UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS DE MERCADOS FINANCEIROS COM CURVAS COMPLEXIDADE-ENTROPIA

Eduardo Henrique de Freitas

Novembro de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS DE MERCADOS FINANCEIROS COM CURVAS COMPLEXIDADE-ENTROPIA

Eduardo Henrique de Freitas

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro

Trabalho de conclusão de curso submetido ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito para a obtenção do grau de bacharel em Física.

Novembro de 2017

"A writer who says that there are no truths, or that all truth is 'merely relative', is asking you not to believe him. So don't."

Sir Roger Scruton, *The Nature of Philosophy*

Resumo

Neste trabalho, medidas de complexidade-entropia são aplicadas sobre séries diárias do índice de fechamento de 24 bolsas de valores de países usualmente classificados como desenvolvidos ou emergentes, com o objetivo de mensurar sua eficiência informativa e classificá-los de acordo com essa métrica. As medidas de complexidade-entropia também são feitas sobre as mesmas séries divididas em dois períodos: antes e depois do início da Grande Recessão de 2008, para avaliar mudanças na eficiência dos mercados advinda dessa crise e de seus desdobramentos. Os resultados mostram que os 5 países localizados num dos extremos do plano-complexidade entropia são emergentes, enquanto no outro extremo aparecem agrupados 4 países desenvolvidos; também apontam que mercados de países desenvolvidos são mais eficientes sob a medida de eficiência utilizada. Na análise de antes-depois da crise financeira internacional, verifica-se que nações emergentes tenderam a apresentar aumento da eficiência de seus mercados após a crise, com tendência contrária para os países desenvolvidos.

Palavras-chave: física estatística; complexidade-entropia; entropia de Shannon; entropia de Tsallis; mercados financeiros; eficiência informacional; Grande Recessão.

Abstract

In this work, complexity-entropy measurements are applied to daily closing indices series of 24 stock exchanges in countries usually classified as either developed or emerging markets, in order to measure their informational efficiency and classify them under that metric. Complexity-entropy measurements are evaluated for the same series divided into two periods: before and after the beginning of the Great Recession of 2008, aiming to evaluate the changes in markets efficiency caused by that crisis and its consequences. The results show that 5 countries located at one of the complexity-entropy causality plane extremes are emerging markets, while 4 nations at the other extreme are developed ones; they also indicate that developed markets are more efficient under the efficiency measurement used here. In the study about the before-after international financial crisis, it is shown that emerging markets have generally undergone an efficiency increase after crisis, while developed markets have tended to move in the opposite direction.

Key words: statistical physics; complexity-entropy; Shannon entropy; Tsallis entropy; financial markets; informational efficiency; Great Recession.

Sumário

Introdução **6**

1 Fundamentação teórica **8**

2 Metodologia **12**

3 Resultados **15**

Conclusão **37**

Bibliografia **39**

Introdução

É de amplo conhecimento que muitos dos métodos e ferramentas utilizados pela Física, em seus mais diversos campos, podem ser aplicados no escopo de outras áreas do conhecimento, inclusive nas ciências sociais. Na Economia, particularmente, a recorrência dos métodos físicos-estatísticos no âmbito da Microeconomia (como no estudo das decisões de produção e consumo e a consequente alocação final de recursos) e muito especialmente no campo das Finanças — cujo resultado mais conhecido é o modelo de Black-Scholes (BLACK; SCHOLES, 1973) — ensejou o surgimento de uma disciplina à parte, a Econofísica (MANTEGNA; STANLEY, 1999).

Embora muitas vezes relegados à categoria de "riqueza irreal" ou "ilusória", os ativos financeiros são fontes de bem-estar na medida em que permitem *a suavização de consumo ao longo do tempo e entre as mais diversas contingências (ou "estados da natureza").* Os mercados financeiros cumprem, portanto, um importante papel social nessa transferência intertemporal de bens e serviços e na repartição do risco frente à incerteza inerente ao futuro. A fundamentação microeconômica das Finanças vem se desenvolvendo nas últimas décadas, com resultados significativos para o entendimento do funcionamento dos mercados financeiros. O modelo de mercados completos de Arrow-Debreu (ARROW; DEBREU, 1954; ARROW, 1964; FLOOD et al., 1991), por exemplo, explica, por uma abordagem de equilíbrio geral num ambiente de incerteza, a natureza das taxas de juros, o preço e o retorno dos ativos financeiros, bem como os riscos associados a estes.

Um modelo bem mais simples (e extremo) para o funcionamento dos mercados financeiros é a chamada hipótese dos mercados eficientes. De acordo com ela, toda a informação disponível e relevante para o valor dos ativos financeiros é imediata e racionalmente processada pelos agentes econômicos, sendo portanto instantaneamente refletida nos preços pelo mecanismo de oferta e demanda; em outras palavras, os mercados financeiros apresentariam *eficiência informativa* quanto a suas flutuações, sem qualquer

"memória" do passado. Uma importante consequência é que as séries de retornos dos ativos financeiros devem seguir um processo completamente aleatório, implicando na impossibilidade de previsão dos mesmos: se a informação de que o preço de uma ação irá subir amanhã se torna pública hoje, essa subida é incorporada ao preço hoje, via aumento da demanda pelo ativo. Estudos empíricos, no entanto, verificam consistentemente que nem todo retorno é imprevisível, aspecto esse inclusive explicado pelo modelo de Arrow-Debreu. Apesar de não ser uma descrição exata da realidade, a hipótese dos mercados eficientes tampouco é totalmente falsa, de modo que poder-se-ia imaginar a construção de uma medida que indicasse o quão próximo da eficiência informativa está um particular mercado financeiro.

Este trabalho tem por objetivo empregar métodos da Física Estatística no estudo de séries temporais de índices de ações de 24 bolsas de valores entre janeiro de 2000 e setembro de 2017, agrupadas em dois conjuntos de países: os desenvolvidos e os emergentes. Sobre essas séries é aplicada a medida de complexidade-entropia de permutação proposta por ROSSO et al. com vistas a agrupar mercados semelhantes sob essa métrica, bem como sua generalização na forma de curvas q-complexidade-entropia proposta por RIBEIRO et al., por cujas características podem-se classificar os mercados sob o ponto de vista da eficiência informativa acima descrita. Adicionalmente, as mesmas medidas são feitas para as séries agrupadas em dois períodos de tempo: antes e depois de setembro de 2008, com o objetivo de mensurar mudanças estruturais nos mercados financeiros advindos da crise financeira internacional de 2008 (considerada a pior desde a Grande Depressão de 1929) e da consequente mudança no aparato regulatório da maioria das nações. No Capítulo 1, é apresentada a fundamentação teórica para o estudo, com a apresentação das medidas de complexidade-entropia. A seguir, no Capítulo 2, é discutida a metodologia, com a descrição das séries temporais e dos parâmetros usados nas aplicações dos métodos de complexidade-entropia. O Capítulo 3 apresenta e discute os resultados. Segue-se, finalmente, a conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

A exposição das medidas de complexidade-entropia a seguir é baseada em RIBEIRO et al. Considere uma série temporal $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Sendo d um inteiro maior que 1, é possível construir um conjunto de $n-d+1$ partições imbricadas dessa série, com cada uma delas definida pela relação $\{x_{s-(d-1)}, x_{s-(d-2)}, \ldots, x_s\}$, em que $s = d, d+1, \ldots, n$. A esse conjunto de partições, pode-se associar a probabilidade de se encontrar uma partição com uma determinada permutação relativa à ordem dos seus elementos. Essa permutação (de um total de $d!$ permutações) pode ser escrita como uma sequência formada pelos elementos do conjunto $\{0, 1, \ldots, d-1\}$, organizada de tal forma que 0 ocupe a posição do menor elemento na partição, 1 ocupe a posição do segundo menor elemento, até que $d-1$ ocupe o lugar do maior. Uma permutação de um tipo particular j será representada por π_j. A probabilidade de se encontrar π_j entre todas as partições é definida, então, como

$$p_j(\pi_j) = \frac{\text{número de partições } \pi_j}{n-d+1}. \tag{1.1}$$

A título de exemplo, tome a série $\{-2, 0, -1, 3, 1, 2\}$ e $d = 3$. As partições são $\{-2, 0, -1\}$, $\{0, -1, 3\}$, $\{-1, 3, 1\}$ e $\{3, 1, 2\}$. A elas se associam, respectivamente, as permutações $\{0, 2, 1\}$, $\{1, 0, 2\}$, $\{0, 2, 1\}$ e $\{2, 0, 1\}$. Sendo as permutações rotuladas como $\pi_1 = \{0, 1, 2\}$, $\pi_2 = \{0, 2, 1\}$, $\pi_3 = \{1, 0, 2\}$, $\pi_4 = \{1, 2, 0\}$, $\pi_5 = \{2, 0, 1\}$ e

$\pi_6 = \{2,1,0\}$, tem-se a distribuição de probabilidade

$$p_j(\pi_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } j = 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } j = 2 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } j = 3 \\ 0, & \text{se } j = 4 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } j = 5 \\ 0, & \text{se } j = 6. \end{cases}$$

A ideia dessa distribuição de probabilidade é prover informação a respeito da dinâmica de ordenamento da série temporal em questão, tendo sido proposta inicialmente por BANDT; POMPE. Uma condição necessária para que a distribuição cumpra esse papel é que $d! \ll n$. Indicando a distribuição de probabilidade por $P = \{p_j(\pi_j)\}_{j=1,\ldots,d!}$, os autores propuseram como medida de complexidade a entropia de Shannon (SHANNON, 1948) normalizada

$$H_1(P) = \frac{S_1(P)}{S_1(U)}, \tag{1.2}$$

onde $S_1(P)$ é a entropia de Shannon, definida como

$$S_1(P) = -\sum_{j=1}^{d!} p_j \log p_j, \tag{1.3}$$

e U indica a distribuição uniforme discreta contendo $d!$ elementos, de modo que a probabilidade associada a cada um deles é $\frac{1}{d!}$. É fácil ver, portanto, que o denominador no lado direito de (1.2) é igual a $\log d!$. O motivo do subscrito 1 nas funções ficará claro mais à frente.

Seguindo a proposta de BANDT; POMPE, ROSSO et al. sugeriram outra medida de complexidade, cuja definição é

$$C_1(P) = \frac{D_1(P,U)\,H_1(P)}{D_1^*}, \tag{1.4}$$

em que $D_1(P)$ é uma medida entrópica que quantifica o quão afastada da distribuição uniforme $U = \{1/d!\}$ está a distribuição $P = \{p_j(\pi_j)\}_{j=1,\ldots,d!}$ — chamada divergência de Jensen-Shannon (AMARI et al.) — e D_1^* é uma constante de normalização. A definição

de complexidade em (1.4) envolvendo o produto das funções $D_1(P,U)$ e $H_1(P)$ indica que $C_1(P)$ pode assumir um conjunto não-unitário de valores, dado um valor de $H_1(P)$. Desse modo, os autores propuseram a construção do *plano complexidade-entropia* relacionando os valores de $C_1(P)$ e $H_1(P)$. No artigo supracitado, eles demonstram que processos estocásticos e sistemas caóticos ocupam diferentes posições nesse plano, de modo que este pode servir como um instrumento para se identificar a natureza de uma série temporal.

Uma proposta de generalização monoparamétrica para as medidas de entropia e complexidade foi lançada por RIBEIRO et al. com vistas a suprir deficiências das medidas propostas por ROSSO et al. Os autores substituem a entropia de Shannon por uma generalização, a q-entropia de Tsallis (TSALLIS, 1988), definida como

$$S_q(P) = -\sum_{j=1}^{d!} p_j \log_q p_j, \tag{1.5}$$

onde q é um parâmetro real e

$$\log_q x = \int_1^x t^{-q}\, dt. \tag{1.6}$$

Com essa definição, $\log_1 x = \log x \ \forall\ x > 0$ e $\log_q x = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$ se $q \neq 1$. Por conveniência, define-se ainda $0 \log_q(1/0) = 0$ se $q > 0$.

Agora, pode-se construir a nova entropia normalizada

$$H_q(P) = \frac{S_q(P)}{S_q(U)}, \tag{1.7}$$

sendo $S_q(U) = \log_q d!$ o valor máximo da q-entropia. Da mesma forma que em ROSSO et al., define-se então a q-complexidade

$$C_q(P) = \frac{D_q(P,U)\, H_q(P)}{D_q^*}, \tag{1.8}$$

onde $D_q(P,U)$ é a mesma distância entre P e U que compõe a complexidade em (1.4), porém adaptada para a q-entropia de Tsallis, e D_q^* é uma constante de normalização. Note-se que o desenvolvimento anterior é o caso generalizado com o parâmetro $q = 1$. Também aqui pode-se definir um plano a conter os pontos $(H_q(P), C_q(P))$ para uma distribuição P particular, que agora, em vez de um ponto, constituirão uma curva conforme o parâmetro q varie no intervalo $(0,\infty)$, a *curva q-complexidade-entropia*. Definindo r como o nú-

mero de permutações π_j que de fato aparecem em alguma partição da série temporal (ou seja, o número de permutações com $p_j(\pi_j) \neq 0$) e $\gamma = \frac{r-1}{d!-1}$, RIBEIRO et al. enunciam e demonstram as seguintes propriedades das curvas q-complexidade-entropia:

1. Se $r = 1$, então $H_q(P) = 0$ e $C_q(P) = 0 \ \forall \ q > 0$;
2. $H_q(P) \to \gamma$ e $C_q(P) \to \gamma(1-\gamma)$ quando $q \to 0^+$;
3. Se $r > 1$, então $H_q(P) \to 1$ e $C_q(P) \to 1-\gamma$ quando $q \to \infty$.

As consequências dessas três propriedades são:

1. Se uma série temporal apresenta apenas uma permutação em todas as suas partições, sua curva q-complexidade-entropia colapsa no ponto $(0, 0)$;
2. Em séries para as quais todas as $d!$ permutações aparecem em suas partições, a curva q-complexidade-entropia é um laço fechado que se inicia no ponto $(1, 0)$ para $q = 0^+$ e termina no mesmo ponto quando $q \to \infty$;
3. Se uma série temporal não apresenta todas as $d!$ permutações em suas partições, sua curva q-complexidade-entropia se inicia no ponto $(\gamma, \gamma(\gamma-1))$ quando $q = 0^+$ e termina no ponto $(1, 1-\gamma)$ quando $q \to \infty$.

RIBEIRO et al. mostram, em diversas aplicações, que séries temporais com dinâmica governada por um ruído — isto é, geradas por um processo estocástico — têm, em geral, curvas q-complexidade-entropia fechadas (pois não há permutações proibidas nesse tipo de processo gerador), enquanto sistemas caóticos, para os quais certas permutações não são acessíveis, apresentam geralmente as curvas abertas. Desse modo, as curvas q-complexidade-entropia se mostram uma boa ferramenta para a distinção entre processos estocásticos e sistemas caóticos. Além disso, para as curvas fechadas, os mesmos autores mostram evidências de que sua largura, quantificada pela área da região que limitam, é tanto maior quanto mais "memória" tiver o processo gerador, ou seja, quanto maiores forem as autocorrelações. É justamente a medida dessa área que será usada, então, para quantificar o grau de eficiência dos mercados financeiros.

Capítulo 2

Metodologia

Foram obtidas as séries diárias de índices de 24 bolsas de valores de países em todos os continentes, englobando tanto mercados usualmente classificados como desenvolvidos quanto os enquadrados como emergentes pelas grandes instituições financeiras. A tabela abaixo mostra a lista de países das 24 bolsas e a especificação dos mercados feita pela empresa de serviços financeiros Morgan Stanley Capital International (disponível em `https://www.msci.com/market-classification`).

País	Classificação
África do Sul	Emergente
Alemanha	Desenvolvido
Argentina	Fronteira*
Austrália	Desenvolvido
Áustria	Desenvolvido
Bélgica	Desenvolvido
Brasil	Emergente
Canadá	Desenvolvido
Chile	Emergente
China	Emergente
Dinamarca	Desenvolvido
Espanha	Desenvolvido
Estados Unidos	Desenvolvido
França	Desenvolvido
Hong Kong	Desenvolvido
Índia	Emergente
Irlanda	Desenvolvido
Itália	Desenvolvido
Japão	Desenvolvido
México	Emergente
Paquistão	Emergente

País	Classificação
Rússia	Emergente
Suécia	Desenvolvido
Turquia	Emergente

Para todos os mercados, há as séries diárias de índices na abertura do mercado, no fechamento, o índice mais alto e o mais baixo no dia em questão. As observações começam em 3 de janeiro de 2000 e terminam em 31 de julho de 2017, perfazendo aproximadamente 4580 datas, com pequenas variações entre os mercados, principalmente devido a feriados locais (as exceções são a Turquia, que apresenta um *gap* longo em 2014, a Alemanha, cujas séries se iniciam em janeiro de 2001, e o Chile, com séries começando em janeiro de 2002). Neste trabalho, utilizaram-se apenas as séries dos índices no fechamento. A figura 2.1 mostra a variação normalizada (isto é, a diferença entre o índice e seu valor mínimo na série, dividida pela diferença entre o valor máximo e o mínimo) dessa série para cada mercado.

Primeiramente, foram calculados os pontos no plano complexidade-entropia (equação 1.4) para todas as bolsas, com 4 tamanhos de partição diferentes — $d = 3, 4, 5, 6$. Também foram calculados os valores médios anuais de entropia e complexidade para todos os países com $d = 3, 4$. Depois, usando o método de RIBEIRO et al., foram calculados os pontos das curvas q-complexidade-entropia para $d = 3, 4, 5$ e as respectivas áreas.

Logo após, as séries foram truncadas em duas partes, uma antes e outra depois de setembro de 2008, quando a crise do *subprime* que se iniciou em 2007 se tornou uma crise financeira internacional. As curvas q-complexidade-entropia foram obtidas para cada país antes e depois da crise financeira, calculando-se também a variação da área delimitada pelos laços nesses dois períodos, com $d = 3, 4, 5$. Os procedimentos foram realizados com códigos escritos na linguagem *Python*.

*Mercados de fronteira são aqueles de países em desenvolvimento, porém não suficientemente grandes para serem considerados emergentes. Neste trabalho, por conveniência, enquadrar-se-á a Argentina como mercado emergente.

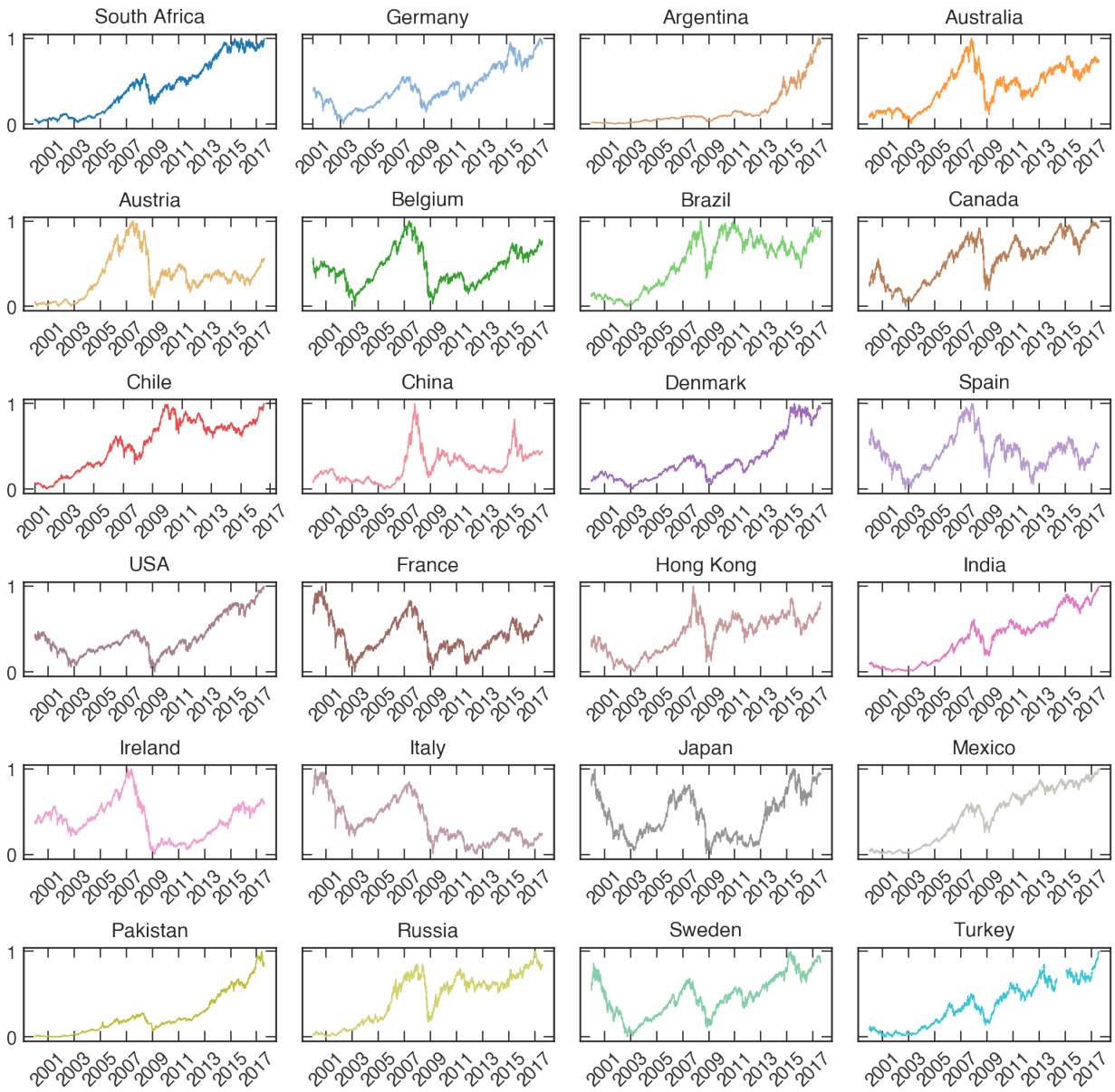

Figura 2.1. Variação normalizada das séries de todos os mercados — fechamento

Capítulo 3

Resultados

As figuras 3.1 a 3.4 mostram a localização dos mercados financeiros no mesmo plano complexidade-entropia para quatro tamanhos diferentes de partição ($d = 3, 4, 5, 6$) com respeito à série de índices no fechamento. Para todos esses valores de d, nota-se uma tendência de maior complexidade para menores valores de entropia. Chile e Paquistão despontam do conjunto mais denso contendo todos os outros mercados. Além disso, esses dois países mais Argentina, Índia e México — todos considerados emergentes — constituem, nos quatro gráficos, os mercados com maior medida de complexidade e menor entropia, enquanto os desenvolvidos Estados Unidos, França, Itália e Suécia apresentam menor complexidade e maior entropia.

Os conjunto de gráficos 3.5 a 3.8 mostram os valores médios anuais da complexidade e da entropia para as séries de fechamento de todos os mercados e para cada $d = 3, 4$. A variação das duas medidas é bastante errática para todos os mercados, e não parece haver uma correlação nos movimentos entre os desenvolvidos nem entre os emergentes. Cumpre notar, entretanto, que para um mesmo mercado, os movimentos das duas medidas são negativamente correlacionados, em especial em períodos de grande variação: fortes variações na entropia estão ligadas a grandes variações em sentido contrário na complexidade, e vice-versa.

A figura 3.9 exibe as curvas q-complexidade-entropia para o tamanho de partição $d = 3$ de todos os mercados num mesmo plano. As curvas para $d = 4$ e $d = 5$ são mostradas na figura 3.10 e na figura 3.11, respectivamente. Como explicado no Capítulo 1, os pontos nos gráficos das figuras 3.1 a 3.3 estão contidos nessas curvas e correspondem ao caso particular $q = 1$, e por isso o agrupamento das curvas em cada tamanho de partição

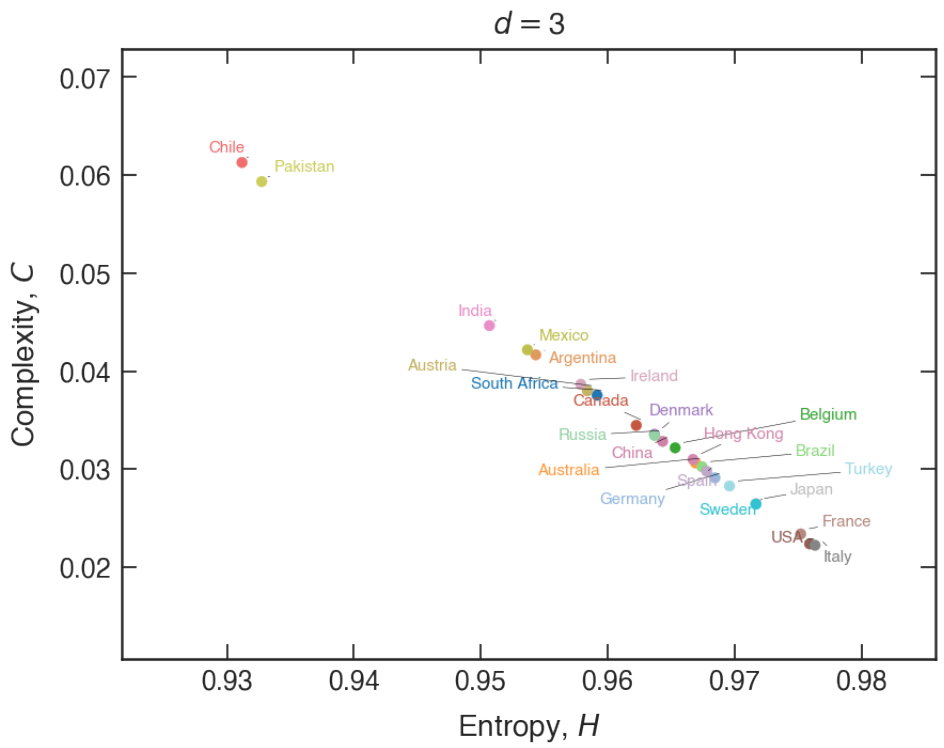

Figura 3.1. Complexidade-entropia de todos os mercados — fechamento, $d = 3$.

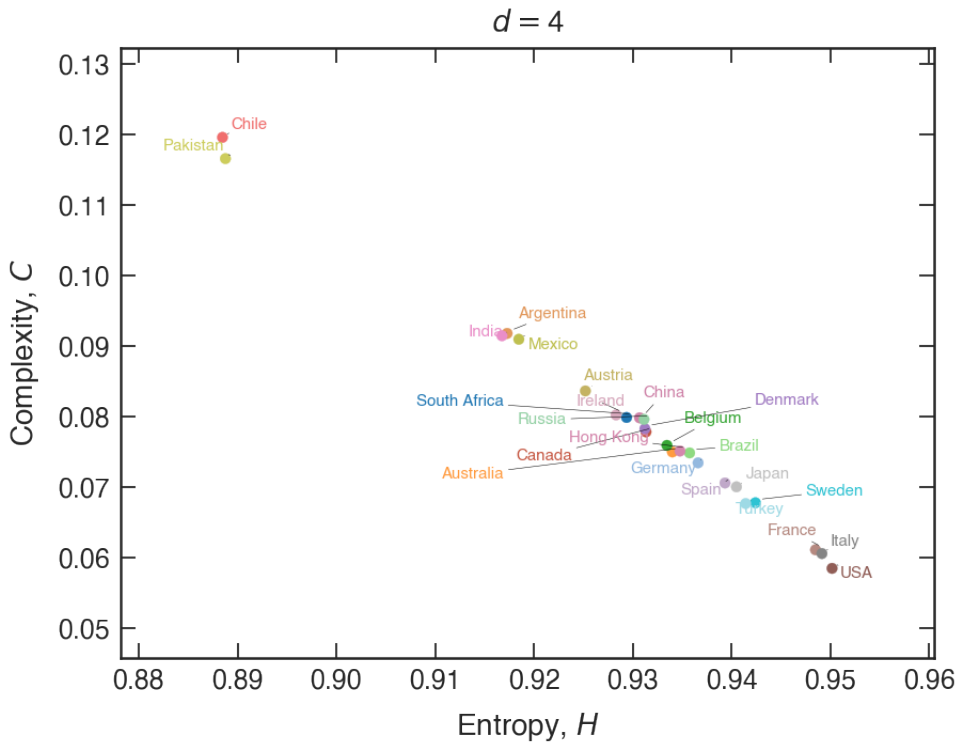

Figura 3.2. Complexidade-entropia de todos os mercados — fechamento, $d = 4$.

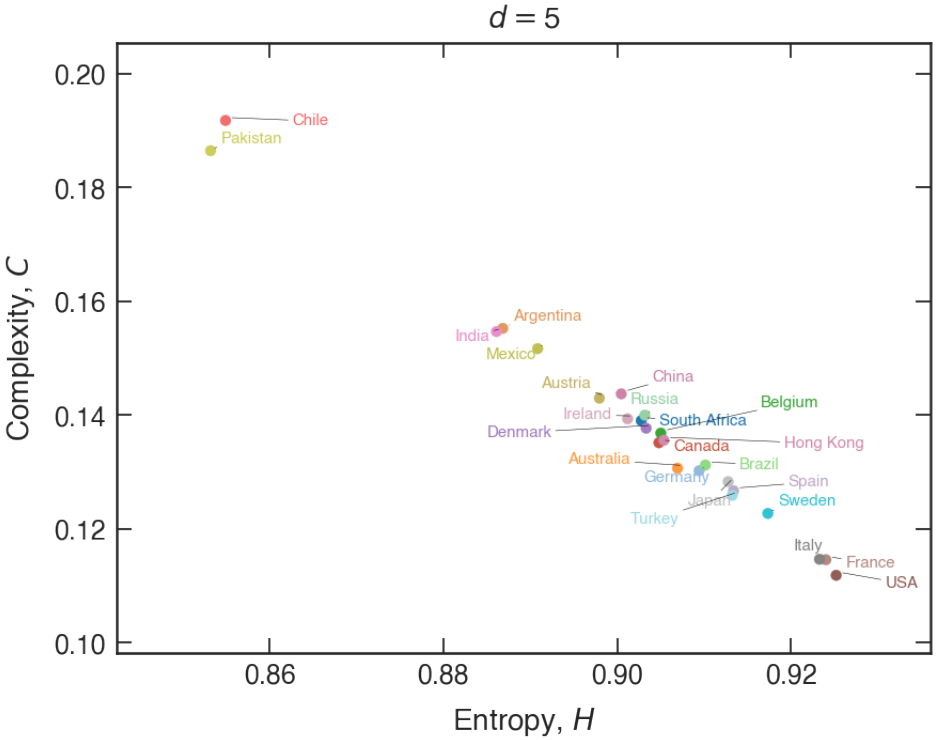

Figura 3.3. Complexidade-entropia de todos os mercados — fechamento, $d = 5$.

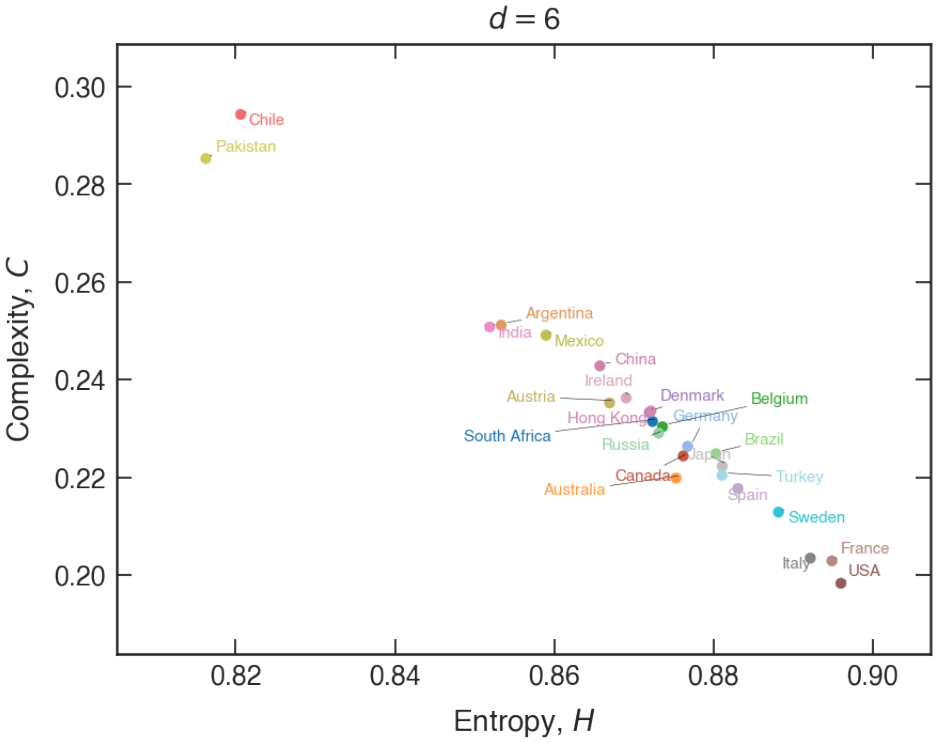

Figura 3.4. Complexidade-entropia de todos os mercados — fechamento, $d = 6$.

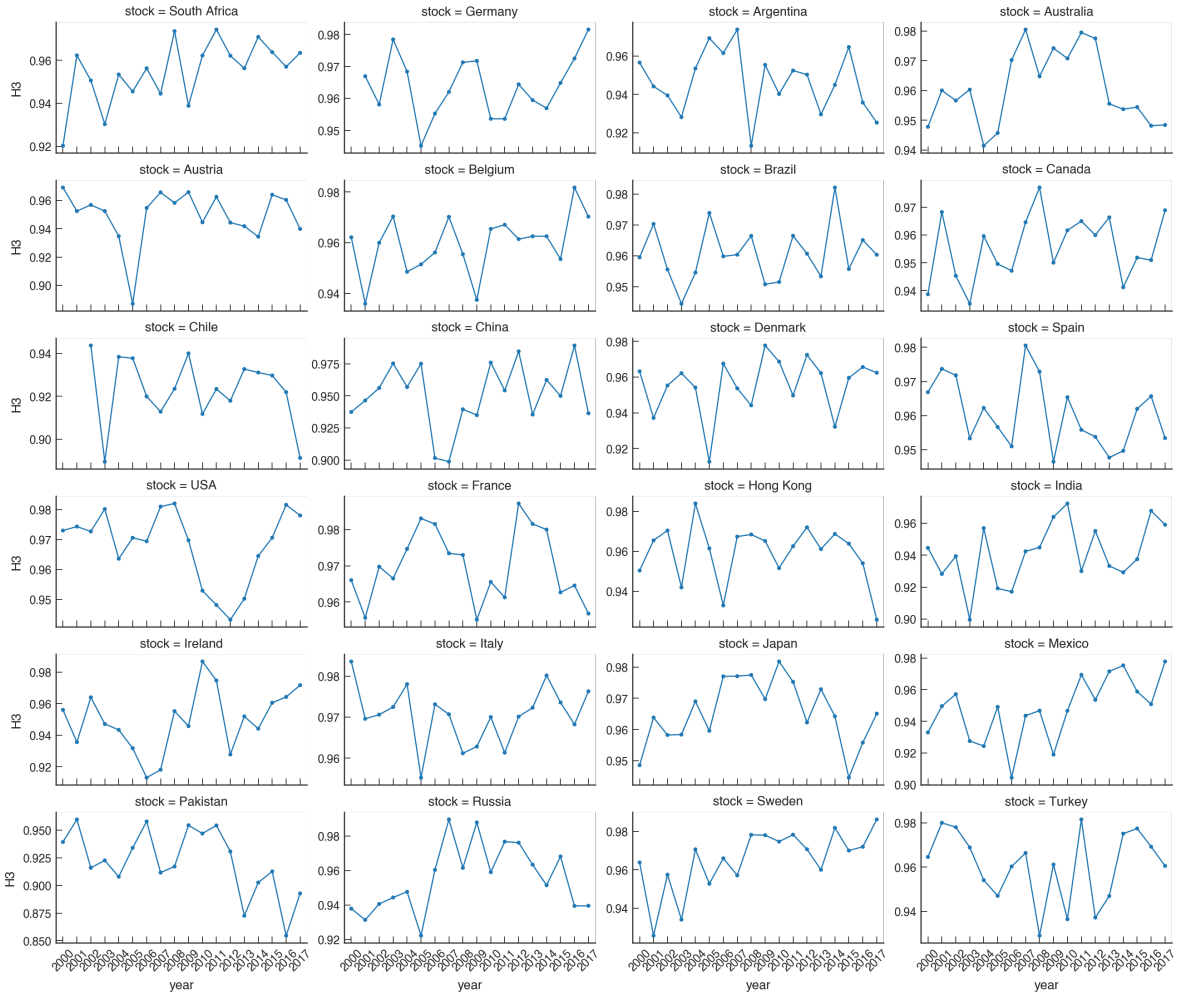

Figura 3.5. Valor médio anual da entropia de todos os mercados — fechamento, $d = 3$.

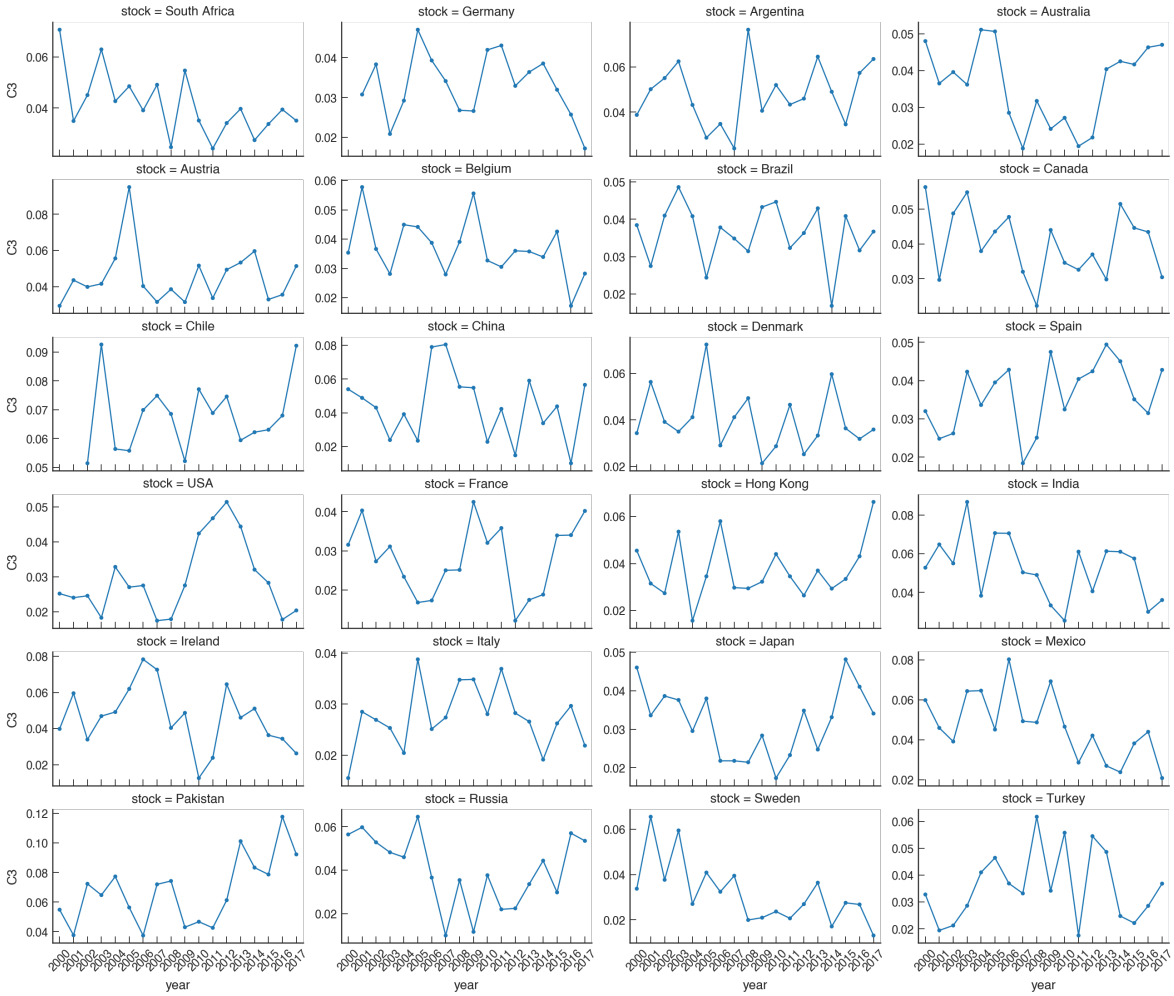

Figura 3.6. Valor médio anual da complexidade de todos os mercados — fechamento, $d = 3$.

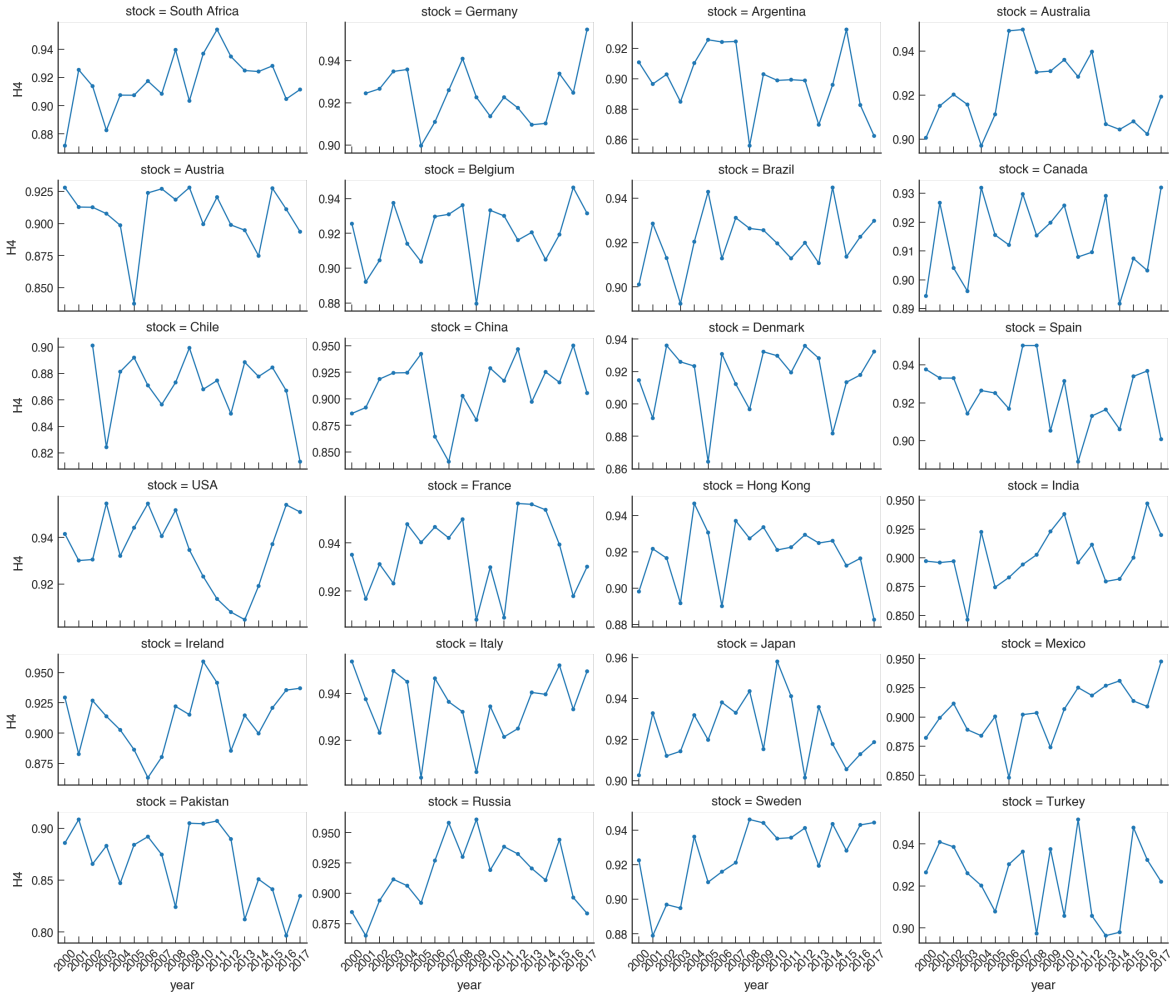

Figura 3.7. Valor médio anual da entropia de todos os mercados — fechamento, $d = 4$.

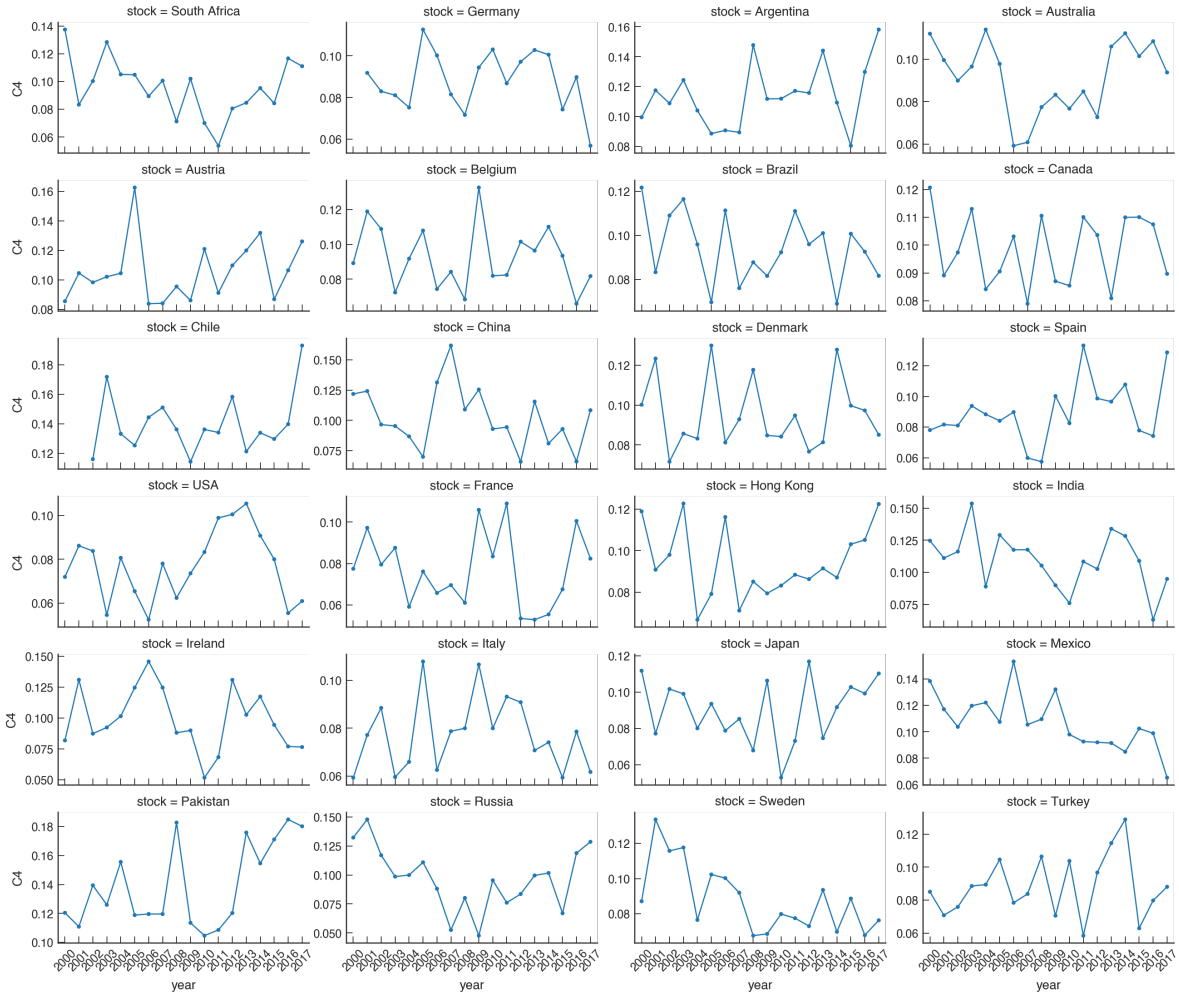

Figura 3.8. Valor médio anual da complexidade de todos os mercados — fechamento, $d = 4$.

tem forte correspondência com o agrupamento dos pontos naqueles gráficos.

Já as figuras 3.12, 3.13 e 3.14 mostram as curvas q-complexidade-entropia de cada país separadamente para $d = 3, 4, 5$ respectivamente, com o código de cores indicando o valor do parâmetro q associado a cada ponto calculado na curva. Todas as curvas são fechadas, com exceção daquela associada à bolsa de valores do Paquistão para $d = 5$, indicando que nem todas as $5! = 120$ permutações ocorrem na série de índices no fechamento desse mercado. Entretanto, convém lembrar que a aplicação do método complexidade-entropia de permutação é mais informativo quando $d! \ll n$, e as séries em estudo apresentam aproximadamente 4600 observações, de modo que, se $d = 5$, $\frac{d!}{n} \approx 0,026$, uma razão não tão próxima de zero. Assim, pode-se inferir que a curva em questão deve se fechar, se for possível usar uma série com mais observações, e que os processos geradores dos índices no fechamento são estocásticos.

As medidas das áreas das regiões limitadas por cada curva q-complexidade-entropia, para $d = 3, 4, 5$ são mostradas nas figuras 3.15, 3.16 e 3.17. É possível notar, primeiramente, que as medidas das áreas crescem com o aumento em d. Se houvesse uma separação perfeita entre mercados desenvolvidos e emergentes, e tendo em conta a hipótese levantada na Introdução e no Capítulo 1 (de que mercados correspondentes às menores áreas apresentam eficiência informativa e portanto são mais desenvolvidos), os 14 países desenvolvidos apareceriam relacionados às menores áreas. Embora isso não ocorra nesses gráficos, é de se notar que, das 14 bolsas correspondentes às menores áreas, 10 são de países desenvolvidos no caso $d = 3$; e se $d = 4$ ou $d = 5$, esse número sobe para 12. Tais resultados reforçam a hipótese inicialmente aventada.

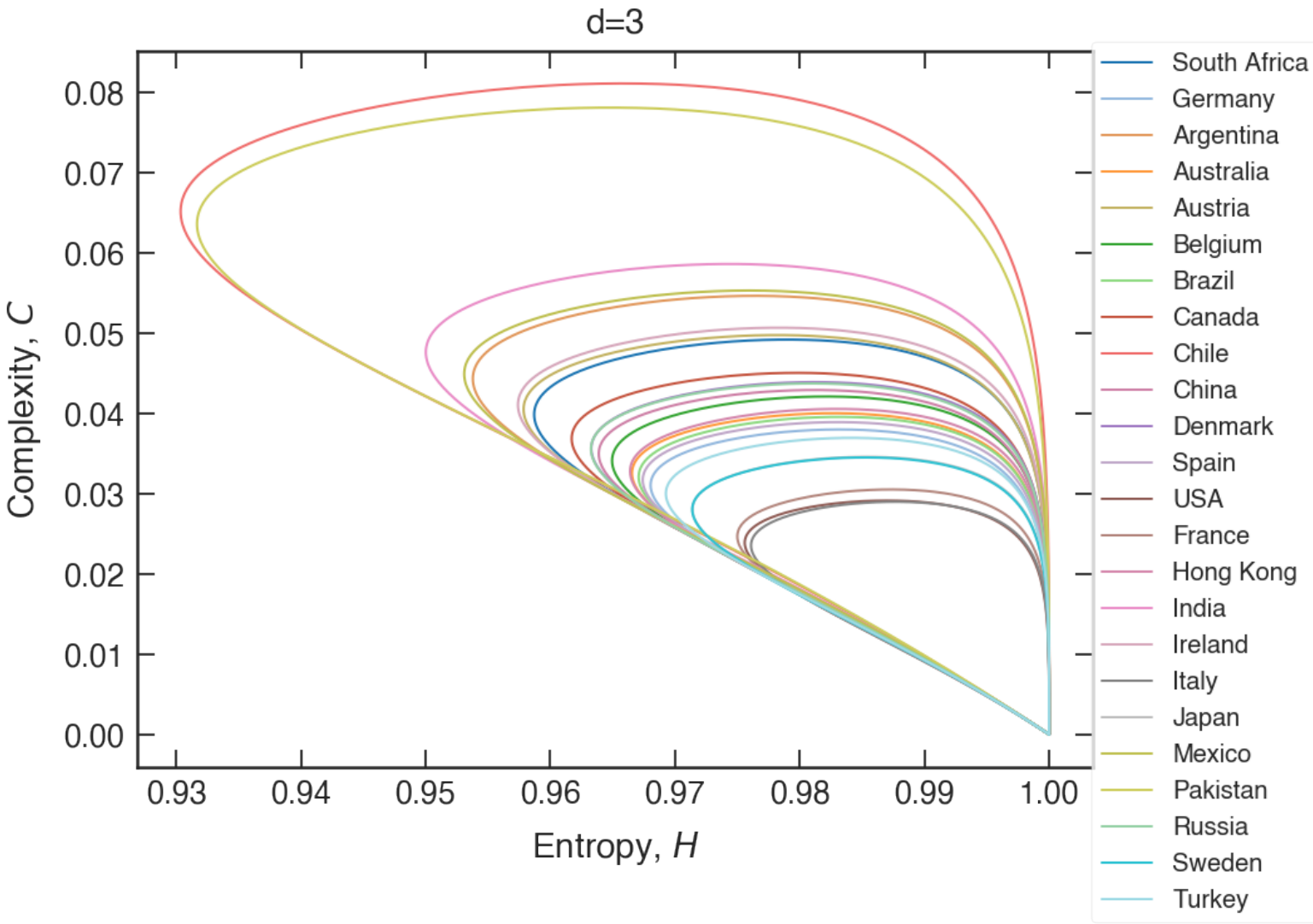

Figura 3.9. Curvas q-complexidade-entropia de todas as bolsas de valores — fechamento, $d = 3$.

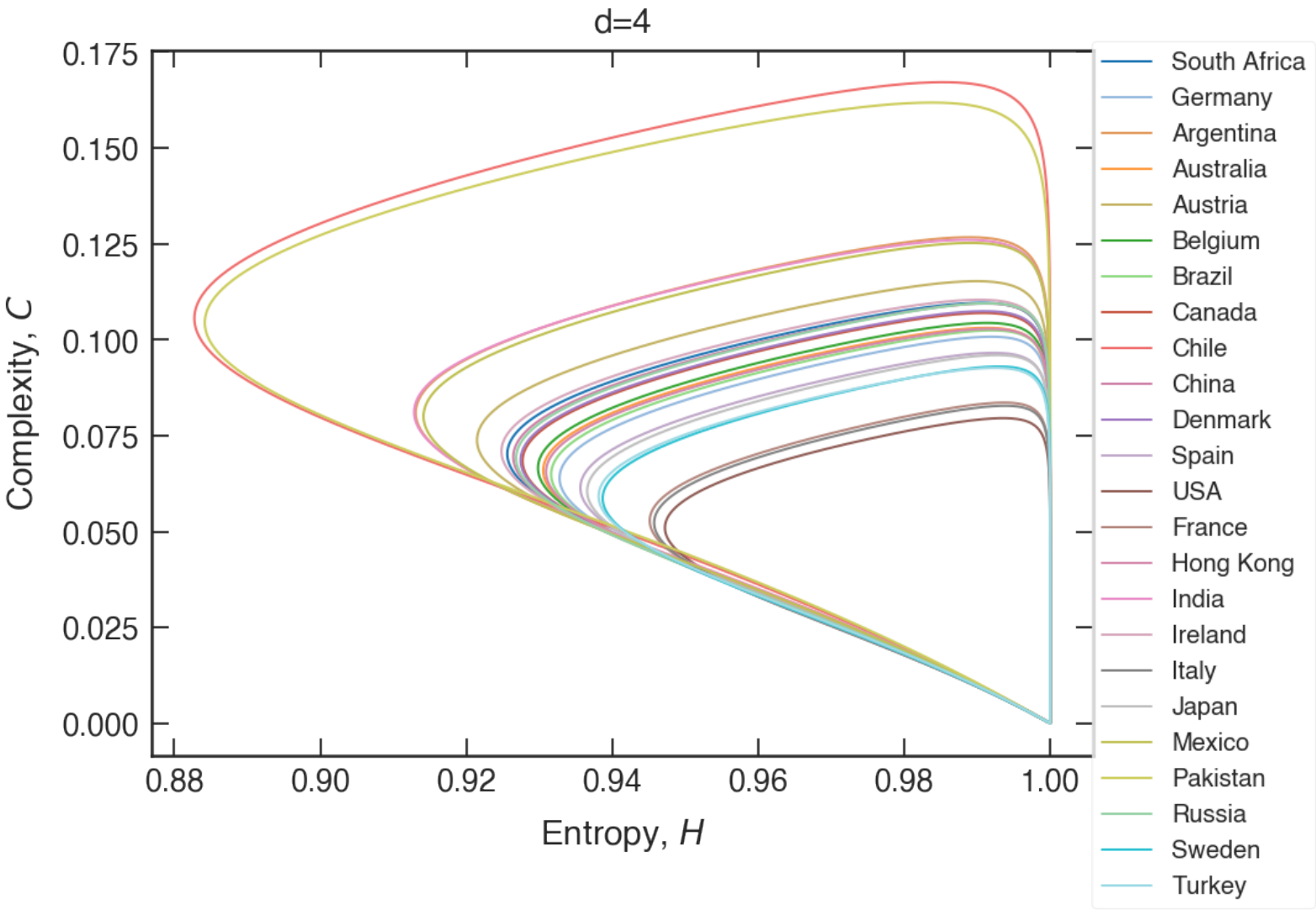

Figura 3.10. Curvas q-complexidade-entropia de todas as bolsas de valores — fechamento, $d = 4$.

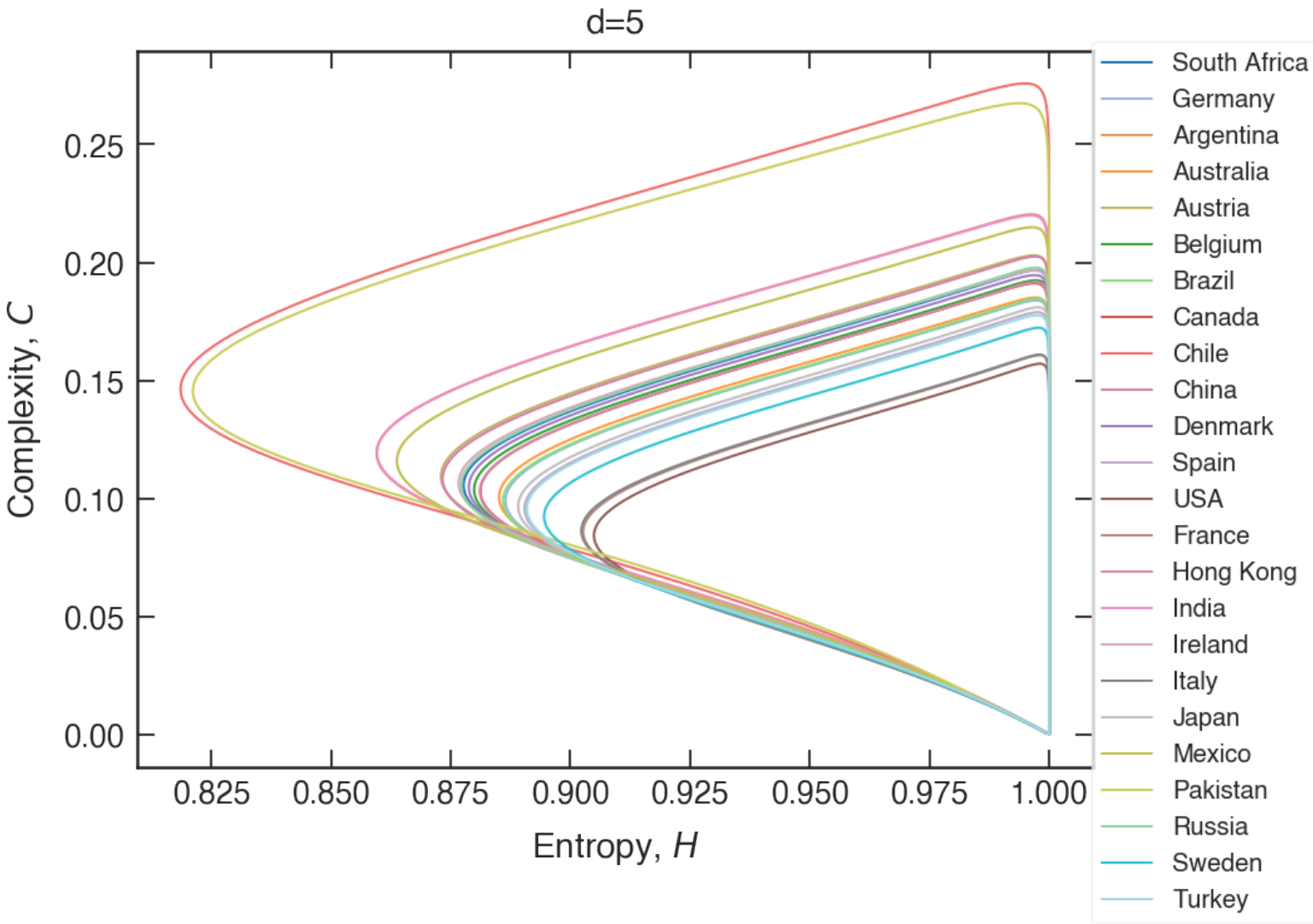

Figura 3.11. Curvas q-complexidade-entropia de todas as bolsas de valores — fechamento, $d = 5$.

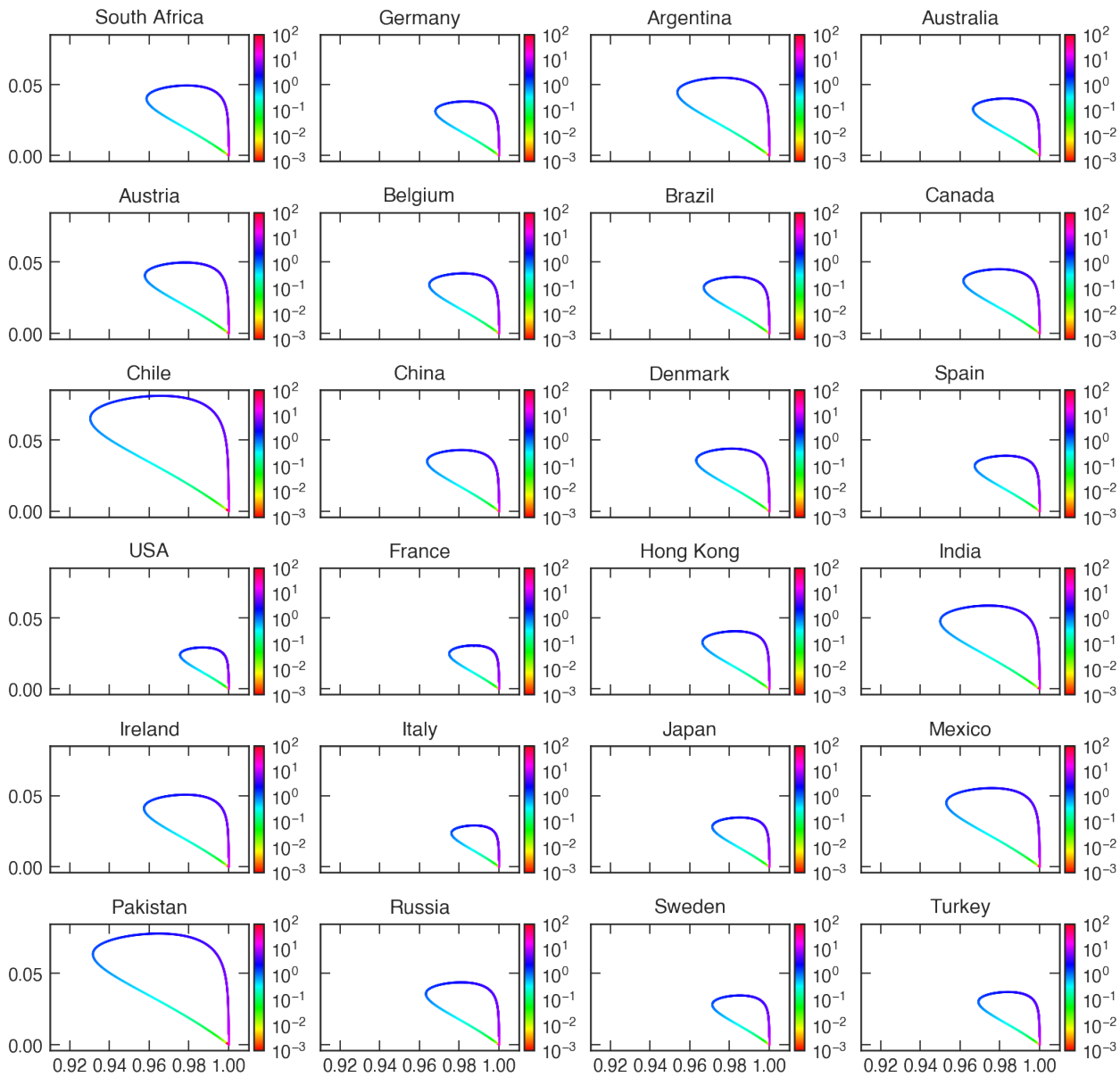

Figura 3.12. Curvas q-complexidade-entropia de cada bolsa de valores. As cores correspondem ao valor do parâmetro q em cada ponto — fechamento, $d = 3$.

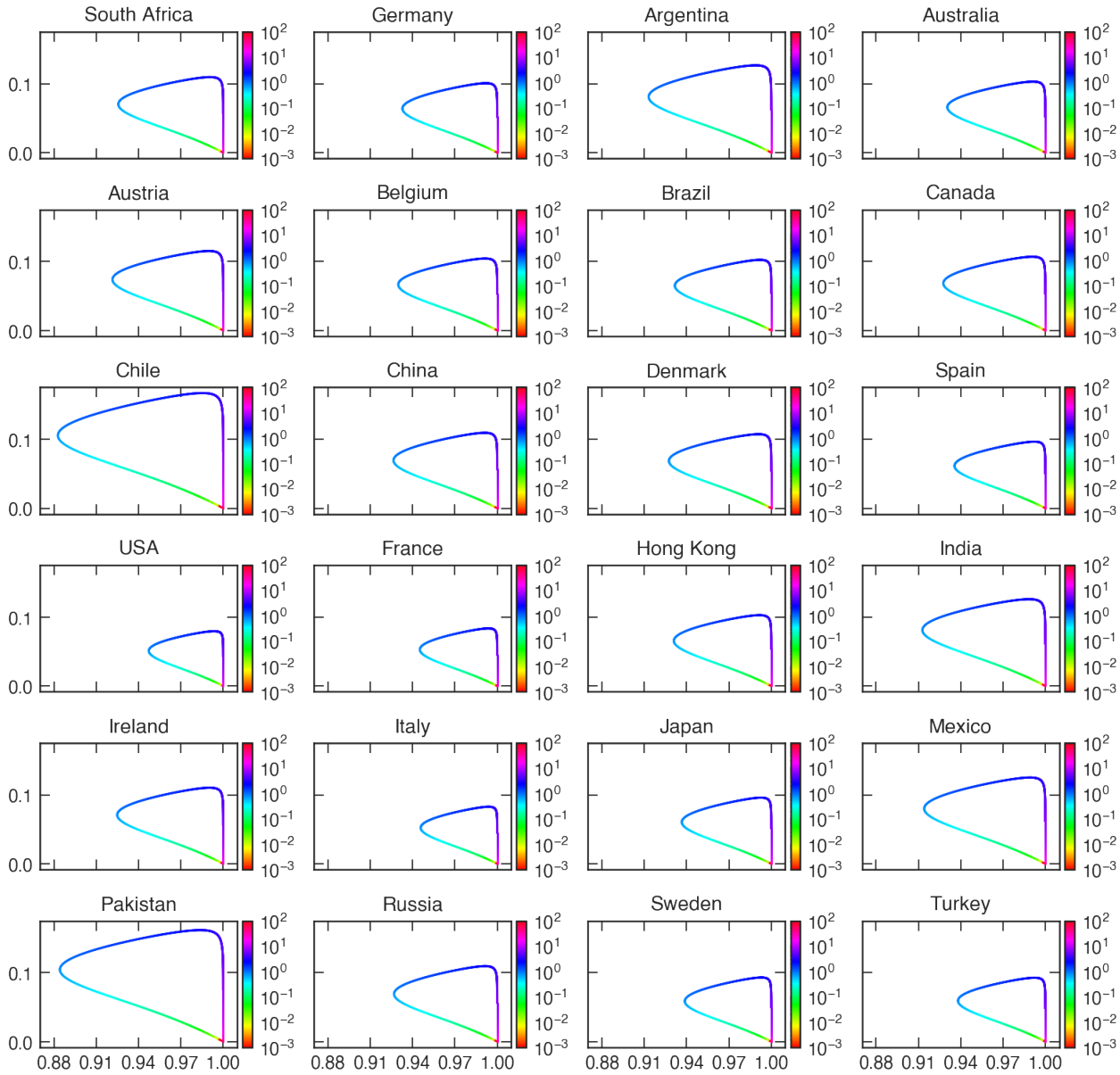

Figura 3.13. Curvas q-complexidade-entropia de cada bolsa de valores. As cores correspondem ao valor do parâmetro q em cada ponto — fechamento, $d = 4$.

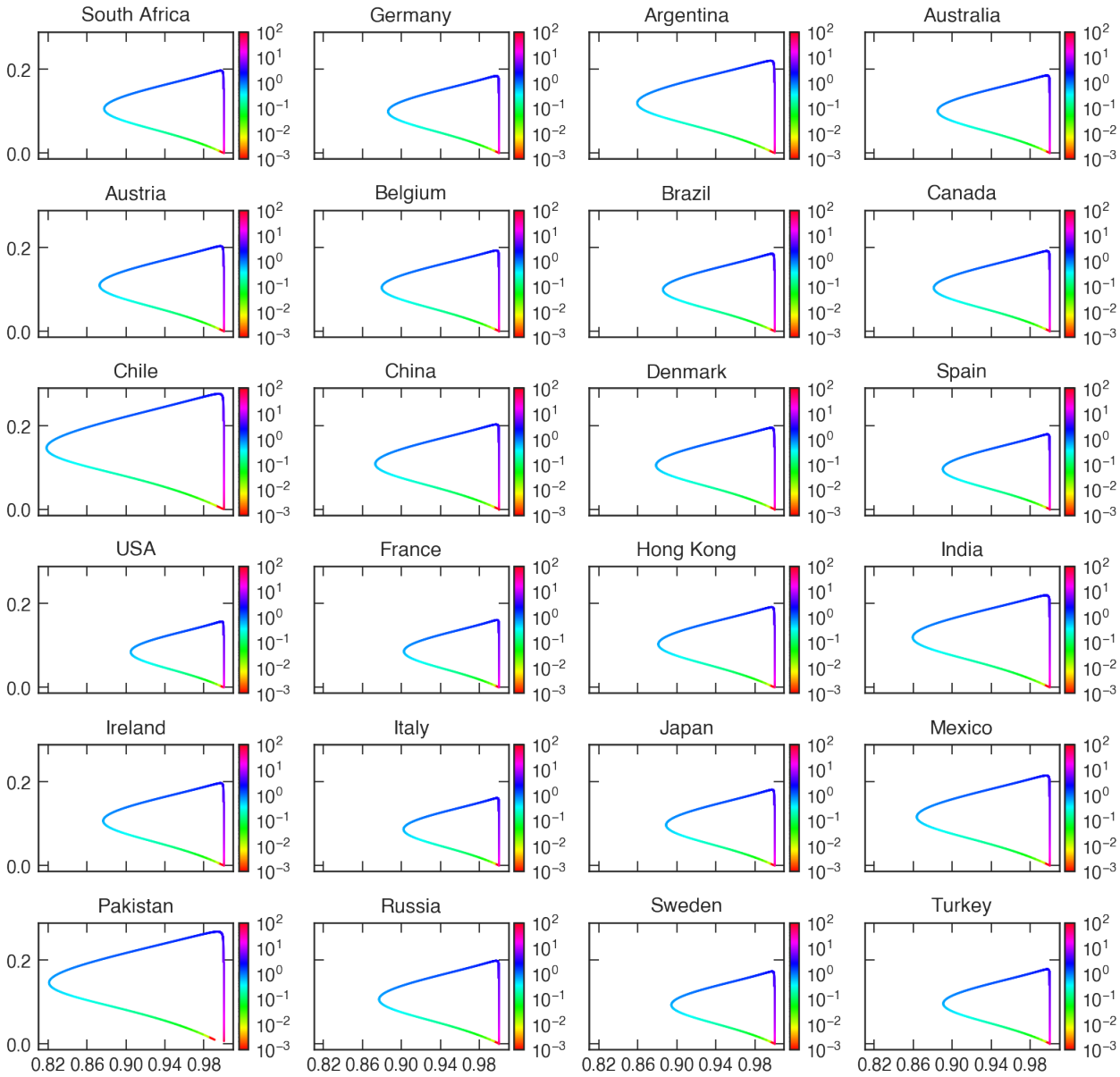

Figura 3.14. Curvas q-complexidade-entropia de cada bolsa de valores. As cores correspondem ao valor do parâmetro q em cada ponto — fechamento, $d = 5$.

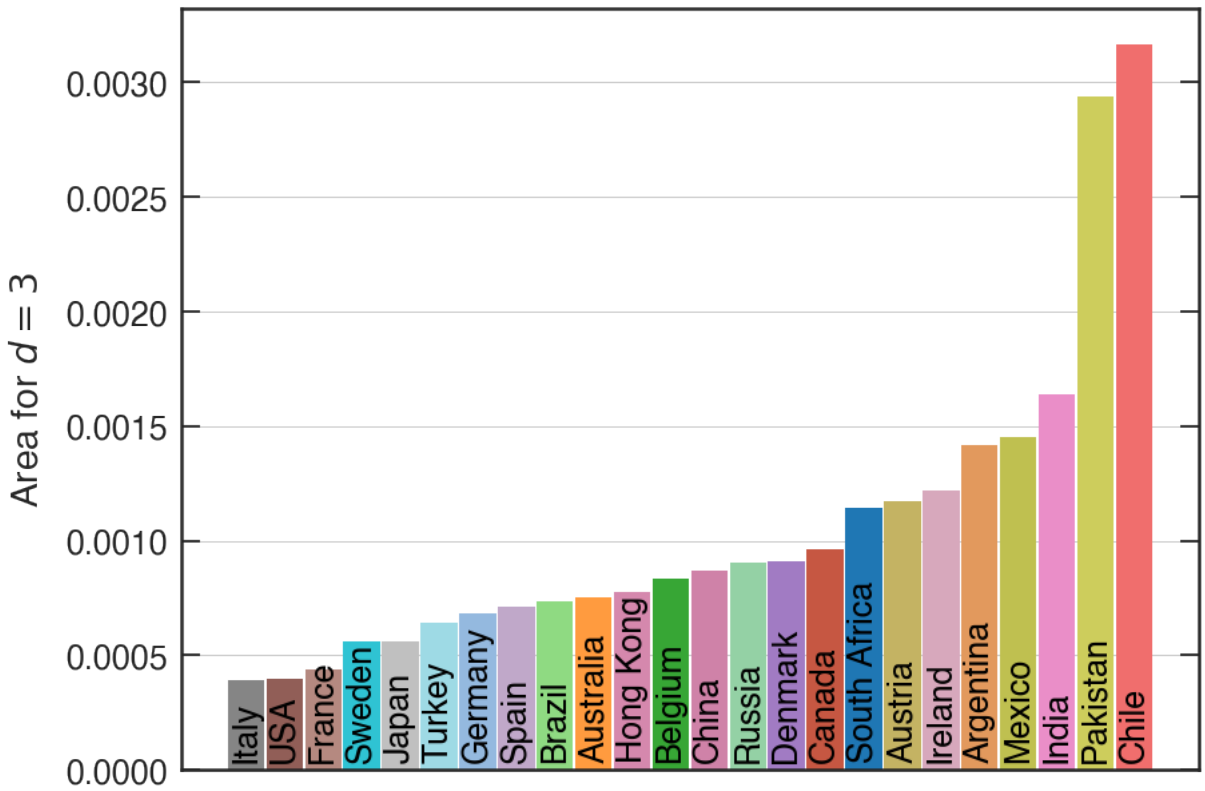

Figura 3.15. Área da região encerrada pelas curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro — fechamento, $d = 3$.

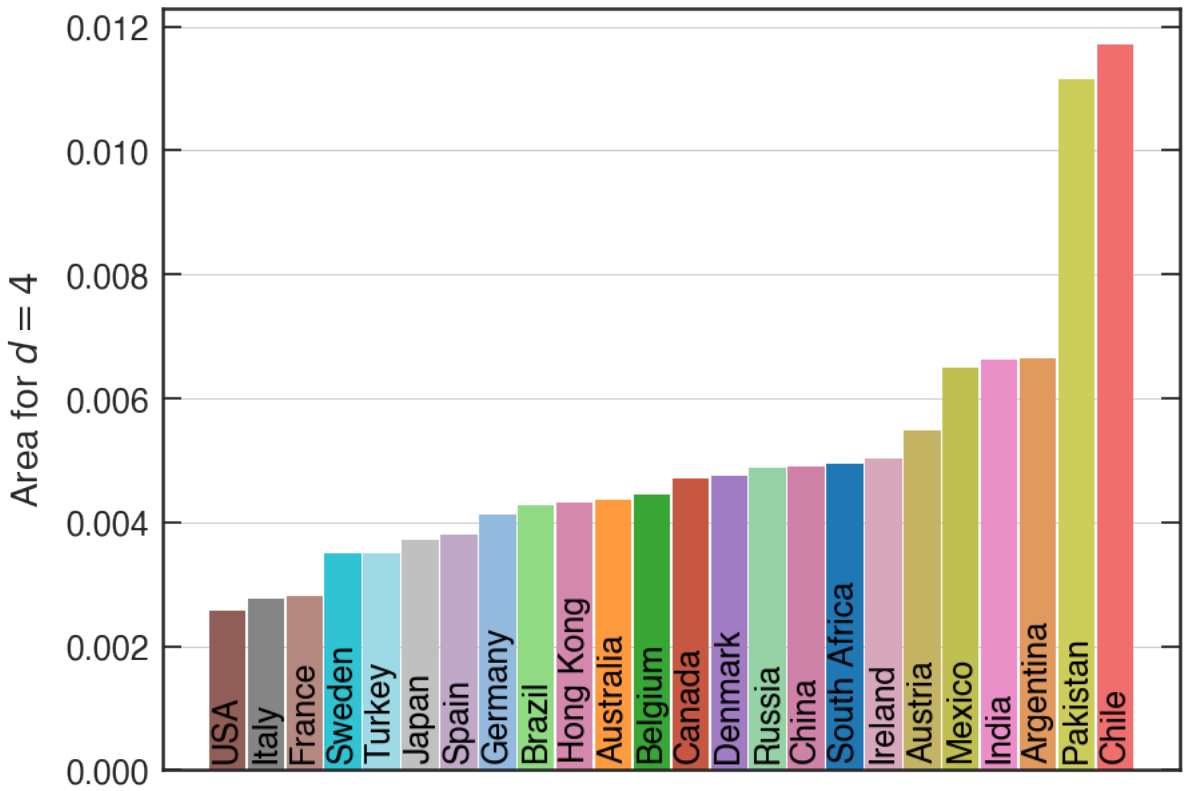

Figura 3.16. Área da região encerrada pelas curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro — fechamento, $d = 4$.

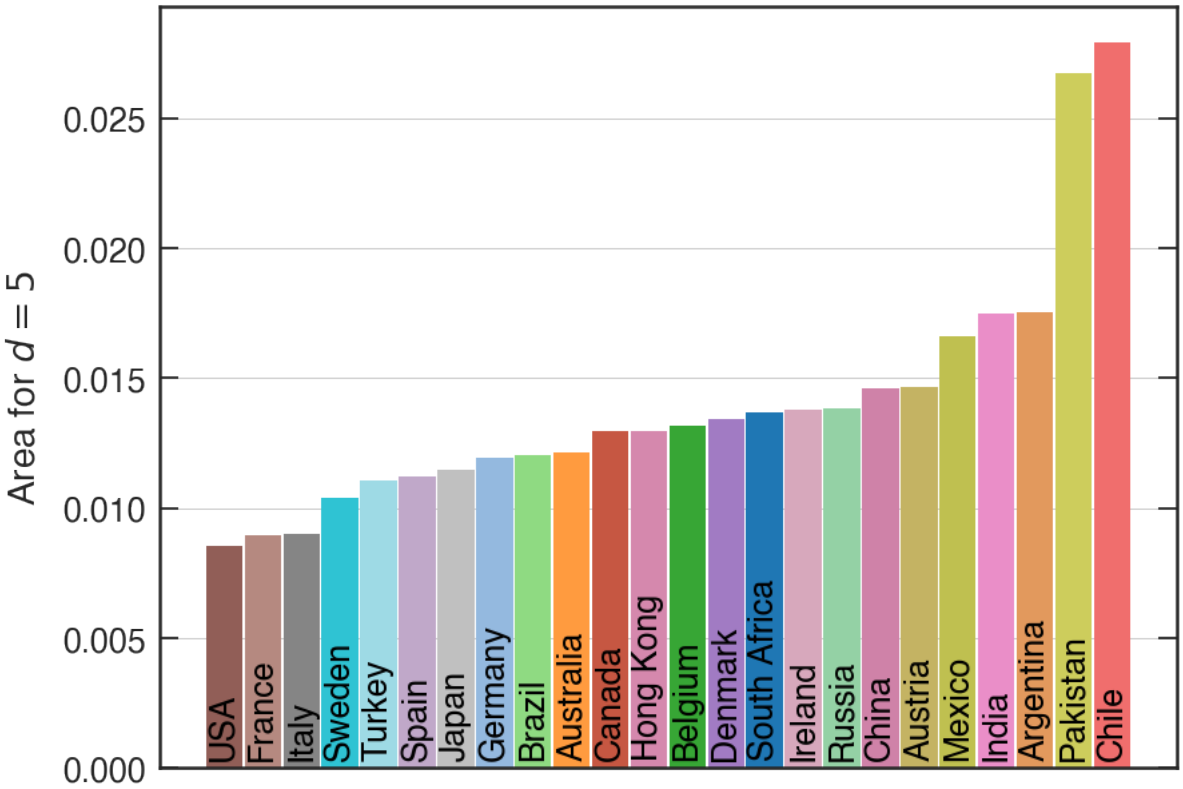

Figura 3.17. Área da região encerrada pelas curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro — fechamento, $d = 5$.

As figuras 3.18 a 3.20 mostram as curvas q-complexidade-entropia para $d = 3, 4, 5$ de cada mercado em dois períodos distintos: antes e depois de setembro de 2008, mês que marca o início da grande crise financeira internacional. Primeiramente, para $d = 5$, várias das curvas são abertas, consequência do fato de que o truncamento faz com que cada série tenha aproximadamente metade do tamanho da série original, tornando menos provável a ocorrência de todas as permutações em cada segmento. Os gráficos mostrados nas figuras 3.21 a 3.23 referem-se à variação da área das regiões limitadas pelas curvas q-complexidade-entropia de cada país e para os mesmos valores de d usados anteriormente. Vê-se que, quanto maior o valor de d, em geral mais intensas são as variações de área, e mais mercados têm sua área correspondente diminuída. Índia e México aparecem nos três gráficos com a maior variação negativa (e, portanto, com o maior aumento de eficiência informativa em seus mercados), enquanto Paquistão e Espanha mostram as maiores variações positivas. Diferentemente do ordenamento das áreas, o ordenamento de suas variações não apresenta um padrão nítido no que se refere à classificação dos países como desenvolvidos ou emergentes: em $d = 3$, 5 nações emergentes aparecem entre as 10 variações negativas e outras 5 no grupo das 14 com variações positivas; os respectivos resultados são 7 em 11 e 3 em 13 se $d = 4$; e finalmente 8 em 14 e 2 em 10 para $d = 5$. Embora não haja uma correspondência perfeita, esses resultados mostram uma tendência dos mercados emergentes em terem as áreas das curvas q-complexidade-entropia diminuídas no pós-crise, indicando um aumento de sua eficiência, enquanto os países desenvolvidos tenderam a se mover no sentido contrário.

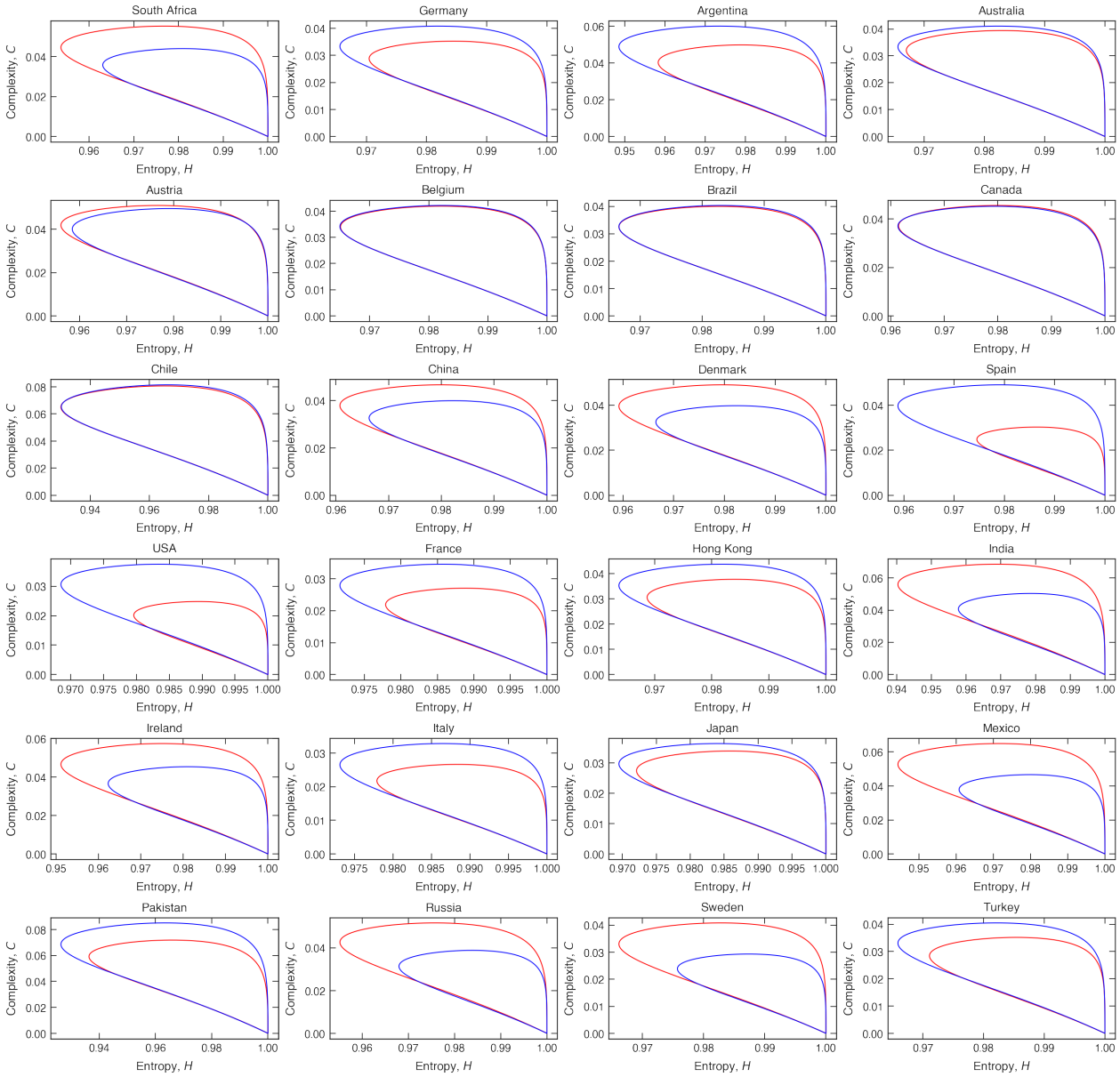

Figura 3.18. Curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro antes (vermelho) e depois (azul) da crise — fechamento, $d = 3$.

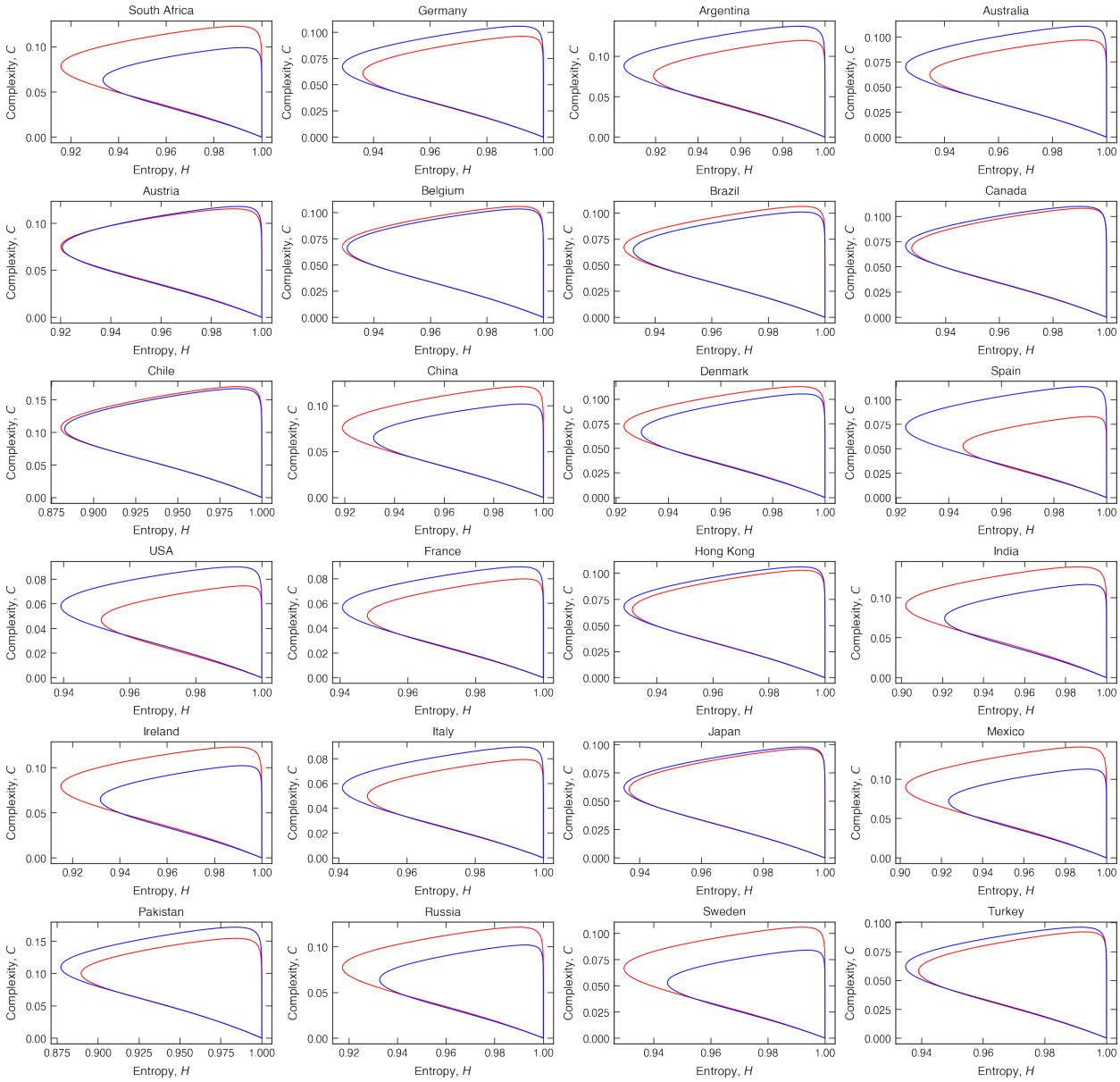

Figura 3.19. Curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro antes (vermelho) e depois (azul) da crise — fechamento, $d = 4$.

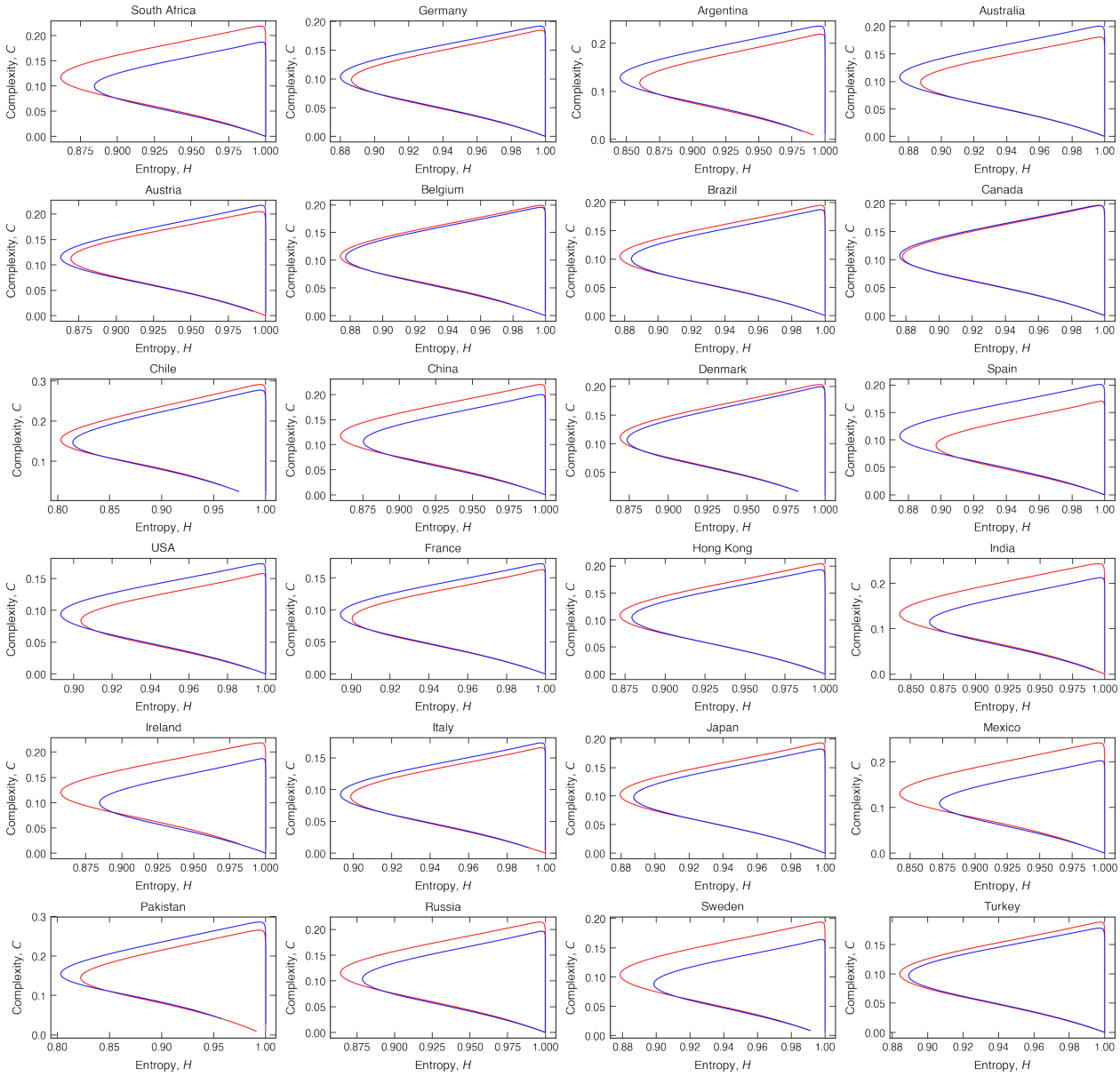

Figura 3.20. Curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro antes (vermelho) e depois (azul) da crise — fechamento, $d = 5$.

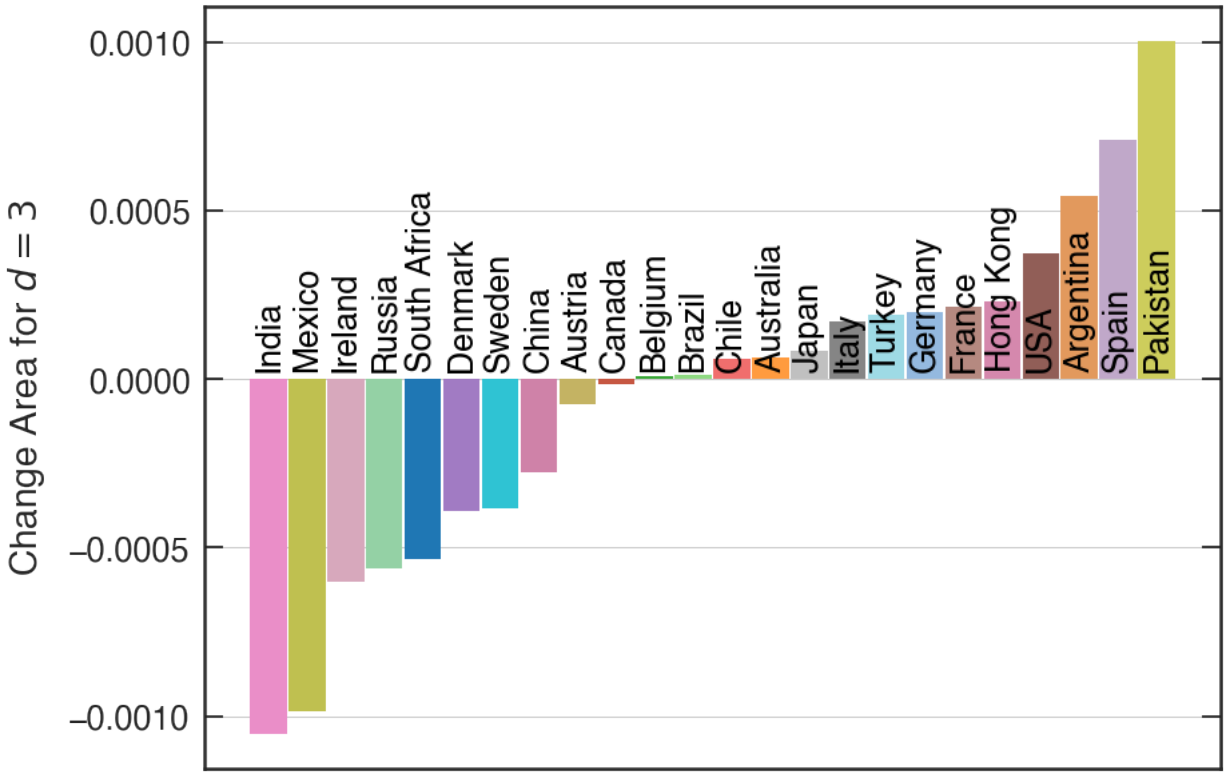

Figura 3.21. Variação das áreas das regiões definidas pelas curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro após a crise — fechamento, $d = 3$.

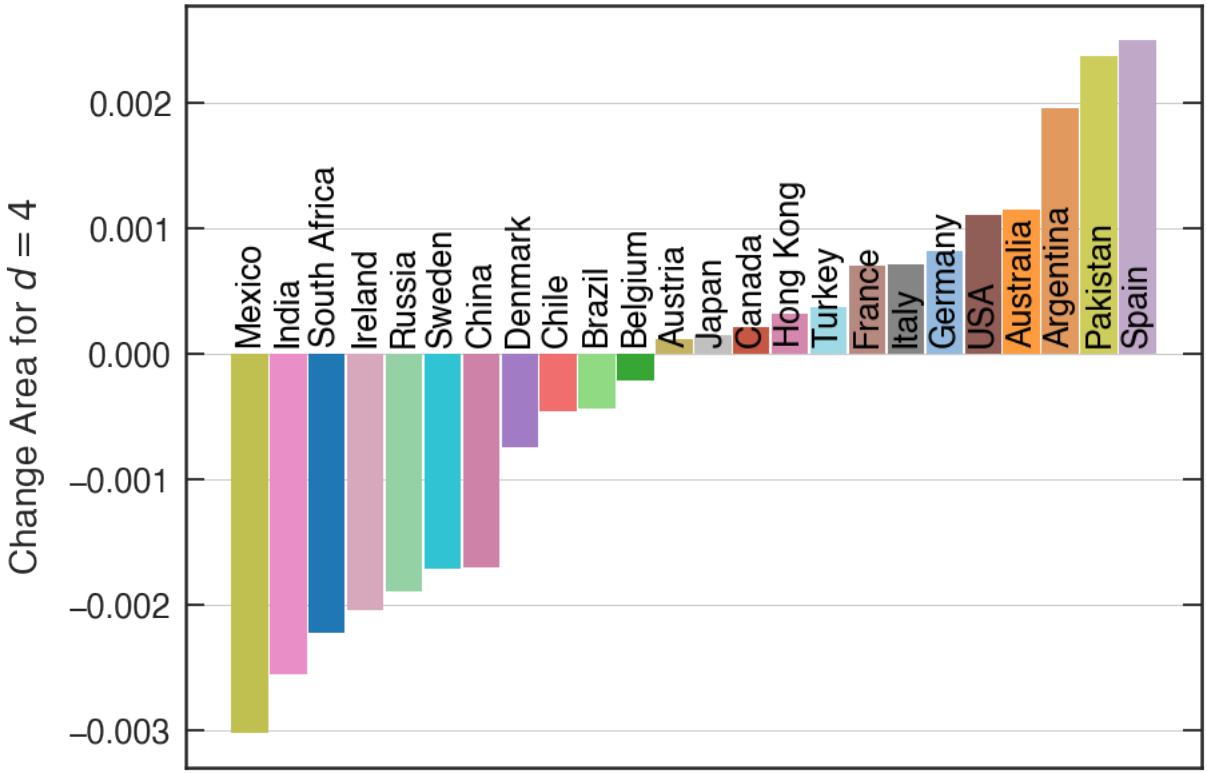

Figura 3.22. Variação das áreas das regiões definidas pelas curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro após a crise — fechamento, $d = 4$.

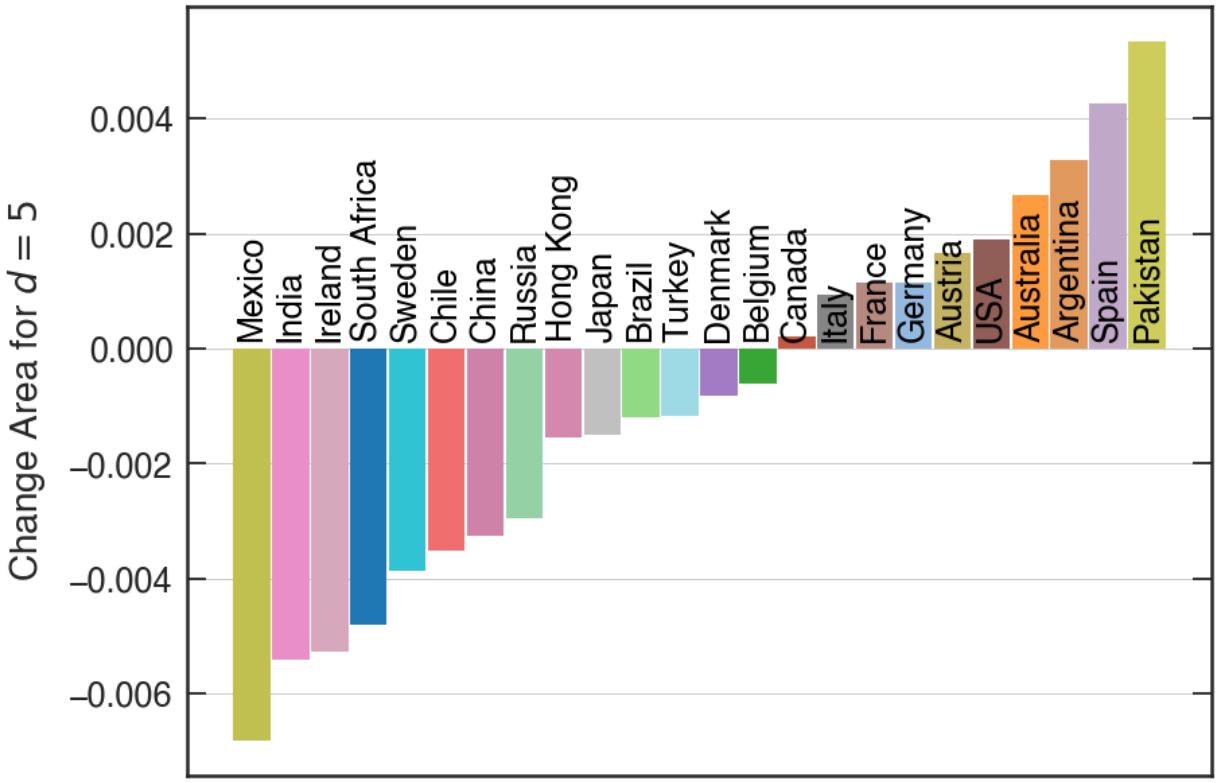

Figura 3.23. Variação das áreas das regiões definidas pelas curvas q-complexidade-entropia de cada mercado financeiro após a crise — fechamento, $d = 5$.

Conclusão

Neste trabalho, utilizaram-se métodos da Física Estatística na análise de séries temporais relativas a índices de 24 mercados financeiros. Foram calculadas as medidas de complexidade e entropia de permutação no arcabouço da proposta de ROSSO et al. e de sua generalização, preconizada por RIBEIRO et al., em que a entropia de Shannon é substituída pela entropia de Tsallis. As séries utilizadas foram as dos índices das bolsas de valores no fechamento do dia, com um total de aproximadamente 4600 observações para a maioria dos mercados, e suas partições variaram de um tamanho $d = 3$ até 6 no estudo sob a proposta de ROSSO et al. e de 3 a 5 na abordagem de RIBEIRO et al.

Os resultados dispostos no plano complexidade-entropia mostraram que, independentemente do tamanho d da partição, na região de mais alta entropia e mais baixa complexidade, encontram-se 4 países desenvolvidos: Estados Unidos, França, Itália e Suécia; no extremo oposto, destacam-se 5 nações emergentes: Argentina, Chile, Índia, México e Paquistão, com Chile e Paquistão bastante afastados de todos os outros pontos. Entre os dois polos, há uma região com maior densidade e menos distinguibilidade entre os mercados financeiros.

As curvas q-complexidade-entropia indicaram conclusões semelhantes e permitiram, por meio do cálculo da área da região por elas encerrada (as curvas, em sua grande maioria, se mostraram fechadas, evidência de que as séries advém de um processo estocástico), uma classificação dos mercados. Os estudos realizados por RIBEIRO et al. mostram que uma maior área sob a curva q-complexidade-entropia serve como uma medida da "memória" do processo gerador. Mercados mais aderentes à hipótese de mercados eficientes devem ter a flutuação de suas séries de índices com pouca memória do passado, pois as informações, quando disponíveis, são imediatamente processadas pelos agente econômicos e refletidas nos preços dos ativos financeiros. Desse modo, às menores áreas sob as curvas q-complexidade-entropia devem corresponder os mercados mais

eficientes. Os resultados indicam, como se poderia esperar, países usualmente tidos como desenvolvidos com as menores áreas de maneira geral, enquanto países emergentes tendem a apresentar maiores áreas. Nesse sentido, essa abordagem pode servir como uma ferramenta alternativa para a classificação de mercados financeiros mundo afora. Uma extensão natural deste trabalho seria a aplicação dos métodos de complexidade-entropia a uma gama maior de bolsas de valores, e até mesmo a outros tipos de séries, como as de preços de derivativos.

O outro objetivo deste trabalho — mensurar o impacto da crise financeira de 2008 sobre a eficiência informativa dos mercados — envolveu a divisão das séries de índices no fechamento dos mercados num período antes do início da crise e outro após. Os resultados, sumarizados pela variação da área sob as curvas q-complexidade-entropia , embora não sejam taxativos, indicaram uma tendência a que países desenvolvidos tenham sofrido uma queda na eficiência de seus mercados, enquanto os emergentes experimentaram um incremento nesse aspecto. Uma fragilidade nesta aplicação é o tamanho relativamente pequeno das séries resultantes da quebra das originais, que já não tinham um número de observações muito grande para que a condição $d! \ll n$ fosse satisfeita dados os valores de d utilizados. Apesar disso, os resultados podem ser significativos se tomada a cautela de encará-los apenas como indícios daquilo que apontam.

Bibliografia

AMARI, S. I. et al. Differential geometry in statistical inference. **Lecture Notes-Monograph Series**, JSTOR, p. i–240, 1987.

ARROW, K. J. The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing. **The Review of Economic Studies**, JSTOR, v. 31, n. 2, p. 91–96, 1964.

ARROW, K. J.; DEBREU, G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 265–290, 1954.

BANDT, C.; POMPE, B. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. **Physical Review Letters**, APS, v. 88, n. 17, p. 174102, 2002.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, The University of Chicago Press, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.

FLOOD, M. D. et al. An introduction to complete markets. **Federal Reserve Bank of St. Louis Review**, Federal Reserve Bank of St. Louis, v. 73, March/April 1991, 1991.

MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. **Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance**. Cambridge University Press, 1999.

RIBEIRO, H. V. et al. Characterizing time series via complexity-entropy curves. **Physical Review E**, APS, v. 95, n. 6, p. 062106, 2017.

ROSSO, O. et al. Distinguishing noise from chaos. **Physical Review Letters**, APS, v. 99, n. 15, p. 154102, 2007.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **Bell Syst. Tech. J.**, v. 27, p. 623–656, 1948.

TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 52, n. 1, p. 479–487, 1988.

ZUNINO, L. et al. A multifractal approach for stock market inefficiency. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 387, n. 26, p. 6558–6566, 2008.