

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE
DERIVADAS FRACIONÁRIAS E
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PATRICK DOS SANTOS SIMONÁRIO

ORIENTADOR: PROF. FERNANDO C. M. FREIRE

Maringá, dezembro de 2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE
DERIVADAS FRACIONÁRIAS E
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PATRICK DOS SANTOS SIMONÁRIO

Trabalho de conclusão de curso submetido ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

ORIENTADOR: PROF. FERNANDO C. M. FREIRE

Maringá, dezembro de 2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE
DERIVADAS FRACIONÁRIAS E
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PATRICK DOS SANTOS SIMONÁRIO

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Profa. Dra. Hatsumi Mukai

Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes

Maringá, dezembro de 2011

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Primeiramente, agradeço a meus pais por todo apoio, suporte e confiança prestada durante os meus anos de graduação. Com toda certeza, posso afirmar que se não fosse por eles este trabalho, ou mesmo toda a minha graduação, não teria sido possível. Além deles, agradeço meus parentes e meu irmão que também acreditaram em mim.

Agradeço também de coração a alguns amigos próximos que tive contato durante todos os anos de graduação. Dentre tantos nomes, gostaria de citar pelo menos quatro: Leandro, Marcos, Miguel e Pablo. Amigos que estiveram presentes em momentos importantes da minha vida e em outros não tão importantes. Além deles, agradeço também os amigos Willian e Ricardo que nos últimos tempos proporcionaram momentos de aprendizado em coisas além da física. Dentre grandes amigos, gostaria de agradecer aos meus primos Douglas e Vinicius, com os quais convivo durante grande parte do meu tempo em Maringá. Além destes, agradeço a outras pessoas as quais contribuíram de uma maneira indireta para que o trabalho fosse possível: Elton, Gabriela, Guilherme, Gustavo, Jacidio, Jackes, Jessica, Kelly, Marcos, Mário, Rogério, Sarah, entre outros. Quanto a outros nomes que não constam nos agradecimentos, perdoem-me pela injustiça.

Também agradeço a alguns professores que tive o prazer de conhecer durante o período de graduação, com os quais aprendi muito. Alguns destes são o professor Antônio Medina Neto, professor Cesar Canesin Colucci, professor Ervin K. Lenzi, professor Maurício A. C. de Melo, professor Wilson R. Weinand, além das professoras Lilian A. Kato e Valéria N. Domingos Cavalcanti, do departamento de matemática desta universidade, com as quais pude conviver e aprender bastante sobre matemática.

Por fim, agradeço profundamente a meu orientador, professor Fernando C. M. Freire pela imensa ajuda, bem como os professores Renio dos Santos Mendes e João Mura e a professora Hatsumi Mukai. O apoio dado por eles na reta final do trabalho me faz imensamente grato.

Resumo

Este trabalho trata sobre cálculo fracionário, equações integrais e diferenciais fracionárias. Primeiramente, foram mostradas definições e algumas importantes propriedades relacionadas à representação das integrais fracionárias de Riemann-Liouville. Depois disso, são definidas as derivadas fracionárias nas representações de Riemann-Liouville e Caputo, bem como suas propriedades. Usando essas propriedades e definições, começa-se o estudo das equações integrais e diferenciais fracionárias, as quais importantes resultados foram obtidos usando as funções de Mittag-Leffler e as transformadas de Laplace. Estas funções são ferramentas importantes para se obter os resultados das equações integrais e diferenciais fracionárias.

Palavras-chave: cálculo fracionário, integrais fracionárias, equações diferenciais fracionárias, função de Mittag-Leffler, transformadas de Laplace.

Abstract

This work deals with fractional calculus, fractional integrals and differential equations. First, definitions and some important properties related to fractional integrals on Riemann-Liouville's representation are presented. In this work it is defined the fractional derivatives on Riemann-Liouville's and Caputo's representations, as well as their properties. Using these properties and definitions, the study of fractional integrals and differential equations was begun, in which important results were obtained using Mittag-Leffler functions and Laplace transforms. These functions are significant tools in attaining the results of fractional integrals and differential equations.

Keywords: fractional calculus, fractional integrals, fractional differential equations, Mittag-Leffler functions, Laplace transform.

Sumário

1	Introdução	3
2	A integral fracionária	5
2.1	Definições	5
2.2	Propriedades	6
2.3	Exemplos	10
3	As derivadas fracionárias	13
3.1	Definição de Riemann-Liouville	13
3.2	Definição de Caputo [3]	18
4	As equações integrais fracionárias	23
4.1	O problema de Abel: Equação integral de Abel do primeiro tipo	23
4.2	Aplicações das equações integrais de Abel	29
5	As equações diferenciais fracionárias	31
5.1	Primeiro caso	31
5.2	Segundo caso	35
6	Conclusões	43
A	A transformada de Laplace e o teorema da convolução	45
A.1	Transformada de Laplace	45
A.2	Propriedades	45
A.3	A inversão da transformada de Laplace	47
A.4	Propriedades das transformadas inversas de Laplace	47
A.5	Convoluções	48
B	A função gama e a função beta	50
B.1	Função gama: definições e propriedades	50
B.2	Função beta	51

C	Solução da equação de fluxo de calor	52
D	A função de Mittag-Leffler	55
D.1	Definições	55
D.2	Propriedades	56
D.3	Função espectral	57

Capítulo 1

Introdução

O conceito de integração e diferenciação de ordens não inteiras, o cálculo fracionário, é quase tão antigo quanto o cálculo usual de derivadas e integrais de ordens inteiras [4]. A primeira menção foi em 1695, quando o Marquês de L'Hôpital (★ 1661 - † 1704) escreveu uma carta a Leibniz (★ 1646 - † 1716), e usando a notação de Leibniz para derivadas, $\frac{d^n y}{dx^n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, sugeriu que $n = \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}.$$

Outras citações de cálculo fracionário, em um diferente contexto, são feitas, por exemplo, por Euler (★ 1707 - † 1783) em 1730, Lagrange (★ 1736 - † 1813) em 1772, Laplace (★ 1749 - † 1827) em 1812 e Lacroix (★ 1765 - † 1843), que em 1819 em seu trabalho *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* [6], dedica duas páginas ao cálculo fracionário e mostra que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

A seguir, vêm as citações do cálculo fracionário de Fourier (★ 1768 - † 1830) em 1822, Liouville (★ 1809 - † 1882), que em 1832 estendeu os resultados obtidos por Lacroix em seu trabalho *Mémoire sur le Calcul des Différentielles à Indices Quelconques*, usando a noção de função gama [6]. Riemann (★ 1826 - † 1866) e Liouville em 1876 no *Versuch einer Auffassung der Integration und Differentiation* conseguiram derivar fracionalmente um monômio com qualquer expoente [6].

Porém, o primeiro trabalho dedicado exclusivamente ao cálculo fracionário foi publicado em 1974 por Oldham e Spanier e intitulado *The Fractional Calculus*.

Durante todo este tempo o cálculo fracionário era um assunto exclusivamente estudado por matemáticos. Porém nas últimas décadas muitos autores mostraram que o cálculo fracionário é adequado para a descrição de propriedades de materiais reais, por exemplo, polímeros [5].

A partir do século XX começaram inúmeras publicações sobre o cálculo fracionário. Até então poucos trabalhos a respeito do tema foram publicados. Devido a isto, o cálculo fracionário foi considerado um ramo “novo” da física e da matemática aplicada, sendo uma ferramenta muito útil para alguns resultados importantes.

Buscando um conhecimento relacionado ao tema, este trabalho consiste em estudar as definições e fundamentos dos operadores integral e derivada fracionários, bem como na apresentação e alguns resultados das equações diferenciais e integrais fracionárias.

Primeiramente, será definida a integral de ordem fracionária, proposta por Riemann e Liouville e suas principais propriedades, para então definir as derivadas fracionárias, tanto na representação de Riemann-Liouville, quanto na representação de Caputo, e então mostrar as propriedades das derivadas fracionárias. Alguns exemplos de derivadas e integrais fracionárias de uma função serão mostrados, para comparar com o resultado de derivadas e integrais clássicas. Esses exemplos terão uma representação gráfica a fim de mostrar o comportamento dessas novas funções. As funções utilizadas neste trabalho como exemplo são todas funções definidas somente para variáveis positivas.

Com essas operações de integração e derivação fracionária bem definidos, iniciar-se-á o estudo das equações integrais fracionárias e equações diferenciais fracionárias. Esses casos também serão ilustrados com alguns exemplos e gráficos para se ter uma idéia do comportamento das soluções de equações integrais e diferenciais fracionárias. Nestes casos, as soluções apresentadas serão funções do tempo, e portanto, com a variável definida para todos os reais positivos, mais o zero.

Para retomar os conceitos fundamentais utilizados durante o trabalho, foi adicionado um apêndice. Por diversas vezes durante o trabalho serão utilizados os resultados encontrados no apêndice. Exemplos de ferramentas que se encontram no apêndice são as transformadas de Laplace, funções beta, gama e de Mittag-Leffler, função espectral, teorema da convolução, dentre outras.

Capítulo 2

A integral fracionária

A integral fracionária definida por Riemann e Liouville será o ponto de partida para o estudo das derivadas e equações diferenciais fracionárias consideradas neste trabalho.

2.1 Definições

Define-se a integral fracionária de ordem α , onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de $f(t)$ como sendo [3]

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Tal definição, por Riemann e Liouville, é uma generalização da fórmula de Cauchy para determinar a n -ésima primitiva de uma função. A fórmula de Cauchy é definida como

$$J^n f(t) := \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

com $n \in \mathbb{N}$. A generalização de $n \in \mathbb{N}$ para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, e assim definindo que a integral de ordem α , é a substituição da potência de $n-1$ para $\alpha-1$ no termo $(t - \tau)$ na integral e a substituição de $(n-1)!$ para a função gama.

Define-se também o operador integral fracionária $J^\alpha f(t)$ para $\alpha = 0$ como sendo

$$J^0 f(t) := \mathbb{I}f(t) = f(t), \quad (2.3)$$

onde \mathbb{I} é o operador identidade.

2.2 Propriedades

É possível mostrar que

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}, \quad (2.4)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \geq 0$, utilizando a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville. Ou seja, deve-se ter que

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi \right] d\tau \quad (2.5)$$

é igual a uma expressão da forma

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) d\tau = J^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.6)$$

Reescrevendo (2.5)

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi d\tau. \quad (2.7)$$

É preciso fazer uma mudança no intervalo de integração da segunda integral, para que ambas resultem em funções da mesma variável (no caso, t). Com essa mudança, (2.7) fica

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_\xi^t (\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) d\xi d\tau. \quad (2.8)$$

Com isso é possível fazer manipulações algébricas entre os elementos pertencentes às duas integrais, ou seja, é possível escrever (2.8) como

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\xi)^{\beta-1} d\tau. \quad (2.9)$$

Com a mudança de variável $u = \tau - \xi$, que implica em $\tau = u + \xi$ e $d\tau = du$, e com a mudança do intervalo de integração: quando $\tau = \xi$, $u = 0$; quando $\tau = t$, $u = t - \xi$, escreve-se (2.9) como

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^{t-\xi} (t-u+\xi)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du. \quad (2.10)$$

Agora, fazendo $s = \frac{u}{(t-\xi)}$, que implica em $u = s(t - \xi)$ e $du = (t - \xi)ds$. Nesse caso, os novos intervalos de integração da segunda integral serão tais que quando $u = 0$, $s = 0$; e quando $u = t - \xi$, $s = 1$. E então (2.10):

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 [t - s(t - \xi) + \xi]^{\alpha-1} [s(t - \xi)]^{\beta-1} (t - \xi) ds. \quad (2.11)$$

Reagrupando os termos da segunda integral em (2.11),

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 [t - st + s\xi + \xi]^{\alpha-1} [s(t - \xi)]^{\beta-1} (t - \xi) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 [(t - \xi)(1 - s)]^{\alpha-1} s^{\beta-1} (t - \xi)^{\beta-1} (t - \xi) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 (t - \xi)^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} (t - \xi)^{\beta-1} (t - \xi) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 (t - \xi)^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1} (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ J^\alpha J^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) d\xi \int_0^1 (t - \xi)^{\alpha+\beta-1} (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds. \quad (2.12) \end{aligned}$$

O termo $(t - \xi)^{\alpha+\beta-1}$ em (2.12) é constante com relação à variável s . Então,

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi) (t - \xi)^{\alpha+\beta-1} d\xi \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds. \quad (2.13)$$

De acordo com (B.4), (2.13) fica

$$J^\alpha J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{\alpha+\beta-1} d\xi \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (2.14)$$

que simplificando resulta em (2.6):

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^{\alpha+\beta-1} d\xi \quad (2.15)$$

É possível também encontrar uma regra de integração fracionária para um monômio genérico t^γ . O primeiro cuidado que se deve ter é que γ deve ser maior que -1 , pois t^{-1} não é integrável em $t = 0$, que faz parte do intervalo de integração da definição da integral fracionária. Primeiramente, seja $\gamma \in \mathbb{N}$. Aplicando J^α em $f(t) = t^\gamma$:

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\gamma d\tau. \quad (2.16)$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\gamma &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{-\tau^\gamma (t-\tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^t \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t -\frac{(t-\tau)^\alpha}{(\alpha)} (\gamma-1) \tau^{\gamma-1} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\gamma}{\alpha} \int_0^t (t-\tau)^\alpha \tau^{\gamma-1} d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes novamente:

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\gamma &= \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)\alpha} \left[-\frac{\tau^{\gamma-1} (t-\tau)^{\alpha+1}}{\alpha} \Big|_0^t \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} (\gamma-1) \tau^{\gamma-2} d\tau \right] \\ &= \frac{\gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+1} \tau^{\gamma-2} d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes outra vez:

$$\begin{aligned} J^\alpha t^\gamma &= \frac{\gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)} \left[-\frac{\tau^{\gamma-2} (t-\tau)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)} \Big|_0^t \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t -\frac{(t-\tau)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)} (\gamma-2) \tau^{\gamma-3} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Para γ integrações, a expressão anterior fica

$$\begin{aligned}
J^\alpha t^\gamma &= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)\dots}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots} \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+(\gamma-1)} \tau^{\gamma-\gamma} d\tau \\
&= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)\dots}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots} \\
&\quad \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\gamma-1} d\tau.
\end{aligned}$$

Integrando novamente:

$$\begin{aligned}
J^\alpha t^\gamma &= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)\dots}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots} \left[-\frac{(t-\tau)^{\alpha-\gamma}}{(\alpha-\gamma)} \Big|_0^t \right] \\
&= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\dots 2.1}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\gamma)} t^{\alpha+\gamma} \\
&= \frac{\gamma!}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} t^{\alpha+\gamma} \\
J^\alpha t^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} t^{\gamma+\alpha}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

A equação (2.17) será usada adiante para ilustrar o comportamento de integrais fracionárias em comparação com resultados de integrais clássicas já conhecidos.

A única restrição que a expressão acima exige é que $\gamma+1+\alpha > 0$ em $\Gamma(\gamma+1+\alpha)$, já que a função gama diverge para valores negativos, como pode ser observado do gráfico da função gama¹. Tal condição será satisfeita para qualquer $\gamma > -1$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$J^\alpha f(t)$ também pode ser escrito como a convolução de uma função específica com $f(t)$. Tal função é definida como

$$\Phi_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2.18}$$

ou seja,

$$\Phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = J^\alpha f(t). \tag{2.19}$$

¹Ver Apêndice B

Como base nesta forma alternativa de escrever $J^\alpha f(t)$, é mais fácil de encontrar a transformada de Laplace² da integral de ordem fracionária de uma função.

A transformada de Laplace será útil na resolução de equações integrais e diferenciais fracionárias. Aplicando a transformada em $J^\alpha f(t)$ definido em (2.19):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\} &= \mathcal{L}\{\Phi_\alpha * f(t)\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1} * f(t)\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{f(t)\},\end{aligned}$$

onde foi usada a propriedade da transformada de Laplace da convolução de funções.

A transformada de Laplace de $t^{\alpha-1}$ é

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}.$$

Seja a transformada de Laplace de $f(t)$ representada por $\tilde{f}(s)$. Então,

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \tilde{f}(s),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t)\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s^\alpha}, \quad (2.20)$$

que é o resultado desejado, encontrado em *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, Pre-print* de 2008 (Referência [3]).

2.3 Exemplos

Considere a função $f(t) = t^2$. Como ilustração das integrais fracionárias, serão calculadas duas integrais clássicas e duas de ordens fracionárias. Para J^1 e J^2 será usada diretamente a definição (2.2) e para $J^{\frac{1}{2}}$ e $J^{\frac{3}{2}}$ o resultado (2.17). Na sequência, um gráfico ilustrará o comportamento dos resultados encontrados.

²Ver Apêndice A

A integral “primeira” de $f(t)$ é

$$\begin{aligned}
 J^1 f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t (t - \tau)^{1-1} \tau^2 d\tau \\
 &= \int_0^t \tau^2 d\tau \\
 J^1 f(t) &= \frac{t^3}{3}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

A integral “segunda” é

$$\begin{aligned}
 J^2 f(t) &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^t (t - \tau)^{2-1} \tau^2 d\tau \\
 &= \int_0^t (t - \tau) \tau^2 d\tau \\
 J^2 f(t) &= \frac{t^4}{12}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Como era de se esperar, o operador integral fracionária de ordem $n \in \mathbb{N}$ recai na integral de Cauchy para se calcular a n -ésima primitiva de uma função, que dá resultados clássicos de integrais.

A integral de ordem $\frac{1}{2}$ de $f(t)$ fica

$$\begin{aligned}
 J^{\frac{1}{2}} t^2 &= \frac{\Gamma(2 + 1)}{\Gamma(2 + 1 + \frac{1}{2})} t^{2 + \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} t^{\frac{5}{2}} \\
 &= \frac{2!}{(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{5}{2}} \\
 &= \frac{2!}{(\frac{15}{8})\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} \\
 J^{\frac{1}{2}} t^2 &= \frac{16}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

E a integral de ordem $\frac{3}{2}$ de $f(t)$:

$$\begin{aligned}
 J^{\frac{3}{2}} t^2 &= \frac{\Gamma(2 + 1)}{(2 + 1 + \frac{3}{2})} t^{2 + \frac{3}{2}} \\
 &= \frac{2!}{(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{7}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2!}{\left(\frac{105}{16}\right)\sqrt{\pi}} t^{\frac{7}{2}} \\
J^{\frac{3}{2}} t^2 &= \frac{32}{105\sqrt{\pi}} t^{\frac{7}{2}}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

O comportamento de (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24), mais $f(t)$ é ilustrado abaixo:

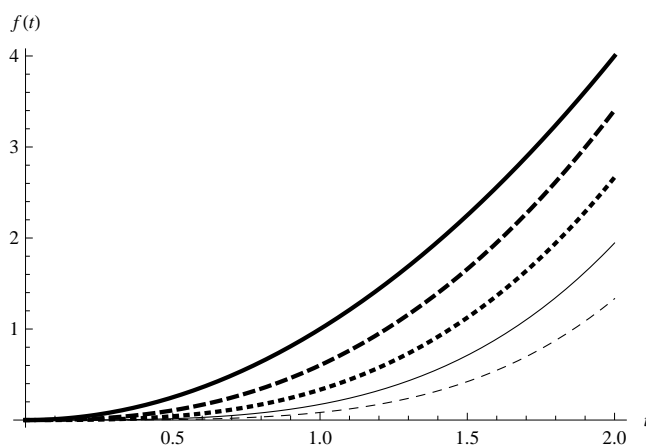


Figura 2.1: Gráfico de $J^\alpha t^2$ versus t , para diferentes valores de α .

A curva cheia mais grossa é $f(t)$, a curva tracejada mais grossa $J^{1/2}f(t)$, a curva pontilhada mais grossa é $J^1 f(t)$, a curva cheia mais fina é $J^{3/2}f(t)$ e a tracejada mais fina é $J^2 f(t)$.

Capítulo 3

As derivadas fracionárias

3.1 Definição de Riemann-Liouville

Com a integral fracionária na representação de Riemann-Liouville bem definida e mostradas as propriedades que serão utilizadas no decorrer do trabalho e com um exemplo para mostrar o comportamento de J^α , chega a hora de estudar as derivadas fracionárias. Primeiramente na representação de Riemann-Liouville e na sequência na representação de Caputo.

Definições

Considere o operador J^n , $n \in \mathbb{N}$, definido em (2.2) e seja um operador D^n , para $n \in \mathbb{N}$, como sendo a n -ésima derivada de uma função. Verifica-se que D^n é dito inverso à esquerda de J^n , mas não inverso à direita, ou seja,

$$D^n J^n = \mathbb{I}, \quad J^n D^n \neq \mathbb{I}.$$

É possível mostrar que a primeira afirmação é verdadeira, com o auxílio da relação abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{h(t)}^{g(t)} f(t, \tau) d\tau &= \frac{dg(t)}{dt} f(t, g(t)) \\ &\quad - \frac{dh(t)}{dt} f(t, h(t)) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Derivando n vezes a integral (2.2) e utilizando (3.1):

$$\begin{aligned} D^n J^n f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \right] \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \frac{d^n}{dt^n} (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!} (n-1) \int_0^t \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t-\tau)^{n-2} f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Após $n-1$ derivadas:

$$D^n J^n f(t) = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \int_0^t \frac{d}{dt} f(\tau) d\tau.$$

Novamente de (3.1)

$$D^n J^n f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

ou seja,

$$D^n J^n f(t) = f(t). \quad (3.3)$$

A segunda afirmação implica em aplicar (2.2) em $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$

$$J^n D^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \frac{d^n}{d\tau^n} f(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Usando integração por partes iteradamente em (3.4):

$$\begin{aligned}
J^n D^n f(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \left[(t-\tau)^{n-1} \left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} f(\tau) \right) \Big|_0^t \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t (n-1)(t-\tau)^{n-2} \left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} f(\tau) \right) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \left[t^{n-1} \left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \right. \\
&\quad \left. - (n-1) \int_0^t (t-\tau)^{n-2} \left(\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} f(\tau) \right) d\tau \right],
\end{aligned}$$

e assim por diante. Após $(n-1)$ integrações

$$\begin{aligned}
J^n D^n f(t) &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} f(\tau) \Big|_{\tau=0} - \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{d\tau^{n-2}} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \\
&\quad + \cdots + \int_0^t (t-\tau)^0 \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Em uma forma simplificada através de um somatório, a expressão (3.5) fica

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0}, \quad (3.6)$$

que mostra que (3.5) não é inversa à direita como (3.3). O símbolo $\frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0}$ representa a k -ésima derivada de $f(\tau)$ calculada no ponto $\tau = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como visto em (3.3), $D^n J^n = \mathbb{I}$. Então, define-se a derivada fracionária de ordem $\alpha \in \mathbb{R}^+$ como sendo

$$D^\alpha := D^m J^{m-\alpha}, \quad (3.7)$$

que seria o equivalente a substituir α por $-\alpha$ em (2.1). Porém, não é possível fazer uma substituição direta, já que $\Gamma(-\alpha)$ divergiria para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$. A solução então é escolher $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 < \alpha < m$. Desta forma, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de $f(t)$ na forma integral é definida como

$$D^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right]. \quad (3.8)$$

Da mesma forma que em (2.3), define-se

$$D^0 := \mathbb{I}, \quad (3.9)$$

onde \mathbb{I} é o operador identidade.

Propriedades

Com base nas definições anteriores é possível demonstrar algumas propriedades importantes da derivada fracionária.

Um fato importante é que, assim como no caso para derivadas e integrais de ordens naturais, a derivada fracionária também é inversa à esquerda da integral fracionária, isto é:

$$D^\alpha J^\alpha f(t) = f(t). \quad (3.10)$$

Da definição da derivada fracionária (3.7)

$$\begin{aligned} D^\alpha J^\alpha f(t) &= (D^m J^{m-\alpha}) J^\alpha f(t) \\ &= D^m J^m J^{\alpha-\alpha} f(t) \\ &= D^m J^m J^0 f(t). \end{aligned}$$

Como em (3.3), $D^m J^m = \mathbb{I}$, o que implica em (3.10).

De forma análoga à integral fracionária, é possível encontrar uma regra para derivação de polinômios. Seja um monômio qualquer t^γ , novamente com $\gamma > -1$. Então, pela definição (3.7)

$$D^\alpha t^\gamma = D^m J^{m-\alpha} t^\gamma, \quad (3.11)$$

e pela propriedade (2.17), a igualdade anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned} D^\alpha t^\gamma &= D^m \frac{\Gamma(\gamma + 1)t^{\gamma+(m-\alpha)}}{\Gamma((m-\alpha) + \gamma + 1)} \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \frac{\Gamma(\gamma + 1)t^{m+\gamma-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha + \gamma + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(m-\alpha + \gamma + 1)} \frac{d^m}{dt^m} t^{m+\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$

Após m derivadas, (3.11) fica

$$\begin{aligned} D^\alpha t^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(m-\alpha + \gamma + 1)} t^{\gamma-\alpha} \\ &\quad \times \{[m + \gamma - \alpha][(m-1) + \gamma - \alpha] \times \dots \\ &\quad \times [(m - (m-1)) + \gamma - \alpha]\} \end{aligned}$$

e então

$$D^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)t^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma - \alpha + 1)}, \quad (3.12)$$

em que foi usado

$$\begin{aligned} \Gamma(m - \alpha + \gamma + 1) &= [m + \gamma - \alpha][(m-1) + \gamma - \alpha] \times \dots \\ &\quad \times [\gamma - \alpha + 1]\Gamma(\gamma - \alpha + 1). \end{aligned}$$

Para não haver divergências em (3.12), ela será válida para $\gamma > -1$.

Diferentemente da derivada de ordem natural, a derivada fracionária de uma função constante, na definição de Riemann-Liouville, não é nula. Seja $f(t) = 1$. Pela propriedade (3.12),

$$\begin{aligned} D^\alpha 1 &= D^\alpha t^0 = \frac{\Gamma(0 + 1)}{\Gamma(0 - \alpha + 1)} t^{0-\alpha} \\ D^\alpha 1 &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \end{aligned}$$

A derivada de Riemann-Liouville será nula para $f(t) = t^{\alpha-1}$:

$$\begin{aligned} D^\alpha t^{\alpha-1} &= \frac{\Gamma(\alpha - 1 + 1)}{\Gamma(\alpha - 1 + 1 - \alpha)} t^{\alpha-1-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha) t^{-1}}{\Gamma(0)}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) &\rightarrow +\infty, \\ D^\alpha t^{\alpha-1} &= 0, \end{aligned}$$

o que mostra o resultado desejado.

Da mesma forma que para a derivada usual de uma função, também é possível calcular a transformada de Laplace de $D^\alpha f(t)$. Seja

$$D^\alpha f(t) = D^m J^{m-\alpha} f(t), \quad (3.13)$$

e

$$J^{m-\alpha} f(t) = g(t). \quad (3.14)$$

Então de (3.13) e (3.14)

$$D^\alpha f(t) = D^m g(t). \quad (3.15)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (3.15):

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{D^m g(t)\}. \quad (3.16)$$

Aplicando a transformada de Laplace à m -ésima derivada de $f(t)$ ¹, a igualdade (3.16) fica

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^m \tilde{g}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left. \frac{d^k}{dt^k} g(t) \right|_{t=0}, \quad (3.17)$$

onde $\tilde{g}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Substituindo (3.14) em (3.17):

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^m \mathcal{L}\{J^{m-\alpha} f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left. \frac{d^k}{dt^k} [J^{m-\alpha} f(t)] \right|_{t=0}.$$

¹Ver Apêndice A, propriedade (A.3)

A transformada de Laplace de $J^\alpha f(t)$, como vista no Capítulo 2 (propriedade (2.20)), é $\tilde{f}(s)/s^\alpha$. Então, $\mathcal{L}\{J^{m-\alpha}f(t)\} = \tilde{f}(s)/s^{m-\alpha}$, e assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} &= s^m \frac{\tilde{f}(s)}{s^{m-\alpha}} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \frac{d^k}{dt^k} [J^{m-\alpha}f(t)] \Big|_{t=0} \\ \mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} &= s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \frac{d^k}{dt^k} [J^{m-\alpha}f(t)] \Big|_{t=0}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

E desta forma, escreve-se a transformada de Laplace da derivada fracionária de $f(t)$ na representação de Riemann-Liouville.

Exemplos

Novamente considere $f(t) = t^2$. A primeira e a segunda derivadas são, respectivamente, $D^1 f(t) = \frac{d}{dt} t^2 = 2t$ e $D^2 f(t) = 2$.

$D^\alpha f(t)$ para $\alpha = \frac{1}{2}$ usando (3.12) fica

$$\begin{aligned}D^{\frac{1}{2}} t^2 &= \frac{\Gamma(2+1)t^{2-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} \\ &= \frac{8}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Para $\alpha = \frac{3}{2}$, novamente usando (3.12):

$$\begin{aligned}D^{\frac{3}{2}} t^2 &= \frac{\Gamma(2+1)t^{2-\frac{3}{2}}}{\Gamma(2-\frac{3}{2}+1)} \\ &= 4 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

No gráfico seguinte $f(t) = t^2$ é representada pela curva cheia mais grossa; (3.19) a tracejada mais grossa; a curva pontilhada mais grossa é $D^1 t^2 = 2t$; a curva cheia mais fina é (3.20); a curva tracejada mais fina é o resultado de $D^2 t^2$.

3.2 Definição de Caputo [3]

Uma outra definição conhecida para a derivada fracionária foi introduzida por Michele Caputo, professor da *Università di Roma "La Sapienza"*. Tal operador é definido como

$$D_*^\alpha f(t) := J^{m-\alpha} D^m f(t), \quad (3.21)$$

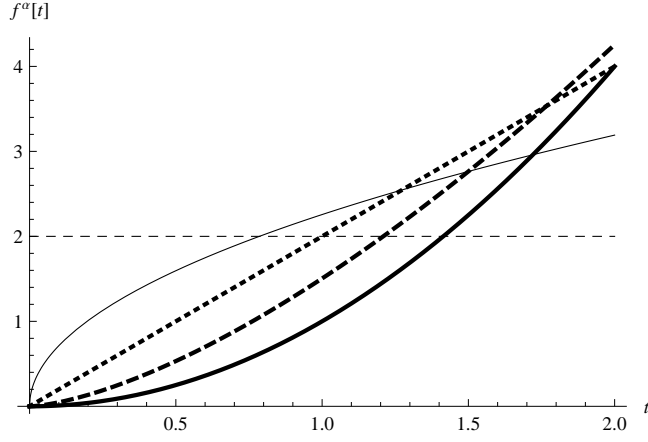


Figura 3.1: Gráfico de $D^\alpha t^2$ versus t , para diferentes valores de α .

novamente com $m \in \mathbb{N}$, satisfazendo $m - 1 < \alpha < m$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $t > 0$. A expressão (3.21) na forma da integral de Riemann-Liouville é tal que

$$D_*^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} \left(\frac{d^m}{d\tau^m} f(\tau) \right) d\tau. \quad (3.22)$$

A definição (3.22) é muito mais restritiva que (3.8), pois exige que $f(t)$ seja uma função (pelo menos) m vezes derivável.

Apesar da definição de Caputo ter certa semelhança com a derivada fracionária de Riemann-Liouville, ambas são completamente distintas. A definição (3.7), usando (3.3), é escrita como

$$D^\alpha = J^{-\alpha}, \quad (3.23)$$

que é apenas uma representação simbólica, já que não é possível escrever a integral fracionária para α negativo.

A representação de Caputo para a derivada fracionária, definida em (3.21) é

$$D_*^\alpha = J^m J^{-\alpha} D^m,$$

que não pode ser simplificada (3.23), mesmo porque $J^m D^m \neq \mathbb{I}$, como visto em (3.6).

Assim, mostra-se que

$$D^\alpha = D^m J^{m-\alpha} \neq D_*^\alpha = J^{m-\alpha} D^m. \quad (3.24)$$

É possível encontrar uma relação entre as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e Caputo. Para isto, considere (3.23) e também (3.21) escrita como

$$D_*^\alpha = D^\alpha D^m J^m. \quad (3.25)$$

Aplicando (3.25) a $f(t)$:

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha D^m J^m f(t), \quad (3.26)$$

e de acordo com (3.6) e (3.26) é tal que

$$\begin{aligned} D_*^\alpha f(t) &= D^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \right] \\ &= D^\alpha f(t) - D^\alpha \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \right] \\ \Rightarrow D^\alpha f(t) &= D_*^\alpha f(t) + D^\alpha \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \right] \\ D^\alpha f(t) &= D_*^\alpha f(t) + \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \frac{1}{\Gamma(k+1)} (D^\alpha t^k) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando propriedade (3.12):

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D_*^\alpha f(t) + \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{\Gamma(k+1)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \right) \right] \\ D^\alpha f(t) &= D_*^\alpha f(t) + \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left(\frac{d^k}{d\tau^k} f(\tau) \Big|_{\tau=0} \right) \right], \quad (3.27) \end{aligned}$$

onde (3.27) é a relação de conexão entre as derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville.

Propriedades

Para a definição de Caputo, assim como para derivadas de ordem naturais, a derivada de uma constante é nula. Seja $f(t) = 1$, então

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \underbrace{\left(\frac{d^m}{d\tau^m} (1) \right)}_{=0} d\tau,$$

o que implica em

$$D_*^\alpha(1) = 0, \quad (3.28)$$

que pode ser estendido para qualquer outra constante em relação à variável t .

A transformada de Laplace da derivada fracionária na definição de Caputo é dada por

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{J^{m-\alpha} D^m f(t)\}.$$

Para $D^m f(t) = h(t)$:

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{J^{m-\alpha} h(t)\},$$

que pela propriedade (2.20) implica em

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = \frac{\tilde{h}(s)}{s^{m-\alpha}}. \quad (3.29)$$

A função $\tilde{h}(s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{h}(s) &= \mathcal{L}\{D^m f(t)\} \\ &= s^m \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left. \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right|_{t=0}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

de acordo com (A.3). Substituindo em (3.30) em (3.29):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} &= \frac{1}{s^{m-\alpha}} \left[s^m \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} \left. \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right|_{t=0} \right] \\ &= \frac{s^m}{s^{m-\alpha}} \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^{m-1-k}}{s^{m-\alpha}} \left. \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

E portanto,

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} \left. \frac{d^k}{dt^k} f(t) \right|_{t=0}. \quad (3.31)$$

Comparando o resultado anterior com a transformada de $D^\alpha f(t)$ de (3.18), vê-se que na forma de Caputo a expressão é mais simples, visto que não é preciso calcular a k -ésima derivada de $J^{m-\alpha} f(t)$ para $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Exemplos

Novamente, seja $f(t) = t^2$. A derivada primeira e a derivada segunda serão os mesmos resultados do caso clássico, como na representação de Riemann-Liouville:

$$D_*^1 t^2 = 2t \quad (3.32)$$

$$D_*^2 t^2 = 2. \quad (3.33)$$

Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{3}{2}$, considere a fórmula de conexão (3.27) entre as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo. Note que para $\alpha = \frac{1}{2}$ o termo entre colchetes em (3.27) não existe e para $\alpha = \frac{3}{2}$ o termo entre colchetes se anula, devido à derivada de t^2 substituída no ponto $t = 0$. Portanto,

$$D_*^{\frac{1}{2}} t^2 = D^{\frac{1}{2}} t^2 = \frac{8}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \quad (3.34)$$

e

$$D_*^{\frac{3}{2}} t^2 = D^{\frac{3}{2}} t^2 = 4 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.35)$$

Graficamente, a curva cheia mais grossa é t^2 ; a curva tracejada mais grossa $D_*^{1/2} f(t)$; a curva pontilhada mais grossa é $D_*^1 f(t)$; a curva cheia mais fina é $D_*^{3/2} f(t)$ e a tracejada mais fina é $D_*^2 f(t)$:

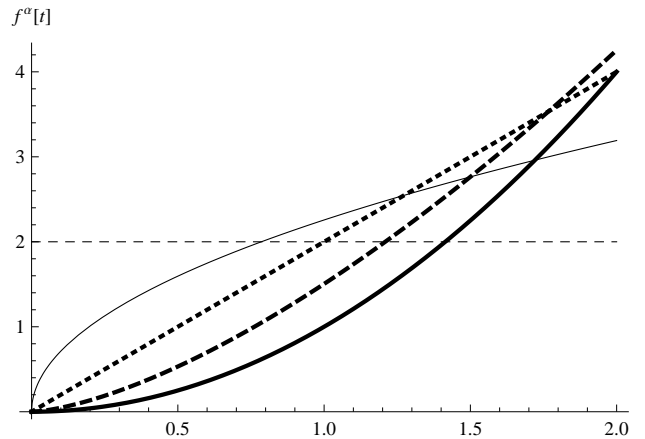


Figura 3.2: Gráfico de $D^\alpha t^2$ versus t , para diferentes valores de α .

Capítulo 4

As equações integrais fracionárias

Com as integrais e derivadas de ordens fracionárias bem definidas e suas propriedades estudadas, começar-se-á o estudo das aplicações dessas ferramentas. Primeiramente com as equações integrais fracionárias e depois as equações diferenciais fracionárias, no próximo capítulo.

4.1 O problema de Abel: Equação integral de Abel do primeiro tipo

A equação integral de Abel é dada por

$$\int_0^x \frac{\phi(\tau)d\tau}{\sqrt{x-\tau}} = f(x), \quad (4.1)$$

onde $\phi(x)$ é a função requerida e $f(x)$ uma função dada.

A equação de Abel generalizada é tal que

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (4.2)$$

e $0 < \alpha < 1$.

É possível ainda escrever (4.2) da seguinte forma:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t), \quad (4.3)$$

que é a definição da integral fracionária (2.1). Na forma de operador, e equação (4.3) fica

$$J^\alpha u(t) = f(t). \quad (4.4)$$

A solução para essa equação integral será obtida utilizando a transformada de Laplace. Aplicando a transformada de Laplace a (4.4):

$$\mathcal{L}\{J^\alpha u(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (4.5)$$

As transformadas de Laplace de $u(t)$ e $f(t)$ em (4.5) são denotadas por $\tilde{u}(s)$ e $\tilde{f}(s)$, respectivamente. De acordo com $\mathcal{L}\{J^\alpha u(t)\} = \tilde{u}(s)/s^\alpha$, a equação (4.5) fica

$$\frac{\tilde{u}(s)}{s^\alpha} = \tilde{f}(s).$$

Assim

$$\tilde{u}(s) = s^\alpha \tilde{f}(s). \quad (4.6)$$

É possível tomar dois caminhos diferentes para obter o mesmo resultado para $u(t)$. Primeiramente, considere (4.6) escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) &= s \cdot s^{\alpha-1} \tilde{f}(s) \\ &= s \left(\frac{\tilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e utilizando as propriedades de multiplicação por s às funções que se deseja conhecer a transformada inversa de Laplace¹ mais a transformada de Laplace de integrais fracionárias, como usada anteriormente, a solução para (4.7) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{s \left(\frac{\tilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}} \right)\right\} \\ u(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

De acordo com (3.8), (4.8) pode ser escrita como

$$u(t) = D^\alpha f(t). \quad (4.9)$$

¹Ver Apêndice A

É possível também escrever a relação (4.6) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(s) &= s \left(s^{\alpha-1} \tilde{f}(s) \right) - \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} \\
&= s \left(\frac{\tilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}} \right) - \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} \\
&= \frac{1}{s^{1-\alpha}} \left[s \tilde{f}(s) - f(0) \right] + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em (4.10):

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1-\alpha}} \left[s \tilde{f}(s) - f(0) \right] \right\} + f(0) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1-\alpha}} \right\}. \tag{4.11}$$

Usando a propriedade transformada de Laplace da m -ésima derivada, o teorema da convolução e a transformada de Laplace de $1/s^{1-\alpha}$

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{4.12}$$

O primeiro termo à direita da equação (4.12) é a derivada fracionária de ordem α na representação de Caputo, e assim

$$\begin{aligned}
u(t) &= D_*^\alpha f(t) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\
u(t) &= D_*^\alpha f(t) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = D^\alpha f(t). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

A igualdade (4.13) relaciona as duas maneiras de escrever o mesmo resultado para $u(t)$.

Nesse caso é mais conveniente trabalhar com (4.9), já que em (4.13) $f(t)$ precisa ter derivada e $f(0) \neq 0$ para não haver indeterminação em $u(0)$, devido ao termo $f(0)/t^\alpha$.

Exemplo

Como exemplo, suponha $f(t) = c$, onde c é uma constante e $\alpha = 1/2$. Não é possível utilizar (4.13), já que $f'(t) = 0$. Então, utilizando (4.9)

$$\begin{aligned}
u(t) &= D^\alpha f(t) \\
&= D^{\frac{1}{2}}(c) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{c}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\
&= \frac{c}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Para resolver (4.14), seja $t - \tau = \xi$, e então $d\tau = -d\xi$. Quando $\tau = 0$, $\xi = t$; e quando $\tau = t$, $\xi = 0$. Substituindo essas relações:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{c}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_t^0 -\xi^{-\frac{1}{2}} d\xi \\
 &= \frac{-c}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \left[\frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_t^0 \\
 &= \frac{-c}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \left[2(0 - t^{\frac{1}{2}}) \right] \\
 &= \frac{2c}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{c}{\sqrt{\pi} \sqrt{t}} \\
 u(t) &= \frac{c}{\sqrt{\pi t}}. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Para o caso de $c = 1$, o comportamento de $u(t)$ está representado no gráfico da Figura 4.1:

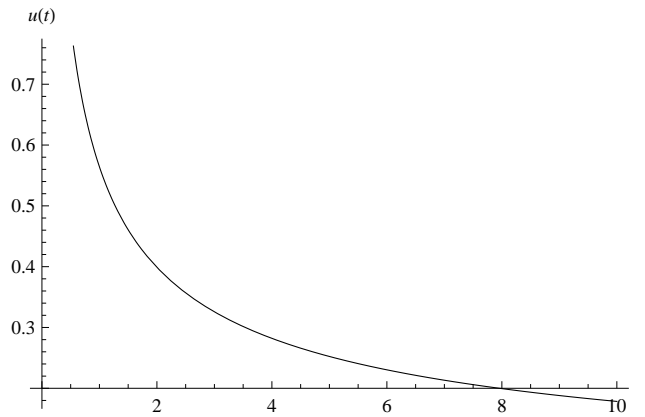


Figura 4.1: Gráfico de $u(t)$ versus t .

Equação integral de Abel do segundo tipo

A equação integral de Abel do segundo tipo é definida como

$$u(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t), \tag{4.16}$$

onde $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f(t)$ é uma função conhecida.

Em termos do operador J , a equação (4.16) fica

$$u(t) + \lambda J^\alpha u(t) = f(t). \quad (4.17)$$

O método escolhido para resolver essa equação é usando a transformada de Laplace. Então, aplicando a transformada de Laplace a (4.17)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t) + \lambda J^\alpha u(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ \mathcal{L}\{u(t)\} + \mathcal{L}\{\lambda J^\alpha u(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sejam as transformadas de Laplace de $u(t)$ e de $f(t)$, $\tilde{u}(s)$ e $\tilde{f}(s)$, respectivamente. Assim, utilizando (2.20), (4.18) fica

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) + \lambda \frac{\tilde{u}(s)}{s^\alpha} &= \tilde{f}(s) \\ \left[1 + \frac{\lambda}{s^\alpha}\right] \tilde{u}(s) &= \tilde{f}(s) \\ \left[\frac{s^\alpha + \lambda}{s^\alpha}\right] \tilde{u}(s) &= \tilde{f}(s), \end{aligned}$$

e então,

$$\tilde{u}(s) = \left[\frac{s^\alpha}{s^\alpha + \lambda}\right] \tilde{f}(s). \quad (4.19)$$

Existem três formas para encontrar $u(t)$. Primeiramente, é possível escrever (4.19) da seguinte forma:

$$\tilde{u}(s) = s \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \tilde{f}(s)\right]. \quad (4.20)$$

A função de Mittag-Leffler deve ser introduzida agora para que a mesma seja usada na resolução da equação de Abel do segundo tipo. Por ora, será apenas utilizado a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler²:

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}.$$

Então, aplicado a transformada inversa de Laplace em (4.20)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{s \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \tilde{f}(s)\right]\right\}.$$

²Propriedade (D.8)

Pela propriedade (A.13) do Apêndice A (teorema da convolução) implica em

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\tau) E_\alpha(-\lambda\tau^\alpha) d\tau. \quad (4.21)$$

O segundo modo para encontrar $u(t)$ é escrevendo (4.19) como

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) &= s \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \tilde{f}(s) \right] - f(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} + f(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \\ &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \left[s \tilde{f}(s) - f(0) \right] + f(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (4.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{u}(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \left[s \tilde{f}(s) - f(0) \right] + f(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \left[s \tilde{f}(s) - f(0) \right] \right\} \\ &\quad + f(0) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

que, de acordo com as propriedades (A.3) e (A.13) do Apêndice A e (D.8) do Apêndice D, (4.23) resulta em

$$u(t) = \int_0^t f'(t-\tau) E_\alpha(-\lambda\tau^\alpha) d\tau + f(0) E_\alpha(-\lambda\tau^\alpha), \quad (4.24)$$

onde $f'(t-\tau)$ é a derivada de $f(t')$ em $t' = t - \tau$.

E por fim, é possível escrever (4.19) como

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) &= s \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \tilde{f}(s) \right] - \tilde{f}(s) + \tilde{f}(s) \\ &= \left[s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \right] \tilde{f}(s) + \tilde{f}(s). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em (4.25)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \right] \tilde{f}(s) + \tilde{f}(s) \right\} \\ u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \right] \tilde{f}(s) \right\} + f(t) \end{aligned}$$

Pelas propriedades (A.3) e (A.13) do Apêndice A, e a relação (D.6) do Apêndice D:

$$E_\alpha(0) = 1,$$

obtém-se

$$u(t) = \int_0^t f(t - \tau) E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) d\tau + f(t), \quad (4.26)$$

onde $E'_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ é a derivada da função de Mittag-Leffler.

Dos três resultados encontrados, (4.24) tem um uso mais restrito que (4.21) e (4.26), porque necessita que $f(t)$ tenha derivada e que seja possível usar a propriedade (A.3) do Apêndice A.

4.2 Aplicações das equações integrais de Abel

Considere a equação de fluxo de calor

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (4.27)$$

onde $u = u(x, t)$ representa a temperatura, para uma barra semi-infinita ($0 < x < \infty$) analisada no intervalo de tempo $0 < t < \infty$. Os termos u_t e u_{xx} representam as derivadas parciais de $u(x, t)$ em relação a t e a derivada parcial segunda de $u(x, t)$ em relação a x , respectivamente. As condições iniciais do problema são

$$u(x, 0) = 0,$$

para $0 < x < \infty$, e

$$-u_x(0, t) = p(t).$$

A solução da equação (4.27), resolvida no Apêndice C, é dada por (C.12):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{p(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} e^{-x^2/[4(t-\tau)]} d\tau. \quad (4.28)$$

Em $u(0, t) := \phi(t)$, (4.28) é tal que

$$u(0, t) := \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{p(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau. \quad (4.29)$$

A equação (4.29) de acordo com a definição (2.1) do Capítulo 3, pode ser escrita como

$$\phi(t) = J^{\frac{1}{2}}p(t). \quad (4.30)$$

Para resolver (4.30) aplica-se o operador D^α , com $\alpha = \frac{1}{2}$ e lembrando de (3.10), $D^\alpha J^\alpha = \mathbb{I}$,

$$p(t) = D^\alpha \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau. \quad (4.31)$$

Como exemplo, seja $\phi_1(t) = 1$ e $\phi_2(t) = t$ em (4.31). Então, para o primeiro caso

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} [-2\sqrt{t-\tau}] \Big|_0^t \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \sqrt{t} \\ p_1(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Agora, para o caso de $\phi_2(t) = t$ em (4.31):

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[-\frac{2}{3} \sqrt{t-\tau} (2t+\tau) \right] \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left[\frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \right] \\ p_2(t) &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Capítulo 5

As equações diferenciais fracionárias

Depois de visto alguns casos de equações integrais fracionárias, chega a hora do estudo das equações diferenciais fracionárias. O primeiro caso trata estas equações como equações diferenciais homogêneas, conhecidas do cálculo clássico. O segundo caso trata das equações diferenciais fracionárias não-homogêneas.

5.1 Primeiro caso

Sejam as equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}u(t) + u(t) = 0 \quad (5.1)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) + v(t) = 0. \quad (5.2)$$

Estas equações têm soluções conhecidas e da forma

$$u(t) = u_0 e^{-t} \quad (5.3)$$

e

$$v(t) = v_0 \cos(t) + v_1 \sin(t), \quad (5.4)$$

com u_0 , v_0 e v_1 constantes determinadas pelas condições iniciais do problema.

Suponha agora que as derivadas, primeira de $u(t)$ e segunda de $v(t)$, são substituídas por derivadas fracionárias de ordem $0 < \alpha \leq 1$ e $1 < \beta \leq 2$ para

as equações (5.1) e (5.2), respectivamente. Com isso, tem-se duas equações diferenciais de ordens α e β . Para as derivadas fracionárias na representação de Caputo, as equações ficam

$$D_*^\alpha u(t) + u(t) = 0 \quad (5.5)$$

e

$$D_*^\beta v(t) + v(t) = 0. \quad (5.6)$$

As soluções das equações (5.5) e (5.6) serão obtidas utilizando a transformada de Laplace.

Solução para $0 < \alpha \leq 1$

Aplicando a transformada de Laplace a (5.5)

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha u(t)\} + \mathcal{L}\{u(t)\} = 0. \quad (5.7)$$

Com $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$ e com a transformada de Laplace aplicada a derivadas fracionárias na representação de Caputo¹, a equação (5.7) fica

$$\begin{aligned} s^\alpha \tilde{u}(s) - s^{\alpha-1} u(0) + \tilde{u}(s) &= 0 \\ \tilde{u}(s)[s^\alpha + 1] &= u(0)s^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

de onde se tem

$$\tilde{u}(s) = u(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}. \quad (5.8)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (5.8)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} = u(0) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}\right\} \quad (5.9)$$

De acordo com a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler, dada no Apêndice D, a equação (5.9) fica

$$u(t) = u_0 E_\alpha(-t^\alpha),$$

ou seja,

$$u(t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (5.10)$$

¹Mostrada no Capítulo 3.

Para $u_0 = 1$ e para α assumindo os valores $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1, o comportamento gráfico de (5.10) está representado na Figura 5.1. A curva que representa $\alpha = \frac{1}{4}$ é a de linha cheia mais fina; $\alpha = \frac{1}{2}$ é curva tracejada; $\alpha = \frac{3}{4}$ é a pontilhada; $\alpha = 1$ é a mais cheia, que recai na solução (5.3) da equação (5.1):

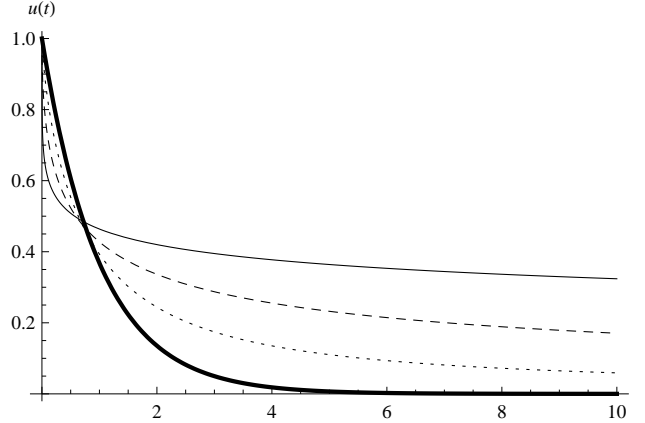


Figura 5.1: Gráfico de $u(t)$ versus t para diferentes α , com $0 < \alpha < 1$.

Solução para $1 < \beta \leq 2$

Agora, aplicando a transformada de Laplace a equação (5.6):

$$\mathcal{L}\{D_*^\beta v(t)\} + \mathcal{L}\{v(t)\} = 0. \quad (5.11)$$

Com $\mathcal{L}\{v(t)\} = \tilde{v}(s)$ e usando a propriedade da transformada de Laplace das derivadas fracionárias na representação de Caputo, (5.11) fica

$$\begin{aligned} s^\beta \tilde{v}(s) - \sum_{k=0}^1 s^{\beta-1-k} \left. \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right|_{t=0} + \tilde{v}(s) &= 0 \\ \tilde{v}(s)[s^\beta + 1] - s^{\beta-1}v(0) - s^{\beta-2}v'(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s)[s^\beta + 1] &= v(0)s^{\beta-1} + v'(0)s^{\beta-2} \\ \tilde{v}(s) &= v(0) \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1} + v'(0) \frac{s^{\beta-2}}{s^\beta + 1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (5.12), considerando $v(0) = v_0$ e $v'(0) = v_1$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{v}(s)\} = v_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1}\right\} + v_1 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-2}}{s^\beta + 1}\right\}. \quad (5.13)$$

De acordo com as propriedades de transformadas de Laplace de funções de Mittag-Leffler do Apêndice D, (5.13) fica

$$v(t) = v_0 E_\beta(-t^\beta) + v_1 t E_{\beta,2}(-t^\beta),$$

ou seja,

$$v(t) = v_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^\beta)^n}{\Gamma(\beta n + 1)} + v_1 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^\beta)^n}{\Gamma(\beta n + 2)}. \quad (5.14)$$

Uma representação gráfica para (5.14) é a Figura 5.2, onde $v_0 = 1$ e $v_1 = 1$.

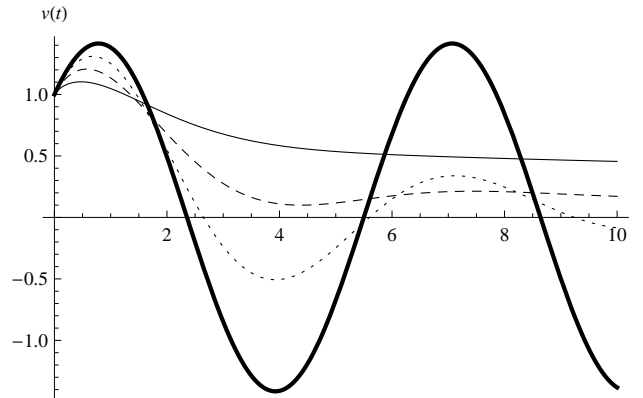


Figura 5.2: Gráfico de $v(t)$ versus t para diferentes valores de β entre 1 e 2.

Os valores escolhidos para β foram $\beta = \frac{5}{4}$ cujo gráfico é representado pela curva cheia mais fina; $\beta = \frac{3}{2}$ a curva tracejada; $\beta = \frac{7}{4}$ a curva pontilhada; $\beta = 2$ a curva cheia mais grossa, que recai na solução (5.4).

Note que para valores de β entre 1 e 2, o comportamento se assemelha a uma oscilação amortecida. Era de esperar tal comportamento, visto que em (5.10) a solução quando $\alpha = 1$ cai exponencialmente e para $\beta = 2$ a solução é completamente oscilatória. Logo, para valores das derivadas fracionárias entre 1 e 2, a solução deveria estar entre os dois casos.

5.2 Segundo caso

Suponha agora que se tenha equações do tipo

$$\frac{d}{dt}u(t) + u(t) = p(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}u(t) + v(t) = q(t),$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas com $t \geq 0$. As soluções são, respectivamente,

$$u(t) = u_0 e^{-t} + \int_0^t p(t - \tau) e^{-\tau} d\tau \quad (5.15)$$

e

$$v(t) = v_0 \cos(t) + v_1 \sin(t) + \int_0^t q(t - \tau) \sin(\tau) d\tau. \quad (5.16)$$

Da mesma forma que anteriormente, é possível generalizar as equações anteriores para equações diferenciais fracionárias. A saber:

$$D_*^\alpha u(t) + u(t) = p(t) \quad (5.17)$$

e

$$D_*^\beta v(t) + v(t) = q(t), \quad (5.18)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $1 < \beta < 2$.

Novamente, a técnica usada para resolver as equações (5.17) e (5.18) será usando a transformada de Laplace.

Solução para o caso $0 < \alpha < 1$

Então, aplicando a transformada à equação (5.17):

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha u(t)\} + \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{p(t)\}. \quad (5.19)$$

Utilizando (3.31) para $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$ e $\mathcal{L}\{p(t)\} = \tilde{p}(s)$, (5.19) fica

$$\begin{aligned} s^\alpha \tilde{u}(s) - s^{\alpha-1} u(0) + \tilde{u}(s) &= \tilde{p}(s) \\ \tilde{u}(s) [s^\alpha + 1] &= s^{\alpha-1} u(0) + \tilde{p}(s), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\tilde{u}(s) = u(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} + \frac{\tilde{p}(s)}{s^\alpha + 1}. \quad (5.20)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace à (5.20):

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} = u(0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}(s)}{s^\alpha+1}\right\},$$

que de acordo com as transformadas de Laplace da função de Mittag-Leffler e de sua derivada, além do teorema da convolução e tomando $u(0) = c_0$:

$$u(t) = c_0 E_\alpha(-t^\alpha) - \int_0^t p(t-\tau) E'_\alpha(-t^\alpha) d\tau.$$

É possível ainda escrever a solução para $u(t)$ usando a função espectral. De acordo com as propriedades da função espectral do Apêndice D e usando a notação

$$u_0(t) = \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,0}(r) dr, \quad u_\delta(t) = - \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,-1}(r) dr,$$

a solução para $u(t)$ é tal que

$$u(t) = c_0 u_0(t) + \int_0^t p(t-\tau) u_\delta(t) d\tau. \quad (5.21)$$

Com caráter ilustrativo, é apresentado na Figura 5.3 o gráfico de $K_{\alpha,0}(r)$:

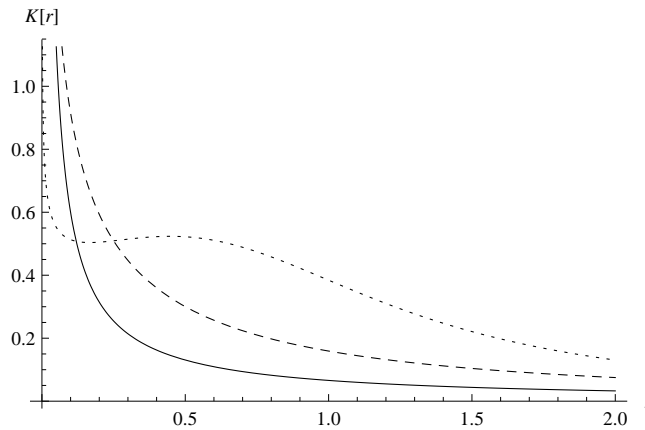


Figura 5.3: Gráfico de $K_{\alpha,0}(r)$ versus r , para diferentes valores de α .

Onde a curva cheia representa $K_{\alpha,0}(r)$ quando $\alpha = \frac{1}{4}$; a curva tracejada, quando $\alpha = \frac{1}{2}$; para $K_{\alpha,0}(r)$ com $\alpha = \frac{3}{4}$ a curva pontilhada representa o comportamento da função.

E para a função $-K_{\alpha,-1}(r)$, a curva cheia representa o gráfico de quando $\alpha = \frac{1}{4}$; para $\alpha = \frac{1}{2}$ o gráfico obtido é representado em linhas tracejadas; a curva pontilhada representa o gráfico para $\alpha = \frac{3}{4}$, na Figura 5.4.

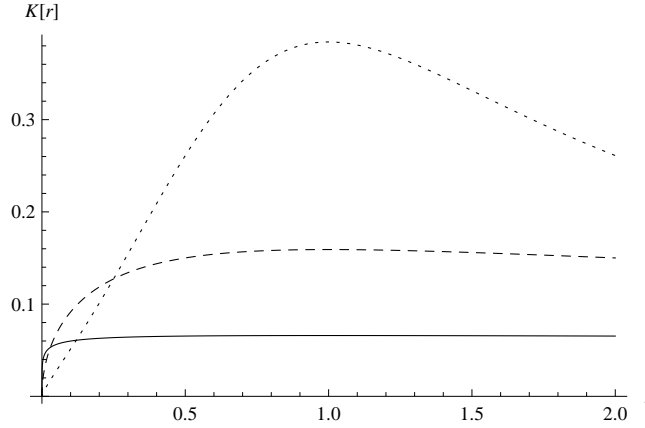


Figura 5.4: Gráfico de $-K_{\alpha,-1}(r)$ versus r , para diferentes valores de α .

Solução para o caso $1 < \beta < 2$

Agora, aplicando a transformada de Laplace à equação (5.18) e novamente utilizando (3.31):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_*^\beta v(t)\} + \mathcal{L}\{v(t)\} &= \mathcal{L}\{q(t)\} \\ s^\beta \tilde{v}(s) - s^{\beta-1}v(0) - s^{\beta-2}v'(0) + \tilde{v}(s) &= \tilde{q}(s) \\ \tilde{v}(s) [s^\beta + 1] &= s^{\beta-1}v(0) + s^{\beta-2}v'(0) + \tilde{q}(s). \end{aligned}$$

Para $v(0) = c_0$ e $v'(0) = c_1$

$$\tilde{v}(s) = c_0 \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1} + c_1 \frac{s^{\beta-2}}{s^\beta + 1} + \frac{\tilde{q}(s)}{s^\beta + 1}. \quad (5.22)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em (5.22):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{v}(s)\} &= c_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1}\right\} \\ &+ c_1 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-2}}{s^\beta + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{q}(s)}{s^\beta + 1}\right\}. \end{aligned}$$

Usando as relações de transformadas de Laplace das funções de Mittag-Leffler e derivadas, a solução para $v(t)$ é tal que

$$v(t) = c_0 E_\beta(-t^\beta) + c_1 t E_{\beta,2}(-t^\beta) - \int_0^t q(t-\tau) E'_\beta(-t^\beta) d\tau. \quad (5.23)$$

Da mesma forma que foi feito para o caso $0 < \alpha < 1$, é possível escrever a solução $v(t)$ em termos da função espectral. Porém, além da função espectral como em (5.21), deve-se levar em conta os pólos presentes à solução quando $1 < \beta < 2$.

A solução em termos da função espectral para $v(t)$ é obtida de modo análogo ao caso anterior, usando as propriedades do Apêndice D. Note que para tal, ao invés de usar (D.9), o segundo termo de (5.22) foi escrito como

$$c_0 \frac{1 s^\beta - 1}{s s^\beta + 1}.$$

Então de (A.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_0 s^\beta - 1}{s s^\beta + 1} \right\} &= c_0 \int_0^t E_\beta(-\tau^\beta) d\tau. \\ &= c_0 J E_\beta(-t^\beta). \end{aligned} \quad (5.24)$$

De acordo com o Apêndice D, a integral de $E_\beta(-t^\beta)$, $1 < \beta < 2$ será a contribuição da integral da função espectral, mais a parte devido aos pólos. Então, o resultado obtido para (5.24) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_0 s^\beta - 1}{s s^\beta + 1} \right\} &= c_0 \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,1}(r) dr \\ &+ c_0 \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) - \frac{\pi}{\beta} \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

O último termo de (5.23) contém a derivada da função de Mittag-Leffler, que para $0 < \alpha < 1$ era a integral da função espectral $K_{\alpha,-1}(r)$. Analogamente, para $1 < \beta < 2$, a solução apresentará uma função do tipo $K_{\beta,-1}(r)$, mais a derivada da contribuição dos polos existentes em $1 < \beta < 2$. Então, de (D.18) e novamente (D.21), agora para $k = -1$

$$\begin{aligned} E'_\beta(-t^\beta) &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,-1}(r) dr \\ &+ \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) + \frac{\pi}{\beta} \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Como para o caso $0 < \alpha < 1$, usando a notação encontrada em [3], sejam (D.21), (5.25) e (5.26) escritas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,0}(r) dr + \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos(t \sin(\pi/\beta)), \\ v_1(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,1}(r) dr + \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) - \frac{\pi}{\beta} \right], \\ v_\delta(t) &= - \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,-1}(r) dr - \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) + \frac{\pi}{\beta} \right]. \end{aligned}$$

Daí, a solução (5.23) é tal que

$$v(t) = c_0 v_0(t) + c_1 v_1(t) + \int_0^t q(t-\tau) u_\delta(\tau) d\tau. \quad (5.27)$$

A seguir, gráficos das funções $K_{\beta,0}(r)$, $K_{\beta,1}(r) = JK_{\beta,0}(r)$, $K_{\beta,-1}(r) = DK_{\beta,0}(r)$ e de $g_\beta(t)$, $Jg_\beta(t)$ e $Dg_\beta(t) = J^{-1}g_\beta(t)$ para alguns valores de β . Para todos os gráficos, a linha cheia será para $\beta = \frac{5}{4}$, a linha tracejada será para $\beta = \frac{3}{2}$ e a linha pontilhada será para $\beta = \frac{7}{4}$.

Primeiramente os gráficos de funções espectrais para $1 < \beta < 2$:

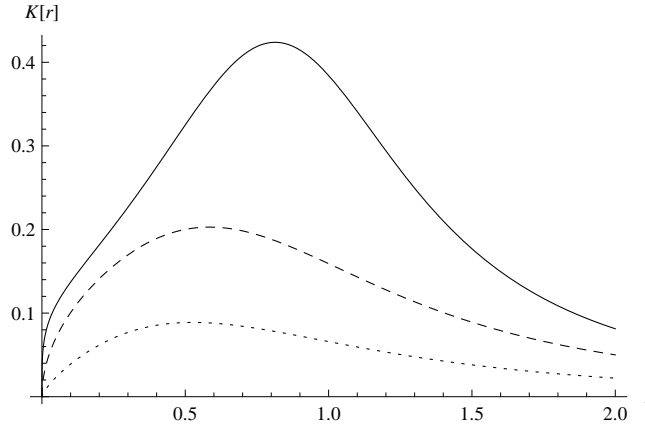


Figura 5.5: Gráfico de $K_{\beta,0}(r)$ versus r , para diferentes valores de β .

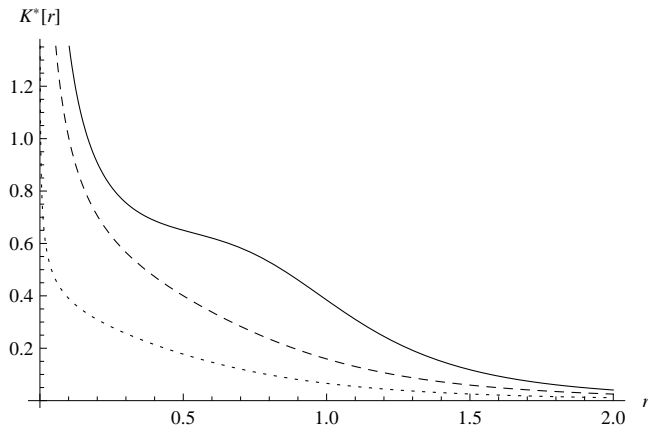


Figura 5.6: Gráfico de $K_{\beta,1}(r) = JK_{\beta,0}(r)$ versus r , para diferentes β .

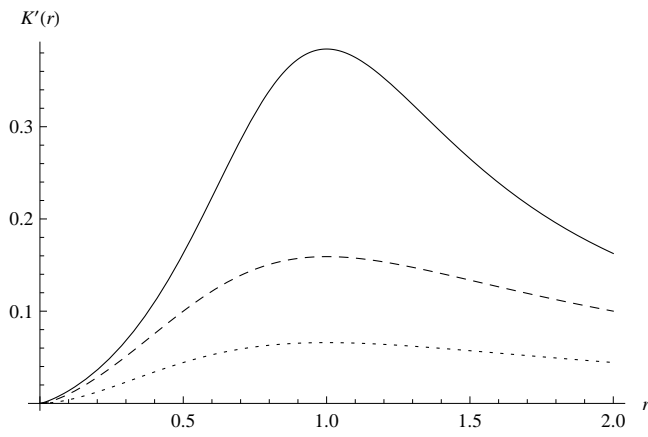


Figura 5.7: Gráfico de $K_{\beta,0}(r) = DK_{\beta,0}(r)$ versus r , para diferentes β .

E por fim, os gráficos para $g_\beta(t)$, $Jg_\beta(t)$ e $-Dg_\beta(t)$ para $1 < \beta < 2$:

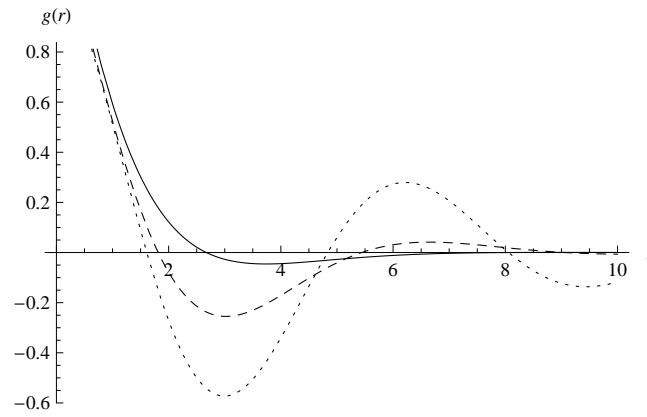


Figura 5.8: Gráfico de $g_\beta(t)$ versus t , para diferentes β .

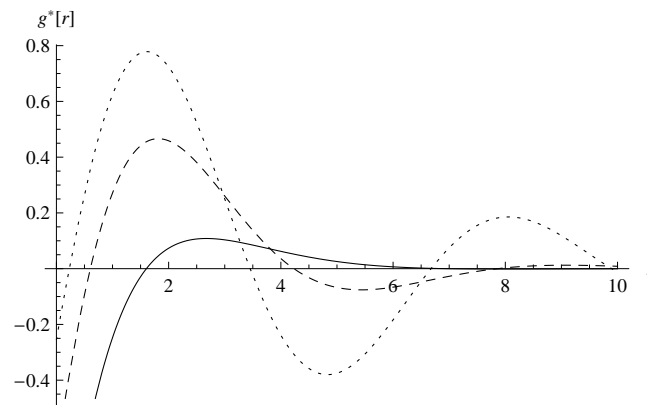


Figura 5.9: Gráfico de $Jg_\beta(t)$ versus t , para diferentes β .

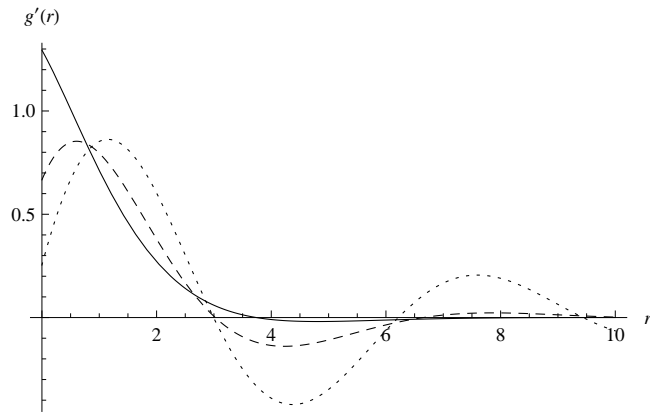


Figura 5.10: Gráfico de $-Dg_\beta(t)$ versus t , para diferentes β .

Note também que a parte da solução referente aos pólos quando $1 < \beta \leq 2$ também se assemelha a soluções do tipo oscilação amortecida, como na Figura 5.2 quando $1 < \beta \leq 2$.

Capítulo 6

Conclusões

O cálculo fracionário, apesar de ter sido descoberto na mesma época do cálculo usual, é menos estudado em comparação ao cálculo de derivadas e integrais de ordens inteiras. As propriedades da integral fracionária e das derivadas fracionárias vistas neste trabalho são de certa forma de uma fácil demonstração, bastando um conhecimento regular do cálculo usual.

Em se comparando resultados de integrais e derivadas fracionárias com as mesmas operações do cálculo usual, existem algumas diferenças, como por exemplo, as derivadas de ordem fracionárias de uma função constante na definição de Riemann-Liouville é diferente de zero, como no cálculo clássico. Já a definição de Caputo para o cálculo fracionário tem o mesmo resultado do cálculo de ordens inteiras. Então, diferentes definições de derivadas fracionárias podem ter resultados diferentes. Porém existe a relação de conexão entre a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville e Caputo. Tal relação de conexão foi demonstrada neste trabalho.

Equações integrais fracionárias também foram estudadas. Equações estas que vêm das equações integrais de Abel, com uma generalização para ordens fracionárias. Com estas equações integrais, foi resolvido como uma aplicação básica, a equação de fluxo de calor de Newton.

Em seguida, iniciou-se o estudo das equações diferenciais fracionárias. Primeiramente equações da forma de equações homogêneas (equações 5.5 e 5.6), com ordem das derivadas $0 < \alpha \leq 1$ e $1 < \beta \leq 2$. Essas equações foram resolvidas utilizando as transformadas de Laplace, onde as propriedades para as derivadas fracionárias foi discutida no Capítulo 4. Os resultados dessas equações são em termos das funções de Mittag-Leffler. Tais resultados recaem nas soluções conhecidas das equações diferenciais usuais quando $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.

Cada uma das soluções foi ilustrada com o comportamento gráfico para valores $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_3 = \frac{3}{4}$ de ordens da derivada na equação 5.5 do

Capítulo 5 e $\beta_1 = \frac{5}{4}$, $\beta_2 = \frac{3}{2}$ e $\beta_3 = \frac{7}{4}$ sendo as ordens da derivada 5.6 do Capítulo 5. Estas equações diferenciais possuem as derivadas fracionárias na definição de Caputo. A escolha foi feita porque com a derivada fracionária da definição de Caputo é possível obter “condições iniciais”, já que se trabalha diretamente com a função (e/ou sua derivada) em $t = 0$, diferentemente da derivada de Riemann-Liouville.

Por fim, as equações diferenciais fracionárias na forma de equações não-homogêneas. Como anteriormente, foram usadas a derivada fracionária na definição de Caputo e a técnica da transformada de Laplace para resolver estas equações, cujos resultados são semelhantes aos resultados para as equações diferenciais não-homogêneas do cálculo clássico: o resultado da parte homogênea mais a convolução da parte não-homogênea com uma função, que nesse caso é a derivada da função de Mittag-Leffler referente a cada um dos casos.

Uma maneira mais fácil de observar o comportamento dos resultados das equações diferenciais fracionárias é utilizando a função espectral. Usando as definições e propriedades apresentadas no Apêndice D para a função espectral, vê-se de uma melhor maneira os resultados das funções $u(t)$ e $v(t)$ estudados.

Como o cálculo fracionário, apesar da importância na Física, é pouco mencionado durante a graduação, este trabalho serviu como um grande aprendizado sobre o tema.

Apêndice A

A transformada de Laplace e o teorema da convolução

A.1 Transformada de Laplace

Considere uma função $f(t)$, para $t > 0$. A transformada de Laplace de $f(t)$ é definida por [7]

$$\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (\text{A.1})$$

com $s \in \mathbb{C}$. Como $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é uma função da variável s , também é comum usar uma notação do tipo

$$\mathcal{L}\{f(t)\} := \tilde{f}(s).$$

Nem toda $f(t)$ possui transformada de Laplace. O que garantirá que $f(t)$ terá transformada de Laplace é $f(t)$ ser contínua por pedaços, isto é, dentro de um intervalo finito, a função deve possuir um número finito de descontinuidades tais que em cada descontinuidade, os limites devem existir para todo $0 < t < \infty$. A função deve ser também é exponencial de ordem γ , que é quando a função não cresce mais rapidamente que $e^{\gamma t}$, para um certo valor de γ , quando $t \rightarrow \infty$.

A.2 Propriedades

As principais propriedades da transformada de Laplace usadas nesse trabalho estão listadas a seguir e vêm de [2] e [7]. As demonstrações foram omitidas, pois fogem do objetivo do trabalho.

Propriedade da linearidade:

Sejam c_1 e c_2 constantes quaisquer, e que $f_1(t)$ e $f_2(t)$ têm transformadas de Laplace $\tilde{f}_1(s)$ e $\tilde{f}_2(s)$, respectivamente. Então,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s). \quad (\text{A.2})$$

O resultado da propriedade anterior pode ser estendido facilmente a mais de duas funções.

Transformada de Laplace de derivadas:

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$, e $f'(t) = \frac{d}{dt}f(t)$, então tem-se a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0).$$

Este resultado pode ser generalizado para a n -ésima derivada de $f(t)$. Seja

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), n \in \mathbb{N},$$

a n -ésima derivada de $f(t)$, supondo que tal derivada exista. A transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ é

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0), \quad (\text{A.3})$$

com $f^{(k)}(0)$ sendo a k -ésima derivada de $f(t)$, calculada em $t = 0$.

Transformadas de Laplace de integrais:

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{\tilde{f}(s)}{s}. \quad (\text{A.4})$$

Multiplicação por t^n , $n \in \mathbb{N}$:

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.5})$$

onde $\tilde{f}^{(n)}(s)$ é a n -ésima derivada da transformada de Laplace de $f(t)$.

A.3 A inversão da transformada de Laplace

O processo inverso das transformadas de Laplace, ou seja, dada uma $\tilde{f}(s)$, deseja-se saber qual a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace será $\tilde{f}(s)$, é representado por

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t),$$

não é tão simples quanto a transformada de Laplace. As transformadas de Laplace de funções mais comuns estão em vários livros que tratam sobre o assunto. Então, através de consulta a essas tabelas, como em [7], é possível encontrar a função relacionada com determinada transformada de Laplace.

Existem também alguns métodos para determinar a transformada inversa de Laplace de funções cujo resultado não aparece diretamente em tabelas. Métodos comuns para calcular a transformada inversa de Laplace são o método das frações parciais, método das séries e a fórmula complexa da inversão. Exceto para o último método, é preciso conhecer previamente, com o auxílio das tabelas, por exemplo, as transformadas inversas de Laplace de funções mais comuns, já que estes métodos consistem em simplificar funções para que se assemelhem com funções com transformadas inversas conhecidas. O método da fórmula complexa da inversão é dado pela integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \tilde{f}(s) ds, \quad (\text{A.6})$$

para $t > 0$. Esse resultado também é conhecido como fórmula integral de Bromwich ou fórmula de inversão de Mellin. O número real γ é escolhido de modo que $s = \gamma$ esteja à direita de todas as singularidades (pólos, pontos de ramificação, etc.).

A.4 Propriedades das transformadas inversas de Laplace

Assim como na transformada, a transformada inversa de Laplace também têm algumas propriedades que auxiliam em manipulações matemáticas entre $f(t)$ e $\tilde{f}(s)$. São elas:

Propriedade da linearidade:

Se c_1, c_2 são constantes e $\tilde{f}_1(s), \tilde{f}_2(s)$ as transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1\tilde{f}_1(s) + c_2\tilde{f}_2(s)\} = c_1f_1(t) + c_2f_2(t). \quad (\text{A.7})$$

Transformada inversa de Laplace de derivadas:

Seja $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$, e seja $\tilde{f}^{(n)}(s)$ a n -ésima derivada da transformada de Laplace de $f(t)$. Então,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t), \quad (\text{A.8})$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Transformadas inversa de Laplace de integrais:

Seja $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \tilde{f}(\xi) d\xi\right\} = \frac{f(t)}{t} \quad (\text{A.9})$$

Multiplicação por s :

Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\tilde{f}(s)\} = f'(t). \quad (\text{A.10})$$

Divisão por s :

Se $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (\text{A.11})$$

A.5 Convoluções

A convolução entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida como

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.12})$$

Verifica-se que

$$(f * g)(t) = (g * f)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

A principal propriedade da convolução utilizada neste trabalho é o teorema da convolução para as transformadas de Laplace.

Sejam $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{g}(s)\} = g(t)$. A transformada inversa de Laplace do produto de funções $\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$ é a convolução entre $f(t)$ e $g(t)$, ou seja

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f * g)(t). \quad (\text{A.13})$$

O teorema também pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s). \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

A função gama e a função beta

B.1 Função gama: definições e propriedades

A função gama, também conhecida como função fatorial é definida como [1]:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad (\text{B.1})$$

para $\text{Re}\{n\} > 0$.

Graficamente [2], a função gama é representada por

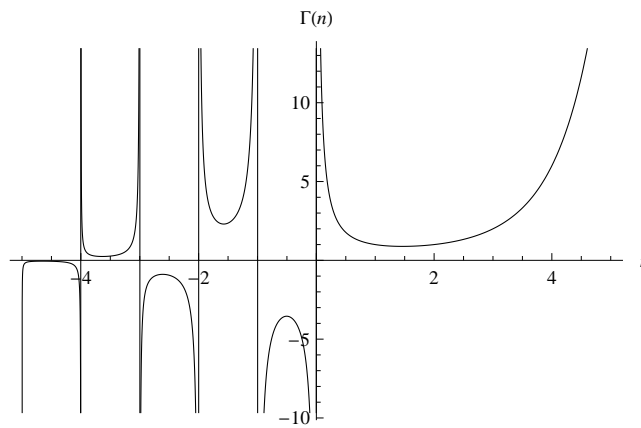


Figura B.1: Representação gráfica da função gama

Devido ao comportamento da função para valores menores que zero, a função só será utilizada para seus valores positivos.

A função gama é conhecida também como função fatorial porque, para valores naturais de n na definição de $\Gamma(n)$, seu comportamento é semelhante

ao comportamento do fatorial. Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (\text{B.2})$$

Uma outra propriedade importante para a função gama é

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n), \quad (\text{B.3})$$

a qual é muito usada na simplificação de alguns resultados.

Outro fato importante é que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

B.2 Função beta

A função beta é definida por uma integral que depende de dois parâmetros positivos [1]. Sejam $m > 0$ e $n > 0$, então, define-se a função beta de m e n como sendo

$$B(m, n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx. \quad (\text{B.4})$$

Por uma substituição de variáveis, é possível mostrar que

$$B(m, n) = B(n, m). \quad (\text{B.5})$$

A função beta também está relacionada com a função gama por meio de

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Solução da equação de fluxo de calor

A equação de fluxo de calor unidimensional [3, 2] é tal que

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde $u = u(x, t)$ representa a temperatura e $0 < x < \infty$ e $0 < t < \infty$. Como condição inicial do problema, seja

$$u(x, 0) = 0 \quad (\text{C.2})$$

e como condição de fronteira, seja

$$-\left. \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right|_{x=0} = -u'(0, t) = p(t). \quad (\text{C.3})$$

Para resolver a equação (C.1), aplica-se a transformada cosseno de Fourier, com respeito à variável x . A transformada cosseno de Fourier é definida como [2]

$$\mathcal{F}_c\{f(t)\} := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(kt) dk. \quad (\text{C.4})$$

A transformada será aplicada à variável x . Quando aplicada à derivada segunda de uma função, a transformada cosseno de Fourier tem a seguinte propriedade:

$$\mathcal{F}_c \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = -k^2 F(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0). \quad (\text{C.5})$$

Aplicando a transformada cosseno de Fourier em (C.1), que também goza da propriedade de linearidade, assim como (A.7), e usando a propriedade C.5, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{u_t - u_{xx}\} &= \mathcal{F}_c\{u_t\} - \mathcal{F}_c\{u_{xx}\} \\
&= \frac{d}{dt}U(k, t) - \left[-k^2U(k, t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}u'(0, t) \right] \\
&= \frac{d}{dt}U(k, t) + k^2U(k, t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}u'(0, t)
\end{aligned}$$

e então

$$\frac{d}{dt}U(k, t) + k^2U(k, t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}u'(0, t) = 0, \quad (\text{C.6})$$

para $\mathcal{F}_c\{u(x, t)\} = U(k, t)$. Pela condição dada em (C.3), a equação fica

$$\frac{d}{dt}U(k, t) + k^2U(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}p(t). \quad (\text{C.7})$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação (C.7) na variável t :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}U(k, t) + k^2U(k, t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}p(t)\right\} \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}U(k, t)\right\} + \mathcal{L}\{k^2U(k, t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{p}(s) \\
[sU(k, s) - U(k, 0)] + k^2U(k, s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{p}(s), \quad (\text{C.8})
\end{aligned}$$

onde $U(k, s) = \mathcal{L}\{U(k, t)\}$ e $\tilde{p}(s) = \mathcal{L}\{p(t)\}$.

O termo $U(k, 0)$ é nulo, pois $U(k, 0) = \mathcal{F}_c\{u(x, 0)\}$ e $u(x, 0) = 0$. A equação (C.8) fica

$$\begin{aligned}
sU(k, s) + k^2U(k, s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{p}(s) \\
U(k, s)(k^2 + s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\tilde{p}(s) \\
U(k, s) &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \left(\frac{\tilde{p}(s)}{k^2 + s}\right). \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em $U(k, s)$ da equação C.9, com respeito à variável s :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{U(k, s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\left(\frac{\tilde{p}(s)}{k^2 + s}\right)\right\} \\ U(k, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tilde{p}(s)}{k^2 + s}\right\}.\end{aligned}\quad (\text{C.10})$$

De acordo com a teoria das transformadas inversas de Laplace, a transformada inversa em (C.10) será a convolução das transformadas inversas de $\tilde{p}(s)$ e $1/(k^2 + s)$, isto é,

$$U(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t p(\tau)e^{-k^2(t-\tau)}d\tau.\quad (\text{C.11})$$

Finalmente, aplicando a transformada inversa de Fourier à equação (C.11) com respeito à variável k :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c^{-1}\{U(k, t)\} &= \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t p(\tau)e^{-k^2(t-\tau)}d\tau\right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t p(\tau)\mathcal{F}_c^{-1}\left\{e^{-k^2(t-\tau)}\right\}d\tau \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t p(\tau)\left(\frac{e^{-x^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{2}\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau \\ u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{p(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-x^2/4(t-\tau)}d\tau,\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

que é a solução da equação (4.27) do fluxo de calor.

Apêndice D

A função de Mittag-Leffler

D.1 Definições

A função de Mittag-Leffler é definida como [3]

$$E_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad (\text{D.1})$$

onde $\alpha > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. Em sua forma mais geral, a função de Mittag-Leffler é definida como

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (\text{D.2})$$

com $\alpha, \beta > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. E então:

$$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z). \quad (\text{D.3})$$

Uma forma bastante útil da função de Mittag-Leffler no cálculo fracionário é tomando $z = -\lambda t^\alpha$ em (D.1) e (D.2), onde $t \in \mathbb{R}$, com $t > 0$ e $-\lambda \in \mathbb{C}$. Daí,

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (\text{D.4})$$

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \quad (\text{D.5})$$

D.2 Propriedades

Um resultado importante é o fato de $E_\alpha(0) = 1$. De fato, seja (D.4):

$$\begin{aligned} E_\alpha(-\lambda t^\alpha) &= \frac{(-\lambda t^\alpha)^0}{\Gamma(0+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \\ &= 1 + \frac{(-\lambda t^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \end{aligned}$$

Daí, tomando-se $t = 0$, observa-se que

$$E_\alpha(0) = 1. \quad (\text{D.6})$$

A derivada de (D.4) também é um resultado útil para este trabalho. Assim,

$$\begin{aligned} E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha n)(-\lambda)^n (t^{\alpha n - 1})}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\ E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n (t^{\alpha n - 1})}{\Gamma(\alpha n)}, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

usando a propriedade (B.2) do Apêndice B, $\Gamma(\alpha n + 1) = (\alpha n)\Gamma(\alpha n)$.

Transformadas de Laplace

Como o método usado para a resolução das equações diferenciais e integrais fracionárias foi por meio da transformada de Laplace, convém obter as transformadas de Laplace de (D.4), (D.5) e (D.7), ou reciprocamente, quais as funções que a transformada inversa de Laplace resultam nestas funções. A transformada de (D.4) é dada por [3]

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\} := \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}\right\} := E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \quad (\text{D.8})$$

Para (D.5), existe a seguinte definição dada em [3]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha)\} &:= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda} \\ \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}\right\} &:= t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Para (D.7), considere a propriedade (A.1) do Apêndice A, de onde é possível escrever

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \right\} = s \mathcal{L} \{ E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \} - E_\alpha(0).$$

que de acordo com (D.6) e (D.8) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) \} &= s \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right) - 1 \\ -\mathcal{L} \{ E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) \} &= -s \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right) + \frac{s^\alpha + \lambda}{s^\alpha + \lambda} \\ &= \frac{-s s^{\alpha-1} + s^\alpha + \lambda}{s^\alpha + \lambda} \\ &= \frac{-s^\alpha + s^\alpha + \lambda}{s^\alpha + \lambda}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ E'_\alpha(-\lambda t^\alpha) \} &:= -\frac{\lambda}{s^\alpha + \lambda} \\ \iff \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda}{s^\alpha + \lambda} \right\} &:= -E'_\alpha(-\lambda t^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Também define-se a transformada de Laplace da k -ésima ($k \in \mathbb{N}$) integral de $E_\alpha(-t^\alpha)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{L} \{ J^k E_\alpha(-t^\alpha) \} := \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}. \quad (\text{D.11})$$

Ainda, define-se pela função espectral a k -ésima derivada de $E_\alpha(-t^\alpha)$ como sendo $D^k E_\alpha(-t^\alpha) = J^{-k} E_\alpha(-t^\alpha)$.

D.3 Função espectral

Uma outra forma de representar a transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right\}$$

é através da *função espectral*, como em [3].

Para $0 < \alpha < 1$, a contribuição de $s^{\alpha-1}/(s^\alpha + 1)$ no cálculo da transformada inversa de Laplace será dada por

$$Im \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \Big|_{s=re^{i\pi}} \right]. \quad (D.12)$$

E então, de (D.12) tem-se que a função espectral é

$$\begin{aligned}
K_\alpha(r) &= -\frac{1}{\pi} Im \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \Big|_{s=re^{i\pi}} \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} Im \left[\frac{(re^{i\pi})^{\alpha-1}}{(re^{i\pi})^\alpha + 1} \right] \\
&= -\frac{1}{\pi} Im \left[\frac{1}{e^{-i\pi}} \frac{r^{\alpha-1} e^{i\pi\alpha} e^{-i\pi}}{r^\alpha e^{i\pi\alpha} + 1} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} Im \left[\frac{r^{\alpha-1} [\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)]}{r^\alpha [\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)] + 1} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} Im \left[\frac{r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha)}{r^\alpha [\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)] + 1} + i \frac{r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{r^\alpha [\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)] + 1} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} Im \left[\frac{r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha)}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] + ir^\alpha \sin(\pi\alpha)} + i \frac{r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] + ir^\alpha \sin(\pi\alpha)} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} Im \left[\frac{r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha)}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] + ir^\alpha \sin(\pi\alpha)} \left(\frac{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)} \right) \right. \\
&\quad \left. + i \frac{r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] + ir^\alpha \sin(\pi\alpha)} \left(\frac{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1] - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} Im \left[\frac{r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha) [r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1 - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)]}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1]^2 + [r^\alpha \sin(\pi\alpha)]^2} \right. \\
&\quad \left. + i \frac{r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha) [r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1 - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)]}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1]^2 + [r^\alpha \sin(\pi\alpha)]^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1]^2 + [r^\alpha \sin(\pi\alpha)]^2} \\
&\quad \times Im \left[r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha) [r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1 - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)] \right. \\
&\quad \left. + i \{ r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha) [r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1 - ir^\alpha \sin(\pi\alpha)] \} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{[r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1]^2 + [r^\alpha \sin(\pi\alpha)]^2} \\
&\quad \times Im \left[r^{2\alpha-1} [\cos^2(\pi\alpha) + \sin^2(\pi\alpha)] + r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha) + ir^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{r^{2\alpha} [\cos^2(\pi\alpha) + \sin^2(\pi\alpha)] + 2r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1} \\
&\quad \times Im \left[r^{2\alpha-1} + r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha) + ir^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\frac{r^{2\alpha-1} + r^{\alpha-1} \cos(\pi\alpha)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1} + i \frac{r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1} \right],$$

o que implica em

$$K_\alpha(r) = \frac{1}{\pi} \frac{r^{\alpha-1} \sin(\pi\alpha)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1}. \quad (\text{D.13})$$

Daí,

$$E(-t^\alpha) = \int_0^\infty e^{-rt} K_\alpha(r) dr. \quad (\text{D.14})$$

De uma maneira mais geral, define-se a função espectral para $0 < \alpha < 1$ da seguinte forma:

$$K_{\alpha,k}(r) := \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{1}{\pi} \frac{r^{\alpha-1-k} \sin(\pi\alpha)}{r^{2\alpha} + 2r^\alpha \cos(\pi\alpha) + 1}. \quad (\text{D.15})$$

E então, $K_{\alpha,0}(r) = K_\alpha(r)$.

A derivada da função de Mittag-Leffler, utilizada nas equações diferenciais fracionárias, é obtida de (D.15). Seja

$$J^k E(-t^\alpha) = \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,k}(r) dr. \quad (\text{D.16})$$

Daí, adota-se a derivada da função de Mittag-Leffler como sendo

$$E'(-t^\alpha) = \int_0^\infty e^{-rt} K_{\alpha,-1}(r) dr. \quad (\text{D.17})$$

Para o caso $1 < \beta < 2$ também é possível escrever a função de Mittag-Leffler em termos da função espectral, porém deve-se levar em conta a conta que neste intervalo $s^{\beta-1}/s^\beta + 1$ possui dois pólos. A saber, $e^{\pm i\frac{\pi}{\beta}}$ [3]. Desta forma,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1} \right\} = \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,0}(r) dr + \frac{1}{\beta} \sum_h e^{s_h t}, \quad (\text{D.18})$$

onde o somatório indica a contribuição dos polos e $K_{\beta,0}(r)$ a função a mesma função espectral encontrada para $0 < \alpha < 1$, porém definida para $1 < \beta < 2$.

Seja

$$\frac{1}{\beta} \sum_h e^{s_h t} := g_\beta(t) \quad (\text{D.19})$$

Substituindo os dois polos no somatório e calculando o segundo termo de (D.18), $g_\beta(t)$ fica

$$\begin{aligned}
g_\beta(t) &= \frac{1}{\beta} \left[e^{t(e^{i\frac{\pi}{\beta}})} + e^{t(e^{-i\frac{\pi}{\beta}})} \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[e^{t[\cos(\pi/\beta) + i \sin(\pi/\beta)]} + e^{t[\cos(\pi/\beta) - i \sin(\pi/\beta)]} \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[e^{t \cos(\pi/\beta)} e^{it \sin(\pi/\beta)} + e^{t \cos(\pi/\beta)} e^{-it \sin(\pi/\beta)} \right] \\
&= \frac{1}{\beta} \left[e^{t \cos(\pi/\beta)} (e^{it \sin(\pi/\beta)} + e^{-it \sin(\pi/\beta)}) \right] \\
&= \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) \right]. \tag{D.20}
\end{aligned}$$

Substituindo (D.20) em (D.18),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + 1} \right\} &= \int_0^\infty e^{-rt} K_{\beta,0}(r) dr \\
&\quad + \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) \right]. \tag{D.21}
\end{aligned}$$

Da mesma forma que foi definida a k -ésima integral da função espectral através de (D.16) e (D.17), é preciso levar em consideração a k -ésima integral de $g_\beta(t)$. Verifica-se que

$$J^k g_\beta(t) = \frac{2}{\beta} e^{t \cos(\pi/\beta)} \cos \left[t \sin \left(\frac{\pi}{\beta} \right) - k \frac{\pi}{\beta} \right]. \tag{D.22}$$

Referências Bibliográficas

- [1] BOAS, M. *Mathematical methods in the physical sciences*. John Wiley & Sons, 1983.
- [2] BUTKOV, E. *Física Matemática*. LTC, 1988.
- [3] GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional Calculus: *Integral and Differential Equations of Fractional Order*. *Fracalmo Pre-print*, p. 223-276, Maio de 2008.
- [4] KILBAS, A.; SRIVASTAVA, H.; TRUJILLO, J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [5] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [6] RICIERI, A. *Derivada Fracionária: Transformada de Laplace e outros bichos*. Prandiano, 1993.
- [7] SPIEGEL, M. *Transformadas de Laplace*. Editora McGraw-Hill do Brasil LTDA., 1981.