de Lagrange,  $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , a integral de ação não se altera, ou de outro modo, a integral de ação produz o mesmo resultado no caso em que escolhermos uma Lagrangiana  $L'$  que difere por um parâmetro infinitesimal de primeira ordem da Lagrangiana original  $L$ . Uma analogia com o cálculo diferencial faz-nos pensar que para um ponto extremo (extremante)  $x^*$  de uma função  $f = f(x)$  a variação em primeira ordem da função calculada neste ponto é nula,  $f'(x = x^*) = 0$ , ou que a variação de primeira ordem em  $f(x)$  quando  $x = x^*$  é igual a zero. Desse modo, poderíamos olhar para o problema de fazer a ação estacionária como o problema de encontrar a função  $L$  que extremiza a integral de ação [19]. A solução desse problema é conhecida. Ela é dada pelas equações de Lagrange<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>Sir William Rowan Hamilton nasceu em 4 de agosto de 1805 e morreu em 2 de setembro de 1865 em Dublin, Irlanda. Desde cedo dava demonstrações de seu gênio e aos 10 anos já era familiarizado com uma dúzia de línguas orientais. Foi apontado astrônomo real da Irlanda aos 22 anos enquanto ainda era um estudante de graduação [18]. Seus primeiros trabalhos publicados em Mecânica são um artigo de 1834 chamado *First Essay on a General Method in Dynamics* e outro de 1835 chamado *Second Essay on a General Method in Dynamics*, no qual Hamilton introduz a integral de ação que ele veio a chamar de função principal. As ideias de Hamilton referentes ao campo da Mecânica tem raízes em seus escritos anteriores sobre Ótica Geométrica. Hamilton, cioso da unidade que o trabalho de Lagrange havia dado à Mecânica tentou trazer harmonia ao conjunto de resultados experimentais em Ótica conhecidos até sua época. Uma virtude dos seus trabalhos em Ótica era que dada a disputa existente à época entre as teorias ondulatória e corpuscular da luz suas ideias eram capazes de ser interpretadas partindo-se de ambas as teorias. Nesse sentido, Hamilton foi um precursor e direta inspiração de Louis de Broglie e Erwin Schroedinger [12].

<sup>2</sup>O princípio de Hamilton é, às vezes, também chamado de princípio de mínima ação [7, 19] embora seja sempre ressaltado que a ação é, mais precisamente, estacionária, ou seja, o resultado numérico da integral corresponde a um extremo, mais comumente um mínimo ou um ponto de sela.

<sup>3</sup>Esse tipo de problema, de extremização de uma integral, é estudado por um ramo da matemática chamado de Cálculo das Variações. No contexto do Cálculo das Variações as equações que temos chamado de equações de Lagrange também são chamadas de equações de Euler ou equações de Euler-Lagrange.



e dessa forma, partindo do princípio de Hamilton chegamos às equações de Lagrange<sup>4</sup>.

Ainda, faz-se necessário esclarecer que o princípio de Hamilton, como apresentado acima, é válido para uma gama maior de sistemas mecânicos do que a que estávamos preocupados anteriormente. O princípio é válido para sistemas sujeitos a vínculos holônomos e energias potenciais generalizadas do tipo<sup>5</sup>  $U = U(q, \dot{q}, t)$ . Sistemas mecânicos desse tipo são chamados de monogênicos. Para o caso em que  $U = U(q)$  o sistema, além de monogênico, é conservativo [17].

Uma vantagem inerente à formulação Lagrangiana, que fica mais clara a partir do princípio variacional de Hamilton, é a de que como a integral de ação é invariante qualquer que seja a escolha das coordenadas generalizadas usadas para expressar  $L$  as equações de Lagrange tomam sempre a mesma forma não importa quais sejam as coordenadas generalizadas escolhidas [17].

## 3.2 Teorema de Noether

Na seção [Leis de Conservação](#) do [Capítulo 2](#) tratamos de obter as conservações do momento linear, do momento angular e da energia no contexto da Mecânica de Lagrange. Da exposição feita, pensamos ser evidentes as interessantes conexões que essa formulação permite evidenciar entre as simetrias de um sistema físico, as condições de invariância da Lagrangiana e as leis de conservação. O que faremos agora, é dar o próximo passo: analisar a invariância da ação sob determinadas operações matemáticas realizadas sobre um sistema físico e sua relação com a constância de determinadas grandezas físicas. A ferramenta matemática que permitirá o prosseguimento do nosso estudo é um teorema conhecido como teorema de Noether, devido à matemática alemã de origem judia Emmy Noether (1882 - 1935)<sup>6</sup>.

---

<sup>4</sup>Não demonstraremos, aqui, de maneira formal, como as equações de Lagrange podem ser deduzidas do princípio de Hamilton pois é necessária a introdução do já referido Cálculo das Variações. No entanto, demonstrações podem ser facilmente encontradas. Sugerimos, por exemplo, as referências [2,5,7,8,10,17].

<sup>5</sup>Havíamos restringido nossa atenção apenas a forças que podem ser derivadas de uma função energia potencial, escalar, possivelmente dependente do tempo. No entanto, se as forças generalizadas são derivadas de um potencial generalizado  $U = U(q, \dot{q}, t)$  através da expressão  $Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right)$  as equações de Lagrange também se aplicam. Esse caso não é uma mera curiosidade acadêmica, mas um caso de interesse físico pois a força de Lorentz pode ser derivada de um tal potencial [5, 17].

<sup>6</sup>Amalie Emmy Noether nasceu em Erlangen, Alemanha, em 23 de março de 1882 e faleceu em Bryn Mawr, EUA, em 14 de abril de 1935. Alemã de origem judia ela enfrentou dificuldades à época de seus estudos de graduação entre 1900-1902, na Universidade de Erlangen, visto que mulheres não podiam se matricular oficialmente em universidades alemãs. Superadas as dificuldades iniciais e mudadas as regras em relação a matrículas de mulheres (em 1904) ela prosseguiu seus estudos de matemática na mesma universidade finalizando seu doutorado, distintamente, em 1907 sob a orientação de Paul Gordan. Em 1915 ela é convidada por David Hilbert para se juntar a ele na Universidade de Göttingen para o estudo de questões relacionadas a invariantes na recém-formulada Teoria da Relatividade Geral de Einstein. É nesse contexto que surge o teorema hoje conhecido como teorema de Noether. Ela permanece trabalhando em Göttingen apesar de se tornar professora, oficialmente, apenas em 1919 e lá continua até a ascensão do regime nazista, em 1933, quando a Emmy é oferecida uma posição de professor visitante no Bryn Mawr College a qual ela aceita. Em 1934, Noether começa a dar aulas semanais no Institute for Advanced Study

Alguns comentários merecem ser feitos antes da apresentação e demonstração do teorema. O teorema de Noether está intimamente ligado ao estudo de invariantes (“coisas” ou objetos que não mudam sob certas condições ou operações) e ao conceito de simetria. No entanto, julgamos importante esclarecer que a ideia mais próxima do que aqui queremos dizer com simetria é a ideia de indiscernibilidade de diferenças [3]. O teorema ainda está ligado a entes matemáticos chamados funcionais, objeto de estudo do Cálculo das Variações, que nada mais são do que integrais, como a integral de ação (3.1) no princípio de Hamilton, que dependem de um conjunto de funções, como a Lagrangiana  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , no caso da ação. O que o teorema faz é analisar como esse funcional, quando extremizado (como no caso da ação), comporta-se sob determinadas transformações matemáticas sendo essas transformações contínuas e infinitesimais. Desse modo, passamos a considerar a seguinte transformação no espaço e no tempo:

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon X(q(t), t), \\ q'_k(t') &= q_k + \epsilon \Psi_k(q(t), t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nas equações acima,  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal e as funções  $X(q(t), t)$  e  $\Psi_k(q(t), t)$  são funções de  $n+1$  variáveis:  $n$  coordenadas generalizadas (representadas por  $q(t)$ ) e o tempo,  $t$ . As funções  $X(q(t), t)$  e  $\Psi_k(q(t), t)$  são chamadas de geradores da transformação [3]. Agora, se usarmos a transformação (3.3) na (3.1), a variação da ação é representada por

$$\Delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q'_k(t'), \frac{dq'_k(t')}{dt'}, t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_k(t), \frac{dq_k(t)}{dt}, t\right) dt. \quad (3.4)$$

O que o teorema de Noether nos dirá é que se a variação da ação é nula ( $\Delta S = 0$ ) sob dada transformação, ou seja, se a ação é invariante (mantém-se a mesma) sob a determinada transformação, existe uma correspondente constante de movimento. Por fim, enunciaremos o teorema e o demonstraremos em seguida.

**Teorema de Noether<sup>7</sup>:** *dados um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade, se a ação é invariante sob a transformação (3.3), então a quantidade*

$$C = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}_k X - \Psi_k) - LX \quad (3.5)$$

*é constante de movimento, onde  $L = T - U$  é a Lagrangiana do sistema.*

---

em Princeton. Tristemente, apenas 18 meses após sua chegada aos Estados Unidos um tumor é descoberto e ela morre vítima de complicações da cirurgia num intervalo de 4 dias após o diagnóstico [3, 20].

<sup>7</sup>Esta é uma apresentação apenas introdutória do teorema de Noether e é largamente baseada na referência [5]. Para uma discussão extensa e apaixonada do teorema de Noether como um pilar de todo o desenvolvimento da Física no século XX que se estende desde um nível introdutório até um desenvolvimento mais formal e avançado, ver a referência [3].

Começamos a demonstração do teorema calculando as derivadas da transformação (3.3), vide a (3.4). Como  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal, reteremos apenas termos de primeira ordem em  $\epsilon$  nos cálculos a seguir [5]. Começamos pela derivada da parte temporal:

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon\dot{X} \implies \frac{dt}{dt'} = (1 + \epsilon\dot{X})^{-1} = 1 - \epsilon\dot{X} \quad (3.6)$$

onde na equação à direita usamos a Série Binomial<sup>8</sup> para expandir o termo entre parênteses. A derivada da parte espacial da transformação fica:

$$\frac{dq'_k(t')}{dt'} = \frac{dq'_k}{dt} \frac{dt}{dt'} = (1 - \epsilon\dot{X})(\dot{q}_k + \epsilon\dot{\Psi}_k) = \dot{q}_k + \epsilon\dot{\Psi}_k - \epsilon\dot{X}\dot{q}_k - \epsilon^2\dot{X}\dot{\Psi}_k = \dot{q}_k + \epsilon\xi_k, \quad (3.8)$$

sendo que na última igualdade retemos apenas os termos de primeira ordem em  $\epsilon$  e usamos a variável  $\xi_k$  definida como

$$\xi_k = \dot{\Psi}_k - \dot{q}_k\dot{X}. \quad (3.9)$$

Calculadas as derivadas, podemos seguir para o cálculo da variação da ação. Substituindo os resultados que encontramos nas (3.6) e (3.8) na equação (3.4), a variação da ação  $S$  é dada por

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k + \epsilon\Psi_k, \dot{q}_k + \epsilon\xi_k, t + \epsilon X)(1 + \epsilon\dot{X})dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)dt \quad (3.10)$$

onde a mudança da variável de integração na primeira integral de  $t'$  para  $t$  também altera, obviamente, os limites de integração, e as duas integrais passam a ter os mesmos limites de integração. Para continuar, expandiremos a Lagrangiana da primeira integral até primeira ordem em relação ao parâmetro infinitesimal  $\epsilon$ :

$$L(q_k + \epsilon\Psi_k, \dot{q}_k + \epsilon\xi_k, t + \epsilon X) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{\partial L}{\partial \epsilon}\epsilon. \quad (3.11)$$

A derivada parcial da Lagrangiana em relação a  $\epsilon$  resulta em

$$\frac{\partial L}{\partial \epsilon} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k}\Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\xi_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}X \quad (3.12)$$

que quando aplicada na (3.11) nos dá

$$L(q_k + \epsilon\Psi_k, \dot{q}_k + \epsilon\xi_k, t + \epsilon X) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k}\epsilon\Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\epsilon\xi_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}\epsilon X. \quad (3.13)$$

---

<sup>8</sup>Se  $|x| < 1$  e  $m \in \mathbb{R}$ , a Série Binomial é representada pelo seguinte resultado:

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{n!}x^p + \dots \quad (3.7)$$

Claramente, o resultado anterior, quando levado à (3.10) irá simplificá-la grandemente. É isso o que faremos a seguir:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q_k, \dot{q}_k, t) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \epsilon \Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \epsilon \xi_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \epsilon X \right\} (1 + \epsilon \dot{X}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt. \quad (3.14)$$

Desprezando os termos de segunda ordem em  $\epsilon$  na equação acima, resta-nos

$$\Delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \xi_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} \right\} dt. \quad (3.15)$$

A condição do teorema é de que a variação da ação seja nula ( $\Delta S = 0$ ) sob a transformação (3.3) para que haja uma constante de movimento. A única maneira de isso acontecer, uma vez que o parâmetro  $\epsilon$  é não-nulo e o intervalo de integração é arbitrário, é a soma entre chaves da última equação se anular [5]. Se, ainda, usarmos a expressão da variável  $\xi_k$  dada na (3.9), a condição de nulidade da variação da ação implica em

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\dot{\Psi}_k - \dot{q}_k \dot{X}) \right\} + \frac{\partial L}{\partial t} X + L \dot{X} = 0. \quad (3.16)$$

A última igualdade é condição necessária e suficiente para que a ação seja invariante sob a transformação (3.3), e chamada de condição de Noether. Pelo simples agrupamento de termos semelhantes, a condição de Noether pode ser reescrita na forma

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\Psi}_k \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) \dot{X} + \frac{\partial L}{\partial t} X = 0. \quad (3.17)$$

A equação anterior torna claro que podemos empregar a função energia na busca pela constante de movimento. Dessa forma, relembramos duas equações apresentadas previamente:

$$h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad (3.18)$$

e

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Se, por fim, fizermos uso das equações de Lagrange (3.2) no primeiro termo à esquerda na (3.17), podemos escrevê-la como

$$\sum_{k=1}^n \left[ \Psi_k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \dot{\Psi}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \left( h \dot{X} + \frac{dh}{dt} X \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k - h X \right\} = 0 \quad (3.20)$$

onde a quantidade entre chaves é, claramente, constante de movimento. Uma última vez,

podemos escrever a constante usando da Lagrangiana do sistema:

$$C = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k + hX = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k + \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) X \quad (3.21)$$

$$C = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}_k X - \Psi_k) \right\} - LX. \quad (3.22)$$

Desse modo, o teorema de Noether fica demonstrado.

### 3.2.1 Leis de Conservação

Estabelecido o teorema de Noether, vamos empregá-lo para verificar, novamente, as conservações dos momentos linear e angular e da energia. Esses três resultados emergem como casos particulares desse teorema.

**Conservação do Momento Linear.** Para verificar a conservação do momento linear através do teorema de Noether o resultado concernente à invariância da Lagrangiana de um dado sistema mecânico fechado de  $N$  partículas e  $n$  graus de liberdade sob translação, que obtivemos no capítulo passado, dá-nos uma ideia de como escolher as funções  $X$  e  $\Psi_k$ . Temos de usar geradores que causem uma translação espacial em todo o sistema mas que ao mesmo tempo não tenham nenhuma influência sob a parte temporal do sistema, isto é, realizar uma transformação meramente espacial. Sendo assim, escolhemos

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ \Psi_k &= 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esses geradores são aqueles que realizarão a operação de translação de todo o sistema. Com essas funções a transformação (3.3) torna-se

$$\begin{aligned} t' &= t \\ q'_k(t) &= q_k + \epsilon. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Passamos, então, a partir de agora, a considerar um sistema fechado. A Lagrangiana do sistema reduz-se à energia cinética total do mesmo, uma vez que não há influência de qualquer agente externo sobre o sistema físico. Aplicados os geradores (3.23) na condição de Noether (3.16), temos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (3.25)$$

A condição é satisfeita visto que a Lagrangiana do sistema é igual a sua energia cinética e esta, neste caso, não possui qualquer dependência explícita com as coordenadas generalizadas apenas com as velocidades generalizadas. Sendo assim, podemos procurar

a constante de movimento correspondente à transformação (3.24).

Para prosseguir com os cálculos, assim como escolhemos trabalhar em coordenadas cartesianas para a demonstração da conservação do momento linear no Capítulo 2, também o fazemos aqui. Conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned}
 q_1 &= x'_1(t) = x_1(t) + \epsilon \\
 q_2 &= y'_1(t) = y_1(t) + \epsilon \\
 q_3 &= z'_1(t) = z_1(t) + \epsilon \\
 q_4 &= x'_2(t) = x_2(t) + \epsilon \\
 q_5 &= y'_2(t) = y_2(t) + \epsilon \\
 q_6 &= z'_2(t) = z_2(t) + \epsilon \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot \\
 &\quad \cdot
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Evidentemente, as equações acima representam translações do sistema físico sob análise em todas as direções do espaço. Podemos, então, utilizar a (3.22) de modo a encontrar a constante de movimento associada à nossa escolha dos geradores da transformação:

$$C = - \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k = - \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \tag{3.27}$$

e podemos escrever

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}. \tag{3.28}$$

Em resumo, se translações do sistema em qualquer direção não afetam o resultado da ação, o sistema é matematicamente indiscernível com relação à sua localização espacial e obtivemos, mais uma vez, a conservação do momento linear para um sistema fechado, mas desta vez partindo de um protocolo muito mais geral dado pelo teorema de Noether.

**Conservação do Momento Angular.** Como já demonstramos anteriormente, a conservação do momento angular está diretamente ligada à invariância da Lagrangiana de um sistema físico sob rotações. Logo, essa ideia deve guiar a nossa escolha dos geradores da transformação (3.3) de modo que esta corresponda a uma rotação do sistema em relação ao referencial que usamos para descrevê-lo, ou seja, corresponda a uma alteração da direção dos raio vetores que localizam cada um dos seus componentes no espaço. Uma vez mais, esta é uma transformação apenas espacial, mantendo-se a descrição da parte temporal inalterada. Os geradores escolhidos são:

$$\begin{aligned}
 X &= 0 \\
 \Psi_k &= (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i)_{q_k}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Nessa última equação, o subíndice  $i$  indica a partícula do sistema à qual está associada o  $k$ -ésimo grau de liberdade e o vetor  $\hat{\mathbf{n}}$  representa o vetor axial que denota a direção do eixo de rotação. A (3.3), então, resulta em

$$t' = t$$

$$q'_k(t) = q_k + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i)_{q_k}. \quad (3.30)$$

Para tornar clara a parte espacial da transformação, que pode parecer um tanto quanto confusa, também escolhemos trabalhar em coordenadas cartesianas. A parte espacial do resultado acima é, então, dada pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned} q'_1 &= x'_1(t) = x_1(t) + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_1)_{x_1} \\ q'_2 &= y'_1(t) = y_1(t) + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_1)_{y_1} \\ q'_3 &= z'_1(t) = z_1(t) + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_1)_{z_1} \\ q'_4 &= x'_2(t) = x_2(t) + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_2)_{x_2} \\ q'_5 &= y'_2(t) = y_2(t) + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_2)_{y_2} \\ q'_6 &= z'_2(t) = z_2(t) + \epsilon(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_2)_{z_2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mas antes de encontrarmos a constante de movimento, temos de demonstrar que a invariância da ação sob a transformação (3.30), através da condição de Noether, é verificada. Novamente, consideraremos um sistema fechado. A (3.16) torna-se

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \Psi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\Psi}_k \right) = 0. \quad (3.32)$$

O primeiro termo se anula no caso de um sistema fechado, como mostramos anteriormente ao analisar a conservação do momento linear. O anulamento do segundo termo é ligeiramente mais sofisticado e o vetor  $\hat{\mathbf{n}}$  é parte importante dessa demonstração. Lembrando que estamos sempre lidando com um sistema de  $N$  partículas e que cada uma dessas partículas possui 3 graus de liberdade do total de  $n$  graus de liberdade do sistema e, ainda, usando a representação da parte espacial da (3.30) dada pelas equações da (3.31), encontramos

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\Psi}_k = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\Psi}_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \left\{ \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt} \times \mathbf{r}_i + \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right\} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

Na (3.33) o vetor  $\hat{\mathbf{n}}$  é constante e a primeira derivada dentro das chaves se anula. Se lembrarmos da demonstração da conservação do momento linear do capítulo anterior,

temos que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \left( \hat{\mathbf{n}} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}_i) = 0 \quad (3.34)$$

e a igualdade é válida pois o vetor que é gerado pelo produto de  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{v}_i$  é ortogonal ao vetor momento linear  $\mathbf{p}_i$  e fica claro que a condição de Noether é satisfeita.

Prosseguindo, usamos a (3.22) para obter a constante de movimento:

$$C = - \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Psi_k = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i) = - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_i) = - \hat{\mathbf{n}} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) \quad (3.35)$$

ou

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}. \quad (3.36)$$

Concluimos, então, que se a ação é invariante sob a transformação (3.30) o momento angular total do sistema é constante de movimento.

**Conservação da Energia.** Por fim, fazemos lembrar da conexão entre a invariância da Lagrangiana sob translações temporais e a conservação da energia. Do capítulo passado, sabemos que determinados sistemas que se apresentam simétricos quando sujeitos a uma operação de translação na sua variável temporal são sistemas conservativos. Desse modo, o que temos de fazer para verificar esse resultado usando o teorema de Noether é escolher geradores que somente operem sobre a parte temporal do sistema. As funções escolhidas são

$$\begin{aligned} X &= 1 \\ \Psi_k &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

e a transformação (3.3) desta vez exprime os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} t &= t + \epsilon \\ q'_k(t') &= q_k(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Considerando os resultados acima, a condição de Noether (3.16) é expressa por

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (3.39)$$

que é satisfeita por todo o conjunto de sistemas que discutimos na parte final do capítulo anterior, mas em especial para sistemas fechados.

Continuando, aplicamos a (3.37) na (3.22), para descobrir a imediata constante de movimento:

$$C = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}_k X - \Psi_k) - LX = \sum_{k=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = h. \quad (3.40)$$

A constante de movimento é a função energia, como já esperávamos. Em casos particula-



res, discutidos anteriormente, a função energia é igual a energia total do sistema,  $h = E$ , e esta é conservada.

### 3.2.2 Outras Aplicações do Teorema de Noether

Vamos usar a parte final deste capítulo para resolver exemplos de aplicação do teorema de Noether na obtenção de resultados que fogem às leis de conservação que discutimos extensivamente durante todo este trabalho. Esses exemplos são trazidos nas referências [21], [3] e [5] deste trabalho, respectivamente.

**Exemplo 1.** O primeiro sistema físico que escolhemos para explorar o teorema de Noether é o de uma partícula unicamente sujeita a uma força de atrito linearmente dependente da velocidade, uma força  $F = -b\dot{x}$  com  $b > 0$ . Obviamente, este é um sistema mecânico dissipativo que curiosamente pode ser trabalhado com o uso de ferramentas da Mecânica Lagrangiana que desenvolvemos ao longo deste trabalho. No caso desse “amortecimento” linear a equação de movimento produzida pela segunda lei de Newton é

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \quad (3.41)$$

ou, ainda,

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} = 0 \quad (3.42)$$

onde definimos a constante positiva  $\lambda = \frac{b}{m}$ .

Agora, passamos a mostrar que a Lagrangiana  $L(\dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \exp(\lambda t)$  gera a mesma equação de movimento a partir da equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}e^{\lambda t} + \lambda m\dot{x}e^{\lambda t} = 0 \quad (3.43)$$

ou, rearranjando,

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} = 0. \quad (3.44)$$

Sendo assim, usaremos a formulação Lagrangiana da Mecânica para demonstrar que é possível contornar o problema da solução da equação de movimento (uma equação diferencial de segunda ordem) encontrando duas constantes de movimento.

Começamos a resolução fazendo uma observação mais atenta ao fato de que a Lagrangiana  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \exp(\lambda t)$  não depende explicitamente da coordenada de posição  $x$ , que nesse caso é cíclica. Tal fato nos leva à imediata conclusão de que o momento canônico conjugado à variável  $x$  é conservado:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{\lambda t} = C_1. \quad (3.45)$$

Encontrada a igualdade acima, a dependência temporal explícita de  $C_1$  parece por em dúvida sua condição de constante. O que acontece, de fato, é que ao fim do problema, de posse de  $x(t)$ , veremos que esta é proporcional a  $e^{-\lambda t}$  e poderemos fazer a substituição diretamente na (3.45) e verificar que realmente  $C_1$  é uma constante de movimento.

Dado que o nosso objetivo é encontrar a função horária da posição, precisamos de outra constante de movimento que conjuntamente com a primeira possibilite a solução geral de  $x(t)$ , como sempre, com duas constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. Para tanto, passamos a considerar uma transformação infinitesimal, no espaço e no tempo, de geradores  $X = 1$  e  $\Psi_x = -\frac{1}{2}\lambda x$ . A transformação realizada é a seguinte:

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon \\ x' &= x - \frac{1}{2}\epsilon\lambda x. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Tendo em conta a (3.46), faz-se necessário verificar a invariância da ação ou, posto de outra maneira, é preciso averiguar se a condição de Noether é satisfeita. Neste caso, a condição de Noether fica

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{3.47}$$

que substituindo os resultados apropriados resulta em

$$-\frac{1}{2}m\dot{x}^2\lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\lambda e^{\lambda t} = 0. \tag{3.48}$$

Vemos que a igualdade acima é válida e a ação, portanto, é invariante sob a (3.46). Logo, a constante de movimento correspondente é dada por

$$C_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\dot{x}X - \Psi_x) - LX \tag{3.49}$$

$$= m\dot{x}e^{\lambda t}\left(\dot{x} - \frac{1}{2}\lambda x\right) - e^{\lambda t}\frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{3.50}$$

$$= \frac{1}{2}me^{\lambda t}\left(\dot{x}^2 - \lambda x\dot{x}\right). \tag{3.51}$$

A constante  $C_2$  também apresenta, nesta etapa da resolução do problema, uma dependência temporal explícita que poderá ser eliminada após  $x(t)$  ser encontrada, assim, verificando que  $C_2$  é constante de movimento.

Conhecendo essas duas constantes vamos aos cálculos para encontrar  $x(t)$ . Usando a primeira constante, escrevemos

$$\dot{x} = \frac{C_1}{m}e^{-\lambda t} \tag{3.52}$$

e, imediatamente, substituimos o resultado anterior na constante  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{1}{2}me^{\lambda t} \left\{ \left( \frac{C_1}{m} e^{-\lambda t} \right)^2 - \frac{\lambda x C_1}{m} e^{-\lambda t} \right\} \quad (3.53)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}me^{\lambda t} \left( \frac{C_1^2}{m^2} e^{-2\lambda t} \right) - \frac{1}{2}me^{\lambda t} \left( \frac{\lambda x C_1}{m} e^{-\lambda t} \right) \quad (3.54)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{m} e^{-\lambda t} - \frac{1}{2} \lambda C_1 x. \quad (3.55)$$

Um pouco de trabalho algébrico deve bastar para revelar a seguinte função horária da posição da partícula:

$$x(t) = C_3 + C_4 e^{-\lambda t}. \quad (3.56)$$

As constantes  $C_3$  e  $C_4$  são especificadas com as informações da posição e velocidade iniciais da partícula.

Apesar de a solução direta da (3.42) ser bastante simples e produzir esse resultado mais rapidamente, é interessante observar as possibilidades inteiramente particulares que a Mecânica de Lagrange traz para a solução do problema.

**Exemplo 2.** Como segundo exemplo de uma simples aplicação do teorema de Noether, vamos usar uma Lagrangiana conhecida na literatura como Lagrangiana de Bateman [5]. Esse é mais um caso interessante de uma Lagrangiana que não é encontrada pela expressão  $L = T - U$ , uma vez que ela produz a equação de movimento de um sistema físico dissipativo, no caso, o oscilador amortecido sujeito às forças:  $F_{Hooke} = -kx$ ;  $F_{atrito} = -b\dot{x}$ . A Lagrangiana de Bateman é escrita da seguinte forma:

$$L(x, \dot{x}, t) = \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right) \exp\left(\frac{bt}{m}\right). \quad (3.57)$$

Vamos, agora, mostrar que a Lagrangiana de Bateman reproduz a mesma equação de movimento para um oscilador amortecido que as leis de Newton. Com o primeiro termo da equação de Lagrange, conseguimos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( m\dot{x} e^{\frac{bt}{m}} \right) = m\ddot{x} e^{\frac{bt}{m}} + b\dot{x} e^{\frac{bt}{m}} \quad (3.58)$$

e o segundo termo nos dá

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx e^{\frac{bt}{m}}. \quad (3.59)$$

A equação de movimento gerada pela Lagrangiana é

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.60)$$

A aplicação direta da segunda lei de Newton, por sua vez, leva-nos à equação de

movimento:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx \quad (3.61)$$

que pode ser rearranjada na forma

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.62)$$

Como era nossa intenção, mostramos que a Lagrangiana de Bateman produz a mesma equação de movimento para um oscilador amortecido que a Lei II. Sendo assim, vamos dar o próximo passo e usar o teorema de Noether para mostrar que uma transformação apenas espacial (pois o sistema não é fechado) ou apenas temporal (pois o sistema não é conservativo) não é suficiente para revelar uma constante de movimento para o sistema físico em questão, mas uma transformação conjunta no espaço e no tempo é capaz de nos apresentar um resultado inesperado. Consideremos a transformação

$$\begin{aligned} t' &= t + \epsilon \\ x' &= x - \frac{\epsilon bx}{2m} \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde, claramente, os geradores são  $\Psi_x = -\frac{bx}{2m}$  e  $X = 1$ . Considerando esses geradores a condição de Noether (3.16) se reduz a

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\Psi}_x + \frac{\partial L}{\partial t}X = 0. \quad (3.64)$$

A substituição direta da Lagrangiana de Bateman e dos geradores da (3.63) na equação anterior nos dá

$$kx \left( \frac{bx}{2m} \right) e^{\frac{bt}{m}} - m\dot{x} \left( \frac{b\dot{x}}{2m} \right) e^{\frac{bt}{m}} + \frac{b}{2m} (m\dot{x}^2 - kx^2) e^{\frac{bt}{m}} = 0 \quad (3.65)$$

ou

$$- \frac{b}{2m} (m\dot{x}^2 - kx^2) e^{\frac{bt}{m}} + \frac{b}{2m} (m\dot{x}^2 - kx^2) e^{\frac{bt}{m}} = 0 \quad (3.66)$$

e, assim, a condição de Noether é verificada.

A constante de movimento associada à transformação (3.63) pelo teorema de Noether

é:

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (\dot{x}X - \Psi_x) - LX \quad (3.67)$$

$$= m\dot{x}e^{\frac{bt}{m}} \left( \dot{x} + \frac{bx}{2m} \right) - \frac{e^{\frac{bt}{m}}}{2} (m\dot{x}^2 - kx^2) \quad (3.68)$$

$$= e^{\frac{bt}{m}} \left( m\dot{x}^2 + \frac{bx\dot{x}}{2} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \right) \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{bt}{m}} (m\dot{x}^2 + bx\dot{x} + kx^2). \quad (3.70)$$

Aqui, assim como acontece no primeiro exemplo, a dependência temporal explícita de  $C$  nessa altura do problema tem de ser de alguma maneira contornada pela solução de  $x(t)$  e  $C$  deve ser realmente uma constante. Essa constante de movimento é mais um exemplo interessante de constante de movimento de um sistema dissipativo.

**Exemplo 3.** Neste terceiro e último exemplo, abordaremos, uma vez mais, o caso de uma Lagrangiana que representa matematicamente um sistema dissipativo e que foge à igualdade  $L = T - U$ . Vamos analisar o caso de uma partícula sujeita à força não-conservativa  $F = -\gamma\dot{x}^2$  e demonstraremos que a Lagrangiana  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \exp(2\gamma x)$  concebe a mesma equação de movimento que o Princípio Fundamental da Dinâmica.

O primeiro termo da equação de Lagrange (3.2), quando considerada a função de Lagrange  $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \exp(2\gamma x)$ , produz

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x}e^{2\gamma x} + 2\gamma\dot{x}^2 e^{2\gamma x}. \quad (3.71)$$

O segundo termo, por sua vez, gera

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \gamma\dot{x}^2 e^{2\gamma x}. \quad (3.72)$$

Claramente, resulta da (3.2) a equação de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \ddot{x}e^{2\gamma x} + \gamma\dot{x}^2 e^{2\gamma x} \quad (3.73)$$

$$= \ddot{x} + \gamma\dot{x}^2 = 0. \quad (3.74)$$

Usando do formalismo Newtoniano, a equação de movimento produzida pela 2ª lei é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dot{x}^2 = 0 \quad (3.75)$$

que é a mesma que acabamos de encontrar fazendo uso da Lagrangiana apropriada. Desse modo, o que faremos a seguir é usar a Mecânica de Lagrange para encontrar constantes

de movimento e, assim, resolver o problema de encontrar a equação horária da partícula sem, de fato, resolver a equação diferencial dada pelas leis Newtonianas.

Primeiramente, notamos que a função  $L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2}e^{2\gamma x}$  não possui qualquer dependência explícita com o tempo. Em seguida, escrevemos a função energia (3.18) relativa a nossa Lagrangiana:

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \dot{x}^2 e^{2\gamma x} - \frac{\dot{x}^2}{2}e^{2\gamma x} = \frac{\dot{x}^2}{2}e^{2\gamma x}. \quad (3.76)$$

Da relação entre as derivadas temporais da função energia e da Lagrangiana (3.19), fica claro que levando em consideração a independência explícita em relação ao tempo podemos fazer

$$\frac{dh}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}e^{2\gamma x}\right). \quad (3.77)$$

Logo, a constância da função energia nos conduz a

$$\frac{\dot{x}^2}{2}e^{2\gamma x} = C'_1 = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{2}}e^{\gamma x}\right)^2 \quad (3.78)$$

ou, por fim,

$$\dot{x}e^{\gamma x} = \sqrt{2C'_1} = C_1 \quad (3.79)$$

e encontramos a primeira constante de movimento desse sistema físico.

Para encontrar a segunda constante de movimento, usaremos o teorema de Noether. Para isso, é necessário mostrar que a condição de Noether é satisfeita para determinada transformação. Vamos demonstrar que a ação é invariante sob a transformação

$$\begin{aligned} t' &= t + 2\gamma\epsilon t \\ x' &= x + \epsilon. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Comparando com a (3.3), vemos que  $X = 2\gamma t$  e  $\Psi_x = 1$ . O procedimento seguinte é a aplicação da (3.16). Como a Lagrangiana com a qual estamos trabalhando possui apenas um grau de liberdade, representado pela variável  $x$ , a condição de Noether fica

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\dot{\Psi}_x - \dot{x}\dot{X}) + \frac{\partial L}{\partial t}X + L\dot{X} = 0 \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\Psi}_x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}\dot{X} + L\dot{X} = 0 \quad (3.82)$$

$$\gamma\dot{x}^2 e^{2\gamma x} - 2\gamma\dot{x}^2 e^{2\gamma x} + \gamma\dot{x}^2 e^{2\gamma x} = 0 \quad (3.83)$$

que é verificada, levando-nos à conclusão de que existe uma constante de movimento

correspondente à (3.80). Essa constante de movimento é revelada pela (3.22):

$$C_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (\dot{x}X - \Psi_x) - LX \quad (3.84)$$

$$= \dot{x}e^{2\gamma x} [\dot{x}(2\gamma t) - 1] - \left( \frac{\dot{x}^2}{2} e^{2\gamma x} \right) (2\gamma t) \quad (3.85)$$

$$= 2\gamma \dot{x}^2 t e^{2\gamma x} - \dot{x}e^{2\gamma x} - \gamma \dot{x}^2 e^{2\gamma x} \quad (3.86)$$

$$= \gamma t \dot{x}^2 e^{2\gamma x} - \dot{x}e^{2\gamma x} \quad (3.87)$$

Agora, trabalhamos com as constantes de movimento  $C_1$  e  $C_2$ :

$$C_2 = \gamma t \dot{x}^2 e^{2\gamma x} - \dot{x}e^{2\gamma x} \quad (3.88)$$

$$C_2 = \gamma t C_1^2 - C_1 e^{\gamma x} \quad (3.89)$$

$$\frac{e^{\gamma x}}{C_1} = \frac{1}{C_1^2} (\gamma t C_1^2 - C_2) = \left( \gamma t - \frac{C_2}{C_1^2} \right) \quad (3.90)$$

$$e^{\gamma x} = C_1 \left( \gamma t - \frac{C_2}{C_1^2} \right) = C_1 (\gamma t - C_3). \quad (3.91)$$

Finalmente, a função horária, que é completamente especificada dadas as condições iniciais da posição e da velocidade da partícula, é dada pela expressão

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \ln C_1 + \frac{1}{\gamma} \ln (\gamma t - C_3). \quad (3.92)$$

Esse terceiro exemplo também deixa evidente que o formalismo Lagrangiano traz alternativas no tratamento de problemas físicos não encontradas no panorama da Mecânica Newtoniana. A força a qual a partícula está sujeita,  $F = -\gamma \dot{x}^2$ , por exemplo, é uma força dissipativa, proporcional ao quadrado da velocidade, logo, a energia do sistema não é conservada. Por outro lado, a função energia, sem qualquer análogo Newtoniano, é, sim, conservada e verificada pela simples independência temporal explícita de  $L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} e^{2\gamma x}$ . O momento linear, também, é claramente não-conservado para esse sistema. No entanto, o teorema de Noether que é um resultado geral dessa característica peculiar da Mecânica Analítica que é o reconhecimento da relação direta entre propriedades de simetria de um sistema e resultados de conservação nos revela, através de uma transformação espaço-temporal adequada, uma constante de movimento longe de ser óbvia e que torna possível, em conjunto com a primeira constante, a solução do problema.

# Considerações Finais

Este trabalho é em grande parte um passeio, historicamente ordenado, pelo processo de desenvolvimento da Mecânica Clássica e uma respeitosa apreciação às contribuições fundamentais dadas por grandes nomes da Física e da Matemática como Newton, Lagrange, Hamilton e Noether.

Notamos que ao decorrer do texto, conforme avançamos teoricamente com a Mecânica refinando o tratamento matemático, as leis de conservação que foram extensamente discutidas eram sempre reverificadas fazendo as considerações apropriadas a cada etapa, fossem tais considerações acerca dos axiomas de Newton ou do teorema de Noether. Mais diretamente, quando efetuamos a análise das conservações no escopo da Mecânica Vetorial, a terceira lei de Newton foi essencial para a obtenção dos teoremas do primeiro capítulo. Em seguida, as ideias de invariância e simetria vem para não mais abandonar o estudo de sistemas físicos na Mecânica Analítica. Essa é uma característica da construção de teorias na Física: o avanço das ideias não pode se dissociar da capacidade de reproduzir resultados experimentais previamente estabelecidos.

Acreditamos que a exposição aqui feita deixa claro que a formulação Lagrangiana é uma formulação um tanto quanto mais elaborada e complexa do que a Newtoniana, sua precursora. É bem sabido que as consequências da Mecânica Analítica estendem-se muito além dos domínios da própria Mecânica.

Também, vale a pena ver como a construção de todo esse novo jeito de olhar para problemas físicos nasce das próprias leis Newtonianas juntamente de considerações acerca de coordenadas generalizadas, das restrições sobre a energia potencial e dos vínculos aos quais um sistema mecânico está sujeito. É curioso ver a emergência da quantidade  $L = T - U$ , a Lagrangiana, que quando substituída nas equações de Lagrange produz as devidas equações de movimento. Quanto aos vínculos, vemos que estes são um traço marcante da teoria, e é quase como se a Mecânica Lagrangiana fosse a “Mecânica dos Vínculos”.

O ponto alto deste trabalho se dá com um estudo bastante introdutório do teorema de Noether que recupera as leis de conservação como casos bastante particulares e estende o entendimento da correspondência entre simetria e conservação através da análise de uma transformação matemática espaço-temporal. Nos casos dos momentos a transformação afeta apenas o espaço e no caso da energia somente o tempo. O teorema de Noether traz



generalidade, simplicidade e elegância à Física de uma maneira que é muito apreciada pelos físicos.

Por fim, os últimos três exemplos de Lagrangianas completamente alheias à expressão  $L = T - U$  e que representavam sistemas físicos dissipativos são casos interessantes de se observar dado que a possibilidade de encontrar constantes de movimento em sistemas dissipativos não parece sequer razoável quando olhando para o problema em termos das forças externas envolvidas. Apesar das ideias de Newton e Lagrange produzirem os mesmos resultados ao final, as ideias Lagrangianas nos conduziram por caminhos completamente próprios quando da solução desses problemas.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. P. Feynman, *The Character of the Physical Law*. MIT Press, 1st ed., 1967.
- [2] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole, 2004.
- [3] D. Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2010.
- [4] A. K. T. Assis, *Mecânica Relacional*. Coleção CLE, UNICAMP, 1998.
- [5] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2ª ed., 2007.
- [6] M. W. McCall, *Classical Mechanics: From Newton to Einstein: A Modern Introduction*. John Wiley & Sons, 2001.
- [7] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, vol. 1. Londres: Pergamon Press, 3rd ed., 1969.
- [8] F. Scheck, *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Graduate Texts in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 5th ed., 2010.
- [9] H. M. Nussenzveig, *Mecânica*, vol. 1 of *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, 4ª ed., 2002.
- [10] A. Sommerfeld, *Mechanics*, vol. 1 of *Lectures on Theoretical Physics*. Academic Press, 1952.
- [11] “Mac Tutor History of Mathematics, Joseph-Louis Lagrange.” Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html>> Acessado em 10 de outubro de 2016.
- [12] R. Dugas, *A History of Mechanics*. Routledge & Kegan Paul, 1955.
- [13] J. L. Cindra, “Um esboço da história do conceito de trabalho virtual e suas aplicações,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 30, pp. 3601.01 – 3601.12, 2008.

- [14] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, vol. 4 of *Mathematical Expositions*. Toronto: University of Toronto Press, 4th ed., 1970.
- [15] “Mac Tutor History of Mathematics, Jean Le Rond d’Alembert.” Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/D'Alembert.html>> Acessado em 16 de outubro de 2016.
- [16] L. N. Hand and J. D. Finch, *Analytical Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [17] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3rd ed., 2002.
- [18] “Mac Tutor History of Mathematics, William Rowan Hamilton.” Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hamilton.html>> Acessado em 11 de outubro de 2016.
- [19] “The Feynman Lectures on Physics, The Principle of Least Action.” Disponível em: <[http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II\\_19.html](http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_19.html)> Acessado em 09 de outubro de 2016.
- [20] “Mac Tutor History of Mathematics, Emmy Amalie Noether.” Disponível em: <[http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Noether\\_Emma.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Noether_Emma.html)> Acessado em 10 de outubro de 2016.
- [21] N. A. Lemos, “Symmetries, Noether’s theorem and inequivalent Lagrangians applied to nonconservative systems,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 39, pp. 304 – 313, 1993.
- [22] “Wolfram, Euler’s Homogeneous Function Theorem.” Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/EulersHomogeneousFunctionTheorem.html>> Acessado em 07 de setembro de 2016.

# Apêndice

Neste apêndice demonstraremos um teorema pertinente a funções homogêneas devido ao grande matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Essa demonstração pode ser encontrada na referência [22].

## Teorema de Euler

Uma função  $f$  é dita homogênea de ordem  $m$  se

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) \quad (3.93)$$

onde  $t$  é apenas um parâmetro.

Fazendo  $x' = tx$  e  $y' = ty$ , a derivada temporal de  $f$  em relação a  $t$  é dada por

$$\frac{df}{dt} = mt^{m-1} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} \quad (3.94)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x'} x + \frac{\partial f}{\partial y'} y \quad (3.95)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial(tx)} x + \frac{\partial f}{\partial(ty)} y. \quad (3.96)$$

Se escolhemos  $t = 1$ , isso implica em

$$mf(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y \quad (3.97)$$

e o resultado anterior é conhecido como o teorema de Euler para funções homogêneas. Esse teorema pode ser generalizado para o caso em que  $f$  é homogênea de ordem  $m$  e função de  $n$  variáveis. Nesse caso, temos que

$$mf(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k. \quad (3.98)$$