

**Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física**

Rafael Mufato Reis

Transformações conformes aplicadas à Física

**Maringá
2014**

**Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física**

Rafael Mufato Reis

Transformações conformes aplicadas à Física

**Trabalho de conclusão de curso
apresentado como parte dos requisitos
para obtenção do grau de bacharel em
Física, da Universidade Estadual de
Maringá.**

**Orientador:
Prof. Dr. Cesar Canesin Colucci**

**Maringá
2014**

DEDICATÓRIA

Ao meu alterego cuja identidade deve permanecer em segredo.

ΕΠΙΓΑΦΡΕ

“Ahhwww Rrgrrrrr” – Chewbacca

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas do mundo. Especialmente aquelas que não me atrapalharam na elaboração desse trabalho.

RESUMO

Transformações conformes oferecem uma maneira conveniente para se estudar o efeito Magnus, responsável pelo movimento de bolas curvas, e também o comportamento do ar de ar em volta de aerofólios e explicar como aviões podem voar.

Estes dois exemplos são particularmente interessantes, mas as transformações conformes são mais versáteis que isto. Elas podem ser empregadas para estudar problemas de contorno envolvendo equação de Laplace ou Poisson. A aplicação deste tipo de transformação é especialmente útil quando outras técnicas para resolver os mesmos problemas falham.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	8
Conjuntos numéricos.....	8
Números complexos.....	9
Representação gráfica.....	9
Complexo conjugado.....	9
Valor absoluto	10
Representação polar	10
Formula de Euler	10
Teorema de De Moivre.....	11
Sistema não ordenado	11
VARIÁVEIS COMPLEXAS.....	12
Limites	13
Continuidade	13
A derivada.....	14
Fórmulas de diferenciação	14
As condições de Cauchy-Riemann.....	15
Funções analíticas	16
Funções harmônicas.....	17
Funções conjugadas harmônicas.....	18
Interpretação geométrica das funções conjugadas harmônicas	18
TRANSFORMAÇÕES DE REGIÕES.....	21
Transformações por funções complexas.....	21
Tabela de transformações de regiões por funções complexas elementares.....	23
TRANSFORMAÇÕES CONFORMES APLICADAS A FÍSICA.....	28
Transformações conformes.....	29
Existência e unicidade dos problemas de Dirichlet e Neumann.	29
Grandezas físicas representadas por variáveis complexas	31
EXEMPLOS	34
CONCLUSÃO	43
BIBLIOGRAFIA	44

INTRODUÇÃO

Conjuntos numéricos

Se o comandante de um clã ninja resolve atacar mais agressivamente o seu alvo, ele pode ordenar que metade dos guerreiros da retaguarda sejam realocados para o ataque. Mas se inicialmente houver exatamente sete ninjas na retaguarda, a decisão de quantos ninjas deverão ir pra linha de frente não é clara. Alguém poderia argumentar que a ordem do comandante não tem sentido. Por que grandezas representadas por números inteiros deveriam ser divididos entre si se o resultado é impossível, ou produz um resultado que não pode ser reconhecido como sendo um elemento do mesmo tipo da coleção original? Afinal todos sabem que ninguém pode ser apenas meio ninja.

Mas se houver a necessidade de dividir sete metros de corda entre dois ninjas a resposta certamente deve ter algum sentido, pois cada metade da corda deve ter um comprimento definido. Então em muitos casos não é apenas conveniente, mas também necessário definirmos novos tipos de números à medida que vamos encontrando novos problemas de como relacionar os tipos de números que inicialmente tínhamos a disposição para analisar o problema.

O sistema de números atualmente usado foi construído seguindo uma hierarquia de generalizações, feito gradativamente de acordo com a introdução de novas operações, e se exigindo que cada um desses subsistemas seja fechado. Dentro do conjunto dos números reais, esta hierarquia segue na seguinte ordem: números naturais, inteiros e racionais. E esses conjuntos são fechados em relação às operações de soma e produto para os naturais, subtração para os inteiros e divisão para os racionais. Há ainda o sistema de números irracionais, que são os números que não são racionais, ou seja, não podem ser expressos como uma divisão de dois números inteiros. Os números irracionais devem ser considerados para completar o conjunto dos números reais. Dentro dos números reais, quaisquer dois números podem ser comparados, pois um número pode sempre ser considerado maior que outro. Isto permite que o conjunto dos números reais possa ser organizado graficamente por uma reta, conhecida como eixo real. Cada ponto do eixo real corresponde a um número real e assim eles ficam dispostos em ordem e podem ser comparados de acordo com sua magnitude.

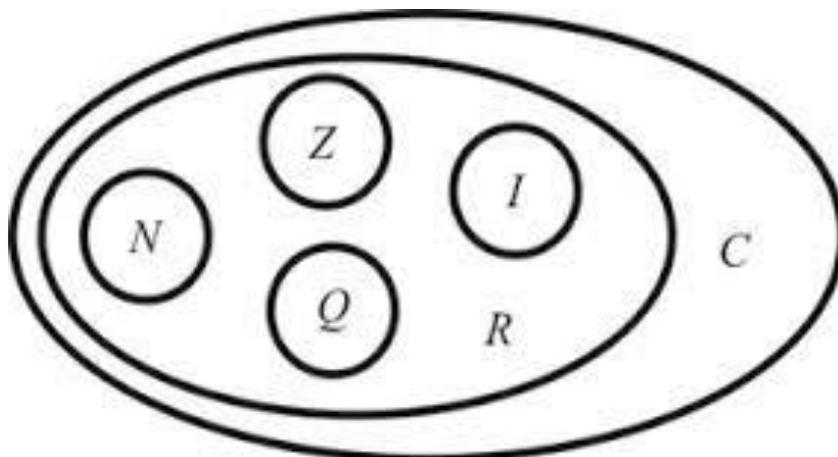


Figura 1: Sistemas numéricos

Números complexos

Em alguns problemas de interesse podemos nos deparar com equações polinomiais como esta,

$$a^2 + 1 = 0.$$

O conjunto dos números reais não é suficiente para produzir uma solução para esta equação, significando que não há número real que a valide. E ainda assim, sendo que o problema representa uma situação física que pode ser observada, devemos ser capazes de descrever o problema quantitativamente. A solução desse impasse aconteceu por conta da invenção de um novo tipo de número, o número imaginário i , definido exatamente como a solução da equação polinomial acima.

Para permitir uma solução para equações mais complicadas que a do exemplo, foi introduzido o conjunto dos números complexos, que é uma generalização dos números reais e que contém o número imaginário i , satisfazendo propriedades de fechamento em relação à soma, subtração, multiplicação e divisão. Os números complexos, representados por z , tem a seguinte forma.

$$z = a + ib$$

Com a e b reais. E essa forma de soma da parte real a ($Re\{z\} = a$) com a parte imaginária b ($Im\{z\} = b$), garante que os números complexos sejam também um conjunto fechado. Quando dois números complexos são somados, subtraídos, multiplicados ou divididos eles reproduzem outro número que contém esta mesma forma genérica. Desta maneira, a caracterização de um número complexo é feita por dois números reais. E se ainda desejarmos escalar guerreiros ninjas para outros regimentos, basta que usemos a parte imaginária b nula e teremos os números reais como um caso particular dos complexos.

Representação gráfica

A representação gráfica de um número complexo z é feita com o diagrama de Argand-Gauss também conhecido como plano complexo ou plano z . Este diagrama é um plano onde o eixo das abscissas representa a parte real e o eixo das ordenadas a parte imaginária do número complexo z . Isto permite que a cada ponto no plano corresponda um número complexo e vice versa. E essa representação também permite que um número complexo possa ser interpretado como um segmento de reta direcionado, ou vetor, partindo da origem ao ponto (a, b) .

Complexo conjugado

A reflexão em relação ao eixo x de um número complexo é chamada de complexo conjugado do número. O efeito produzido é de alterar o sinal da parte imaginária do número. Sendo $z = a + ib$, o complexo conjugado de z é escrito como z^* ou \bar{z} é dado por:

$$z^* = a - ib$$

Valor absoluto

O valor absoluto, ou módulo, de um número complexo $z = a + ib$ é definido como:

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometricamente, o módulo de z é o comprimento do vetor z .

Representação polar

Se r e θ são as coordenadas polares do ponto que representam um número complexo z , onde $r \geq 0$, então:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Assim, um número imaginário pode ser escrito como:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

O raio r é dado pelo módulo de z . E o ângulo θ , chamado de argumento de z , escrito como $\arg(z)$, é dado por:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

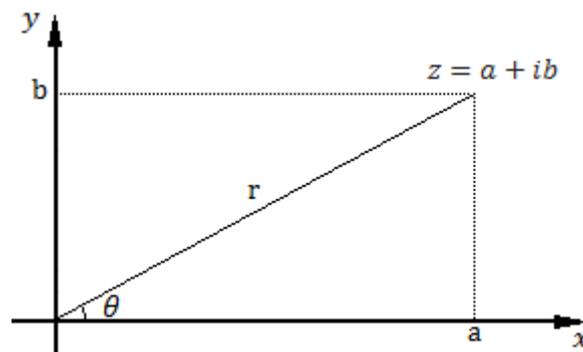


Figura 2: Representação polar

Formula de Euler

A forma polar de um número complexo z pode ainda ser rearranjada e escrita como uma exponencial. Isto é demonstrado usando a expansão em serie de Taylor das funções seno, cosseno e exponencial. Omitindo os detalhes, a expressão final tem a seguinte forma.

$$z = r e^{i\theta}$$

Que é conhecida como fórmula de Euler.

Teorema de De Moivre

Se $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ temos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\}$$

Generalizando

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\}$$

E se $z_1 = z_2 = \cdots z_n = z$, tem-se

$$z^n = \{r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))\}^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Isto dá uma nova maneira de interpretarmos o porquê do produto de dois números reais negativos ser um número real positivo.

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

$$z_1 = -a = a e^{i\pi}, \quad z_2 = -b = b e^{i\pi}$$

$$z_1 z_2 = a b e^{i(\pi+\pi)} = a b e^{2i\pi} = ab$$

Nisto podemos perceber a multiplicação de dois números reais negativos como sendo girados duas vezes por um ângulo de π radianos, fazendo com que o produto deles continue no eixo real, mas em sentido contrário. Este resultado é compreendido muito bem sem apelarmos para as técnicas desenvolvidas para estudar números complexos, mas mostra como o surgimento de um paradigma superior pode revelar maneiras de compreender detalhes desapercebidos anteriormente.

Sistema não ordenado

Dois números complexos z_1 e z_2 não podem ser comparados, ou se diz que o conjunto de números complexos não é ordenado como é o dos números reais. Isto significa que a expressão $z_1 > z_2$ não tem sentido. Entretanto, uma vez que o valor do módulo de números complexos é um número puramente real, pode-se compará-los, podemos dizer, por exemplo, que,

$$|z_1| > |z_2|.$$

VARIÁVEIS COMPLEXAS

Quando z denota qualquer um dos números de um conjunto S de números complexos, nós chamamos z de uma variável complexa. Se existe uma correspondência de cada valor de z em S ao valor de uma segunda variável complexa w em um segundo conjunto S' , então w é a função da variável complexa z no conjunto S :

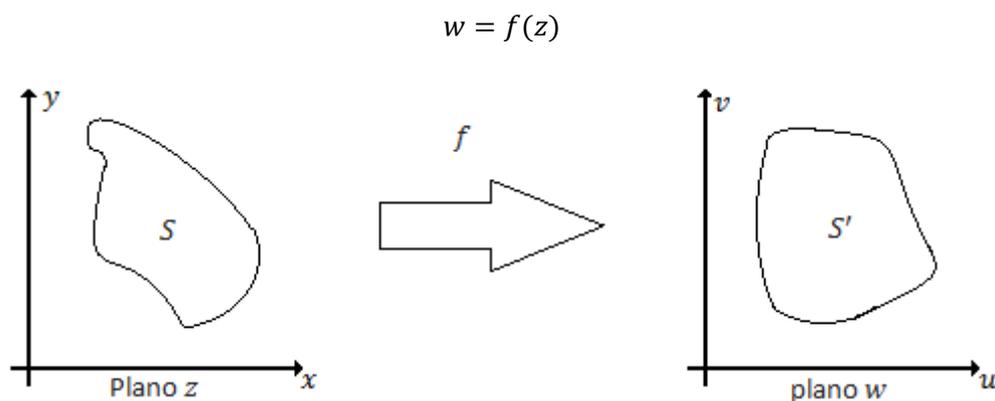


Figura 3: Região S no plano z transformada para a região S' no plano w pela função $w=f(z)$

O conjunto S é chamado domínio de definição da função $f(z)$. Cada valor de z corresponde a um valor $f(z)$ em S' , a totalidade dos valores $f(z)$ correspondendo a todos os z em S constitui o que é conhecido como imagem da função w . Existem casos que um único valor de z pode corresponder a mais de um $f(z)$, como por exemplo $f(z) = z^{1/2}$. Para evitar que isto dificulte o estudo das funções podemos sempre separá-las em ramos, onde a correspondência é unívoca em um domínio específico. Em geral, por motivo de conveniência, apenas o ramo primário é considerado, a menos que o contrário seja explicitamente admitido.

Da mesma maneira que operações elementares com números complexos resultam em outro número complexo como a soma de uma parte real e uma imaginária, a forma explícita de uma função $f(z)$ também pode ser representada como a soma de uma parte real e outra imaginária. As funções $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$ são funções reais da variável complexa z . Se u e v são quaisquer duas funções reais das variáveis reais x e y , então $u + iv$ é uma função de z . Por outro lado, cada função $f(z)$ dada tem componentes reais e imaginários específicos que são funções reais de x e y . Se u e v denotam estas componentes, então,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Limites

Seja $f(z)$ uma função definida em todos os pontos numa vizinhança de $z = z_0$, exceto talvez no próprio ponto z_0 . Dizer que o limite desta função, quando z tende a z_0 é um número w_0 , significa que o valor $f(z)$ da função se aproxima arbitrariamente do valor w_0 , quando a vizinhança do ponto $z = z_0$ é feita suficientemente pequena.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

Uma forma precisa de expressar esta definição é feita da seguinte maneira.

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ sempre que } |z - z_0| < \delta$$

Graficamente, esta definição requer que para cada número positivo ε algum número positivo δ existe, de maneira que todos os pontos z , exceto talvez z_0 , interiores ao círculo $|z - z_0| = \delta$ no plano z tenham pontos imagem $w = f(z)$ confinados no interior do círculo $|w - w_0| = \varepsilon$ no plano w . Note que todos os pontos imagem devem pertencer à vizinhança $|w - w_0| < \varepsilon$; eles não precisam constituir a vizinhança inteira.

Uma função complexa $w = f(z)$ pode ser descrita pelas suas componentes reais e imaginárias $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, que são funções puramente reais de duas variáveis. E uma vez que estes limites são tratados em cálculo de funções de duas variáveis, as suas definições e propriedades também valem no contexto de variáveis complexas.

A expressão para o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ pode ser reescrita em termo das componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$. Assim sendo, temos que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$$

é satisfeita se, e somente se,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \text{ e } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0$$

Continuidade

Uma função $f(z)$ é contínua em um ponto z_0 somente quando as três seguintes condições são satisfeitas:

1. $f(z_0)$ existe,
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe,
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Como consequência dos teoremas fundamentais sobre limites, se duas funções são contínuas, suas somas e produtos também serão contínuos. O quociente é contínuo exceto para os valores de z que anulam o denominador.

A derivada

Seja z qualquer ponto em uma vizinhança de z_0 , e esta região esta dentro do domínio de definição de uma função f . A derivada f' , ou df/dz , de f em z_0 é definida pela expressão,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se o limite existir.

Fórmulas de diferenciação

Seja c uma constante complexa, e w uma função cuja derivada $w'(z)$ existe; então,

$$\frac{d}{dz}(c) = 0, \quad \frac{d}{dz}(z) = 1$$

$$\frac{d}{dz}(cw) = c \frac{dw}{dz}.$$

Se as derivadas $w_1'(z)$ e $w_2'(z)$ de duas funções w_1 e w_2 existem, então,

$$\frac{d}{dz}(w_1 + w_2) = w_1'(z) + w_2'(z)$$

$$\frac{d}{dz}(w_1 w_2) = w_1(z)w_2'(z) + w_1'(z)w_2(z)$$

e se $w_2(z) \neq 0$,

$$\frac{d}{dz} \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2(z)w_1'(z) - w_1(z)w_2'(z)}{[w_2(z)]^2}$$

Se n é um número real positivo, então,

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$$

e se $z \neq 0$ esta fórmula também é valida quando n é um negativo.

As condições de Cauchy-Riemann

A derivada de funções complexas obedece a restrições mais severas que as funções reais. Isto ocorre pela necessidade dela existir independente do caminho que o limite para z_0 é tomado. O resultado desta restrição é uma relação entre derivadas parciais e é um conceito fundamental em cálculo complexo a partir do qual vários resultados decorrem. Por isto vejamos em detalhes nos cálculos abaixo como chegamos nestas relações, chamadas *condições de Cauchy-Riemann*.

Sejam:

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad \Delta z = z - z_0, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad f'(z_0) = a + ib,$$

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0), \quad \Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

Então

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib$$

Isto implica que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = a$$

e

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \right) = b$$

Em particular, quando $\Delta y = 0$, então, $\Delta z = \Delta x$. As duas equações acima se reduzem a limites de funções de uma única variável x e segue que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} = a$$

e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = b$$

Isto é, $\partial u / \partial x$ e $\partial v / \partial x$ existem no ponto (x_0, y_0) e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b \quad em \quad (x_0, y_0)$$

De modo análogo, quando $\Delta x = 0$, então $\Delta z = i\Delta y$, tem-se

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = a$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{-\Delta y} = b$$

Assim as derivadas parciais em relação à y existem, e

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b \quad em \quad (x_0, y_0)$$

Para o limite existir, ele não deve depender do caminho que é tomado para se aproximar ao ponto em questão. Portanto as derivadas obtidas pelos dois caminhos escolhidos acima devem ser iguais. Isto implica no seguinte par de equações.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Equação 1: Condições de Cauchy-Riemann

Uma vez que $f'(z) = a + ib$, as equações obtidas acima permitem escrever duas formas úteis para a derivada de f

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Assim, a importante conclusão é que se a derivada $f'(z)$ da função $f = u + iv$ existe no ponto z , então as derivadas parciais de primeira ordem, com respeito a x e y , de cada componente u e v devem existir neste ponto e satisfazerem as condições de Cauchy-Riemann.

Funções analíticas

Uma função f da variável complexa z é *analítica no ponto* z_0 se a sua derivada $f'(z)$ existe não apenas em z_0 mas em todos os pontos z em uma vizinhança de z_0 . É *analítica em um domínio* do plano z se ela é analítica em todos os pontos deste domínio.

Uma função *inteira* é uma que é analítica em todos os pontos do plano z . Se uma função é analítica em todos os pontos na vizinhança de z_0 exceto no próprio z_0 , então z_0 é chamado de *singularidade* da função.

Se duas funções são analíticas em um domínio D , a sua soma e o seu produto também são funções analíticas em D . E o seu quociente também é analítico em D se a função no denominador não se anule em D . Funções compostas também são analíticas se as suas constituintes são analíticas.

Funções harmônicas

Quando uma função $f = u + iv$ é analítica em algum domínio D vale que para todos os pontos do domínio as condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

E partindo delas podemos derivar a primeira em relação a x e a segunda em relação a y e obter,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Com o cálculo integral de variáveis complexas é possível mostrar que se uma função f é analítica então as derivadas parciais de u e v de todas as ordens existem e são funções contínuas de x e y . Isto garante que as equações acima existem, e, além disso, como as derivadas cruzadas são iguais temos que em todo o domínio D vale o seguinte,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

em um processo análogo também obtemos,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Estas são equações diferenciais parciais de Laplace nas variáveis independentes x e y . Qualquer função que tenha derivadas parciais de segunda ordem contínua e que satisfazem a equação de Laplace são chamadas de funções harmônicas. Os cálculos apresentados acima mostram que quando $f = u + iv$ é analítica, u e v são harmônicas. Além disso u e v são chamadas de *funções harmônicas conjugadas*. E quando uma é conhecida a outra pode ser determinada a menos de uma constante aditiva.

Funções conjugadas harmônicas

Supondo conhecida uma função harmônica u podemos mostrar que a sua conjugada harmônica existe e encontrar uma forma explícita pra ela. Primeiro, com a ajuda das condições de Cauchy-Riemann escrevemos a diferencial dv .

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

O lado direito desta equação mostra que dv é uma diferencial exata, se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

O que é verdade, uma vez que u é harmônica por hipótese e assim satisfaz a equação de Laplace. Isto garante que o valor da integral de linha abaixo independe do caminho.

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'} dy' \right]$$

Onde o ponto inicial (x_0, y_0) é arbitrário e determina a constante de integração puramente real c . Assim a temos a função v determinada em termos de u pela seguinte expressão.

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left[-\frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dx' + \frac{\partial u(x', y')}{\partial x'} dy' \right] + c$$

Interpretação geométrica das funções conjugadas harmônicas

Dada uma função de duas variáveis $u(x, y)$ podemos definir curvas de níveis correspondentes a uma constante k escrevendo $u(x, y) = k$. E como sobre estas curvas de nível a função $u(x, y)$ produz um resultado constante, a diferencial de $u(x, y)$ sobre as curvas de nível é nula.

$$du = 0$$

A diferencial de $u(x, y)$ pode ser expresso em função das derivadas parciais de u em relação a x e y e as diferenciais dx e dy ,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Esta expressão pode ser escrita, em notação mais compacta, como o produto escalar entre o gradiente de u e o elemento diferencial em duas dimensões $d\vec{l}$.

$$\nabla u \cdot d\vec{l} = 0$$

Num ponto (x_0, y_0) sobre a curva de nível $u(x, y) = k$, $d\vec{l}$ é um vetor tangente à curva e a expressão acima revela que o gradiente de uma função é perpendicular a própria função.

Tratando-se de uma função analítica num domínio onde $f'(z) \neq 0$ e $u(x, y)$ é a parte real e $v(x, y)$ a parte imaginária de $f(z)$. Temos como foi confirmado acima para qualquer função real de duas variáveis, que o gradiente ∇u é perpendicular a u e o gradiente ∇v é perpendicular a v . Assim vamos prosseguir investigando o efeito de calcular o produto escalar desses gradientes,

$$\nabla u \cdot \nabla v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \hat{j} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

Mas pelas condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

temos

$$\nabla u \cdot \nabla v = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

E se o gradiente das funções conjugadas harmônicas são perpendiculares entre si segue que as próprias funções também são.

Como exemplo da ortogonalidade das funções conjugadas harmônicas, vejamos o que ocorre com a função complexa $f(z) = z^2$. Notamos primeiramente que $f(z)$ tem suas partes reais e imaginárias sendo $u = x^2 - y^2$ e $v = -2xy$. Obtemos curvas de níveis quando igualamos as funções u e v às constantes α e β , respectivamente. Estas curvas tem a forma de hipérbolas, e estão representadas na figura 4. As curvas mais escuras correspondem a $u = \alpha$ e as mais claras a $v = \beta$.

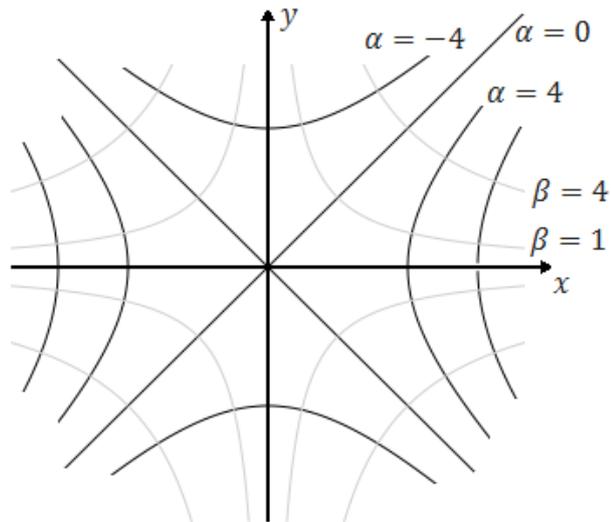


Figura 4: Ortogonalidade de funções conjugadas harmônicas

Para cada valor das constantes α e β , há uma curva correspondente, que são idênticas em forma, mas variam em posição. Nota-se que em todos os pontos de intersecção entre as curvas de níveis, os ângulos e as retas tangentes a elas são ortogonais.

Quando funções complexas são usadas para descrever problemas físicos este resultado é particularmente útil, pois podemos utilizar estas duas famílias de curvas de níveis para representar linhas equipotenciais e linhas de forças. Em eletrostática, por exemplo, se elegermos a família de curvas de nível $u = \alpha$ para descrever linhas equipotenciais as linhas de força poderiam ser automaticamente representadas pela família $v = \beta$.

TRANSFORMAÇÕES DE REGIÕES

Funções reais são caracterizadas pelo modo como transformam os pontos do seu domínio para seu contradomínio. Uma função é definida por uma regra de como corresponder um conjunto de pontos a outro conjunto. Uma função pode ser convenientemente representada por um gráfico e a representação gráfica é útil para se perceber o comportamento geométrico da função. A construção do gráfico é usualmente feita através de um sistema de eixos orientados e ortogonais. No caso de uma função de uma variável real, o gráfico é feito da seguinte maneira: cada ponto do seu domínio é representada em um dos eixos, costumeiramente o eixo x , e cada ponto correspondente do contradomínio é identificado no eixo y e dessa maneira obtêm-se uma coleção de pontos criando o gráfico. Nos trechos onde a função é continua nota-se que o gráfico é representado por uma curva plana e suave. Uma função de duas variáveis reais tem o gráfico num sistema de três eixos orientados e mutuamente ortogonais. Os eixos x e y são tradicionalmente reservados ao domínio, e o eixo z ao contradomínio. Assim o gráfico se torna uma superfície tridimensional.

Para funções complexas, há uma dificuldade em se produzir um gráfico. Porque necessita-se de duas dimensões para representar o domínio da função e mais duas para o contradomínio. Visto que não temos como representar quatro eixos mutuamente ortogonais graficamente, opta-se por adotar dois planos independentes para a representação do comportamento geométrico da função. Um dos planos é destinado ao domínio, chamado de plano- z , e o outro ao contradomínio, plano- w . O plano- z tem um eixo para a parte real da variável complexa (eixo- x) e outro eixo ortogonal ao eixo- x para a parte imaginária (eixo- y). De forma análoga, o plano- w tem um eixo para a parte real do contradomínio (eixo- u) e outro para a parte imaginária (eixo- v), tudo de acordo com a definição de função complexa. A natureza de uma função de variável complexa pode ser percebida graficamente pela maneira como ela transforma uma determinada região do domínio de um plano complexo para a região do contradomínio correspondente.

Transformações por funções complexas

O conjunto de equações,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

define uma transformação entre os planos uv e xy . Da teoria de transformações de regiões sabe-se que para garantir que a transformação seja biunívoca o jacobiano da transformação deve ser não nulo, ou seja,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

Quando u e v são as partes reais e imaginárias de uma função analítica podemos utilizar as condições de Cauchy-Riemann, apresentadas na página 15. Desta forma o jacobiano da transformação pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 = |f'(z)|^2 \end{aligned}$$

Assim, uma transformação associada à função complexa $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é biunívoca em regiões onde $f'(z) \neq 0$.

Seja uma função analítica $w = f(z)$ em uma região S onde $f'(z) \neq 0$, cuja o contorno é C . Podemos descobrir a região transformada no plano w determinando apenas como o contorno C no plano z se transforma no contorno C' no plano w . Pois assim a região S' , que é interior ao contorno C' é automaticamente determinada.

Para cada caso existe uma estratégia mais vantajosa para descobrir a transformação do contorno. Dependendo da natureza da geometria do contorno e da natureza da função, podemos usar coordenadas cartesianas ou polares, usar equações paramétricas também pode facilitar a transformação. Vejamos como duas regiões específicas são transformadas pela mesma função $w = z^2$. A primeira região é uma seção de ângulo θ_0 do círculo de raio r_0 . Neste caso coordenadas polares são convenientes. Seja $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$ um ponto arbitrário do plano z é relacionado no plano w por,

$$w = \rho e^{i\varphi} = r^2 e^{2i\theta}$$

Isto demonstra que o raio original é levado ao quadrado e a seção de ângulo é duplicada quando transformado para o plano w . Assim a imagem de qualquer ponto (r, θ) é o ponto no plano w cujas coordenadas polares são $\rho = r^2$ e $\varphi = 2\theta$.

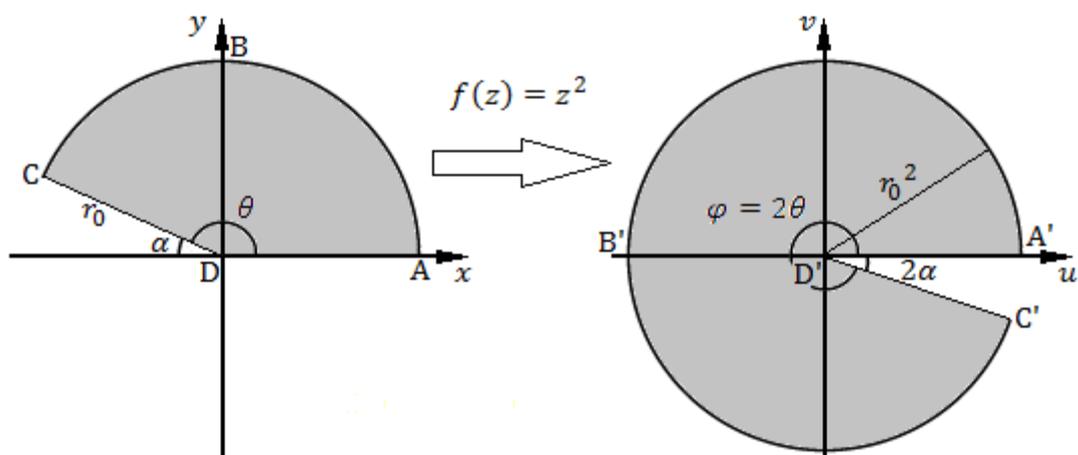


Figura 5: Transformação de uma seção circular pela função $f(z) = z^2$

Em coordenadas cartesianas w assume uma forma que facilita a transformação de outro tipo de região.

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Quando temos u e v constantes, a região no plano w é um retângulo. Mas $u = a$, com a constante, equivale a $x^2 - y^2 = a$ e $v = b$, com b constante, equivale a $2xy = b$. Que são as equações de hipérbolas. Assim a região no plano z que produz este retângulo no plano w é contornada por hipérbolas.

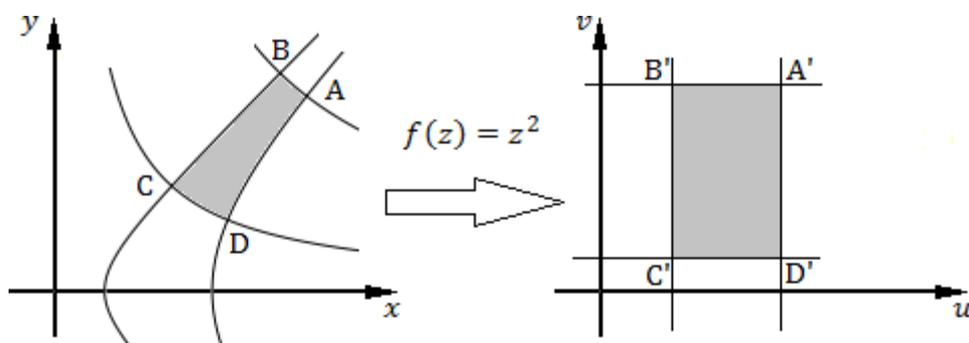


Figura 6: Transformação de hipérbolas em retas pela função $f(z) = z^2$

Assim fica evidente que a mesma transformação, $f = z^2$, nos dá figuras diferentes para diferentes regiões de partida.

Tabela de transformações de regiões por funções complexas elementares

Para transformar regiões quaisquer em regiões desejadas, precisamos escolher uma função apropriada. A escolha da função adequada pode ser uma tarefa difícil. Muito parecido com o que ocorre com integração de funções, existe uma tabela onde transformações por funções complexas são catalogadas. Assim consultando as figuras de

uma tabela, podemos escolher a função apropriada e ajustar as constantes de acordo com os parâmetros da região inicial.

As figuras abaixo são uma seleção modesta que formam uma tabela de transformações de regiões por funções complexas.

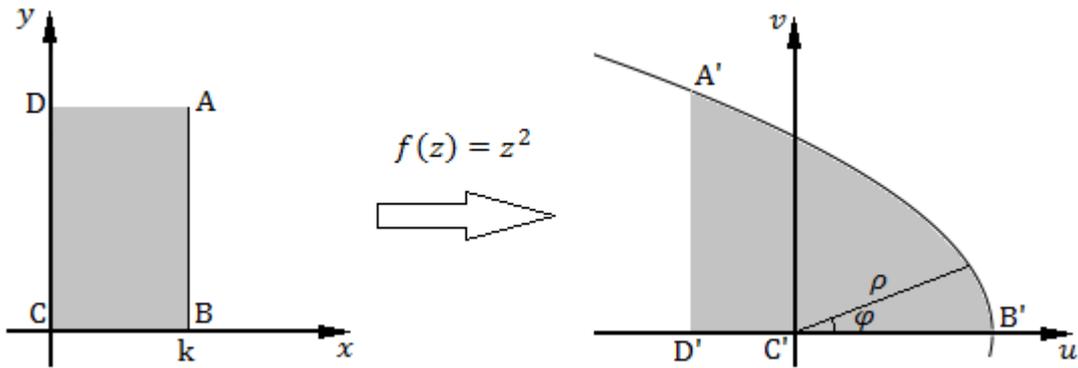


Figura 7: $f(z) = z^2$, $0 \leq x \leq k, y \geq 0$, $\rho = \frac{2k^2}{1+\cos \varphi}$

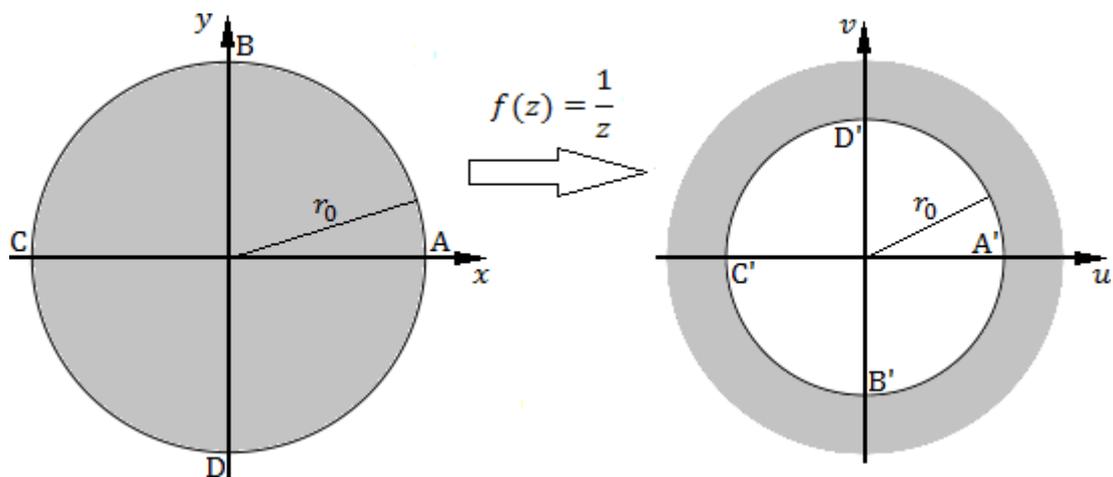


Figura 8: $f(z) = 1/z$

$$r \leq r_0$$

$$\rho \geq r_0$$

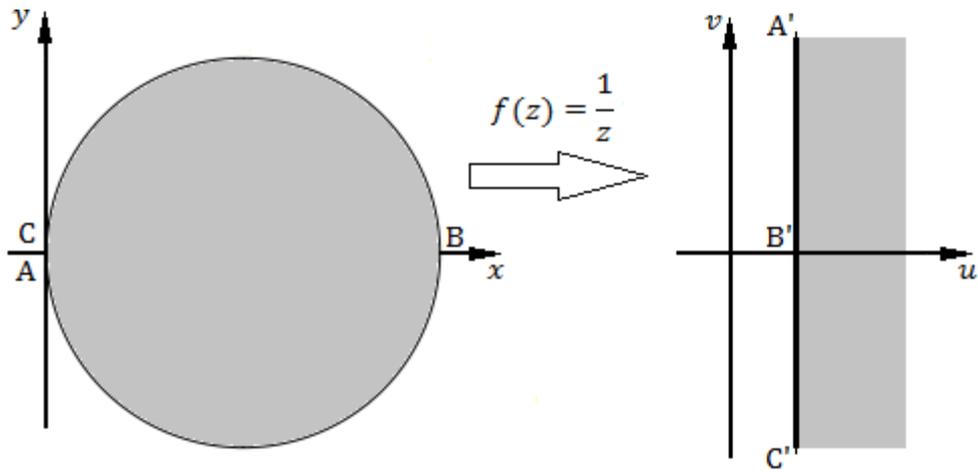


Figura 9: $f(z) = 1/z$

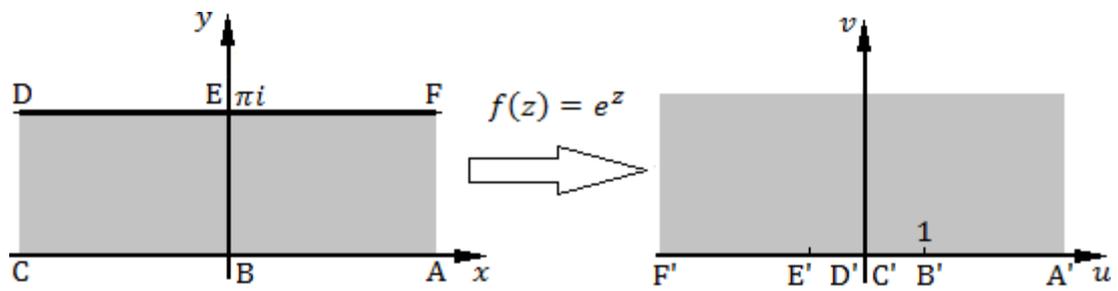


Figura 10: $f(z) = e^z$

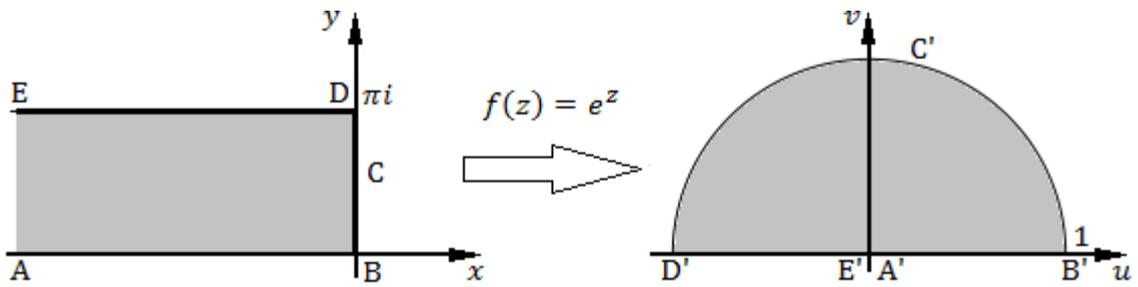


Figura 11: $f(z) = e^z$

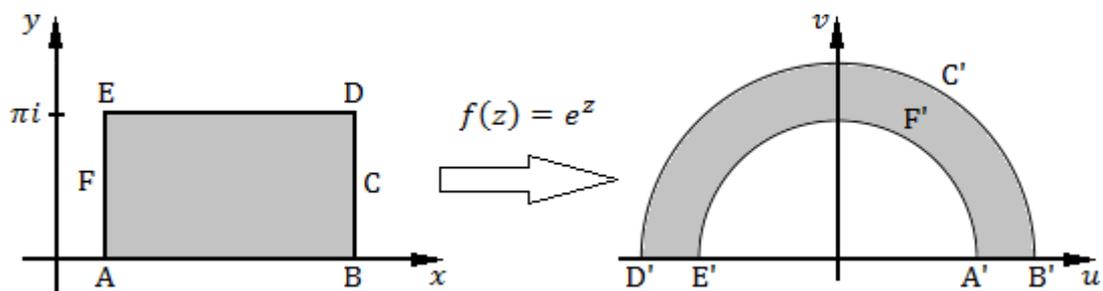


Figura 12: $f(z) = e^z$

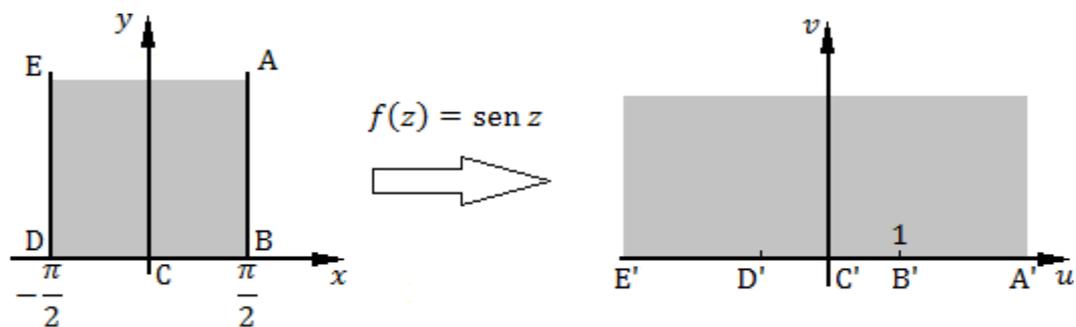


Figura 13: $f(z) = \text{sen } z$

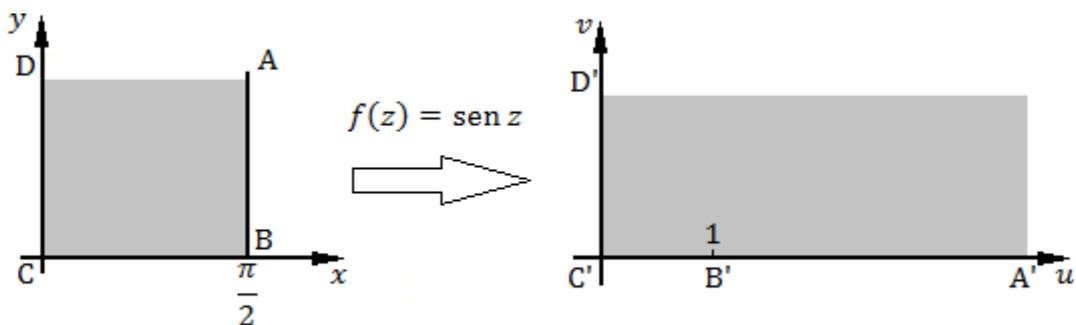


Figura 14: $f(z) = \text{sen } z$

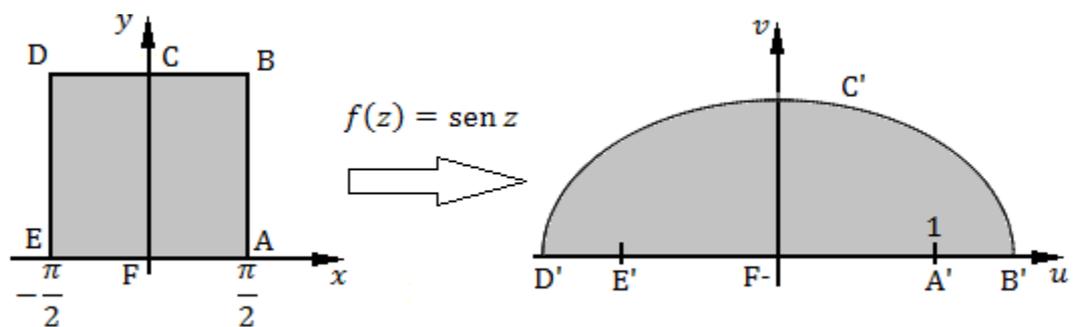


Figura 15: $f(z) = \text{sen } z$

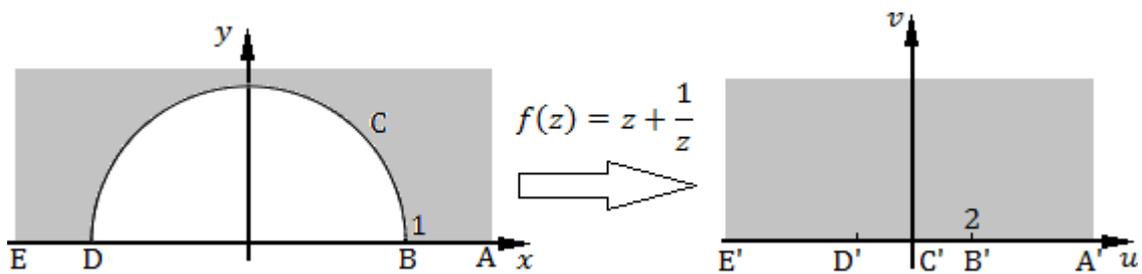


Figura 16: $f(z) = z + 1/z$

Estes são apenas alguns exemplos de regiões transformadas por funções elementares. Existem tabelas mais completas disponíveis onde são listadas regiões de geometrias diversas transformadas em outras mais convenientes. Em geral procuramos transformar regiões complicadas em regiões mais simples de maneira que o problema possa ser mais facilmente estudado, como por exemplo, a região final sendo planos, semi-planos ou círculos.

TRANSFORMAÇÕES CONFORMES APLICADAS A FÍSICA

Para compreendermos um fenômeno físico devemos ser capazes de enunciar os seus princípios em termos claros e precisos. Mas esta análise qualitativa é apenas uma explicação parcial, pois uma teoria deve oferecer uma maneira de como as grandezas envolvidas se relacionam numericamente para ser completa. Assim as equações são uma ferramenta indispensável, pois cumprem justamente este papel. E ainda, se não soubermos estudá-las quando elas são aplicadas a um problema específico, elas não servem para muito. Por isso é essencial que saibamos compreender como as propriedades do problema são descritas pelas equações, e como resolver estas equações para podermos ter compreensão não apenas de cada problema específico, mas também dos princípios que os regem.

Isto motiva o estudo de equações diferenciais, que são as equações que expressam como taxas de variações de grandezas envolvidas se relacionam nos problemas. Dificilmente alguém pode superestimar a importância que estas equações exercem em física, pois elas são amplamente empregadas e atuam tão fundamentalmente que é até mesmo absurdo imaginar estudar física sem elas. Assim ao longo da História, vários métodos para resolver equações diferenciais foram criados, cada um com vantagens particulares.

Seguindo a proposta deste trabalho, vamos estudar uma categoria particular de problemas usando o cálculo de variáveis complexas, especificamente através do que é conhecido como transformações conformes. Este método possui a desvantagem de ser limitado. Ele se aplica apenas para situações bidimensionais e para problemas conhecidos como do tipo Dirichlet e Neumann. Mas ainda assim ele é um método muito prático comparado com outros e em muitos casos produz uma solução de forma fechada, ao invés de uma série infinita como geralmente acontece. E ainda possui uma estrutura que oferece novas maneiras de interpretarmos e compreendermos a natureza.

O que torna o uso das transformações conformes úteis para abordar problemas físicos são três teoremas. Eles tornam o modo como o problema é abordado legítimo.

O primeiro garante que existe uma transformação inversa, e ela é única. Sendo que a transformação é biunívoca decorre que o conjunto de transformações de pontos $u = (x, y)$ e $v = (x, y)$ então existe apenas uma transformação inversa $x = (u, v)$ e $y = (u, v)$ que relaciona cada ponto (u, v) de volta a (x, y) .

O segundo que uma função que é harmônica em uma vizinhança do plano z permanece harmônica transformada no plano w . Então problemas que originalmente envolvem equação de Laplace continuam obedecendo à equação de Laplace no plano w .

E o terceiro teorema garante que condições de contorno da forma de curvas de níveis ou derivada normal nula permanecem inalteradas sob transformações conformes. Isto

significa que os problemas de Dirichlet e Neumann não se descaracterizam quando são transformados por uma função analítica.

Estes três teoremas permitem aplicarmos um protocolo para abordar um problema difícil devido possuir uma geometria inconveniente. Primeiramente o problema é transformado para uma forma onde a geometria se torne mais simples. Depois disso, ele então, estando na forma transformada, pode ser mais facilmente resolvido. E no último passo utilizamos esta solução obtida para obter a solução do problema original, utilizando a inversa da função de transformação.

Transformações conformes

As transformações conformes são uma ferramenta de grande utilidade, vejamos em detalhes como elas são definidas e como podemos entendê-las antes de aplicá-las.

Transformações conformes sendo definidas como transformações que preservam o ângulo entre duas curvas que se interceptam em qualquer ponto dentro de um determinado domínio. Examinando a mudança em direção de curvas no ponto z_0 sob uma transformação $w = f(z)$, onde a função é analítica neste ponto e $f'(z_0) \neq 0$, nota-se que há uma rotação pelo ângulo $\arg[f'(z_0)]$. Uma vez que este ângulo é determinado unicamente pela função f , quando duas curvas que se interceptam no ponto z_0 são transformadas para o plano w , elas são cada uma rodadas pela mesma quantidade $\arg[f'(z_0)]$. Assim, o ângulo entre duas curvas no plano z é o mesmo ângulo entre as curvas transformadas no plano w , ou seja, o ângulo é preservado. E desta forma temos que a condição para que transformações por funções complexas sejam transformações conformes é que a função deve ser analítica e a sua derivada não se anule.

As transformações aumentam distâncias de linhas pelo fator aproximado de $|f'(z_0)|$. A imagem transformada de figuras pequenas perto de w_0 se tem aproximadamente o mesmo formato da figura original. O coeficiente de amplificação $|f'(z_0)|$, assim como o ângulo de rotação $\arg[f'(z_0)]$, varia de ponto a ponto. Figuras grandes podem se tornar figuras que não tem semelhança com a original.

Uma vez que a tabela de transformações de regiões apresentada na página 23 é feita por funções elementares, e as funções elementares são analíticas, todas descrevem transformações conformes em regiões onde as derivadas são não nulas. Assim, todas elas podem ser exemplos de transformações conformes, naturalmente tendo como propriedade o fato de preservarem o ângulo de curvas dentro de domínios onde a derivada é não nula.

Existência e unicidade dos problemas de Dirichlet e Neumann.

Num problema físico descrito por equações diferenciais teremos sempre condições extras que devemos impor nas soluções das equações. Estas restrições estão relacionadas com a maneira de como o problema está configurado e podem ser identificadas quando nos atentamos para alguns detalhes como paridade da solução, finitude da solução, valores que

devem permanecer fixos ao longo de contornos, valores que o sistema tem antes de ser permitido evoluir sem influências externas, restrições que as leis que regem estabelecem.

Matematicamente, estas restrições são conhecidas como condições de contorno e quando elas são consideradas na obtenção da solução da equação diferencial o problema é dito *problema de contorno*. O efeito operacional que as condições de contorno acarretam é a determinação de constantes arbitrárias proveniente das equações diferenciais.

Evidentemente é impossível haver dois regimes de evolução para um sistema físico, ou experimento. Assim devemos esperar que a solução de problemas de contorno deva ser única. A demonstração que uma única solução de problema de contorno existe é uma tarefa matemática, mas a determinação deste fato não é de interesse puramente matemático. Uma vez que a unicidade da solução é estabelecida podemos recorrer a métodos diversos para achar uma solução que satisfaça a equação diferencial e as condições de contorno que regem o problema. Quando isto é feito, independente do método usado, sabemos com certeza que a solução obtida não é qualquer, mas é exatamente a solução procurada. Como exemplo, temos o método das imagens em eletrostática onde a solução do problema é obtida considerando uma configuração diferente da original, mas como ela tem condições de contorno idênticas, a solução vale para o problema original também.

Vejamos como os problemas de Dirichlet tem solução única. Basta determinarmos uma função harmônica φ em uma região R que tenha um valor prescrito $\varphi = f(x, y)$ sobre a fronteira da região. Vamos começar supondo que existam duas soluções φ_1 e φ_2 . Então cada uma delas satisfaz a equação de Laplace e naturalmente satisfazendo a mesma condição de contorno.

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0 \text{ em } R \text{ e } \varphi_1 = f(x, y) \text{ sobre } C$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 0 \text{ em } R \text{ e } \varphi_2 = f(x, y) \text{ sobre } C$$

Definindo uma nova função como a diferença entre φ_1 e φ_2 , $G = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \text{ em } R \text{ e } G = 0 \text{ sobre } C$$

Partimos do teorema de Green.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

e usamos que $P = F \frac{\partial G}{\partial y}$ e $Q = -F \frac{\partial G}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \oint_C F \left(\frac{\partial G}{\partial y} dx - \frac{\partial G}{\partial x} dy \right) &= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -F \frac{\partial G}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ F \frac{\partial G}{\partial y} \right\} \right) dx dy \\ &= - \iint_R \left[F \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

fazendo $F = G$

$$\oint_C G \left(\frac{\partial G}{\partial y} dx - \frac{\partial G}{\partial x} dy \right) = - \iint_R \left[G \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Como $G = 0$ no contorno C , a integral do lado esquerdo da igualdade é nula. E identificando a primeira expressão entre parênteses no lado direito da igualdade como a equação de Laplace, temos.

$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0$$

Isto implica que G deve ser constante em relação a x e y na região R . E ainda como o valor de G no contorno C é nulo por continuidade, a G deve ser nulo em toda a região R . O que significa que a suposição de as soluções φ_1 e φ_2 serem diferentes é absurda.

Também pode ser demonstrado que problemas de Neumann, onde a derivada normal é prescrita no contorno da região, também tem soluções únicas a menos de uma constante aditiva arbitrária.

Grandezas físicas representadas por variáveis complexas

Escoamento de fluidos, eletrostática e fluxo de calor são exemplos de problemas físicos que são regidos pela equação de Laplace e as funções complexas podem ser empregadas para aborda-los. Apesar de cada um desses casos terem interpretações físicas diferentes, o tratamento matemático é idêntico. Basicamente o problema é resolvido quando se encontra o que é conhecido como função potencial, pois uma vez conhecida, podemos deduzir outras propriedades do sistema.

Vamos primeiro analisar como podemos manipular funções complexas para, convenientemente, descrever propriedades físicas de interesse e depois identificamos como esses resultados se relacionam com problemas específicos.

A equação de Laplace que rege um potencial garante que esta função potencial, Φ , é harmônica. Sendo assim, deve haver uma função harmônica conjugada Ψ que permite definirmos uma função analítica Ω tal que,

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

e derivando a função Ω em relação a z e empregando as condições de Cauchy-Riemann para escrevê-la em termos de derivadas de Φ somente, obtemos,

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - i\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Tomando o complexo conjugado desta expressão identificamos esta outra nova expressão como tendo uma forma muito semelhante ao gradiente de Φ , apenas não na notação vetorial usual.

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^* = (\Omega'(z))^* = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

Deste modo, sempre que tivermos um problema envolvendo algum potencial que satisfaz a equação de Laplace, podemos calcular o seu gradiente utilizando esta expressão.

A função conjugada harmônica Ψ não aparece na expressão análoga ao gradiente de Φ , ela apenas aparece num processo intermediário para encontrarmos esta expressão. E mesmo analisando o processo de obtenção de Ψ não obtivemos nenhuma interpretação física para o seu significado. Mas como foi explicado anteriormente, quando funções conjugadas harmônicas são postas na forma de famílias de curvas a um parâmetro estas curvas são sempre ortogonais. Assim dadas duas constantes α e β definindo duas curvas de nível,

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta,$$

o valor de Φ sobre a curva de nível deve corresponder ao potencial constante α e daí vem a motivação de chamarmos estas curvas de níveis de *curvas equipotenciais*. Por outro lado, como as curvas de nível Ψ são perpendiculares às de Φ temos a motivação de perceber que ela deve descrever alguma mudança onde a diferença de potencial é máxima, e isso motiva o nome de *curvas de fluxo*.

O comportamento de qualquer potencial - e as suas funções associadas descritas acima - que satisfaz a equação de Laplace deve ter essas características gerais. Mas cada problema físico que pode ser descrito por funções harmônicas tem significados ligeiramente diferentes e nós devemos nos atentar a esses detalhes. A tabela abaixo relaciona funções de variáveis complexas com grandezas físicas que elas podem representar em eletrostática, escoamento de fluidos e fluxo de calor.

	Eletrostática	Escoamento de fluidos	Fluxo de calor
$\Phi(x, y)$	Potencial eletrostático	Potencial da velocidade	Temperatura
$\Omega(z)$	Potencial complexo	Potencial complexo	Temperatura complexa
$(\Omega'(z))^*$	Campo elétrico complexo	Velocidade complexa	Fluxo complexo
$\Psi(x, y)$	Linha de fluxo	Linha de fluxo	Linha de fluxo

Tabela 1: Relação de grandezas físicas com funções complexas.

EXEMPLOS

Primeiro exemplo

Determinar a temperatura estacionária de um material plano e semi-infinito cuja temperatura da base é mantida constante por dois reservatórios térmicos às temperaturas constantes T_0 e T_1 como indicado na figura.

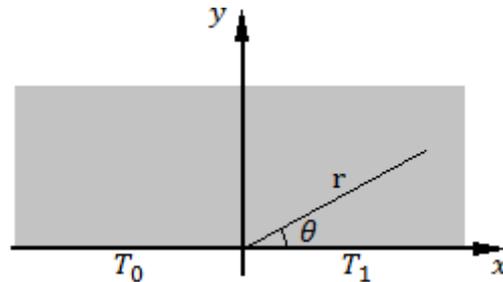


Figura 17: Temperatura no semiplano superior.

Por conveniência, o eixo y é escolhido para separar a interface dos reservatórios com o material onde desejamos determinar a temperatura. Este é um problema de Dirichlet para o semiplano superior. Então, se determinarmos uma função harmônica que acomoda as condições de contorno, o problema está automaticamente resolvido.

A função $A\theta + B$, onde A e B são constantes reais, é harmônica, desde que ela é a parte imaginária da função analítica $f(z) = A\ln(z) + iB$.

Em coordenadas polares o semi eixo $x < 0$ é descrito por $\theta = \pi$ e o $x > 0$ por $\theta = 0$. Desta maneira podemos determinar as constantes A e B que fazem a função $A\theta + B$ descrever a temperatura do material no semiplano positivo,

$$T_0 = \pi A + B$$

$$T_1 = 0 + B$$

aonde,

$$A = \frac{T_0 - T_1}{\pi}, \quad B = T_1.$$

Disto decorre que a solução requerida é

$$T = A\theta + B = T_1 + \frac{T_0 - T_1}{\pi} \theta = T_1 + \frac{T_0 - T_1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Segundo exemplo

Uma lâmina semi-infinita (região sombreada na figura 18) tem suas fronteiras mantidas a uma temperatura constante. Determine o estado estacionário de temperatura.

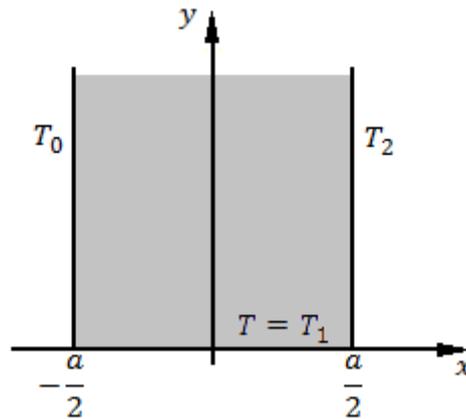


Figura 18: Faixa semi infinita.

A figura 13, da tabela da pagina 26, mostra que a região da figura 18 pode ser transformada no semiplano superior do plano w , por meio da função $f(z) = \text{sen } z$. Para isto basta ajustarmos os coeficientes da função $f(z)$ para apropriadamente acomodarmos aos parâmetros da figura, assim $f(z) = \text{sen}(\pi z/a)$ leva a região do problema para o semiplano superior como a figura 19 representa,

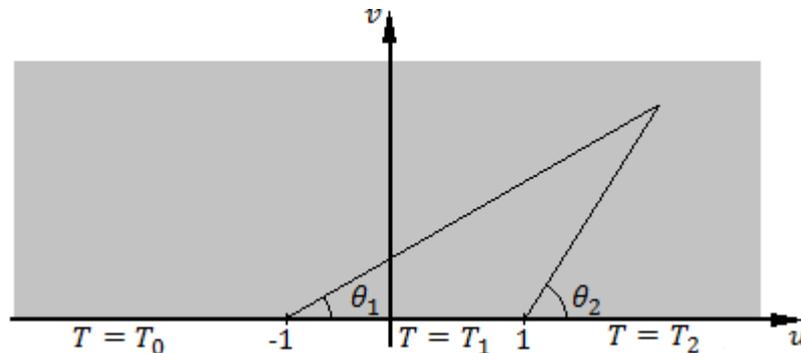


Figura 19: Temperatura no semiplano superior do plano w .

A semelhança com o problema anterior sugere o uso da função $A\theta_1 + B\theta_2 + C$, onde A, B, C são constantes reais pois ela é a parte imaginária da função analítica,

$$f(z) = A \ln(z + 1) + B \ln(z - 1) + iC$$

Para determinar A, B, C , observamos que:

- T_0 vale para $u < -1$, ou, $\theta_1 = \pi$ e $\theta_2 = \pi$
- T_1 vale para $-1 < u < 1$, ou, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$
- T_2 vale para $u > 1$, ou, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$

$$T_0 = \pi A + \pi B + C$$

$$T_1 = 0 + \pi B + C$$

$$T_2 = 0 + 0 + C$$

$$C = T_2, \quad B = (T_1 - T_2)/\pi, \quad A = (T_0 - T_1)/\pi$$

Deste modo a distribuição de temperatura para o semiplano superior w é dado por:

$$T(u, v) = A\theta_1 + B\theta_2 + C = \frac{(T_0 - T_1)}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u+1}\right) + \frac{(T_1 - T_2)}{\pi} \arctan\left(\frac{v}{u-1}\right) + T_2.$$

Para completar a resolução do problema, basta reescrevermos a solução acima nas variáveis originais x e y . Com ajuda de identidades trigonométricas, podemos identificar as partes reais e imaginária de $\text{sen}(\pi z/a)$,

$$f(z) = \text{sen}(\pi z/a) = \text{sen}(\pi x/a) \cosh(\pi y/a) + i \cos(\pi x/a) \sinh(\pi y/a)$$

$$u(x, y) = \text{sen}(\pi x/a) \cosh(\pi y/a), \quad v(x, y) = \cos(\pi x/a) \sinh(\pi y/a)$$

Reescrevendo u e v , a solução correspondente no plano z é

$$T = \frac{(T_0 - T_1)}{\pi} \arctan\left(\frac{\cos(\pi x/a) \sinh(\pi y/a)}{\text{sen}(\pi x/a) \cosh(\pi y/a) + 1}\right) + \frac{(T_1 - T_2)}{\pi} \arctan\left(\frac{\cos(\pi x/a) \sinh(\pi y/a)}{\text{sen}(\pi x/a) \cosh(\pi y/a) - 1}\right) + T_2$$

Esta é a função que descreve a temperatura estacionária em função da posição na região sombreada da figura 18. Julgando pela complexidade deste resultado parece que a sua determinação por outro método seja inviável.

Terceiro exemplo

Dois planos infinitos e paralelos separados por uma distância a , estão a potencial nulo. Uma linha com carga q por unidade de comprimento localiza-se entre os planos a uma distância b do plano inferior. Determine o potencial em qualquer ponto entre os planos.

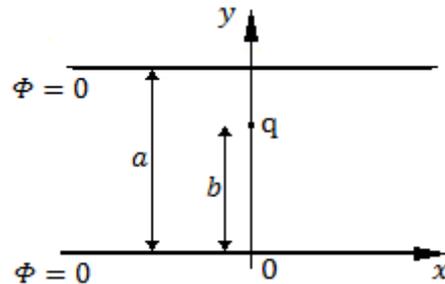


Figura 20: Carga entre planos infinitos aterrados.

Para resolver este problema vamos usar o seguinte roteiro:

1. Escolher a função que transforma a região do problema no semi plano superior. E localizar os contornos e pontos de interesse na nova região.
2. Resolver o problema utilizando o método das imagens.
3. Retornar às variáveis originais.

1 – A figura 10 da tabela de transformações de regiões do capítulo 2 é a que transforma a região entre as placas no semi plano superior. Então usamos a função $e^{\frac{\pi z}{a}}$ para descobrir como o plano superior, descrito por $z = ia + x$, é transformado para o plano w .

$$w = e^{\pi \frac{(ia+x)}{a}} = e^{i\pi} e^{\frac{\pi x}{a}} = (\cos \pi + i \sin \pi) e^{\frac{\pi x}{a}} = -e^{\frac{\pi x}{a}}$$

$$u(x) = -e^{\frac{\pi x}{a}}, \quad v = 0$$

$$u(-\infty) = 0, \quad u(0) = -1, \quad u(\infty) = -\infty$$

E o plano inferior, descrito por $z = x$

$$w = e^{\frac{\pi x}{a}}$$

$$u(x) = e^{\frac{\pi x}{a}}, \quad v = 0$$

$$u(-\infty) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(\infty) = \infty$$

A linha de carga q esta em $z = ib$

$$w = e^{\frac{ib\pi}{a}} = \cos\left(\frac{b\pi}{a}\right) + i \sin\left(\frac{b\pi}{a}\right)$$

$$u = \cos\left(\frac{b\pi}{a}\right), \quad v = \sin\left(\frac{b\pi}{a}\right)$$

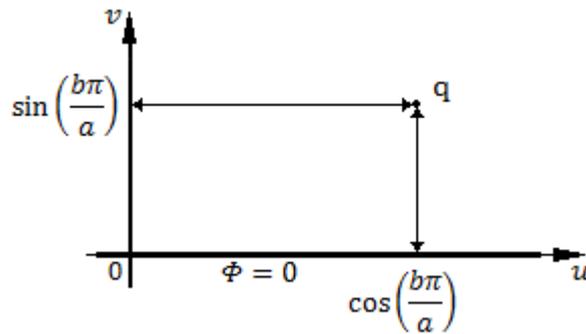


Figura 21: Carga acima de um plano infinito aterrado.

Agora o problema foi modificado. Precisamos encontrar o potencial para todo ponto do plano superior ($v > 0$) com uma carga localizada no ponto $w_0 = \cos\left(\frac{b\pi}{a}\right) + i \sin\left(\frac{b\pi}{a}\right)$. Para isto usamos o método das imagens onde desconsideramos que o eixo u esta aterrado e encontramos o potencial quando uma carga de mesma intensidade e sinal oposto de q se encontra numa posição simétrica em relação ao eixo u . Esta carga está localizada no ponto w_0^* que é o complexo conjugado de w_0 .

$$\Omega(u, v) = \Omega_{w_0} + \Omega_{w_0^*}$$

Empregando a lei de Gauss podemos encontrar o campo elétrico. Notemos que numa superfície circular centrada na carga a componente normal do campo elétrico é constante e a componente tangencial é nula.

$$\oint \vec{E} \cdot d\hat{s} = E_r \oint ds = E_r \cdot 2\pi = 4\pi q$$

$$E_r = \frac{2q}{r}$$

Tendo em vista que $E_\theta = 0$ entao, $\vec{E} = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r}$, e assim podemos integrar para obter que $\Phi = -2q\ln(r)$ que é a parte real do potencial complexo $\Omega(z) = -2q\ln(z)$. E se a carga estivesse num ponto z_0 este potencial seria escrito como $\Omega(z) = -2q\ln(z - z_0)$.

Agora que encontramos esta expressão podemos voltar ao cálculo do potencial $\Omega(u, v)$

$$\Omega(u, v) = \Omega(w) = \Omega_{w_0} + \Omega_{w_0^*} = 2q \ln \left(\frac{w - w_0^*}{w - w_0} \right)$$

com

$$\Omega_{w_0} = -2q \ln(w - w_0), \quad \Omega_{w_0^*} = 2q \ln(w - w_0^*)$$

Mas como $w = e^{\frac{\pi z}{a}}$ e $w_0 = e^{\frac{ib\pi}{a}}$, reescrevemos $\Omega(w)$ em função de z .

$$\Omega(z) = 2q \ln \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{-\frac{ib\pi}{a}}}{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{\frac{ib\pi}{a}}} \right)$$

E o potencial que procuramos é dado pela parte real de $\Omega(z)$

$$\Phi = \operatorname{Re} \left\{ 2q \ln \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{-\frac{ib\pi}{a}}}{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{\frac{ib\pi}{a}}} \right) \right\}$$

Quarto exemplo

Determinar como um fluido que escoar com velocidade constante se comporta quando encontra um cilindro infinito de raio a .

Devido à simetria de translação ao longo do comprimento infinito do cilindro, este problema se torna efetivamente bidimensional. Podemos então simplificar a nossa análise com uma escolha apropriada do sistema de coordenadas. Vamos alinhar o cilindro no eixo z e colocar o seu centro na origem do plano xy . Assim temos uma vista da secção transversal como sendo um círculo C de raio a centrado na origem do plano xy .

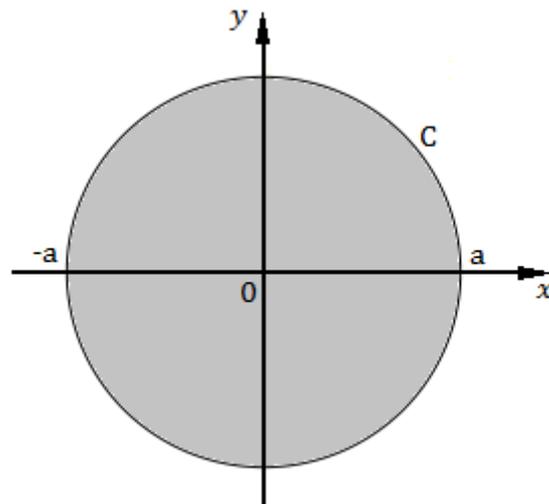


Figura 22: Seção transversal de um cilindro de raio a .

Antes de o fluido atingir o cilindro ele se movimenta com velocidade constante V_0 . Então, vamos primeiro descrever através de funções complexas, o escoamento de um fluido com velocidade constante, e depois estudar o efeito da perturbação causada pelo cilindro. Se arbitrarmos que esta velocidade ocorre na direção positiva do eixo x podemos descrevê-la como,

$$V(x, y) = V(z) = \overline{\Omega'} = V_0$$

Integrando, obtemos o potencial que descreve o escoamento uniforme como,

$$\Omega(z) = V_0 z$$

Nas proximidades do cilindro, este escoamento é modificado pela perturbação causada pelo cilindro. Esta perturbação pode ser descrita por uma modificação no potencial complexo do escoamento com velocidade uniforme $\Omega_u(z) = V_0 z$ (onde o sub índice u significa uniforme). Vamos supor a existência de uma função, ainda desconhecida, $G(z)$ que quando somada a função $\Omega_u(z)$ descreva exatamente o escoamento do fluido próximo ao cilindro.

$$\Omega(z) = \Omega_u(z) + G(z)$$

Podemos considerar que em regiões afastadas do cilindro a perturbação é negligenciável e o escoamento volta a ser uniforme e isto equivale ao limite,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G'(z) = 0.$$

Além disso, o potencial complexo Ω deve ser tal que a linha de fluxo coincida com a fronteira do cilindro C .

A identificação da função $G(z)$ é feita utilizando uma tabela de transformações conformes. Consultando as figuras 7 a 16, podemos procurar uma região exterior ao círculo C que é levada a todo o plano w . E se estabelecermos que no plano w o potencial complexo descreve o escoamento uniforme, $\Omega = V_0 w$, comparando a função analítica de transformação, descobrimos $G(z)$.

Consultando estas figuras, notamos que a número 16 transforma o semiplano superior z , externo a um círculo de raio a para o semiplano superior w . Apesar desta função só tratar do semiplanos superiores, ela ainda nos serve, pois podemos imaginar este escoamento como dois independentes, cada um acontecendo num dos semiplanos. Esta função é dada por.

$$w = z + \frac{a^2}{z}$$

Assim,

$$\Omega(z) = V_0 w = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$G(z) = V_0 \frac{a^2}{z}$$

Usando a forma polar $z = r e^{i\theta}$

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 \left(r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) = V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \Psi(r, \theta) = V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

Podemos identificar as linhas equipotenciais e linhas de fluxo como sendo respectivamente:

$$V_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta = \alpha, \quad V_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = \beta$$

Para $\Psi = 0$ há duas possibilidades.

$$\left(r - \frac{a^2}{r}\right) = 0, \quad \text{sen } \theta = 0$$

O que implica que $r = a$ e $\theta = 0$ ou π . Assim a linha de corrente $\Psi = 0$ coincide com o contorno C do cilindro, que está de acordo com a suposição que a função $G(z)$ deve cumprir.

Derivando a função potencial em relação a z e tomando o seu complexo conjugado obtemos a expressão equivalente ao gradiente, que no contexto de escoamento de fluidos é conhecida como velocidade complexa.

$$\Omega'(z) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta}\right) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) + iV_0 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta$$

Assim a velocidade do escoamento em torno do cilindro é dada por:

$$(\Omega'(z))^* = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) - iV_0 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta$$

E quando o escoamento é observado em regiões afastadas do cilindro equivale a tomar $r \rightarrow \infty$. E assim a expressão para a velocidade se reduz para o escoamento uniforme.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\Omega'(z))^* = V_0$$

Os pontos de estagnação acontecem quando a velocidade é nula.

$$(\Omega'(z))^* = 0$$

$$V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = 0, \text{ ou } z = a \text{ e } z = -a$$

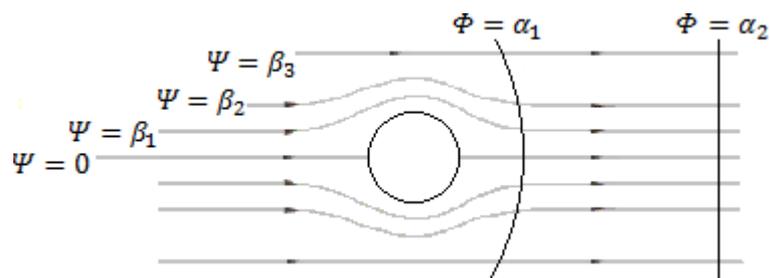


Figura 23: Linhas de fluxo e equipotenciais.

CONCLUSÃO

A representação de grandezas físicas por números complexos, apesar de ter uma notação diferente da usual, e por isso talvez estranha a princípio, tem no mínimo duas vantagens: A primeira é que o potencial complexo faz com que a identificação das curvas equipotenciais e curvas de níveis seja claro e simples; a segunda vantagem é que a expressão para o gradiente de um potencial complexo também tem uma forma natural. Considerando que diversos casos específicos em Física podem ser representados por funções complexas estas vantagens ficam ainda mais relevantes.

Os problemas estudados neste trabalho foram facilitados por ser trivial se supor funções harmônicas que satisfizessem as condições de contorno prescritas. Este artifício faz com que muito empenho em resolver equações diferenciais seja poupado. E esta economia é vantajosa, pois tornar a matemática envolvida mais enxuta desta maneira é uma vantagem em problemas onde há uma situação mais complexa.

BIBLIOGRAFIA

Variáveis Complexas, Com uma introdução às transformações conformes e suas aplicações.
Murray R. Spiegel. Coleção Schaum Editora McGraw-Hill do Brasil Traduzido por José
Raimundo Braga Coelho

Complex Variables and Applications. Ruel V. Churchill Second Edition International Student
Edition McGraw-Hill Book Company

<http://ocw.mit.edu/resources/res-18-008-calculus-revisited-complex-variables-differential-equations-and-linear-algebra-fall-2011/part-i/>

http://dateiena.harald-dalichau.de/conf_map/chap1511.pdf