UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

SIDINEY BRUNO MONTANHANO

INTRODUÇÃO À TEORIA DE CAMPOS

MARINGÁ
2015

SIDINEY BRUNO MONTANHANO

INTRODUÇÃO À TEORIA DE CAMPOS

Trabalho de conclusão do curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob a orientação do professor Dr. Luis Carlos Malacarne.

MARINGÁ

2015

Resumo

Neste trabalho vamos fazer um estudo sobre teoria clássica de campos como uma introdução ao estudo de teoria quântica de campos. O estudo está baseado em livros clássicos da área. Trabalharemos com as bases da relatividade restrita, buscando um certo aprofundamento matemático que é de grande importância nas teorias atuais de campos, além de introduzir a mecânica analítica relativística. Em sequência, é feita uma apresentação do formalismo das teorias de campos. Finalizando, abordaremos os exemplos mais importantes dos campos clássicos: o campo eletromagnético e o campo gravitacional.

Abstract

In this work, we performed a study of classical field theory as a previous study of quantum field theory. The work is based on classical book texts. We started with fundamentals of relativity, which is necessary as the tools to work with classical and quantum field theory. Following, we presented the basic formalism of field theory. Finally, we consider the eletromagnetic and the gravitacional field theories, the more interesting examples of classical fields.

Conteúdo

Introdução

10 de Novembro de 2015

A presente monografia tem como objetivo principal apresentar ao autor a notação e formalismo da teoria clássica de campos. Partindo do livro de LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. (1952).: The Classical Theory of Fields, estabeleceu-se o estudo da teoria da relatividade restrita e da mecânica voltada aos campos clássicos, para por fim ser estudado os mais famosos campos clássicos: o campo eletromagnético e gravitacional. Não se trata de um trabalho original, sendo somente uma descrição do estudo do autor baseado nos materiais citados na Bibliografia.

A teoria de campos tem como objetivo, ao menos a primeira vista, descrever um sistema não enumerável, contínuo, no espaço e no tempo, como o movimento de um fluido que se idealiza contínuo (infinitamente divisível), a partir de certas informações das interações. Para então construir-se essa teoria na sua versão clássica, precisa-se das ferramentas que a mecânica analítica nos fornece, além de novas notações e formalismos que serão encontrados ao longo do texto.

O texto é dividido em quatro partes bem específicas. Na primeira parte se apresenta um estudo dos fundamentos da relatividade restrita, sua notação moderna e formalismos, como a descrição mecânica do mundo relativístico. Na segunda parte estão descritos alguns resultados essenciais para a descrição de um campo relativístico, tendo como máximo o Teorema de Noether. Na terceira parte finalmente descreve-se o eletromagnetismo clássico em sua forma mais elegante, no âmbito da relatividade restrita. Finaliza-se com a quarta parte, com uma breve descrição do campo gravitacional da relatividade geral.

A ideia de descrever fenômenos físicos com campos talvez não seja exatamente nova, mas seu desenvolvimento matemático é razoavelmente novo. Ela surgiu mais explicitamente com as pesquisas de Michael Faraday (1791-1867) (que basicamente construiu a intuição), e James Clerk Maxwell (1831-1879) (a matemática). A partir de então desenvolveu-se o eletromagnetismo e a relatividade geral com campos clássicos, e muitos outros utilizando o formalismo obtido para fenômenos quânticos.

Sobre notação, se utiliza a métrica $(+,-,-,-)$, e as letras romanas simbolizam dimensões espaciais, com valores $1,2,3$, e letras gregas simbolizam tanto as dimensões espaciais quanto o tempo, tendo valores $0,1,2,3$.

1 Relatividade Especial

Aqui veremos um pouco de relatividade restrita, teoria que descreve o espaço-tempo onde desenvolveremos o eletromagnetismo clássico. Afinal, baseado em resultados do eletromagnetismo que Albert Einstein (1879-1955) criou sua teoria. Será apresentado em primeiro momento o essencial para o entendimento dos próximos capítulos, e depois será apresentado uma visão mais formal das transformações utilizando a teoria de grupos de Lie. Essa última é importante pelo seu uso em teoria quântica de campos.

1.1 Conceitos básicos

A partir de experimentos, geralmente designados à Galileu Galilei (1569-1642), constatou-se que o princípio da relatividade é válido, ou seja, as leis da física são as mesma para todos os sistemas de referência inerciais. Sabemos também por experiências que existe uma velocidade finita para a propagação de interações, que deve ser a velocidade máxima de interações e corpos, pois senão poderíamos interagir com outros corpos antes de dada interação. Concluímos então, utilizando o princípio da relatividade, que essa velocidade máxima é uma constante universal para todos os sistemas inerciais de referência, que é

$$c = 2,998 \,.\, 10^8 \text{ m/s},$$

a velocidade da luz. Então, o princípio da relatividade de Einstein é a combinação do princípio da relatividade com a velocidade finita das interações, em contraste com a relatividade galileana, onde a velocidade de interação é infinita. Assim, é necessário modificar certos conceitos comuns da mecânica clássica nas novas ideias da mecânica relativística.

Primeiramente, um evento é representado em um espaço quadridimensional fictício como um ponto deste espaço, onde temos as três dimensões espaciais e o tempo. Cada partícula possui como correspondência uma linha, a linha descrita pela evolução temporal de uma partícula, chamada linha de universo. Consideremos então dois eventos vistos em dois sistemas K e K'. Em K, como a velocidade de um sinal de luz é c,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 = 0$$

e no sistema K'

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2 (t_2' - t_1')^2 = 0.$$

Então pelo princípio da invariância da velocidade da luz, se o intervalo

$$s_{12} = \left[c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}$$

é nulo em um sistema K, então ele também o será em todos os outros sistemas inerciais. Infinitesimalmente,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Se tivermos $ds = 0$ então $ds' = 0$, e sendo ds e ds' proporcionais,

$$ds^2 = a\, ds'^2$$

onde o coeficiente a depende somente do valor absoluto da velocidade relativa entre os dois sistemas inerciais, pois supondo a homogeneidade e a isotropia do espaço e do tempo, temos que a não depende nem das coordenadas nem do tempo, e nem da direção do movimento. Assim, para três sistemas K, K' e K", e sendo $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$ as velocidades relativas de K' e K", respectivamente, em relação à K, então

$$ds^2 = a\,(V_1)\, ds_1^2$$
$$ds^2 = a\,(V_2)\, ds_2^2$$

e sendo V_{12} a velocidade relativa de K" para K',

$$ds_1^2 = a\,(V_{12})\, ds_2^2$$

e assim

$$\frac{a\,(V_2)}{a\,(V_1)} = a\,(V_{12})\,.$$

Mas V_{12} depende também do ângulo entre $\overrightarrow{V_1}$ e $\overrightarrow{V_2}$, o que não aparece na última equação, e sendo $a\,(V_{12}) = a\,(V_{21})$, concluímos que a é constante e unitário, ou seja,

$$ds^2 = ds'^2$$

e para um intervalo finito $s = s'$.

Podemos escrever $t_2 - t_1 = t_{12}$ e $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2$, e no sistema K, $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$ (analogamente para K', $(s'_{12})^2 = c^2\,(t'_{12})^2 - (l'_{12})^2$), e pela invariância dos intervalos, $c^2\,(t'_{12})^2 - (l'_{12})^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$. Com essa notação, temos que dois eventos ocorrem em um mesmo ponto em K' ($l'_{12} = 0$) se

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2\,(t'_{12})^2 > 0$$

onde o intervalo é real (intervalos reais são ditos tipo-tempo). O lapso de tempo em K' entre os dois eventos é $t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{ct_{12}^2 - l_{12}^2} = s_{12}/c$. Agora, dois eventos ocorrem ao mesmo tempo em K' ($t'_{12} = 0$) se

$$s_{12}^2 = -\,(l'_{12})^2 < 0$$

onde o intervalo é complexo (intervalos complexos são chamados tipo-espaço), e a distância entre esses dois eventos é $l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}$. Assim temos que o espaço se divide em quatro partes: o cone chamado de cone de luz dado por $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ (na relatividade especial, não há uma origem como em um gráfico ou um espaço euclidiano, mas sim um cone quadridimesional que funciona como ponto "zero"; seria onde as partículas com a velocidade da luz "vivem"); a tipo-espaço, onde a noção de tempo é relativo, mas dois eventos separados em um sistema desse tipo não ocorrem em um mesmo ponto no espaço em qualquer outro sistema desse tipo; a tipo-tempo, análogo ao tipo-espaço só que com o tempo, que se divide em duas partes, o passado absoluto e o futuro absoluto (gerando assim a causalidade, uma separação que não pode ser ultrapassada entre o passado e futuro, fazendo com que a causa e o efeito faça sentido).

Para finalizar essa seção, seja dois referenciais e seus "relógios". Para um tempo infinitesimal dt em K a origem de K' (onde o relógio deste está) está deslocado uma distância $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, então

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 \left(dt'\right)^2$$

e

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ou na forma integral

$$t_2' - t_1' = \int_{t_2}^{t_1} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

onde v é o módulo da velocidade tridimensional relativa entre os relógios. Definindo o tempo de um "relógio" se movendo com um objeto com o tempo próprio do mesmo, temos que o tempo medido por um relógio é

$$\tau = \frac{1}{c}\int_a^b ds$$

feito ao longo da linha de universo do relógio. Perceba que se estiver em repouso em relação à K, a integral resultará em um máximo, pois para caminhos com movimento o tempo será mais lento, e a integral terá um valor menor (lembrando que a curva é do tipo-tempo). Isto é resultado da característica pseudoeuclidiana da geometria quadridimensional.

1.2 Transformação de Lorentz

Por definição, as transformações de Lorentz são aquelas que levam as coordenadas de um evento de um sistema inercial a outro, sem modificar o sistema em si, pois pelo princípio da relatividade não existe sistema privilegiado, e portanto as leis físicas são covariantes com as transformações de Lorentz (traduzindo, essas transformações mantém intervalos entre eventos invariantes). Assim elas devem ser expressas matematicamente como uma rotação no espaço quadridimensional x, y, z, ct. Como toda rotação em quatro dimensões pode ser dividida em seis rotações, uma em cada plano xy, xz, zy, tx, ty, tz, onde os três primeiros são somente as rotações tridimensionais ordinárias. Percebendo que as rotações temporais são hiperbólicas (as equações de intervalo são equações de hiperboloides de duas folhas em quatro dimensões), temos para sistemas K e K'

$$x = x' \cosh\varphi + ct' \sinh\varphi \text{ ; } ct = x' \sinh\varphi + ct' \cosh\varphi$$

(veja que essas relações satisfazem a invariância dos intervalos, e que essa rotação é feita no plano tx). Se quisermos o movimento da origem de K' em relação a K ($x' = 0$)

$$x = ct' \sinh\varphi \; ; \; ct = ct' \cosh\varphi$$

de onde obtemos

$$\tanh\varphi = \frac{x}{ct} = \frac{V}{c}$$

onde V é a velocidade da origem de K' relativa a K. Para respeitar a identidade $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$, concluímos que

$$\sinh\varphi = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \; ; \; \cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Daí obtemos a chamada transformação de Lorentz

$$x = \frac{(x' + Vt')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \; ; \; y = y' \; ; \; z = z' \; ; \; t = \frac{\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

As equações inversas são obtidas simplesmente fazendo a mudança V por $-V$. Para o caso $V > c$, x, t serão imaginários, o que corresponde ao fato do movimento com velocidade superior a da luz ser impossível. Também não se pode usar um referencial onde $V = c$, pois o denominador seria zero. Geralmente escrevemos as transformações de Lorentz como

$$x^i = \Lambda^i_k x'^k$$

onde Λ^i_k é a matriz de transformação que veremos quando apresentarmos o grupo de Lorentz.

Como toda rotação em um espaço de dimensão maior do que dois, a ordem das transformações de Lorentz importam, diferindo das transformações galileanas. A exceção (como já deve ter sido imaginado) ocorre em rotação em relação a um mesmo eixo, ou sendo mais direto, onde $V_1 \parallel V_2$.

Para medir o comprimento de algo em repouso no sistema K para o sistema K', fazemos

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{(x'_2 + Vt')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{(x'_1 + Vt')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

ou

$$l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

onde l_0 é o comprimento próprio do objeto (que é medido em K). Essa é a contração de Lorentz. Para o volume, como somente o eixo na direção do movimento sofre contração, então $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$, sendo $\mathcal{V}_0$ o volume próprio. O mesmo pode ser feito com um período temporal. Com um relógio parado em K', $t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$.

Escrevendo as transformações de Lorentz na forma infinitesimal,

$$dx = \frac{(dx' + Vdt')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ dy = dy';\ dz = dz';\ dt = \frac{\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

e dividindo as três primeiras pela última, obtemos a transformação de velocidades,

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x\frac{V}{c^2}};\ v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x\frac{V}{c^2}};\ v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x\frac{V}{c^2}}.$$

Perceba que as velocidades nunca excedem c. Para V significantemente menor que c

$$v_x = v'_x + V\left[1 - \left(\frac{v'_x}{c}\right)^2\right]$$

$$v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}$$

$$v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}$$

ou em forma vetorial

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v'} + \boldsymbol{V} - \frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{V}.\boldsymbol{v'}\right)\boldsymbol{v'}$$

o que deixa explícito a não simetria entre $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{V}$, esta que é o resultado da não comutatividade das transformações de Lorentz. Uma aplicação dessa transformação de velocidades está no problema do desvio da luz conhecido como aberração da luz. Tal fenômeno ocorre pelo fato de que um observador a certa velocidade altera a direção da luz vista em um determiado ângulo. Escolhendo o plano xy como o plano de propagação de uma partícula, então em K'

$$v'_x = v'\cos\theta';\ v'_y = v'\sin\theta'$$

e em K

$$v_x = v\cos\theta;\ v_y = v\sin\theta$$

e utilizando as transformações de velocidade,

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'\sqrt{1 - V^2/c^2}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}$$

sendo esta equação aquela que descreve a diferença na direção do movimento de uma partícula entre dois sistemas inerciais que é dada pelo ângulo $\theta - \theta'$. Para a luz, $v = v' = c$, e daí

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}\sin\theta'}{\cos\theta' + V/c}$$

ou seja, utilizando a identidade trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}\,\sin\theta'}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'};\ \cos\theta = \frac{\cos\theta' + V/c}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}.$$

Para $V \ll c$ e desconsiderando termos de ordem superior a V/c

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'} \Longrightarrow \sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\cos\theta'\sin\theta$$

ou para pequenos ângulos

$$\Delta\theta = \theta - \theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta$$

que é a equação elementar do fenômeno de aberração da luz, como descoberto e explicado por James Bradley (1693-1762).

Como na relatividade tratamos de um espaço quadridimensional, vamos introduzir as coordenadas

$$x^0 = ct;\ x^1 = x;\ x^2 = y;\ x^3 = z$$

que pode ser também descrito como um vetor raio com "comprimento"

$$ds^2 = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2.$$

Assim, podemos definir um quadrivetor como quatro quantidades A^0, A^1, A^2, A^3 que se transforma como as coordenadas, ou seja, com as transformações de Lorentz

$$A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu$$

ou

$$A^1 = \frac{\left(A'^1 + \frac{V}{c}A'\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ A^2 = A'^2;\ A^3 = A'^3;\ A^0 = \frac{\left(A'^0 + \frac{V}{c}A'^1\right)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Utilizando a noção de vetores covariantes e contravariantes,

$$A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$$

e da mesma forma definimos o produto escalar como $A^\mu A_\mu$, um quadriescalar. A componente A^0 é chamada componente temporal e as outras três de componentes espaciais. A magnitude de um vetor pode ser positiva, negativa ou nula, e assim um vetor é classificado como tipo tempo, tipo espaço e vetores nulos (ou isotrópicos), respectivamente. Então escrevemos

$$A^\mu = \left(A^0, \mathbf{A}\right);\ A_\mu = \left(A^0, -\mathbf{A}\right).$$

Como exemplo, o gradiente de um escalar é

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \nabla\phi\right)$$

onde $\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$ são componentes de um vetor covariante, pois se fizermos $\phi = x^\mu$ obteremos um quadriescalar.

Também temos os tensores. O tensor métrico $g^{\mu\nu}$ (ou tensor de Minkowski) é escrito em sua forma matricial

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e claramente

$$g_{\mu\nu}A^\nu = A_\mu;\; g^{\mu\nu}A_\nu = A^\mu$$

e

$$A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu.$$

As transformações para os tensores podem ser escritas como, para um tensor $B^{\mu\nu}$

$$B^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta B'^{\alpha\beta}.$$

1.3 Integração no Quadri-espaço

Como estamos em um espaço quadridimensional, temos basicamente quatro tipos de integral:

- Integral em uma curva no quadriespaço, onde o elemento de integração é dx^μ;

- Integral em uma superfície bidimensional no quadriespaço, onde o elemento de superfície é o tensor $df^{\mu\nu} = dx^\mu dx'^\nu - dx^\nu dx'^\mu$. Diferentemente do espaço tridimensional, onde o elemento de superfície tem um vetor dual que é normal à superfície, no quadriespaço temos o tensor dual

$$df*^{\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{\mu\nu\alpha\beta}df_{\alpha\beta}.$$

- Integral sobre uma hipersuperfície, uma variedade tridimensional. Assim, analogamente com o espaço tridimensional, o elemento de integração será

$$dS^{\mu\nu\alpha} = \begin{vmatrix} dx^\mu & dx'^\mu & dx"^\mu \\ dx^\nu & dx'^\nu & dx"^\nu \\ dx^\alpha & dx'^\alpha & dx"^\alpha \end{vmatrix}$$

e o vetor dual será dado por

$$dS^\mu = -\frac{1}{6}e^{\mu\nu\alpha\beta}dS_{\nu\alpha\beta}.$$

- Integral no volume quadridimensional, sendo o elemento de integração um escalar

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV.$$

As equações de integração usuais são então generalizadas:

- Relação entre uma hipersuperfície fechada e um quadrivolume

$$dS^{\mu} \longleftrightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

(generalização do teorema de Gauss).

- Relação entre uma superfície bidimensional fechada e uma hipersuperfície

$$df*_{\mu\nu} \longleftrightarrow dS_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - dS_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

- Relação entre uma curva quadridimensional fechada e uma superfície bidimensional

$$dx^{\mu} \longleftrightarrow df^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

(generalização do teorema de Stokes).

Das relações entre os tensores e seus duais, temos que um tensor tridimensional antissimétrico (coordenadas espaciais) pode ser descrito por seu dual (um vetor axial $\boldsymbol{a}$). Nas componentes temporais, o vetor será um vetor polar $\boldsymbol{p}$, e assim um quadritensor antissimétrico será

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Mecânica Relativística: Notação Tridimensional

Para descrever a mecânica relativística, queremos que no limite para baixas velocidades encontremos as noções usuais da mecânica clássica, e por analogia com ela, um princípio de mínima ação que resulte na correspodente clássica para baixas velocidades. Para isso, nota-se que a integral deve ser invariante pelas transformações de Lorentz. Logo ele tem que ser um escalar e um diferencial de primeira ordem. Assim para uma partícula livre, a única entidade vista com essas propriedades é um intervalo quadridimensional,

$$S = -\alpha \int_a^b ds = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

onde a integral é na linha de universo da partícula entre dois eventos, e α é uma constante característica da partícula, que claramente é positivo, e o sinal negativo faz com que se tenha um mínimo e não um máximo, como vimos anteriormente. Assim a função de Lagrange será $L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Mas queremos que quando $v \ll c$ ($c \to \infty$) a expressão para L se torne a expressão clássica para a partícula livre: $L = \frac{1}{2}mv^2$. Expandindo então em série de potências de v/c,

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

e como termos constantes não afetam a lagrangiana, concluímos que $\alpha = mc$.

O momento de uma partícula é $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$, e assim obtemos

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

A derivada temporal do momento é a força. Se a velocidade variar somente em direção

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

agora se mudar só a magnitude,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

e vemos que a razão entre força e aceleração, a inércia, é diferente nos dois casos.

A energia é classicamente $E = \boldsymbol{p}.\boldsymbol{v} - L$, e então

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

e se $v = 0$ então $E = mc^2$, a chamada energia de repouso da partícula. Para $v \ll c$,

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Um outro detalhe é que na mecânica relativística a lei de conservação da massa não vale, pois para um sistema de partículas, a massa total

$$c^2 M \neq \sum_a m_a c^2.$$

Somente a lei de conservação da energia, que inclui a energia de repouso, é válida.

Das relações de $\boldsymbol{p}$ e E, temos para uma partícula que $(E/c)^2 = p^2 + (mc)^2$. A energia expressa em termos do momento é chamado de função hamiltoniana $H = c\sqrt{p^2 + (mc)^2}$, que para baixas velocidades

$$H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

Outra relação que encontramos é $\boldsymbol{p} = E\boldsymbol{v}/c^2$. O momento se torna infinito para $v = c$ (temos que dar energia infinita), e assim partículas com massa não podem atingir esta velocidade. Assim, não havendo até agora nenhuma barreira para essa conclusão, temos que para a mecânica relativística partículas sem massa movendo-se na velocidade da luz podem existir.

1.5 Mecânica Relativística: Notação Quadridimensional

Antes de mais nada, a versão quadridimensional de quantidades cinéticas será de grande ajuda. Definimos o quadrivetor velocidade como $u^\mu = dx^\mu/ds$. Da relação

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

obtemos as componentes deste quadrivetor

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

que são adimensionais. Perceba que essas componentes não são independentes, pois como $dx_\mu dx^\mu = ds^2$, temos $u^\mu u_\mu = 1$. A segunda derivada é definida como a quadriaceleração,

$$w^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds}$$

e da relação de unitariedade do quadrivetor velocidade $u_\mu w^\mu = 0$, mostrando que são mutuamente perpendiculares.

Vamos agora escrever a mecânica relativística com a notação quadridimensional. Do princípio de mínima ação

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0$$

e notando que $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$

$$\delta S = -mc \int \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} = -mc \int u_\mu d\delta x^\mu = -mcu_\mu \delta x^\mu + mc \int \delta x^\mu \frac{du_\mu}{ds} ds,$$

onde integramos por partes, e fazendo a variação do elemento de borda ser nulo, concluímos que $\frac{du_\mu}{ds}$ deve ser nulo, ou seja, a velocidade de uma partícula livre é constante em sua forma quadridimensional. Fazendo um dos limites de integração livre, e lembrando que a trajetória deve respeitar as equações de movimento, encontramos

$$\delta S = -mcu_\mu \delta x^\mu$$

e o quadrivetor

$$p_\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu}$$

é chamado de quadrivetor momento. Mas como $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$ e $\frac{\partial S}{\partial z}$ são as componentes do vetor momento $\boldsymbol{p}$, e $-\frac{\partial S}{\partial t}$ é a energia E da partícula, em coordenadas covariantes $p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\boldsymbol{p}\right)$, e em contravariantes $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)$. Veja que podemos escrever então o quadrivetor como $p^\mu = mcu^\mu$, de onde obtemos $p_\mu p^\mu = m^2c^2$.

Em analogia, definimos o quadrivetor força como

$$g^\mu = \frac{dp^\mu}{ds} = mc\frac{du^\mu}{ds}$$

(que satisfaz $g^\mu u_\mu = 0$), e podemos escrever as componentes desse quadrivetor em termos do vetor força tridimensional $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$

$$g^\mu = \left(\frac{\boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\boldsymbol{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

onde a componente tempo está relacionada com o trabalho feito pela força.

Substituindo as componentes do quadrimomento por $-\frac{\partial S}{\partial x^\mu}$ na equação da magnitude do quadrimomento, temos a equação relativística de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} = m^2c^2$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, também conhecido como métrica de Minkowski, definido como $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ para $i = 1, 2, 3$, e $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. Escrevendo então explicitamente,

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2.$$

Para encontrarmos o limite clássico, precisamos retirar o termo de massa de repouso, e utilizando a relação $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$, fazemos $S = S' - mc^2t$, e substituindo na equação acima, encontramos

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0$$

que no limite $c \to \infty$ é a equação clássica de Hamilton-Jacobi.

E para finalizar, o momento angular. Fazendo uma transformação infinitesimal de rotação, temos que

$$x'^\mu - x^\mu = x_\nu \delta\Omega^{\mu\nu}.$$

Os componentes do quadritensor $\delta\Omega_{ik}$ são conectados de tal modo que, sob uma rotação, o módulo do vetor raio deve ser imutável, $x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu$. Substituindo a equação da transformação infinitesimal nesta última e expandindo (e desprezando termos de ordem maiores que a primeira em $\delta\Omega_{\mu\nu}$)

$$x^\mu x^\nu \delta\Omega_{\mu\nu} = 0.$$

Como $x^\mu x^\nu$ é um tensor simétrico, então $\delta\Omega_{\mu\nu}$ de ser antissimétrico. A mudança na ação será $\delta S = p^\mu \delta x_\mu$, e substituindo obtemos $\delta S = p^\mu x^\nu \delta\Omega_{\mu\nu}$. Separando $p^\mu x^\nu$ em partes simétricas e antissimétricas, a parte simétrica se anula pela antissimetria de $\delta\Omega_{\mu\nu}$, e assim

$$\delta S = \frac{1}{2}\left(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu\right)\delta\Omega_{\mu\nu}.$$

Para um sistema fechado, a lagrangiana não muda sob rotação no quadriespaço (pela isotropia do espaço-tempo), ou seja, os parâmetros $\delta\Omega_{\mu\nu}$ são coordenadas cíclicas. Portanto o momento generalizado correspondente é conservado,

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\left(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu\right),$$

ou seja, o tensor $M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ é conservado. Esse tensor antissimétrico é chamado quadritensor momento angular. Os componentes espaciais deste tensor são os componentes tridimensionais do vetor momento angular $\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$

$$M^{23} = M_x\,;\ -M^{13} = M_y\,;\ M^{12} = M_z.$$

Os componentes M^{01}, M^{02}, M^{03} formam um vetor $\sum\left(t\boldsymbol{p} - E\frac{\boldsymbol{r}}{c^2}\right)$. Então

$$M^{\mu\nu} = \left[c\sum\left(t\boldsymbol{p} - \frac{E\boldsymbol{r}}{c^2}\right), -\boldsymbol{M}\right].$$

Por causa da conservação do $M^{\mu\nu}$ em um sistema fechado, temos

$$\sum\left(t\boldsymbol{p} - \frac{E\boldsymbol{r}}{c^2}\right) = const.$$

Como a energia total é também conservada, podemos escrever a última equação na forma

$$\frac{\sum E\boldsymbol{r}}{\sum E} - c^2\frac{\sum \boldsymbol{p}}{\sum E}t = const.$$

Disso, o ponto com raio vetor

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum E\boldsymbol{r}}{\sum E}$$

se move uniformemente com velocidade

$$\boldsymbol{V} = c^2\frac{\sum \boldsymbol{p}}{\sum E}$$

que é a velocidade de movimento do sistema como um todo, ou seja, $\boldsymbol{R}$ é a definição relativística das coordenadas do centro de inércia do sistema.

1.6 Grupo O(k,n)

Vamos agora descrever mais matematicamente os conceitos desse capítulo. Basicamente será somente para o leitor mais interessado na base matemática, mas é interessante para se ter uma visão do quadro todo. Se trata mais de uma curiosidade e aprofundamento, muito importante para a teoria de quântica de campos.

O conceito de grupo pode ser explicado de uma maneira bem simples: um grupo não é tão simplificado quanto um conjunto para se tornar "imprestável", mas não é tão complexo quanto um espaço vetorial para se tornar difícil de trabalhar (digo, de representar a física de um problema). Essa é uma afirmação um pouco ofensiva, por assim dizer, mas pode ser entendida se compararmos as aplicações que os grupos possuem hoje na física com outras estruturas matemáticas. Os grupos possuem as propriedades e as ferramentas matemáticas para ser aplicado como as transformações de sistemas físicos (por meio de ações de grupos).

Com a teoria de Marius Sophus Lie (1842-1899) podemos, para grupos contínuos, pensar em transformações infinitesimais e assim encontrar as simetrias que os sistemas físicos possuem. A "mágica" está nas álgebras desses grupos, que carregam em sua base (para o caso de possuírem dimensão finita) as informações das transformações que o sistema sofre. Para um sistema que é invariante por uma certa transformação, dizemos que existe uma simetria, e de acordo com o Teorema de Noether, algo se conserva (isso será visto com mais detalhes no próximo capítulo).

Conhecemos o grupo ortogonal $O(n)$ para um espaço $\mathbb{R}^n$, aquele que descreve as ações unitárias neste espaço vetorial. Para o espaço de Minkowski, não teremos ferramentas como a métrica. Isso deixa as coisas mais difíceis. Mas podemos fazer umas definições que trazem certos conceitos análogos dos nossos velhos conhecidos.

Sejam k e n números inteiros positivos e considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{k+n}$ munido com o produto usual $\langle .,. \rangle$. Defina a função $\langle .,. \rangle_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \times \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$ pela fórmula

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j - \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j$$

onde $x = (x_j)$ e $y = (y_j)$ estão escritos em coordenadas da base canônica C de $\mathbb{R}^{k+n}$. Defina também a função $\|.\|_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$ por

$$\|x\|_{k,n} = \sqrt{\left| \langle x, x \rangle_{k,n} \right|}.$$

Perceba a semelhança com o quadriespaço usual da relatividade restrita. Temos a distância entre dois pontos e o módulo de um vetor com k "tempos" e n "espaços". Para começar, a função $\langle .,. \rangle_{k,n}$ é uma forma bilinear, pois

$$\begin{aligned}
\langle aX + B, Y \rangle_{k,n} &= a \sum_{j=1}^{k} x_j y_j - a \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j + \sum_{j=1}^{k} b_j y_j - \sum_{j=k+1}^{k+n} b_j y_j \\
&= a \left(\sum_{j=1}^{k} x_j y_j - \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j \right) + \sum_{j=1}^{k} b_j y_j - \sum_{j=k+1}^{k+n} b_j y_j \\
&= a \langle X, Y \rangle + \langle B, Y \rangle .
\end{aligned}$$

e de forma análoga para a segunda entrada. A matriz dessa forma bilinear na base canônica pode ser determinada como

$$\left[\langle .,. \rangle_{k,n} \right] = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$$

onde 0 é o bloco nulo e I_m é o bloco matriz identidade de ordem m (olha aí a "métrica" de Minkowski, basta fazer $k = 1$ e $n = 3$). Semelhantemente, teremos uma forma quadrática $q(x) = \langle x, x \rangle_{k,n}$ associada à forma bilinear, de tal maneira que

$$q(Y) = \langle Y, Y \rangle_{k,n} = \sum_{j=1}^{k} y_j^2 - \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j^2.$$

Como se trata de $\mathbb{R}^{k+n}$, $y_j^2 \geq 0$ para todo j. Assim, se

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} y_j &< \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j \Rightarrow q(Y) < 0 \ ; \\
\sum_{j=1}^{k} y_j &= \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j \Rightarrow q(Y) = 0 \ ; \\
\sum_{j=1}^{k} y_j &> \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j \Rightarrow q(Y) > 0 \ .
\end{aligned}$$

O produto interno tem como uma de suas propriedades

Se $x \neq 0 \Rightarrow \langle X, X \rangle > 0$, para todo $x \in V$, onde V é um espaço vetorial.

Portanto $\langle ., . \rangle_{k,n}$ não é um produto interno.

Podemos também escrever um operador auto adjunto para essa forma. Por ser um operador auto adjunto, T é simétrico, ou seja,

$$\langle X, Y \rangle_{k,n} = \langle T(X), Y \rangle = \langle X, T(Y) \rangle = \langle T(Y), X \rangle = \langle Y, X \rangle_{k,n}$$

onde usou-se no final a propriedade comutativa da função $\langle ., . \rangle_{k,n}$, já que as entradas são em essência reais. Tal manipulação deixa claro o que T deve fazer: adicionar, nas componentes ou do vetor X ou do vetor Y até o k-ésimo termo, o sinal negativo, e deixar o resto inalterado. Na base canônica C a matriz $[T]_C$ é diagonal e tem a forma

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$$

a mesma matriz de $\left[\langle ., . \rangle_{k,n}\right]_C$. Claramente

$$[T]_C \ [T]_C^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I$$

de onde temos $[T]_C = [T]_C^{-1}$.

Sendo B uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{k+n}$ com respeito a $\langle ., . \rangle_{k,n}$, podemos escrever

$$\langle X_i, X_j \rangle_{k,n} = \langle T(X_i), X_j \rangle = [X_i]_B^t \ [T]_B \ [X_j]_B$$

onde X_i, X_j são vetores da base. Assim

$$[X_i]_B^t \ [T]_B \ [X_j]_B = [T_i]_B \ [X_j]_B = [T_{ij}]_B$$

onde $[T_i]_B$ é o vetor linha que é a i-ésima linha de $[T]_B$, e $[T_{ij}]_B$ é o elemento ij da matriz $[T]_B$. Para provar que a igualdade entre o operador auto adjunto e a matriz da forma bilinear é verdadeira, devemos mostrar a igualdade

$$[T_{ij}]_B = \left[\left(\langle .,. \rangle_{k,n} \right)_{ij} \right]_B .$$

Sabemos que a forma $f(X_i, X_j) \equiv \langle X_i, X_j \rangle_{k,n} = [X_i]_B \ [f]_B \ [X_j]_B$, de onde concluímos de maneira análoga que $\langle X_i, X_j \rangle_{k,n} = [f_{ij}]_B$. Obviamente

$$[f_{ij}]_B = [T_{ij}]_B \ \text{ para todo } i, j.$$

Essas são as propriedades desse espaço. O que buscamos então é um grupo que deixe a forma bilinear invariante, semelhantemente ao grupo de rotações agindo no produto interno usual. Ele é simplesmente o conjunto das matrizes que preservam a forma, dito $O(k,n)$, chamado de grupo ortogonal generalizado, reais e de ordem $(k+n)$, ou seja,

$$\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}, \forall x, y \in \mathbb{R}^{k+n}.$$

Existe uma relação muito útil para o estudo do grupo $O(k,n)$. Primeiramente,

$$\langle AX, AY \rangle_{k,n} = \langle T(AX), AY \rangle = (AX)^t \ [T]_C \ (AY) = [X]_C^t \ A^t \ [T]_C \ A \ [Y]_C .$$

Mas

$$\langle AX, AY \rangle_{k,n} = \langle X, Y \rangle_{k,n} = \langle T(X), Y \rangle = [X]_C^t \ [T]_C \ [Y]_C .$$

Como isso vale para todo $X, Y \in \mathbb{R}^{k+n}$,

$$A^t \ [T]_C \ A = [T]_C .$$

Chamaremos essa relação de relação fundamental do grupo.

Agora, se $A^t \ [T]_C \ A = [T]_C$, então concluímos que $\langle AX, AY \rangle_{k,n} = \langle X, Y \rangle_{k,n}$ e portanto $A \in O(k;n)$. Fazendo o processo inverso, supondo a última relação concluímos que A deve deixar a função bilinear invariante.

Claramente, como consequência da relação acima, vemos que $(\det(A))^2 . \det([T]_C) = \det([T]_C)$, e logo $\det(A) = \pm 1$, ele é unitário.

Podemos provar que realmente estamos falando de um grupo. $\langle A(X), A(Y) \rangle_{k,n} = \langle T(AX), AY \rangle$, onde $\langle .,. \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^{k+n}$. A operação de $O(k;n)$ é o produto usual de matrizes. Sabemos que se $A \in O(k;n)$ então $\det(A) = \pm 1$. Temos que

- A identidade é a matriz identidade.

- $\langle T(ABX), ABY\rangle = \langle T(AX), AY\rangle = \langle T(X), Y\rangle$, onde $A, B \in O(k;n)$, e portanto temos o fechamento.

- A associatividade provém das matrizes e suas propriedades.

- Como $\det(A) \neq 0$, existe o inverso, tal que $A^{-1} \in O(k;n)$, pois $\left\langle T\left(A^{-1}X\right), A^{-1}Y\right\rangle = \left\langle T\left(AA^{-1}X\right), AA^{-1}Y\right\rangle = \langle T(X), Y\rangle$.

Assim $O(k;n)$ é um grupo.

Um grupo fechado é aquele que toda sequência com termos do grupo resulta no limite em um termo o próprio grupo, ou seja, o grupo possui ossui todos os seus pontos aderentes (os limites de todas as sequências com termos de um dado conjunto são os pontos aderentes do conjunto). Para provar que o grupo $O(k,n)$ é fechado, seja a relação fundamental de $O(k,n)$, e seja uma sequência qualquer A_n tal que $\lim_{n\to\infty}(A_n) = A$, e tendo em mente que tanto o produto de matrizes quanto a aplicação transposta são operações contínuas, então

$$
\begin{aligned}
A^t g A &= \left[\lim_{n\to\infty}(A_n)\right]^t g \left[\lim_{n\to\infty}(A_n)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[(A_n)^t \; g \; A_n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}(g) \\
&= g
\end{aligned}
$$

de onde concluímos que $A \in O(k;n)$. Por ser um grupo de matrizes fechado, concluímos que $O(k,n)$ é um grupo de Lie (todo grupo de matrizes fechado é um grupo de Lie).

Mesmo sendo unitário, o determinante negativo muitas vezes não é muito interessante. Assim, podemos definir um subgrupo de $O(k,n)$, definido como

$$
SO(k,n) = \{A \in O(k,n) : \det A = 1\}
$$

Este é o grupo ortogonal generalizado especial. Para mostrar que é realmente um grupo, tomemos a aplicação $\det : GL(k+n;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (o determinante usual). Sabemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, ou seja, det é um homomorfismo. Por um teorema da teoria de grupos, sabemos que o o núcleo do determinante, $Nuc(\det)$, é um subgrupo de $GL(k+n;\mathbb{R})$, ou seja, $SO(k;n)$ é um subgrupo de $GL(k+n;\mathbb{R})$, e como $SO(k;n) \subset O(k;n)$, ele também é um subgrupo deste último. A demonstração de que $SO(k;n)$ é um grupo de Lie de matrizes segue de maneira análoga a de $O(k,n)$.

Diferentemente dos grupos ortogonais usuais, $O(k,n)$ e $SO(k,n)$ não são compactos. Isso pode ser visto da seguinte maneira. Suponha que existe uma constante C tal que $C \geq |A_{ij}|$ para toda matriz $A = (A_{ij}) \in SO(k;n)$. Então, como contra exemplo, seja a matriz

$$
A = \begin{pmatrix}
\cosh x & 0 \cdots 0 & \sinh x \\
0 & & 0 \\
\vdots & I & \vdots \\
0 & & 0 \\
\sinh x & 0 \cdots 0 & \cosh x
\end{pmatrix}
$$

que é uma matriz de ordem $k+n$. Sabemos que o $\det A = \cosh^2 x + (-1)^{k+n+1} (-1)^{k+n} \sinh^2 x = 1$. Agora, como $A^{-1} = A = A^t$, podemos escrever a relação de $O(k,n)$ como $A^t g A = g$, e logo $A \in SO(k;n)$. Claramente os elementos dependentes de x não são limitados por qualquer constante C, de onde concluímos que $SO(k;n)$ é não compacto, e assim $O(k;n)$ também não o é.

A conexidade é definida, neste caso, como:

- Um grupo de Lie de matrizes G é conexo se dadas quaisquer $A, B \in G$, existe um caminho $\gamma : [a,b] \to G$ tal que $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

- Dado um grupo de Lie de matrizes G, podemos definir a seguinte relação de equivalência em G:

  $$A \sim B \text{ se existe um caminho contínuo que liga } A \text{ a } B.$$

  As classes de equivalência dessa relação são chamadas componentes conexas de G.

Então, podemos ver que a componente conexa da identidade de G é um subgrupo de Lie de G. Chamemos de G^0 a componente conexa da identidade de um grupo de Lie G. Primeiramente veremos que G^0 é um grupo. Se $A, B \in G^0$, então existem caminhos contínuos $A(t)$ e $B(t)$ que ligam respectivamente A e B a identidade I. Então temos que $AB(t)$ é um caminho contínuo que liga A a AB, e ligando $A(t)$ com $AB(t)$ teremos um caminho contínuo de AB a I, e portanto $AB \in G^0$. Similarmente, $A^{-1}A(t)$ é um caminho contínuo de A^{-1} a I, e revertendo, concluímos que $A^{-1} \in G^0$, e logo G^0 é um grupo. Como a componente conexa por caminho é fechada, então G^0 é um grupo de Lie.

Vamos especificar nossa análise, mostrando a não conexidade de $O(1;n)$ e $SO(1;n)$ e a quantidade de componentes conexas. Primeiramente, a não conexidade. Como a aplicação $\det : O(1;n) \to \mathbb{R}$ é contínua, e sabendo que se $A \in O(1;n)$ então $\det(A) = \pm 1$, concluímos que $O(1;n)$ é não conexo. Da relação fundamental de $O(1;n)$

$$g_{00} = 1 = A_{0a} g_{ab} A_{b0} = (A_{00})^2 - \sum_{m=1}^{n+1} (A_{mm})^2$$

de onde fica claro que $(A_{00})^2 = 1 + (\text{termo positivo})$, e que portanto $|A_{00}| \geq 1$. Essa é a segunda divisão em $O(1;n)$, de onde vemos que mesmo que $SO(1;n)$ tenha determinante igual a um, ele ainda terá no mínimo duas componentes conexas.

Agora, seja $A \in O(1;n)$, uma matriz de transformação complicada que faz uma rotação hiperbólica entre um eixo do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o eixo hiperbólico "1". Podemos simplificar a ação de $O(1;n)$ rotacionado $\mathbb{R}^n$ de tal maneira a deixar um dos eixos de $\mathbb{R}^n$ sofrendo as modificações e mantendo os outros inalterados. Assim, para $\mathbb{R}^n$ em uma base b, denotaremos A_b a matriz complicada. Aplicando uma rotação da forma

$$R_{b\to b'} = \begin{pmatrix} 1 & 0_n \\ 0_n & R_{nn} \end{pmatrix}$$

onde $R_{nn} \in SO(n)$, encontramos uma base b' onde podemos escrever

$$A_{b'} = \left(R_{b\to b'}\right) A_b = \begin{pmatrix} H & 0_{n-1} \\ 0_{n-1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

sendo 0_j é o vetor nulo com j elementos, I_j é a matriz identidade de ordem j e H é a parte da matriz que faz a transformação hiperbólica. Perceba que a rotação é uma função contínua que possui inversa, ou seja, temos uma relação algébrica que mantém a estrutura da matriz A, e portanto do grupo $O(1;n)$. Então, o problema se resume a análise da matriz H, que podemos escrever como

$$H = \begin{pmatrix} A_{00} & \left(A_{10}\right)_{b'} \\ \left(A_{01}\right)_{b'} & \left(A_{11}\right)_{b'} \end{pmatrix}$$

pois $\left(A_{00}\right)_b = \left(A_{00}\right)_{b'}$. A "métrica" não modifica com rotações, e portanto

$$\begin{aligned} R_{b\to b'}\left[\left(A_b\right)^t g\left(A_b\right)\right] &= g \\ \left(A_{b'}\right)^t g\left(A_{b'}\right) &= g \end{aligned}$$

de onde definimos

$$g' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a relação de $O(1;n)$ será escrita como $H^t g' H = g'$. Assim,

$$\begin{aligned} g' &= \begin{pmatrix} A_{00} & \left(A_{10}\right)_{b'} \\ \left(A_{01}\right)_{b'} & \left(A_{11}\right)_{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & \left(A_{01}\right)_{b'} \\ \left(A_{10}\right)_{b'} & \left(A_{11}\right)_{b'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A_{00} & \left(A_{10}\right)_{b'} \\ -\left(A_{01}\right)_{b'} & \left(A_{11}\right)_{b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & \left(A_{01}\right)_{b'} \\ \left(A_{10}\right)_{b'} & \left(A_{11}\right)_{b'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\left[A_{00}\right]^2 + \left[\left(A_{10}\right)_{b'}\right]^2 & -A_{00}\left(A_{01}\right)_{b'} + \left(A_{10}\right)_{b'}\left(A_{11}\right)_{b'} \\ -A_{00}\left(A_{01}\right)_{b'} + \left(A_{11}\right)_{b'}\left(A_{10}\right)_{b'} & -\left[\left(A_{01}\right)_{b'}\right]^2 + \left[\left(A_{11}\right)_{b'}\right]^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e assim encontramos as relações

$$\begin{aligned} \left[A_{00}\right]^2 &= 1 + \left[\left(A_{10}\right)_{b'}\right]^2 \\ \left[\left(A_{11}\right)_{b'}\right]^2 &= 1 + \left[\left(A_{01}\right)_{b'}\right]^2 \\ A_{00}\left(A_{01}\right)_{b'} &= \left(A_{10}\right)_{b'}\left(A_{11}\right)_{b'} \end{aligned}$$

E essas são as relações que descrevem os elementos de H. Veja que as equações são satisfeitas se fizermos $\left(A_{00}\right)^2 = \left[\left(A_{11}\right)_{b'}\right]^2 = \cosh^2 x$ e $\left[\left(A_{10}\right)_{b'}\right]^2 = \left[\left(A_{01}\right)_{b'}\right]^2 = \sinh^2 x$, ou seja, as soluções das equações resultam em quatro famílias. Dessa forma, o grupos dos $H's$ é dividido em somente quatro conjuntos que são conexos simplesmente variando os valores de x. Fazendo a rotação inversa, obtemos os elementos de $O(1;n)$, que acabam sendo divididos em quatro componentes conexas. Para o caso de $SO(1,n)$, basta escolhermos as famílias com $\det A = 1$ que obtemos as suas duas componentes conexas.

Além disso, temos que $(\det H)^2 = 1$, e assim

$$[A_{00}(A_{11})_{b'} - (A_{10})_{b'}(A_{01})_{b'}]^2 = 1$$

que pode ser obtida das equações acima.

Na física, é interessante comentar, álgebras de Lie estão um pouco mascaradas como os geradores de um grupo, que nada mais é que a base da álgebra. Isso se deve ao fato que em sua maioria, as transformações na natureza são contínuas, e assim nos possibilita encontrar a transformação infinitesimal associada, que como se pode imaginar, é a álgebra. A base da álgebra, se esta for de dimensão finita, pode ser expressa pelas constantes de estrutura, e as componentes são os geradores do grupo.

Para começar, seja $so(k,n) = \{X \in M_{k+n}(\mathbb{R}) : gX^t g = -X\}$ uma álgebra de Lie. Vamos mostrar que essa álgebra é a álgebra de $O(k,n)$ e de $SO(k,n)$. Tomando $x \in so(k,n)$,

$$\begin{aligned} e^{\left(g\ x^t\ g\right)} &= e^{-x} \\ g\ (e^x)^t\ g &= (e^x)^{-1} \end{aligned}$$

e portanto $e^x \in O(k,n)$. Agora seja a curva $p(u)$ em $O(k,n)$ com $p(0) = I$, então

$$g\ [p'(0)]^t\ g = -p'(0)$$

de onde concluímos que $so(k;n)$ é a álgebra de $O(k;n)$, e como $e^{Tr(x)} = \det(e^x)$, e $Tr[g\ (x^t\ g)] = Tr[(x^t\ g)\,g] = Tr[x^t\,(gg)] = Tr(x^t) = Tr(x)$, então

$$Tr(x) = -Tr(x) \Rightarrow \det(e^x) = 1$$

e portanto $so(k;n)$ também é a álgebra de $SO(k;n)$.

Com a álgebra, podemos encontrar a dimensão da álgebra e assim a dimensão do grupo. Para o grupo ortonormal generalizado, podemos fazer o seguinte. A forma dos elementos de $so(k;n)$ é

$$g_{ab}(X_{bc})^t g_{cd} = -X_{ad}$$

mas $|g_{ab}| = \delta_{ab}$, então

$$g_{aa}(X_{ab})^t g_{bb} = -X_{ab}$$

de onde retiramos as relações

$$\begin{aligned} \text{para } a &= b \Longrightarrow A_{aa} = -A_{aa} = 0 \\ \text{para } a &\le k \text{ e } b \le k \Longrightarrow A_{ab} = -A_{ba} \\ \text{para } a &\le k \text{ e } b > k \Longrightarrow A_{ab} = A_{ba} \\ \text{para } a &> k \text{ e } b \le k \Longrightarrow A_{ab} = A_{ba} \\ \text{para } a &> k \text{ e } b > k \Longrightarrow A_{ab} = -A_{ba} \end{aligned}$$

Claramente, somente a triangular superior é independente, e a dimensão de $so\,(k;n)$ será

$$\frac{(n+k)\,(n+k-1)}{2}$$

que por definição é a dimensão de $O\,(k;n)$ e $SO\,(k;n)$.

Sabemos que sendo $SO\,(k;n)_0$ a componente conexa de $O\,(k;n)$, então aquele é um grupo de Lie de matrizes. Agora, sendo $so\,(k;n)$ um espaço vetorial, temos que ele é conexo. Como a aplicação exponencial é contínua, concluímos que a imagem deve ser um conjunto conexo que possua a identidade, que neste caso é $SO\,(k;n)_0$, e portanto $so\,(k;n)$ é também álgebra de $SO\,(k;n)_0$. Uma curiosidade é que $SO\,(1;3)_0$ é aquele que representa as transformações de Lorentz na relatividade restrita, pois mantém a causalidade.

2 Campos Clássicos e Teorema de Noether

Este capítulo tem o objetivo de introduzir a noção mais ampla de campo, suas equações e formas básicas. Como introdução, muitos autores preferem apresentar o campo de osciladores harmônicos, e por isso ele é apresentado na primeira seção. Além disso, desenvolve-se as equações de Lagrange para um campo em notação quadridimensional, com o intuito de ser utilizado no próximo capítulo. Por fim apresenta-se o famoso e útil teorema de Noether, que é de absoluta importância para a física atual.

2.1 Sistema Discreto e Contínuo: Campo de Osciladores

Para começar, será interessante passar de um sistema discreto para um contínuo. Para isso, suponha um conjunto de n elementos de massa m (partículas, se preferir) enfileirados e ligados por molas de coeficiente k (faremos unidimensional primeiro, para simplificar, e depois generalizaremos). Podemos escrever a energia cinética T desses elementos a partir das respectivas posições de equilíbrio η_i como

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2$$

e a energia potencial como

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right)^2.$$

Assim a lagrangiana será

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 - k\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right)^2\right]$$

ou, sendo a a separação entre dois elementos em equilíbrio,

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a\left[\frac{m}{a}\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}\right)^2\right].$$

Veja que os η_i são as coordenadas generalizadas. O termo $ak = Y$ é o módulo de Young. As equações de Euler-Lagrange serão

$$\frac{m}{a}\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2}\right) + Y\left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2}\right) = 0.$$

Para passar o problema para o contínuo, fazemos $\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} \to \frac{\eta(x+a)-\eta(x)}{a}$ e $a \to 0$, de onde obtemos que os dois últimos termos são uma derivada segunda, e então

$$L = \frac{1}{2}\int\left[\mu\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - Y\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]dx$$

$$\mu \frac{d^2}{dt^2}\eta = Y \frac{d^2\eta}{dx^2},$$

onde $\mu = \frac{m}{a}$ e a velocidade de propagação da onda será $v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$ (veja que a equação acima é uma equação de onda). Essa equação descreve o comportamento do campo em uma dimensão, e seu meio de propagação é uma onda. A generalização para mais dimensões é bem simples, "basta" incluir mais índices contínuos para as coordenadas das outras dimensões, por exemplo, $\eta\,(x, y, z, t)$.

2.2 Equações de Euler-Lagrange Para Campos

Agora daremos um salto, por assim dizer, indo diretamente para as equações dos campos quadridimensionais. Quando falamos de campos, na verdade estamos falando de um sistema com um número infinito e contínuo (incontável) de graus de liberdade, que dependem do ponto do espaço-tempo em que se encontram. Vamos mostrar como obter as equações de movimento de um campo. Primeiro seja a lagrangiana com a elementos

$$L = \sum_a L_a.$$

Fazendo $a \to \infty$, obtemos um sistema com um número infinito de contribuições, e por analogia, postulamos que para um sistema incontável no quadriespaço

$$S = \int dtL = \frac{1}{c}\int d^4x\mathcal{L}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangiana, que por vezes é chamada de lagrangiana (como em algumas partes desde texto) e a integral é tomada em uma região do espaço-tempo (geralmente todo o espaço-tempo). Novamente, supomos que o formalismo da mecânica analítica seja válido, e portanto, utilizando o princípio de Hamilton

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \frac{1}{c}\delta\int d^4x\mathcal{L}.$$

Agora, imaginemos que a densidade de lagrangiana dependa somente de r campos ϕ_r e de suas respectivas derivadas em relação à x^μ, com $\mu = (0, 1, 2, 3)$, ou seja, $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r)$, onde

$$\frac{\partial\phi_r}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu\phi_r.$$

Assim, pelo princípio de Hamilton,

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\delta\phi_{r'\mu}\right\}$$

(onde está implícito que somamos nos índices μ e r), e por integração parcial

$$\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x\left\{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\right)\right]\delta\phi_r\right\} + \int d^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\delta\phi_r\right).$$

A segunda integral se torna uma integral de borda utilizando o teorema da divergência de Gauss (por definição os campos são nulos no infinito), e como $\delta\phi_r$ é arbitrário, concluímos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\right) = 0$$

sendo essas as equações de Euler-Lagrange, as equações de movimento para o campo. Elas descrevem o comportamento do campo na ausência de interação com outros constituintes do sistema, ou sendo mais direto, é a descrição do campo por si só.

Nos restringimos a lagrangianas com dependência somente até a primeira derivada pois neste caso as condições de borda podem ser especificados pelas condições iniciais de posição e velocidade, assim como as leis de Newton. Outra razão é que o exemplo que estudaremos será o campo eletromagnético, não sendo necessário derivadas maiores que a primeira.

2.3 Teorema de Noether Para Campos

"Se uma lagrangiana tem uma simetria contínua então existe uma corrente associada com essa simetria que é conservada quando as equações de movimento são satisfeitas". Esse é o teorema de Noether normalmente apresentado para alunos de graduação, uma simplificação do teorema de Amalie Emmy Noether (1882-1935). Para "prová-lo" no caso de campos, suponha que tenhamos uma transformação que dependa de um parâmetro α que pode ser feito tão pequeno quanto se queira (ou em outras palavras, é uma transformação contínua feita por um grupo de um parâmetro), e que a (densidade de) lagrangiana é invariante quanto a essa transformação. Essa simetria pode ser escrita como

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} = 0$$

(a lagrangiana é invariante ao parâmetro contínuo α) ou, expandindo a lagrangiana $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r)$

$$0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\alpha} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\right)\right]\frac{\delta\phi_r}{\delta\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\frac{\delta\phi_r}{\delta\alpha}\right).$$

Se as equações de movimento são satisfeitas, então a equação acima se resume a $\partial_\mu J_\mu = 0$, onde

$$J_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_r\right)}\frac{\delta\phi_r}{\delta\alpha}$$

(onde temos uma soma no índice r). Essa é a corrente de Noether conservada pela simetria, como queríamos demonstrar.

O poder desse teorema é claro: podemos a partir de simetrias encontrar entidades físicas medíveis que são constantes, e explica, quando aplicado ao caso específico do eletromagnetismo, a relação entre a simetria de gauge do quadrivetor potencial e a conservação da carga. Porém, diga-se de passagem, nem sempre a simetria deixa algo visível, como a carga elétrica no eletromagnetismo. Por exemplo, para campos invariantes às transformações de Lorentz, a carga conservada é o quadrimomento angular $M_{\mu\nu}$. Existem também simetrias ditas internas, mais comuns em teorias quânticas de campos.

2.4 Tensor Energia-Momento

Podemos escrever

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)} \frac{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)}{\partial x^\mu}.$$

Utilizando as equações de movimento e o fato de que $\partial_\beta \partial_\mu \phi_r = \partial_\mu \partial_\beta \phi_r$,

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)} \right) \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)} \frac{\partial \left(\partial_\mu \phi_r\right)}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu} \right).$$

Como $\partial_\mu \mathcal{L} = \delta_\mu^\beta \partial_\beta \mathcal{L}$, introduzimos o tensor

$$\mathcal{T}_\mu^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu} - \delta_\mu^\beta \mathcal{L}$$

onde δ_μ^β é o delta de Kronecker. Em notação covariante

$$\mathcal{T}_{\beta\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\beta \phi_r\right)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu} - g_{\beta\mu} \mathcal{L},$$

e teremos

$$\partial_\beta \mathcal{T}_\mu^\beta = 0.$$

Agora suponha que tenhamos uma corrente J^μ que é conservada. A carga total no espaço é

$$\frac{1}{c} \int J^\mu dS_\mu$$

onde a integral é tomada em um hiperespaço com $x_0 = const$. Sabe-se que a diferença entre duas hipersuperficies $S^{(1)}$e $S^{(2)}$ é

$$\int J^\mu dS_\mu^{(1)} - \int J^\mu dS_\mu^{(2)} = \oint J^\mu dS_\mu = \int \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega = 0$$

onde utilizamos o teorema de Gauss na versão quadridimensional e a definição que $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$. Esse resultado é válido para quaisquer dois hiperplanos infinitos. Disso segue que

$$\frac{1}{c} \int J^\mu dS_\mu$$

é idêntico em valor, não importando qual hipersuperfície a integral é feita. Assim, se $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ a integral

$$\int A^\mu dS_\mu$$

é conservada. Chamamos o quadrivetor

$$P^{\beta} = const \int \mathcal{T}^{\beta\mu} dS_{\mu}$$

de quadrivetor momento do sistema. A constante é escolhida de tal forma que P^0 seja a energia do sistema multiplicada por $\frac{1}{c}$. Como

$$P^0 = const \int \mathcal{T}^{0\mu} dS_{\mu} = const \int \mathcal{T}^{00} dV$$

e

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_t \phi_r\right)} \frac{\partial \phi_r}{\partial t} - \mathcal{L},$$

(lembre-se da equação de energia total de um sistema mecânico), então $\mathcal{T}^{00}$ pode ser visto como a densidade de energia do sistema, e portanto

$$P^{\beta} = \frac{1}{c} \int \mathcal{T}^{\beta\mu} dS_{\mu}.$$

O tensor $\mathcal{T}^{\beta\mu}$ é chamado de tensor energia-momento. Porém ele não é unicamente definido, pois se fizermos

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{T}^{\mu\nu} + \frac{\partial \varphi^{\mu\nu\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \text{ com } \varphi^{\mu\nu\alpha} = -\varphi^{\mu\alpha\nu}$$

(que satisfaz $\partial_{\beta} \mathcal{T}_{\beta\mu} = 0$, pois $\frac{\partial^2 \varphi^{\mu\nu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} = 0$, pois veja que $\varphi^{\mu\nu\alpha}$ é um tensor antissimétrico nos índices μ e α por definição, e o produto com o operador simétrico nesses mesmos índices é nulo), o quadrimomento não é alterado

$$\int \frac{\partial \varphi^{\mu\nu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} dS_{\nu} = \frac{1}{2} \int \left(dS_{\nu} \frac{\partial \varphi^{\mu\nu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} - dS_{\alpha} \frac{\partial \varphi^{\mu\nu\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) = \frac{1}{2} \oint \varphi^{\mu\nu\alpha} df*_{\nu\mu}$$

que é tomado no infinito espacial, onde não existem campos, e portanto é nulo. Para definir esse tensor univocamente, requeremos que$\mathcal{T}^{\mu\nu}$ satisfaça a equação do quadritensor momento angular

$$M^{\mu\nu} = \int \left(x^{\mu} dP^{\nu} - x^{\nu} dP^{\mu}\right) = \frac{1}{c} \int \left(x^{\mu} \mathcal{T}^{\nu\alpha} - x^{\nu} \mathcal{T}^{\mu\alpha}\right) dS_{\alpha}.$$

A condição para que $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ satisfaça essa equação é encontrada a partir da conservação do momento angular, ou seja,

$$\partial_{\alpha} \left(x^{\mu} \mathcal{T}^{\nu\alpha} - x^{\nu} \mathcal{T}^{\mu\alpha}\right) = 0$$

o que implica em

$$\delta^{\mu}_{\alpha} \mathcal{T}^{\nu\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha} \mathcal{T}^{\mu\alpha} = 0 \Longrightarrow \mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\nu\mu}$$

o tensor energia-momento deve ser simétrico.

Se integrarmos P^μ sobre uma hipersuperfície $x^0 = const$, então

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int \mathcal{T}^{\mu 0} dV$$

que são as componentes do quadrivetor momento, onde $W = \mathcal{T}^{00}$ é a densidade de energia e as componentes $\frac{1}{c}\mathcal{T}^{10}$, $\frac{1}{c}\mathcal{T}^{20}$, $\frac{1}{c}\mathcal{T}^{30}$ compõem a densidade de momento. Separando a equação $\partial_\beta \mathcal{T}_{\beta\mu} = 0$ em partes temporal e espacial, a parte temporal fica

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{T}^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{T}^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}$$

e integrando,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{T}^{00} dV = -c \oint \mathcal{T}^{0\alpha} df_\alpha$$

onde o termo da direita é a variação da energia no volume, e então identificando $c\mathcal{T}^{0\alpha} = S_\alpha$, que para o caso do campo eletromagnético S_α são as componentes do vetor de Poynting. Da parte espacial temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{c}\mathcal{T}^{\alpha 0} dV = -\oint \mathcal{T}^{\alpha\beta} df_\beta$$

onde é claro que o termo da direita é o fluxo da densidade de momento emergindo. Perceba que pela simetria do tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ concluímos que o fluxo da densidade de energia é igual ao fluxo da densidade de momento multiplicado por c^2. No eletromagnetismo, os elementos $\mathcal{T}^{ik} = \sigma_{ik}$ com $i, k = 1, 2, 3$ são os componentes do tensor das tensões de Maxwell.

3 O Campo Eletromagnético

Neste capítulo nós basicamente vamos aplicar os formalismos anteriores em um exemplo: o campo eletromagnético. Praticamente todos os esforços anteriores culminam neste capítulo. A importância do eletromagnetismo não requer comentários. Sem ele este texto seria escrito com grafite, senão carvão. Agora com os conceitos já adquiridos, avançaremos rapidamente na descrição do campo por suas equações de movimento, as partes elétrica e magnética, e por fim as tão familiares equações de Maxwell. Além disso deve-se falar da conservação da carga elétrica (que foi uma propaganda constante ao longo do texto), e por fim, o teorema do virial como um bônus.

Antes, e já mudando de assunto, deve-se ressaltar que para a relatividade não permite dimensões finitas para partículas que são ditas elementares, e portanto o corpo rígido não existe. Isso se deve ao fato de que a velocidade de propagação das interações é finita, e portanto se aplicarmos uma força em um ponto de um corpo, ele sofrerá uma deformação, de onde concluímos que ele não é elementar. Esse resultado é interessante já que somente falaremos de cargas pontuais como elementares.

3.1 Equações de Movimento para o Eletromagnetismo em Notação Tridimensional

Primeiramente deve-se salientar que não temos como obter a equações que descrevem o eletromagnetismo por primeiros princípios. Portanto definimos ele como o resultado de um experimento, de onde se concluiu que em um campo eletromagnético a ação é feita em três partes: a ação da partícula livre, um termo descrevendo a interação da partícula com o campo, e o comportamento do próprio campo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{partícula} + \mathcal{L}_{interação} + \mathcal{L}_{campo}.$$

As propriedades do campo são caracterizadas por um quadrivetor A_μ, o quadripotencial. A função ação terá então a parte

$$-\frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu$$

que descreve a interação. Até encontrarmos a parte da ação que descreve o comportamento do campo, vamos supor que as modificações que as cargas causam no campo são desprezíveis (e assim nas equações de movimento), ou seja, as cargas serão pequenas (basicamente o que faremos é supor o termo de campo como aproximadamente constante, e portanto não interfere nas equações de movimento). Dessa forma, a ação será

$$S = \int \left(-mcds - \frac{e}{c}A_\mu dx^\mu\right).$$

Os termos espaciais do quadripotencial formam um vetor tridimensional $\boldsymbol{A}$ chamado potencial vetor do campo. O componente temporal é chamado potencial escalar ϕ. Assim podemos escrever o quadripotencial como $A^{\mu} = (\phi, \boldsymbol{A})$.

Faremos agora a análise com notação tridimensional. A integral de ação será

$$S = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \boldsymbol{.} \boldsymbol{v} - e\phi \right) dt$$

e a lagrangiana será

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \boldsymbol{.} \boldsymbol{v} - e\phi.$$

A derivada $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}$ é o momento generalizado $\boldsymbol{P}$ da partícula, e então

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}$$

onde $\boldsymbol{p}$ é o momento de uma partícula. Podemos então achar a função hamiltoniana pela fórmula geral

$$H = \boldsymbol{v} \boldsymbol{.} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - L$$

de onde temos substituindo a lagrangiana

$$H = mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\phi.$$

Mas H deve ser expresso em termos do momento generalizado. Podemos usar a relação relativística $E^2 = m^2c^2 + \boldsymbol{p}$, e as equações do potencial e do hamiltoniano, para obter

$$\left(\frac{H - e\phi}{c} \right)^2 = m^2c^2 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right)^2$$

e isolando H,

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2 \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right)^2} + e\phi.$$

A equação de Hamilton-Jacobi de uma partícula em um campo eletromagnético pode ser encontrado substituindo $\boldsymbol{P}$ por ∇S e H por $-\frac{\partial S}{\partial t}$,

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\phi \right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

3.2 Equações de Movimento para o Eletromagnetismo em Notação Quadridimensional

Obteremos agora a equação de movimento a partir da notação quadridimensional, e assim obtemos o tensor do campo eletromagnético (e a parte da lagrangiana que descreve a evolução do campo). Do princípio de mínima ação

$$\delta S = \delta \int \left(-mcds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right) = 0,$$

e como $ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$,

$$\delta S = -\int \left(mc \frac{dx_\mu d\delta x^\mu}{ds} + \frac{e}{c} A_\mu d\delta x^\mu + \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) = 0.$$

Os dois primeiros termos nós integramos por partes, e identificamos $\frac{dx^\mu}{ds} = u_\mu$, a quadrivelocidade,

$$\int \left(mcdu_\mu \delta x^\mu + \frac{e}{c} \delta x^\mu dA_\mu - \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu \right) - \left[\left(mcu_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \delta x^\mu \right] = 0$$

onde anulando o termo de borda,

$$\int \left(mcdu_\mu \delta x^\mu + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\mu dx^\nu - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \delta x^\mu \right) = 0$$

$$\int \left(mc \frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \right) ds \delta x^\mu = 0$$

(usamos o fato de que no terceiro termo, como somamos tudo, podemos trocar μ por ν, e usamos $dx^\mu = u^\mu ds$). Pela arbitrariedade de δx^μ, obtemos as equações de movimento

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu$$

e introduzindo o tensor do campo eletromagnético

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

que é claramente antissimétrico. Assim escrevemos

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu.$$

O tensor será, substituindo as componentes do quadripotencial, de onde obtemos utilizando as definições de campo elétrico e magnético da próxima seção,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

ou podemos escrever $F_{\mu\nu} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ (ou em coordenadas contravariantes, $F^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$).

Se admitirmos somente trajetórias possíveis quando variamos S, obtemos

$$\delta S = -\left(mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)\delta x^\mu$$

e então

$$-\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu = p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu$$

que é o quadrivetor P_μ do momento generalizado da partícula. E assim

$$P^\mu = \left(\frac{\mathcal{E} + e\phi}{c}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right).$$

3.3 Os Campos Elétrico, Magnético e Invariantes do Campo Eletromagnético

Pelas equações de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \nabla L = \frac{e}{c}\nabla\left(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{v}\right) - e\nabla\phi = \frac{e}{c}\left(\boldsymbol{v}.\nabla\right)\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A} - e\nabla\phi$$

onde usamos a relação vetorial $\nabla\left(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times\nabla\times\boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{A}.\nabla\right)\boldsymbol{B} + \left(\boldsymbol{B}.\nabla\right)\boldsymbol{A}$, e então a equação de Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = \frac{e}{c}\left(\boldsymbol{v}.\nabla\right)\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A} - e\nabla\phi,$$

e como $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{v}.\nabla\right)\boldsymbol{A}$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{dt} = \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{A} - e\nabla\phi.$$

Essa é a expressão da força que age na partícula, que pode ser dividida na parte independente da velocidade e na parte dependente da velocidade. A força do primeiro tipo, por unidade de carga, é a intensidade do campo elétrico

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi.$$

A outra força, por unidade de carga, é a intensidade de campo magnético

$$\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}.$$

Note que $\boldsymbol{E}$ é um vetor polar e $\boldsymbol{H}$ é um vetor axial. Assim

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{dt} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + e\boldsymbol{E}.$$

A variação da energia cinética da partícula com o tempo será

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \boldsymbol{v}.\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E}.\boldsymbol{v}$$

que é o trabalho feito por unidade de tempo. Concluímos então que o campo magnético não realiza trabalho.

As equações da mecânica são invariantes com a mudança do sinal do tempo. Isso também ocorre no campo eletromagnético na teoria da relatividade, mas a transformação deve ser

$$t \to -t\,;\, \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H}\,;\, \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$$

o que modifica os potenciais da seguinte forma

$$\phi \to \phi\,;\, \boldsymbol{A} \to -\boldsymbol{A}$$

(não é uma transformação contínua, então não se pode usar o teorema de Noether nesse caso).

Para os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ existe uma infinidade de potenciais que resultam nesses campos, ou seja, eles não são unicamente definidos. Assim, se modificarmos o potencial da seguinte forma

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

onde f é uma função qualquer. Essa modificação resulta em um termo

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu = d\left(\frac{e}{c}f\right)$$

na integral da ação, não modificando as equações de movimento. Essa invariância quanto a transformação dos potenciais é chamada invariância de gauge (ou calibre).

As transformações de Lorentz para o campo é aquele para quadritensores, mas vamos explicitar suas formas. Para o quadrivetor potencial

$$\phi = \frac{\phi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,;\, A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\phi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,;\, A_y = A'_y\,;\, A_z = A'_z$$

e para os campos

$$E_x = E'_x\,;\, E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,;\, E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$H_x = H'\,;\, H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,;\, H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Se $\boldsymbol{H} = 0$ em K', então $\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}$; e se $\boldsymbol{E} = 0$ em K', então $\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}$. Consequentemente, no sistema K os campos magnéticos e elétricos são mutualmente perpendiculares. Utilizando o argumento ao contrário, temos que se $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{E}$ são mutualmente perpendiculares e não são iguais em magnitude em um sistema K, então existe um sistema K' que é puramente elétrico ou magnético.

Podemos fazer invariantes com as componentes do tensor eletromagnético. Claramente

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = inv$$

$$e^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = inv$$

são quantidades invariantes. O primeiro é um escalar e o segundo é um pseudoescalar. Substituindo pelas componentes, as relações se tornam

$$H^2 - E^2 = inv$$

$$\boldsymbol{E}.\boldsymbol{H} = inv.$$

Temos então os seguintes teoremas:

- Se os campos são mutualmente perpendiculares, $\boldsymbol{E}.\boldsymbol{H} = 0$, então eles também o são em qualquer sistema de referência.
- Se as magnitudes dos campos forem iguais em um sistema de referência, então eles o são em qualquer sistema.

Veremos agora que todas as relações de invariância provem dos invariantes já citados. Considerando o vetor complexo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$ e fazendo a transformação de Lorentz ao longo do eixo x,

$$F_x = F'_x$$

$$F_y = F'_y \cosh\phi - iF'_z \sinh\phi = F'_y \cos i\phi - iF'_y \sin i\phi$$

$$F_z = F'_z \cos i\phi + F'_y \sin i\phi$$

$$\tan\phi = \frac{V}{c}.$$

Então vemos que uma rotação no plano xt no quadriespaço para o vetor $\boldsymbol{F}$ é equivalente a uma rotação no plano yz por um ângulo imaginário. Como o único invariante de um vetor com relação a uma rotação é seu quadrado

$$\boldsymbol{F} = E^2 - H^2 + 2i\boldsymbol{E}.\boldsymbol{H}$$

e os invariantes independentes ficam assim explícitos.

3.4 As Equações de Maxwell Homogêneas

Das expressões $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi$, podemos escrever

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

e da primeira,

$$\nabla.\boldsymbol{H} = 0$$

que é o primeiro par de equações de Maxwell. Do tensor eletromagnético, obtemos a igualdade

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial F_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}}=0$$

que resulta no primeiro par de equações (as equações homogêneas). O quadrivetor dual desse tensor é

$$e^{\mu\nu\beta\alpha}\frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}}=0$$

que mostra explicitamente que há somente 4 equações independentes.

3.5 A Ação do Campo Eletromagnético

A parte da ação que descreve o campo pode ser obtida escrevendo a ação em três partes: a que depende somente das partículas e suas propriedades

$$S_m=-\sum mc\int ds;$$

a que descreve a interação entre as partículas e os campos

$$S_{mf}=-\sum\frac{e}{c}\int A_{\mu}dx^{\mu};$$

e uma parte S_f que depende somente dos campos e suas propriedades. Primeiramente, como o campo eletromagnético respeita o princípio da superposição (que significa que o campo não é fonte de si mesmo, não interage com si mesmo), então as equações do campo devem ser equações diferenciais lineares. Portanto dentro da integral de ação deve haver uma expressão quadrática dos campos. Como não podemos incluir os potenciais, pois não são univocamente definidos, e como S_f deve ser um invariante, então a solução mais simples seria o produto $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Assim postulamos

$$S_f=a\iint F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}dVdt.$$

Para haver um mínimo, a deve ser negativo, e seu valor depende do sistema de unidades. Para o sistema gaussiano, $a=-\frac{1}{16\pi}$. Assim a ação será

$$S_f=-\frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}d\Omega$$

com $d\Omega=cdtdV$, ou seja, a lagrangiana do campo é

$$L_f=\frac{1}{8\pi}\int\left(E^2-H^2\right)dV$$

pois $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=2\left(H^2-E^2\right)$. Então a ação inteira deve ser

$$S=-\sum\int mcds-\sum\int\frac{e}{c}A_{\mu}dx^{\mu}-\frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}d\Omega,$$

sendo esta a ação completa, e então podemos usar cargas de qualquer valor, pois o campo e como ele se modifica pelas cargas está sendo levado em conta.

Podemos, ao invés de tratar com partículas, introduzir uma densidade de carga ρ. Usando o delta de Dirac, introduzido por Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), pode-se escrever a densidade de cargas para as partículas pontuais e_a, fazendo

$$\rho = \sum_a e_a \delta \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_a} \right).$$

Podemos escrever

$$dedx^\mu = \rho dV dx^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} dV dt = j^\mu dV dt.$$

O quadrivetor $j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}$ é chamado quadrivetor corrente. A parte espacial desse quadrivetor é o vetor densidade de corrente $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$. Assim o quadrivetor corrente é $j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})$. A carga total presente em todo o espaço é

$$\int \rho dV = \frac{1}{c} \int j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^\mu dS_\mu$$

onde a integral é tomada em uma hipersuperfície perpendicular ao eixo x^0 (e como já vimos, pode ser em qualquer hipersuperfície que contém as dimensões espaciais, pois a carga é conservada). Geralmente a integral $\frac{1}{c} \int j^\mu dS_\mu$ em uma hipersuperfície é a soma das cargas cuja linhas de universo atravessam essa superfície. O termo de interação pode então ser escrito como

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_\mu dx^\mu dV = -\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu dV dt = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d\Omega$$

e a ação fica

$$S = -\sum \int mcds - \frac{1}{c^2} \int A_\mu j^\mu d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega$$

mostrado explicitamente as partes da ação referente as partículas, o acoplamento do campo com as partículas, e o campo.

3.6 Conservação de Carga e as Outras Equações de Maxwell

Para obter a equação da continuidade quadridimensional, consideremos que a carga é conservada (fato relacionado com a simetria das transformações de calibre, o que mostraremos mais tarde), e portanto a variação temporal da quantidade de cargas em um dado volume é igual ao fluxo de cargas pelos limites do volume, dado pela equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \boldsymbol{v} . d\boldsymbol{f} = - \oint \boldsymbol{j} . d\boldsymbol{f} = - \int \nabla . \boldsymbol{j} dV$$

e na forma diferencial

$$\nabla . \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

A forma quadridimensional desta equação é

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

chamada de equação de continuidade. Agora, escrevemos que o total de cargas no espaço é $\frac{1}{c}\int j^{\mu} dS_{\mu}$, independente do hiperplano (como já vimos) em que é tomado desde que englobe as 3 dimensões espaciais.

A conexão entre a conservação de cargas e a invariância de calibre pode ser vista fazendo

$$A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} - \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$$

e uma integral

$$\frac{1}{c^2}\int j^{\mu}\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} d\Omega$$

é adicionada na ação. Se levarmos em conta a equação de continuidade, a integral se torna

$$\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial\left(j^{\mu} f\right)}{\partial x^{\mu}} d\Omega$$

e pelo teorema de Gauss, isso se torna uma integral de superfície, que na variação se anula, não modificando assim as equações de movimento.

Para encontrar as equações de movimento do campo, supomos as trajetórias das cargas sendo dadas e variando somente o potencial. Assim

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c} j^{\mu}\delta A_{\mu} + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right] d\Omega = 0$$

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c} j^{\mu}\delta A_{\mu} + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta A_{\nu} - \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\delta A_{\mu}\right] d\Omega = 0$$

e usando a antissimetria de $F^{\mu\nu}$

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c} j^{\mu}\delta A_{\mu} + \frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\delta A_{\mu}\right] d\Omega = 0$$

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c} j^{\mu} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\right]\delta A_{\mu} d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\left(\int F^{\mu\nu}\delta A_{\mu} dS_{\nu}\right) = 0$$

onde a última parte novamente vem da integração parcial. Como no infinito os campos são nulos, o termo de borda é nulo, e como δA_{μ} é arbitrário,

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}$$

e substituindo os elementos do tensor, encontramos as outras duas equações de Maxwell, as não homogêneas,

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

$$\nabla.\boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

Podemos encontrar a equação da continuidade,

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0,$$

pois como o operador $\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ é simétrico, e está sendo aplicado em um tensor antissimétrico, obtemos a igualdade acima e a equação da continuidade.

3.7 Energia e Momento do Campo Eletromagnético

A energia do campo eletromagnético é obtida somando as equações de rotacional multiplicados pelos campos respectivos, temos

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{E}.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}.\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{H}.\nabla \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}.\nabla \times \boldsymbol{H})$$

ou, usando a relação vetorial $\nabla.(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}.(\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}.(\nabla \times \boldsymbol{B})$,

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2 + H^2\right) = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}.\boldsymbol{E} - \nabla.(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi}\right) = -\boldsymbol{j}.\boldsymbol{E} - \nabla.\boldsymbol{S}$$

O vetor $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ é o vetor de Poynting. Integrando a última equação, expressando $\int \boldsymbol{j}.\boldsymbol{E}dV \longrightarrow \sum e\boldsymbol{v}.\boldsymbol{E}$ e sabendo que $e\boldsymbol{v}.\boldsymbol{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$, escrevemos

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}dV + \sum \mathcal{E}\right] = -\oint \boldsymbol{S}.d\boldsymbol{f}.$$

A quantidade $W = \frac{E^2+H^2}{8\pi}$ é a densidade de energia do campo eletromagnético. O termo de integral de superfície é o fluxo de energia do campo através da superfície.

Utilizando o formalismo da teoria de campos, vamos encontrar o tensor energia-momento e a equação de continuidade a partir desse formalismo. Identificamos de princípio que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\nu\alpha}F^{\nu\alpha}.$$

Escrevemos o tensor energia-momento como

$$T^\nu_\mu = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\right)} - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}.$$

Para calcular então esta expressão, fazemos

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}F^{\nu\alpha}\delta F_{\nu\alpha} = -\frac{1}{8\pi}F^{\nu\alpha}\left(\delta\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} - \delta\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha}\right) = -\frac{1}{4\pi}F^{\nu\alpha}\delta\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}$$

onde usamos a antissimetria do tensor eletromagnético. Logo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\right)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\alpha}.$$

Assim

$$T_\mu^\nu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi}\delta_\mu^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

ou em componentes contravariantes

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} F_\alpha^\nu + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

que não é antissimétrico. Para simetrizá-lo, adicionamos o termo

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(A^\mu F^{\nu\alpha}\right)$$

que é da forma permitida. Substituindo na equação do tensor energia-momento, obtemos

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{\mu\alpha} F^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right)$$

que é simétrico e tem o traço nulo. Em forma dos componentes de $F^{\mu\nu}$, verifica-se que T^{00} é a densidade de energia, os componentes $cT^{0\alpha}$ são os componentes do vetor de Poynting, e os componentes espaciais

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(E^2 + H^2\right)\right]$$

formam o tensor das tensões de Maxwell.

Vamos determinar a forma do tensor energia-momento das partículas. Podemos escrever a densidade de massa como

$$\mu = \sum_a m_a \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_a}\right)$$

e como a densidade de quadrimomento das partículas é $\mu c u_\mu$, que é o componente $T^{0\alpha}/c$ do tensor, temos assim $T^{0\alpha} = \mu c^2 u_\mu$. Como a densidade de massa é a componente temporal de

$$\frac{\mu}{c}\left(\frac{dx^\nu}{dt}\right),$$

em analogia com a densidade de cargas escrevemos o tensor como

$$T^{\mu\nu} = \mu c \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{dt} = \mu c u^\mu u^\nu \frac{ds}{dt}$$

que é simétrico.

Verifiquemos a versão quadridimensional das equações de conservação, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(T_\mu^{\nu(f)} + T_\mu^{\nu(p)}\right) = 0.$$

Agora, pela equação do tensor energia-momento do campo,

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(f)}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - F^{\nu\alpha}\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - F_{\mu\alpha}\frac{\partial F^{\nu\alpha}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

e utilizando as equações de Maxwell quadridimensionais, temos

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(f)}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} - F_{\mu\alpha}\frac{\partial F^{\nu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{4\pi}{c}F_{\mu\alpha}j^{\alpha}\right)$$

onde os três primeiros termos do lado direito se cancelam, e então

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(f)}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{1}{c}F_{\mu\alpha}j^{\alpha}.$$

A parte das partículas pode ser escrito como

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(p)}}{\partial x^{\nu}} = cu_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\mu\frac{dx^{\nu}}{dt}\right) + \mu c\frac{dx^{\nu}}{dt}\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{\nu}}.$$

Tendo em mente a conservação da massa $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\mu\frac{dx^{\nu}}{dt}\right) = 0$, então

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(p)}}{\partial x^{\nu}} = \mu c\frac{du_{\mu}}{dt}.$$

Usando as equações de movimento e as definições de densidades μ e ρ, $\frac{\mu}{m} = \frac{\rho}{e}$,

$$mc\frac{du_{\mu}}{ds} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^{\nu} \Rightarrow \mu c\frac{du_{\mu}}{ds} = \frac{\rho}{c}F_{\mu\nu}u^{\nu}$$

e então

$$\mu c\frac{du_{\mu}}{dt} = \frac{1}{c}F_{\mu\nu}\rho u^{\nu}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{c}F_{\mu\nu}j^{\nu},$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(p)}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{c}F_{\mu\nu}j^{\nu},$$

que combinado com a expressão para os campos, ou seja, unindo os termos das partículas nos campos e as dos próprios campos,

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu(p)}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial T_{\mu}^{\nu(f)}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{c}F_{\mu\nu}j^{\nu} - \frac{1}{c}F_{\mu\nu}j^{\nu} = 0$$

como necessário pelas equações de conservação.

3.8 Teorema Virial

O traço de um tensor energia-momento se resume ao traço do tensor para as partículas,

$$T_{\mu}^{\mu} = T_{\mu}^{\mu(p)} = \mu c u_{\mu}u^{\mu}\frac{ds}{dt} = \mu c\frac{ds}{dt} = \mu c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sum_a m_a c^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_a}\right),$$

de onde concluímos que $T^\mu_\mu \geq 0$. Agora, tirando a média da equação

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

onde consideramos um sistema fechado de partículas carregadas de movimento finito. A derivada temporal tem média nula, e então

$$\frac{\partial \overline{T^\beta_\alpha}}{\partial x^\beta} = 0,$$

e multiplicando por x^α e integrando por todo o espaço,

$$\int x^\alpha \frac{\partial \overline{T^\beta_\alpha}}{\partial x^\beta} dV = -\int \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\overline{T^\beta_\alpha} dV = -\int \delta^\beta_\alpha \overline{T^\beta_\alpha} dV = 0 \Longrightarrow \int \overline{T^\alpha_\alpha} dV = 0$$

e como $\overline{T^i_i} = \overline{T^\alpha_\alpha} + \overline{T^0_0}$,

$$\int \overline{T^i_i} dV = \int \overline{T^0_0} dV = \mathcal{E},$$

$\mathcal{E}$ sendo a energia total do sistema. Assim

$$\mathcal{E} = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

que é a generalização do teorema virial. Para baixas velocidades

$$\mathcal{E} = \sum_a m_a c^2 = \mathcal{E} = \sum_a \overline{\frac{m_a v_a^2}{2}},$$

em acordo com o teorema clássico.

4 O Campo Gravitacional

Outro campo clássico de grande importância é o campo gravitacional. Apesar de bem conhecido por todos, a gravidade ainda é uma incógnita: não existe ainda uma teoria que explique sua real origem, apesar de haver várias que pretendem fazê-lo. A descrição mais completa da força da gravidade foi dada por Albert Einstein (1879-1955) com sua a teoria da Relatividade Geral. Descreve-se aqui uma pequena introdução sobre este campo.

Um detalhe sobre a notação. Até agora foi utilizado $g_{\alpha\beta}$ para simbolizar a métrica do espaço, deixando implícito que se tratava da métrica de Minkowski. A partir de agora, $\eta_{\alpha\beta}$ simbolizará a métrica de Minkowski, e $g_{\alpha\beta}$ uma métrica genérica.

4.1 Preliminares em Relatividade Geral

A base da teoria de Einstein é o Princípio de Equivalência, que diz que ao menos localmente, alguém não pode distinguir um movimento não inercial de um um campo gravitacional, ou seja, as propriedades de um movimento não inercial são equivalentes a um certo campo gravitacional. Ou em outras palavras, para todo ponto do espaço-tempo em uma campo gravitacional arbitrário é possível escolher um "sistema de coordenadas localmente inercial" tal que, em uma região suficientemente pequena da vizinhança do ponto em questão, as leis da natureza tomam a mesma forma que em um sistema de coordenadas cartesiano acelerado na ausência de gravidade.

De acordo com o Princípio de Equivalência, há um sistema de coordenadas em queda livre (inercial) ζ^α em que as equações de movimento são aquelas da relatividade restrita

$$\frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial \tau^2} = 0$$

onde τ é o tempo próprio $d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\zeta^\alpha d\zeta^\beta$. Agora supondo um outro sistema de coordenadas x^μ em repouso, porém não necessariamente inercial, as equações do movimento ficam

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \\ &= \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \zeta^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \zeta^\alpha}$,

$$0 = \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

onde definimos a conexão afim (chamado assim pois ele explica como conectamos por meio de um caminho dois pontos em uma variedade)

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

O tempo próprio também pode ser expressa em um sistema de coordenadas arbitrário ($\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor de Lorentz)

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu$$

ou

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x^\nu}$$

é a definição de tensor métrico. Para partículas sem massa, como o fóton, não podemos utilizar o tempo próprio como variável independente das equações de movimento, então podemos usar outra variável, $\sigma \equiv \zeta^0$ por exemplo.

Dessa maneira escrito, temos que a força gravitacional está totalmente descrita por $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$. Para entender como essas entidades estão relacionadas com os conceitos clássicos da gravitação, vejamos o limite newtoniano. Escrevendo a equação de movimento de uma partícula se movimentando lentamente em um campo gravitacional fraco estacionário (negligenciamos $\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$ em relação à $\frac{dt}{d\tau}$),

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

e como o campo é estacionário,

$$\Gamma^{\mu}_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}}$$

e aproximando à um sistema cartesiano ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ com $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$), ou seja, em primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}.$$

Substituindo este resultado nas equações de movimento

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00}$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

e assim $\frac{dt}{d\tau} = constante$, e dividindo a primeira por $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$,

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00}$$

cujo correspondente newtoniano é

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Dessas relações, fazendo o sistema de coordenadas ser minkowskiano e utilizando para encontrar o valor da constante um potencial gravitacional que seja nulo no infinito, encontramos

$$g_{00} = (1 + 2\phi).$$

Portanto $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ está relacionado ao campo gravitacional.

Podemos relacionar $g_{\mu\nu}$ à dilatação do tempo, ou ao deslocamento da frequência da luz. Basta escrever o intervalo de tempo entre dois eventos em um sistema de coordenadas arbitrário é

$$\Delta t = \left(\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu}\frac{\partial\zeta^{\beta}}{\partial x^{\nu}}dx^{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou utilizando o tensor métrico

$$\Delta t = \left(g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e para um "relógio" com velocidade $\frac{dx^{\mu}}{dt}$, então

$$\frac{dt}{\Delta t} = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Para um "relógio" estacionário,

$$\frac{dt}{\Delta t} = \left(g_{00}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Para dois eventos idênticos em dois pontos diferentes, temos a razão entre as frequências

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(\frac{g_{00}\left(x_2\right)}{g_{00}\left(x_1\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

que para o limite de campo gravitacional fraco $g_{00} \simeq 1 + 2\phi$ e $\phi \ll 1$, então $\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 + \frac{\Delta\nu}{\nu}$, onde

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \phi\left(x_2\right) - \phi\left(x_1\right) .$$

Curiosidade não tão trivial. A relação entre o tensor métrico e o tensor de Lorentz é chamado congruência. Isso não significa que estes tensores possuem os mesmos autovalores, como nas transformações de similaridade. Porém, existe um teorema, a Lei de Inércia de Sylvester, que diz que uma relação de congruência mantêm o número de autovalores positivos, negativos e nulos. É isso que diferencia um espaço-tempo (3+1) de um (2+2), por exemplo.

Para as próximas seções, utilizaremos implicitamente o princípio da covariância. Este diz que sejam as leis físicas em um sistema inercial, suas generalizações são covariantes, se transformam com o campo. Em outras palavras, as leis físicas não são invariantes, mas se modificam para se adequar as mudanças do espaço-tempo, sem no entanto modificar suas formas gerais. Assim, dado uma equação verdadeira em um referencial, e se ela for covariante, ela então valerá para todos os sistemas de referência.

4.2 Tensores e a Conexão Afim

Para podermos continuar, precisamos de algumas ferramentas matemáticas que aparecem bastante em física: os tensores. Já houve uma breve apresentação para o estudo da relatividade restrita e do campo eletromagnético, mas um tratamento um pouco mais formal seria interessante.

Um vetor contravariante é definido tal que sob uma transformação de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$,

$$V'^{\mu} = V^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

enquanto que um vetor covariante

$$V'_\mu = V_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

Podemos então generalizar para os tensores, que se transformam como

$$T'^{\mu\lambda}_{\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}T^{\kappa\sigma}_{\rho}.$$

As propriedades algébricas dos tensores são:

- Combinação linear: seja $T^\mu_\nu \equiv aA^\mu_\nu + bB^\mu_\nu$ onde a, b são números. Então T^μ_ν é um tensor pois

$$\begin{aligned} T'^{\mu}_{\nu} &\equiv aA'^{\mu}_{\nu} + bB'^{\mu}_{\nu} \\ &= a\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^\rho_\sigma + b\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}B^\rho_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}T^\rho_\sigma \end{aligned}$$

- Produto direto: seja $T^{\mu\rho}_\nu \equiv A^\mu_\nu B^\rho$, então $T^{\mu\rho}_\nu$ é um tensor pois

$$\begin{aligned} T'^{\mu\rho}_{\nu} &\equiv A'^{\mu}_{\nu} B'^\rho \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}A^\lambda_\kappa \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}B^\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}T^{\lambda\sigma}_\kappa \end{aligned}$$

- Contração: seja $T^{\mu\rho} \equiv T^{\mu\rho\nu}_\nu$, então $T^{\mu\rho}$ é um tensor pois

$$\begin{aligned} T'^{\mu\rho} &= T'^{\mu\rho\nu}_{\nu} \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau}T^{\kappa\eta\tau}_\lambda \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta}T^{\kappa\eta\lambda}_\lambda \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta}T^{\kappa\eta}. \end{aligned}$$

Definimos conexão afim como

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

onde $\xi^\alpha(x)$ é o sistema de coordenadas inercial local. Fazendo a transformação

$x^\mu \to x'^\mu$

$$\begin{aligned}
{\Gamma'}_{\mu\nu}^{\ \lambda} &\equiv \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\right) \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\right] \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\rho_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}
\end{aligned}$$

onde o segundo termo do lado direito explicita que a conexão afim não é um tensor. A relação entre o tensor métrico e a conexão afim pode ser vista fazendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} &= \frac{\partial}{\partial x'^\kappa}\left(g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right) \\
&= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + g_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} + g_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\kappa \partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g'_{\kappa\nu}}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial g'_{\kappa\mu}}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\kappa} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\tau}\right) + \\
&\quad + 2 g_{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa}
\end{aligned}$$

ou fazendo

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right]$$

temos

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}' = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \tau\sigma \end{array} \right\} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$$

e então podemos obter o tensor

$$\left[\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}\right]' = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\left[\Gamma^\rho_{\tau\sigma} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \tau\sigma \end{array} \right\}\right]$$

O princípio da equivalência diz que há um sistema de coordenadas ξ_X onde, em um ponto X, não há força gravitacional, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$, e não há desvio para o vermelho entre dois pontos, então as primeiras derivadas de $g_{\mu\nu}$ também são nulas. Se isso ocorre para este sistema, sendo um tensor, para todos os sistemas temos

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}.$$

4.3 Diferenciação Covariante

A diferenciação de um tensor geralmente não resulta em outro tensor. Isso se deve ao fato de não estarmos trabalhando em um espaço plano ou em uma variedade imersa em um espaço plano. Ao se diferenciar um tensor, ele pode resultar em algo que esteja fora da variedade, o que não faz sentido, pois queremos um resultado fechado no espaço-tempo. Assim precisamos de um método de diferenciação que dependa da foram da variedade, fazendo um tensor na variedade sendo diferenciado resultar em outro tensor também dentro da variedade, e que no limite para o espaço de Minkowski seja a noção usual de diferenciação. Para um vetor contravariante V'^{μ}, quando diferenciamos em relação x'^{λ},

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}}$$

que pelo segundo termo resulta não ser um tensor. Agora

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\ \mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} &= \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \right] \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}} V^{\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma}. \end{aligned}$$

Somando, obtemos um tensor

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'^{\ \mu}_{\lambda\kappa} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} V^{\sigma} \right).$$

Assim definimos a diferenciação covariante como

$$V^{\mu}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}$$

onde $V^{\mu}_{;\lambda}$ é um tensor. Para um vetor covariante V_{μ}, diferenciando em respeito a x'^{ν}

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V_{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\rho}$$

mas

$$\begin{aligned} \Gamma'^{\ \lambda}_{\mu\nu} V'_{\lambda} &= \left[\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} + \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \right] \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}} V_{\kappa} \\ &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma} V_{\kappa} + \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\kappa} \end{aligned}$$

e assim temos

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'^{\ \lambda}_{\mu\nu} V'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V_{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma} V_{\kappa} \right)$$

e então definimos a derivação covariante para um vetor covariante

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}$$

que é um tensor.

A generalização para um tensor qualquer é simplesmente adicionar o termo correspondente para cada índice, como por exemplo, seja o tensor $T_\lambda^{\mu\sigma}$. A diferenciação covariante será então

$$T_{\lambda;\rho}^{\mu\sigma} = \frac{\partial T_\lambda^{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} T_\lambda^{\mu\sigma} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} T_\lambda^{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa} T_\kappa^{\mu\sigma}.$$

As propriedades da diferenciação covariante são similares as da diferenciação usual. Em particular, a diferenciação covariante de uma combinação linear é a combinação linear de diferenciações covariantes, ela respeita a lei de Leibniz, e a diferenciação covariante de um tensor contraído é a contração da diferenciação covariante (a contração de um tensor e a diferenciação covariante comutam).

A diferenciação covariante ao longo de um caminho, suponha um vetor contravariante $A^\mu(\tau)$. Podemos escrever

$$\frac{dA'^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{dA^\nu(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}A^\nu(\tau)$$

e repetindo o mesmo procedimento descrito anteriormente, podemos definir a diferenciação covariante ao longo de um caminho

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}A^\nu$$

que resulta em um vetor. Para um vetor contravariante $B_\mu(\tau)$

$$\frac{DB_\mu}{D\tau} \equiv \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}B_\lambda.$$

A generalização para tensores de maior grau é análogo ao descrito antes, simplesmente incluímos termos para cada índice.

4.4 Tensor Curvatura

Nenhum novo tensor pode ser construído do tensor métrico e de suas derivadas primeiras, pois podemos escolher um sistema de coordenadas onde essas primeiras derivadas são nulas, e podemos escrever esse tensor somente com o tensor métrico, e como isto é uma igualdade entre tensores, vale para qualquer sistema de coordenadas. Então a próxima opção para escrever um tensor seria com o tensor métrico, suas primeiras e segundas derivadas.

Da conexão afim podemos escrever

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}{\Gamma'}_{\rho\sigma}^{\ \ \tau}$$

e diferenciando em relação à x^κ

$$\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\eta}\Gamma^\eta_{\kappa\lambda} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau\right) -$$
$$- \Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta}\Gamma^\eta_{\kappa\nu} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\nu}\Gamma'_{\eta\zeta}{}^\sigma\right) -$$
$$- \Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta}\Gamma^\eta_{\kappa\mu} - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x'^\zeta}{\partial x^\mu}\Gamma'_{\eta\zeta}{}^\rho\right) +$$
$$+ \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau}{\partial x'^\eta}$$

ou

$$\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta}\right) -$$
$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau}{\partial x'^\eta} - \Gamma'_{\rho\lambda}{}^\tau\Gamma'_{\eta\sigma}{}^\lambda - \Gamma'_{\lambda\sigma}{}^\tau\Gamma'_{\eta\rho}{}^\lambda\right) -$$
$$- \Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\Gamma^\lambda_{\kappa\nu} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\mu}\right).$$

Subtraindo a mesma equação acima com os índices μ e ν invertidos, obtemos

$$0 = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}\right) -$$
$$- \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}{}^\tau}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma'_{\rho\eta}{}^\tau}{\partial x'^\sigma} - \Gamma'_{\lambda\sigma}{}^\tau\Gamma'_{\eta\rho}{}^\lambda - \Gamma'_{\lambda\eta}{}^\tau\Gamma'_{\sigma\rho}{}^\lambda\right)$$

onde podemos definir o tensor

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}$$

que é chamado tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

Podemos melhor descrever as propriedades desse tensor na sua forma totalmente covariante

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma}R^\sigma_{\mu\nu\kappa}.$$

Temos que o tensor Riemann-Christoffel é

- Simetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$$

- Antissimetria

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu}$$

- Ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0.$$

Podemos contrair o tensor de curvatura para obter o tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

que é simétrico. Definimos também o escalar

$$R \equiv g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa}.$$

A questão da unicidade do tensor de curvatura, do tensor de Ricci, e de R, está fora do escopo deste trabalho.

Escolhendo um ponto X onde em um sistema de coordenadas inercial a conexão afim é nula, podemos escrever

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\eta}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right)$$

de onde obtemos as chamadas Identidades de Bianchi

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0$$

que são claramente equações covariantes, e portanto se valem em um sistema de coordenadas localmente inercial, vale para qualquer outro. Podemos escrever essas equações de maneira contraída

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^{\nu}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0$$

$$R_{;\eta} - R^{\mu}_{\eta;\mu} - R^{\nu}_{\eta;\nu} = 0$$

$$\left(R^{\mu}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\eta} R\right)_{;\mu} = 0$$

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R\right)_{;\mu} = 0$$

4.5 As Equações de Campo de Einstein

Vamos chegar às equações pelo mesmo caminho que encontramos as equações do campo eletromagnético, supondo uma ação que satisfaz certas propriedades.

A ação de uma partícula na relatividade restrita é

$$S = -mc\int ds$$

e o princípio de mínima ação

$$\delta S = -mc\delta\int ds = 0$$

que é o mesmo para a relatividade geral, pois o campo gravitacional não é nada mais que uma mudança na métrica do espaço-tempo, fazendo mudança na dependência de ds em relação à dx_i. Na relatividade restrita essa ação é uma linha reta no quadriespaço entre dois eventos, enquanto que na relatividade geral a partícula se move ao longo de um extremo, ou uma linha geodésica no espaço-tempo.

Generalizando as equações de movimento $\frac{du^i}{ds} = 0$ ou $du^i = 0$, com $u^i = \frac{dx^i}{ds}$

$$Du^i = 0$$

ou

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

e essas são as equações de movimento de uma partícula em um campo gravitacional. Definimos o quadrimomento de uma partícula como

$$p^i = mcu^i$$

$$p_i p^i = m^2c^2$$

e substituindo p_i por $-\frac{\partial S}{\partial x^i}$, temos

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$$

que são as equações de Hamilton-Jacobi para a relatividade geral.

Para determinar as equações do campo gravitacional, antes temos que descobrir a ação S_g desse campo. Assim como no eletromagnetismo, S_g deve ser expressa por uma integral escalar

$$\int G\sqrt{-g}d\Omega$$

tomado por todo o espaço e entre dois momentos no tempo. Para determinar este escalar, partimos do fato que as equações de campo não podem conter derivadas dos "potenciais" maiores que de segunda ordem, como no campo eletromagnético. Ou seja, G não deve conter derivadas de g_{ik} maiores que de segunda ordem. É impossível construir um invariante das quantidades g_{ik} e Γ^i_{kl} sozinhos. Isso fica claro pois podemos escolher um sistema de coordenadas em que a conexão afim é sempre zero em um ponto. Porém há um escalar R (a curvatura do espaço-tempo) que contém g_{ik} e suas primeiras derivadas e linear nas segundas derivadas de g_{ik}. Por causa dessa linearidade, podemos escrever

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + \int \frac{\partial\left(\sqrt{-g}w^i\right)}{\partial x^i}d\Omega$$

pois

$$\sqrt{-g}R = (-g)^{\frac{1}{2}}g^{ik}R_{ik} = (-g)^{\frac{1}{2}}\left\{g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right\}$$

onde temos

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\partial_l\Gamma^l_{ik} = \partial_l\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\Gamma^l_{ik}\right] - \Gamma^l_{ik}\partial_l\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\right]$$

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\partial_k\Gamma^l_{il} = \partial_k\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\Gamma^l_{il}\right] - \Gamma^l_{il}\partial_k\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\right]$$

e retirando as derivadas totais, encontramos $(-g)^{\frac{1}{2}}\, G$

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\, G = \Gamma^m_{im}\partial_k\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\right] - \Gamma^l_{ik}\partial_l\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\right] - (-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\left[\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right]$$

onde os dois primeiros termos podem ser escritos como

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\left[2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik}\right] = 2\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)$$

e então

$$G = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right).$$

O teorema de Gauss diz que $\delta\int\partial_i\left(\sqrt{-g}w^i\right)d\Omega = 0$, e assim

$$\delta\int R\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega = \delta\int G\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega.$$

Assim

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi K}\delta\int R\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega$$

onde K é a constante gravitacional.

Podemos agora achar as equações de campo. Variando

$$\begin{aligned}\delta\int R\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega &= \delta\int g^{ik}R_{ik}\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega \\ &= \int\left\{R_{ik}\,(-g)^{\frac{1}{2}}\,\delta g^{ik} + R_{ik}g^{ik}\delta\,(-g)^{\frac{1}{2}} + g^{ik}\,(-g)^{\frac{1}{2}}\,\delta R_{ik}\right\}d\Omega.\end{aligned}$$

Como $\delta\,(-g)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2(-g)^{\frac{1}{2}}}\delta g = -\frac{1}{2}\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, g_{ik}\delta g^{ik}$,

$$\delta\int R\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega = \int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega + \int g^{ik}\delta R_{ik}\,(-g)^{\frac{1}{2}}\, d\Omega.$$

Escolhendo um ponto em um sistema de coordenadas onde $\Gamma^i_{kl} = 0$,

$$\begin{aligned}g^{ik}R_{ik} &= g^{ik}\left\{\partial_l\delta\Gamma^l_{ik} - \partial_k\delta\Gamma^l_{il}\right\} \\ &= g^{ik}\partial_l\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\partial_l\delta\Gamma^k_{ik} \\ &= \partial_l w^l\end{aligned}$$

com $w^l = g^{ik}\Gamma^l_{ik} - g^{il}\Gamma^k_{ik}$. Como w^l é um vetor, para um sistema de coordenadas arbitrário,

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_l\left(\sqrt{-g}w^l\right).$$

Assim a segunda integral é um termo de superfície que se anula na variação. Assim

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi K}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik} d\Omega \left(-g\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Temos que $\delta S_m + \delta S_g = 0$. Podemos escrever a partir da definição do tensor momento energia

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} d\Omega.$$

Assim temos que

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi K}{c^4}T_{ik}$$

ou

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi K}{c^4}T_i^k$$

que são as equações do campo gravitacional.

4.6 Eletrodinâmica

Depois de todo esse caminho, sabemos que para tornar uma equação covariante trocamos as derivadas usuais por derivadas covariantes, e o tensor de Lorentz pelo tensor métrico. Assim, para o eletromagnetismo, com as equações sem campo gravitacional

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = -J^\beta$$

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0$$

que na presença de um campo gravitacional ficam (basta substituir as derivadas usuais por derivadas covariantes e o tensor de Minkowski pelo tensor métrico)

$$F^{\mu\nu}_{;\eta} = -J^\nu$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0$$

ou levando em conta que elevar e abaixar índices é feito pelo tensor métrico ao invés do tensor de Lorentz, escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}F^{\mu\nu}\right) = -\sqrt{g}J^\nu$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Como estas equações são verdadeiras na ausência da gravidade e covariantes, então são verdadeiras em um campo gravitacional arbitrário.

Considerações Finais

A teoria quântica de campos, como é apresentada hoje, é o estudo de fenômenos quânticos em uma realidade em que a relatividade restrita é importante. Mesmo não estando muito bem moldada, ela resultou nas observações experimentais mais precisas feitas pelo homem. Visto a importância da relatividade para a descrição da natureza, dada pelo limite da velocidade das interações possíveis, se torna indispensável o estudo dessa matéria com mais profundidade.

A notação tensorial possui papel fundamental na simplificação de cálculos e conceitos, como se pode perceber ao longo do texto. O tratamento das dimensões do quadriespaço são facilitadas com ela. E isso ocorre também na teoria quântica de campos, onde esta notação está sempre presente.

Finalmente, muitos dos teoremas apresentados são expandidos para o mundo quântico, como o Teorema de Noether que é de aplicação geral e de poder de análise surpreendente. E portanto, o estudo da teoria clássica dos campos é a porta de entrada para as atuais pesquisas na área de campos quânticos simples e campos quânticos em espaços curvos.

Referências

[1] FLEMING, H.: Introdução aos Tensores. 2001.

[2] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J.: Classical Mechanics. Terceira Edição. Addison Wesley, 2001.

[3] HALL, BRIAN C.: Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. Springer, 2003.

[4] LANCZOS, C.: The Variational Principles of Mechanics. Quarta Edição. Dover Publications, Inc., 1970.

[5] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.: Mechanics. Terceira Edição. Elsevier, 1976. Primeiro Volume (Course of Theoretical Physics).

[6] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. (1952).: The classical Theory of Fields. Quarta Edição. Pergamon Press Ltd, 1975. Segundo Volume (Course of Theoretical Physics).

[7] MANDL, F; SHAW, G.: Quantum Field Theory. John Wiley & Sons Ltd., 1984.

[8] MEEHAM, S.: Group Theory and the SO(3,1) Lorentz Group. 2009.

[9] WEINBERG, S.: Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons Ltd., 1972.