

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

**Otávio Augusto Capeloto**

ESPECTROSCOPIA DE LENTE TÉRMICA: COMPARAÇÃO  
ENTRE MODELOS LAM E BLM SEMI-INFINITOS

Orientador: **Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath**

Maringá  
30 de novembro de 2012

---

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

**Otávio Augusto Capeloto**

ESPECTROSCOPIA DE LENTE TÉRMICA: COMPARAÇÃO  
ENTRE MODELOS LAM E BLM SEMI-INFINITOS

*Trabalho de conclusão de curso submetido ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Física.*

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath - UEM (Orientador)  
Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Francielle Sato - UEM  
Prof. Dr. Maurício Antonio Custódio de Melo - UEM

**Maringá**

**30 de novembro de 2012**

---

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

**Otávio Augusto Capeloto**

ESPECTROSCOPIA DE LENTE TÉRMICA: COMPARAÇÃO  
ENTRE MODELOS LAM E BLM SEMI-INFINITOS

*Trabalho de conclusão de curso submetido ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências para a obtenção do título de Bacharel em Física.*

**Orientador:** Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath

**Banca Examinadora:**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Francielle Sato - UEM

Prof. Dr. Maurício Antonio Custódio de Melo - UEM

**Maringá**

**30 de novembro de 2012**

---

*"A tarefa não é tanto ver  
aquilo que ninguém viu,  
mas pensar o que nin-  
guém ainda pensou sobre  
aquilo que todo mundo vê."*

---

**Arthur Schopenhauer**

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho:

Ao meu pai Antonio Capeloto e a minha Mãe Elisa R. B. Capeloto pelo apoio em meus estudos e em todas as lições dadas em minha vida. Aos meus irmãos Débora C. Capeloto e Ulisses R. Capeloto pelo grande incentivo dado em todos os momentos.

A Marilaini Vizioli de Castro pelo apoio, compreensão, paciência e incentivo em toda a graduação.

Ao professor Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath pela orientação neste trabalho.

Aos amigos Edenize Sodré, Jackes Martins e Rodrigo Adriano Thomas pela grande ajuda com os editores TEX.

A todos os integrantes do Grupo GEFF, e em especial (ordem alfabética): Aline Milan Farias, Francine B. G. Astrath, Giselly dos Santos Bianchi, José Renato M. Viana, Leandro Herculano, Marcelo Sandrini, Rafael da Silva, Robson F. Muniz, Rogério R. Pezarini, Vitor Santaella, pelo incentivo, cooperação, compreensão nos trabalhos e pelas conversas nas horas vagas.

Ao professor Dr. Luis Carlos Malacarne pela ajuda na realização deste trabalho e aos professores Dr. Antonio Medina Neto e Dr. Maurício Antonio Custódio de Melo.

Aos amigos (ordem alfabética): Adriane Nascimento, Ely Agudo, Jakeline Carvalho, Joshua, Julio Pastoril, Lidiane Vizioli de Castro, Luiz Gustavo, Maike, Rafael

Mufato Reis, Veridiana Guimarães pelas conversas e discussões sobre física (ou não) durante todo o curso, e a todos os outros colegas de curso que estiveram presentes de alguma forma em minha vida acadêmica.

## Resumo

Neste trabalho, três modelos teóricos que descrevem o Efeito de Lente Térmica foram analisados. Os modelos assumem que a absorção no material segue a lei de Beer (Beer's Law Model - BLM), que o material em análise apresente coeficiente de absorção óptica muito baixo (Low Absorption Model - LAM), e o caso em que o BLM pode ser aproximado (BLM AP). Esses modelos foram comparados sempre em relação ao BLM e os desvios entre eles analisados. As equações de difusão de calor para os três casos foram resolvidas por meio das transformadas integrais e a partir delas foram obtidas as variações das fases do feixe de prova ao passar pela amostra. Por fim a intensidade do feixe de prova no campo distante para os três casos foi derivada. Comparações entre os modelos foram feitas pelo Software *Wolfram Mathematica*. Para a amostra considerada, verificou-se que os modelos LAM e principalmente o modelo BLM AP podem ser utilizados para ajustar curvas experimentais com um bom acordo para coeficientes de absorção óptica próximo à  $1000\text{ m}^{-1}$ . Verificou-se também que a variação nos valores obtidos para os parâmetros  $\theta$  e  $t_c$  dependem pouco dos parâmetros geométricos  $m$  e  $V$ .

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Resumo</b>                                  | <b>iv</b> |
| <b>1 Introdução</b>                            | <b>1</b>  |
| <b>2 Transformadas Integrais</b>               | <b>5</b>  |
| 2.1 Transformada de Fourier . . . . .          | 5         |
| 2.2 Transformada de Hankel . . . . .           | 9         |
| 2.3 Transformada de Laplace . . . . .          | 11        |
| <b>3 Perfil de Temperatura</b>                 | <b>14</b> |
| 3.1 Low Absortion Model . . . . .              | 18        |
| 3.2 Beer's Law Model . . . . .                 | 18        |
| 3.3 BLM Aproximado . . . . .                   | 20        |
| <b>4 Variação do Caminho óptico</b>            | <b>21</b> |
| <b>5 Intensidade do campo elétrico</b>         | <b>24</b> |
| 5.1 Low Absortion Model . . . . .              | 24        |
| 5.2 Beer's Law Model . . . . .                 | 26        |
| 5.3 BLM Aproximado . . . . .                   | 27        |
| <b>6 Comparação Entre os Modelos</b>           | <b>29</b> |
| 6.1 BLM <i>versus</i> LAM . . . . .            | 29        |
| 6.2 BLM <i>versus</i> BLM Aproximado . . . . . | 41        |
| <b>7 Conclusão</b>                             | <b>49</b> |
| <b>A Equação de difusão de calor</b>           | <b>51</b> |
| <b>B Propagação do Feixe de Prova</b>          | <b>53</b> |
| <b>C Rotinas de Simulação</b>                  | <b>57</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Espectroscopia de Lente Térmica (ELT) é uma técnica amplamente empregada para a medida de absorção óptica e propriedades termo-ópticas de materiais sólidos, líquidos e gases. O efeito de Lente Térmica (LT) é gerado pelo aumento de temperatura na amostra devido à absorção de luz laser. Essa é uma técnica remota - não há contato entre o sistema de detecção e a amostra - que pode ser utilizada para a determinação da eficiência quântica da fluorescência, reações cinéticas químicas, química analítica, mecanismos de perdas em corantes lasers, determinação de transição de fase e caracterização de propriedades termo-ópticas em baixas e altas temperaturas [1, 2].

O efeito de LT está relacionado à mudança do estado térmico da amostra. O feixe de excitação aquece a amostra alterando os parâmetros relacionados à temperatura [3]. O efeito de LT foi descrito em 1964 por Gordon *et al* [4], ao colocar uma cubeta com amostra líquida dentro de uma cavidade de laser de He-Ne para estudos de espectroscopia Ramam. Observou-se uma variação da potência de saída quando a amostra era colocada no caminho do feixe, fato que não ocorria sem a amostra. Chegou-se a conclusão que quando o feixe de laser atravessa um material com absorção óptica finita gera calor na amostra, aumentando sua temperatura, efeito que por sua vez muda o índice de refração da amostra afetando a propagação do feixe, (des)focalizando o feixe - efeito de Lente Térmica [3].

Gordon *et al* [4] propuseram um modelo teórico supondo que a lente gerada pelo efeito, ao absorver energia de um laser com perfil gaussiano, no modo TEM<sub>00</sub>, fosse considerada como uma lente fina perfeita, e fizeram aproximações quadráticas nas expressões para o aumento da temperatura e variação do índice de refração em

termos de  $r^2$ <sup>1</sup> – modelo parabólico.

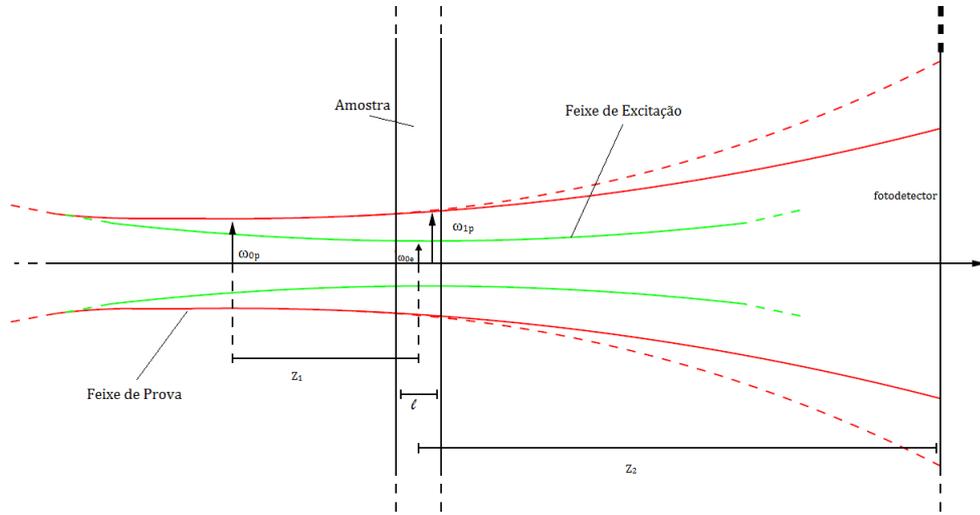
O modelo parabólico descreve bem o comportamento de LT, porém posteriormente foi verificado que o aumento da temperatura e a mudança no índice de refração além do raio do feixe de excitação não são parabólicos. Sheldon *et al* [5] levando em conta a variação na fase do feixe laser, propuseram um novo modelo em que não se faz as aproximações como no modelo parabólico. Levaram em consideração ainda a diferença de fase no feixe causado pelo efeito de LT. Com isso, foi usada a teoria da difração para obter a mudança da intensidade do feixe de laser na aproximação de campo distante.

Os dois modelos acima foram obtidos para casos em que utiliza-se apenas um feixe laser provando o efeito gerado por ele mesmo. Técnicas utilizando dois feixes, um para excitação e outro para prova foram desenvolvidas posteriormente. Modelos para dois feixes foram descritos, porém o modelo que melhor descreve o efeito levando em consideração dois feixes de perfil gaussiano no modo TEM<sub>00</sub>, sendo um que interage com a amostra gerando o efeito, e outro que apenas percebe o efeito, foi desenvolvido por J. Shen *et al* [1] que possibilita trabalhar com o modo casado, ou seja, os dois feixes com aproximadamente o mesmo diâmetro incidindo na amostra e o modo descasado, no qual os dois feixes tem diâmetros diferentes. O modelo aberrante descasado foi desenvolvido por J. Shen *et al* em 1992. Neste modelo foi considerado a diferença na fase do feixe laser ocasionado pela LT, como na teoria de Sheldon *et al* [5]. O nome provém da configuração na qual tem-se dois feixes de laser Gaussianos no modo TEM<sub>00</sub> com raios diferentes, um com o raio menor, para aquecer a amostra (feixe de excitação) e outro, com raio maior para provar o efeito (feixe de prova).

A disposição de cada feixe está representada na Figura 1.1. A posição da cintura do feixe de prova é tomada como a origem do eixo  $z$ . A amostra de comprimento  $l$  é colocada em  $Z_1$  e um detector é colocado em  $Z_1 + Z_2$ . A cintura do feixe de excitação denominada por  $\omega_{0e}$  deve estar localizada no centro da amostra, pois é na cintura do feixe que tem-se uma maior densidade de potência, gerando um gradiente de temperatura [1]. A cintura do feixe de prova é denominada por  $\omega_{0p}$  e o raio do feixe de prova na amostra, que deve ser maior que o raio do feixe de excitação na amostra é  $\omega_{1p}$ .

---

<sup>1</sup> $r$  é a distância radial a partir do eixo do feixe de laser.



**Figura 1.1:** Representação esquemática dos raios dos feixes de excitação e de prova ao passar pela amostra até o fotodetector [6].

Para a dedução do modelo teórico no modo descasado deve-se fazer algumas considerações sobre a configuração experimental [1]:

- (i) O comprimento da amostra é pequeno comparado à distância confocal<sup>2</sup>, a mais curta das duas distâncias focais dos dois feixes, para assegurar que o tamanho do feixe é constante dentro da amostra.
- (ii) As dimensões da amostra são grandes comparadas com o raio do feixe de excitação,  $\omega_{0e}$  evitando efeitos de borda.
- (iii) Não há indução de efeitos de convecção em caso de líquidos.
- (iv) A variação do caminho óptico com a temperatura se mantém constante durante todo o aumento de temperatura do sistema.

Um modelo que descreve o comportamento de amostras que possuem uma absorção óptica seguindo a lei de Beer, tal qual pode descrever o efeito em qualquer faixa de coeficientes de absorção óptica é o Beer's Law Model (BLM) [7]. Em casos onde o coeficiente de absorção óptica do material não é muito grande<sup>3</sup> pode-se utilizar dois modelos genéricos para descrever o efeito de LT, o que facilita nos cálculos para a obtenção dos parâmetros desejados no experimento. Tais modelos são o Low

<sup>2</sup>A distância confocal determina a extensão da região onde o laser está colimado, ou seja, a extensão onde o feixe laser mantém seu raio aproximadamente constante.

<sup>3</sup>Em [11] o coeficiente de absorção limite para a não utilização do modelo BLM é aproximadamente  $100 \text{ m}^{-1}$

---

Absortion Model (LAM) [7] – modelo este que assume a absorção do feixe de laser no eixo azimutal constante em toda a amostra, e o modelo apresentado neste trabalho – BLM Aproximado (BLM AP) [11], que considera uma aproximação introduzida na solução da equação de difusão de calor do modelo LAM a partir de um fator  $e^{-Ae^z}$ .

Para discutir a validade dos modelos, suas respectivas equações de difusão de calor foram resolvidas. A mudança de fase induzida pelo efeito de LT no feixe ao atravessar a amostra e a intensidade do feixe de prova no campo distante foram derivadas. Com estas ferramentas em mãos, foram realizadas simulações computacionais através do Software *Wolfram Mathematica 7.0* comparando os modelos BLM e LAM, e também os modelos BLM e BLM-AP para amostras de vidro.

# Capítulo 2

## Transformadas Integrais

Neste trabalho é de fundamental importância o conhecimento das transformadas integrais para a resolução da equação de difusão de calor, que descreve a variação da temperatura no material estudado.

As transformadas integrais podem ser escritas na seguinte forma

$$g(\beta) = \int_a^b f(s)K(\beta, s)ds.$$

A função  $g(\beta)$  é denominada transformada (integral) de  $f(s)$  pelo núcleo  $K(\beta, s)$ . Esta operação também pode ser descrita como o mapeamento da função  $f(s)$  no espaço  $s$  para uma outra função  $g(\beta)$ , no espaço  $\beta$  [8].

### 2.1 Transformada de Fourier

Séries de Fourier são úteis para representar certas funções em um intervalo limitado ou infinito se a função for periódica. É permitido desenvolver, por meio das Séries de Fourier, funções tais que as séries de Taylor, por exemplo, não podem, como por exemplo a função

$$f(x) = x, x \in [-1, 1], \text{ e é tal que } f(x) = f(x + 2).$$

Escrevendo a Série de Fourier na forma

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[ \frac{n\pi x}{L} \right] \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left[ \frac{n\pi t}{L} \right] dt + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[ \frac{n\pi x}{L} \right] \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left[ \frac{n\pi t}{L} \right] dt, \quad (2.1)$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \left[ \frac{n\pi(t-x)}{L} \right] dt, \quad (2.2)$$

com os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left[ \frac{n\pi t}{L} \right] dt, \quad (2.3)$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left[ \frac{n\pi t}{L} \right] dt. \quad (2.4)$$

Fazendo com que a periodicidade da função diminua de tal forma que se torne um pulso único, ou seja, transformar o intervalo finito  $[-L, L]$  em um intervalo infinito  $[-\infty, \infty]$

$$\frac{n\pi}{L} = \omega, \quad \frac{1}{L} = \frac{\Delta\omega}{\pi} \text{ com } L \rightarrow \infty.$$

Substituindo em (2.2)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos [\omega(t-x)] dt, \quad (2.5)$$

que também pode ser escrita da forma

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos [\omega(t-x)] dt, \quad (2.6)$$

em que o primeiro termo se anula supondo que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  exista.

A equação (2.6) pode ser escrita em termos de uma exponencial. Para isso

deve-se notar que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\omega(x-t)] dt, \quad (2.7)$$

enquanto

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin[\omega(x-t)] dt = 0. \quad (2.8)$$

Multiplicando (2.8) por  $(-i)$  e somando com (2.7) obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.9)$$

chamada de integral de Fourier na forma complexa.

Escrevendo (2.9) do seguinte modo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{-i\omega x} d\omega. \quad (2.10)$$

Observa-se que dentro do colchete há uma expressão em função de apenas  $\omega$  pois integra-se em  $t$ , tal função é chamada de Transformada de Fourier de  $f(t)$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.10) define-se  $f(x)$  ou a Transformada Inversa de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (2.12)$$

Como usualmente Transformadas de Fourier é aplicada na coordenada espacial, e sabendo que  $t$  aqui é uma variável muda, é conveniente escrever (2.11) e (2.12) respectivamente, como

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} dx. \quad (2.14)$$

Para que seja possível a existência das Transformadas de Fourier,  $f(x)$  deve satisfazer algumas condições [9]:

- $f(x)$  deve ser absolutamente integrável em  $(-\infty, \infty)$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

Com a mesma importância, frequentemente a Transformada de Fourier é utilizada em derivadas<sup>1</sup> de funções. Para a primeira derivada, com uma integração por partes e poucas linhas de cálculos pode-se facilmente obter

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} = i\omega F(\omega), \quad (2.15)$$

considerando que  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$ . E semelhante a este procedimento com apenas uma integração por partes a mais obtém-se

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right\} = -\omega^2 F(\omega), \quad (2.16)$$

considerando que  $f(x) \rightarrow 0$  e  $\frac{df(x)}{dx} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$ .

Quando há necessidade de obter a transformada de Fourier de uma função cujo desaparece muito rápido, quando  $|x| \rightarrow \infty$ , pode-se utilizar as transformadas de Fourier Seno para funções ímpares e Fourier Cosseno para funções pares. A transformada Fourier Cosseno e sua inversa são definidas por

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos[\omega x] dx, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\omega) \cos[\omega x] d\omega. \quad (2.18)$$

Do mesmo modo, a transformada de Fourier Seno é definida por

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin[\omega x] dx, \quad (2.19)$$

---

<sup>1</sup>No caso da Equação de Difusão de Calor que será vista mais a frente é aplicada nas derivadas primeira e segunda.

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F(\omega)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\omega) \sin[\omega x] d\omega. \quad (2.20)$$

Outros resultados além dos obtidos aqui são encontrados em vários livros texto de física-matemática, o interesse a partir de agora é na aplicação destes resultados na resolução da Equação de Difusão de Calor.

## 2.2 Transformada de Hankel

A Transformada de Fourier também é usada em funções envolvendo duas ou mais variáveis espaciais, onde pode-se obter, para duas variáveis a Transformada de Fourier-Bessel também conhecida como Transformada de Hankel.

Para a dedução da Transformada de Hankel e sua inversa, utiliza-se a Transformada de Fourier em duas dimensões [9]

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(k, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dx dy \quad (2.21)$$

e também sua inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(k, l)\} = f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(k, l) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dk dl, \quad (2.22)$$

sendo  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$  e  $\vec{k} = k\hat{k} + l\hat{l}$ .

Transformando as coordenadas cartesianas em coordenadas polares em que

$$\begin{cases} x \rightarrow r \cos \theta \\ y \rightarrow r \sin \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} k \rightarrow k \cos \phi \\ l \rightarrow k \sin \phi \end{cases}.$$

Facilmente verifica-se que  $\vec{r} \cdot \vec{k} = rk \cos(\theta - \phi)$ , substituindo este resultado em (2.21)

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(r) r dr \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-ikr \cos(\theta - \phi)} d\theta. \quad (2.23)$$

Assumindo agora que  $f(r, \theta) = e^{in\theta} f(r)$  e fazendo a mudança de variável  $\theta - \phi = (\alpha - \frac{\pi}{2})$  de modo que (2.23) fique

$$F(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(r) r dr \int_{\phi_0}^{2\pi + \phi_0} e^{[in(\phi - \frac{\pi}{2}) + i(n\alpha - kr \sin \alpha)]} d\alpha, \quad (2.24)$$

com  $\phi_0 = \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ .

Usando a representação na forma integral para a função de Bessel de ordem  $n$ .

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} e^{i(n\alpha - kr \sin \alpha)} d\alpha, \quad (2.25)$$

logo (2.24) se torna

$$F(k, \phi) = e^{in\left(\phi - \frac{\phi}{2}\right)} \int_0^\infty J_n(kr) f(r) r dr \quad (2.26)$$

ou

$$F(k, \phi) = e^{in\left(\phi - \frac{\phi}{2}\right)} f_n^*(k), \quad (2.27)$$

em que  $f_n^*$  é a transformada de Hankel de ordem  $n$  também denotada por  $\mathcal{H}_n \{f(r)\}$

$$\mathcal{H}_n \{f(r)\} = f_n^* = \int_0^\infty J_n(kr) f(r) r dr. \quad (2.28)$$

Para encontrar a Transformada Inversa de Hankel também deve-se usar coordenadas polares aplicadas em (2.22)

$$\begin{aligned} e^{in\theta} f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^{2\pi} F(k, \phi) e^{ikr \cos(\theta - \phi)} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f_n^*(k) dk \int_0^{2\pi} e^{[in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + ikr \cos(\theta - \phi)]} d\phi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

fazendo as mudanças de variáveis necessárias  $\theta - \phi = -(\alpha + \frac{\pi}{2})$  e  $\theta_0 = -(\theta + \frac{\pi}{2})$ ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f_n^* k dk \int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0} e^{[in(\theta+\alpha) - ikr \sin \alpha]} d\alpha \\ &= e^{in\theta} \int_0^\infty J_n(kr) f_n^*(k) k dk, \quad \text{dada por (2.25),} \end{aligned} \quad (2.30)$$

logo obtém-se

$$\mathcal{H}_n^{-1} \{f_n^*(k)\} = f(r) = \int_0^\infty J_n(kr) f_n^*(k) k dk \quad (2.31)$$

que é a Transformada Inversa de Hankel.

É comum utilizar a fórmula integral de Hankel para definir a Transformada de

Hankel e sua Inversa [9].

$$f(r) = \int_0^\infty J_n(kr)kdk \int_0^\infty J_n(k\rho)f(\rho)\rho d\rho. \quad (2.32)$$

Assim como para a Transformada de Fourier, duas propriedades da Transformada de Hankel são utilizadas com muita frequência e também serão utilizadas neste trabalho: a Transformada de Hankel para a primeira e segunda derivada de uma função de  $r$ .

$$\mathcal{H}_n \{f'(r)\} = -kf_n^*(k), \quad (2.33)$$

$$\mathcal{H}_n \{f''(r)\} = -k^2 f_n^*(k) \quad (2.34)$$

sabendo que  $f(r) \rightarrow 0$  e  $f'(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

Para a aplicação na Equação de Difusão de Calor estudada neste trabalho será utilizada apenas a Transformada de Hankel de ordem zero.

## 2.3 Transformada de Laplace

Para uma breve abordagem à Transformada de Laplace, pode-se começar com a fórmula Integral de Fourier (2.10) que expressa uma função  $f_1(x)$  definida em  $(-\infty, \infty)$

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt} f_1(t) dt. \quad (2.35)$$

Definindo,  $f_1(x) = 0$  se  $-\infty < x < 0$  e escrevendo

$$f_1(x) = e^{-cx} f(x) H(x) = e^{-cx} f(x), \quad x > 0, \quad (2.36)$$

em que  $c$  é um número positivo e  $H(x)$  é a função Heaviside<sup>2</sup> que garante que a função seja igual a zero no limite descrito acima.

Assim (2.35) fica

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_0^{\infty} e^{-t(c+ik)} f(t) dt, \quad (2.37)$$

fazendo uma mudança de variável, usando  $s = c + ik$  e  $ds = idk$ , de modo que (2.37) pode ser escrita

$$f(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{[(s-c)x]} ds \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.38)$$

Assim, a Transformada de Laplace de uma função é definida como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re } s > 0, \quad (2.39)$$

em que  $e^{-st}$  é o *kernel* da transformada e  $s$  é a variável transformada que é um número complexo. A transformada de  $f(t)$ , conhecida por  $F(s)$ , é analítica em  $s$  no semiplano, sendo  $\text{Re } s > a$ .

De (2.38) pode-se verificar que a Transformada Inversa de Laplace é dada como

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-st} F(s) ds. \quad (2.40)$$

Para que a Transformada de Laplace de uma função exista, tal função deve satisfazer algumas condições [9, 10]:

- i)  $f(t)$  deve ser contínua ou contínua por partes no intervalo  $a < t < \infty$ ; ou seja, se em cada intervalo finito  $a < t < b$  a função tiver finitas descontinuidades, o valor de  $f(t)$  converge para:
  - (a)  $f(t)$  se  $x$  é um ponto na parte contínua, ou;
  - (b)  $\frac{1}{2}[f^+(t) + f^-(t)]$ , se  $t$  é um ponto de descontinuidade.

---

<sup>2</sup>A função de Heaviside é definida como

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

- ii)  $f(t)$  deve ser de ordem exponencial  $a$  ( $a > 0$ ) no intervalo  $0 \leq t < \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Ou seja, existe algum  $a > 0$  tal que  $\exp[-at]$  é limitada por  $K$ , uma constante, para todo  $t > T$ , isto é

$$\exp[-at]|f(t)| \leq K$$

$$|f(t)| \leq K \exp[-at],$$

que no limite de  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp[-st]|f(t)| \leq K \lim_{t \rightarrow \infty} \exp[-(s-a)t] = 0, \quad s > a.$$

As definições acima nos leva a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0,$$

que significa que toda Transformada de Laplace deve zerar no infinito.

De muita utilidade para nós, a Transformada de Laplace da derivada de uma função qualquer pode ser definida como

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad (2.41)$$

sendo que aqui foi feita uma integração por partes, como na Transformada de Fourier para a derivada de uma função.

# Capítulo 3

## Perfil de Temperatura

A variação de temperatura em uma amostra é dada pela solução da equação de difusão de calor.

A equação de difusão de calor, dada em coordenadas cilíndricas, é

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta T(r, z, t) - D \nabla^2 \Delta T(r, z, t) = Q(r)Q(z)Q(t), \quad (3.1)$$

em que  $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  e  $D = k/(\rho c)$  é a difusividade térmica do material,  $k$  é a condutividade térmica,  $c$  é o calor específico e  $\rho$  a densidade do material. O termo de fonte para o caso de um laser Gaussiano TEM<sub>00</sub> em modo contínuo é

$$Q(r) = Q_0 e^{-\frac{2r^2}{\omega_{0e}^2}}, \quad (3.2)$$

com

$$Q_0 = \frac{2A_e P_e \phi}{\pi \omega_{0e}^2 c \rho}, \quad (3.3)$$

e

$$Q(t) = 1, \quad (3.4)$$

em que  $P_e$  é a potência do feixe de laser de excitação,  $\omega_{0e}$  é o raio do feixe de excitação incidente na amostra e  $A_e$  é o coeficiente de absorção óptica da amostra.  $\phi = 1 - \eta \lambda_e / \langle \lambda_{em} \rangle$  em que  $\lambda_e$  é o comprimento de onda do feixe de excitação,  $\langle \lambda_{em} \rangle$  é o comprimento de onda médio de emissão da fluorescência e  $\eta$  é a eficiência de

fluorescência quântica. Quando toda a energia absorvida é convertida em calor tem-se  $\eta = 0$ .

A expressão para  $Q(z)$  fica definida pela forma como a amostra absorve a energia do laser de excitação. Para o caso em que a amostra seja fracamente absorvedora (LAM) [7] tem-se

$$Q(z) = 1, \quad (3.5)$$

e para o caso em que a absorção óptica da amostra possa ser descrita pela lei de Beer, (BLM) [7] tem-se

$$Q(z) = e^{-A_e z}. \quad (3.6)$$

As condições de contorno e condição inicial do problema são consideradas a seguir. Considerando que no instante de tempo  $t = 0$ , ou seja, quando não há incidência do feixe de laser na amostra não há variação de temperatura na mesma ou  $\Delta T(r, z, 0) = 0$ . Como a amostra pode ser considerada muito maior radialmente que o feixe de excitação incidido sobre ela, assume-se que para um valor de  $r$  muito grande não há variação de temperatura, ou seja  $\Delta T(r \rightarrow \infty, z, t) = 0$ . Assume-se também que não há troca de calor com o meio externo, ou seja  $\frac{\partial \Delta T(r, z, t)}{\partial z} |_{z=0} = 0$ .

Aplicando transformada de Laplace na coordenada temporal da função e fazendo as seguintes transformações

$$\mathcal{L}\{Q_0\} = \frac{Q_0}{s}, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}\{\Delta T(r, z, t)\} = \Delta T(r, z, s), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta T(r, z, t)\right\} = s \Delta T(r, z, s) - \Delta T(r, z, 0), \quad (3.9)$$

e observando a condição inicial de que  $\Delta T(r, z, 0) = 0$ , a equação (3.9) fica

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta T(r, z, t)\right\} = s \Delta T(r, z, s). \quad (3.10)$$

Substituindo os resultados descritos por (3.7), (3.8) e (3.8) em (3.1), temos

$$s\Delta T(r, z, s) - D\nabla^2\Delta T(r, z, s) = \frac{Q_0}{s}Q(z)e^{-2\frac{r^2}{\omega_{0e}^2}}. \quad (3.11)$$

Com a variável  $t$  no espaço das transformadas, se faz necessário uma mudança na coordenada radial. Para isso, utiliza-se o caso especial da transformada de Fourier, conhecida como transformada de Hankel. As transformações necessárias são

$$\mathcal{H}\{\Delta T(r, z, s)\} = \Delta T(\alpha, z, s), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\Delta T(r, z, s)\right\} = -\alpha^2\Delta T(\alpha, z, s), \quad (3.13)$$

e

$$\mathcal{H}\left\{e^{-2\frac{r^2}{\omega_{0e}^2}}\right\} = \frac{\omega_{0e}^2}{4}e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega_{0e}^2}. \quad (3.14)$$

Substituindo esses resultados em (3.11) obtém-se a equação de difusão de calor no espaço das transformadas, de Laplace e de Hankel, como

$$s\Delta T(\alpha, z, s) + \alpha^2D\Delta T(\alpha, z, s) - D\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta T(\alpha, z, s) = \frac{Q(z)Q_0\omega_{0e}^2}{4s}e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega_{0e}^2}. \quad (3.15)$$

Para finalizar a transformação da equação, deve-se aplicar a transformada de Fourier cosseno, devido a condição de contorno, para a variável  $z$ , seguindo as relações

$$\mathcal{F}_c\{\Delta T(\alpha, z, s)\} = \Delta T(\alpha, \lambda, s), \quad (3.16)$$

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta T(\alpha, z, s)\right\} = -\lambda^2\Delta T(\alpha, \lambda, s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial\Delta T(\alpha, z, s)}{\partial z}\Big|_{z=0}, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{F}_c\{Q(z)\} = Q(\lambda). \quad (3.18)$$

Observando que o segundo termo depois da igualdade em (3.17) é nulo e substituindo

(3.16), (3.17) e (3.18) em (3.15) obtem-se

$$s\Delta T(\alpha, \lambda, s) + \alpha^2 D\Delta T(\alpha, \lambda, s) + \lambda^2 D\Delta T(\alpha, \lambda, s) = \frac{Q(\lambda)Q_0\omega_{0e}^2}{4s} e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega_{0e}^2}. \quad (3.19)$$

Com algumas simplificações obtem-se a expressão para a variação da temperatura no espaço das transformadas como

$$\Delta T(\alpha, \lambda, s) = \frac{Q_0\omega_{0e}^2}{4} \frac{Q(\lambda)e^{-\frac{1}{8}\alpha^2\omega_{0e}^2}}{s[s + D(\alpha^2 + \lambda^2)]}, \quad (3.20)$$

em que  $Q(\lambda)$  é a transformada de Fourier cosseno para o termo de fonte  $Q(z)$  que muda de acordo com o modelo estudado, LAM ou BLM.

Para encontrar a expressão para a variação da temperatura na amostra dependente das variáveis conhecidas ( $r$ ,  $z$  e  $t$ ) precisa-se aplicar as transformadas inversas, de Laplace, Hankel e Fourier Cosseno. Invertendo a Transformada de Laplace para os termos que dependem de  $s$ , temos

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s[s + D(\alpha^2 + \lambda^2)]} \right\} = \int_0^t e^{-D\tau(\alpha^2 + \lambda^2)} d\tau, \quad (3.21)$$

de forma que a variação da temperatura fica escrita como

$$\Delta T(\alpha, \lambda, t) = \frac{Q_0\omega_{0e}^2}{4} Q(\lambda) \int_0^t e^{-[\frac{1}{8}\alpha^2\omega_{0e}^2 + D\tau(\alpha^2 + \lambda^2)]} d\tau. \quad (3.22)$$

Fazendo a transformada inversa de Hankel na variável  $\alpha$ ,

$$\mathcal{H}^{-1} \left\{ e^{-[\frac{1}{8}\alpha^2\omega_{0e}^2 + D\tau(\alpha^2 + \lambda^2)]} \right\} = \frac{4e^{-D\lambda^2 - \frac{2r^2}{8D\tau + \omega_{0e}^2}}}{(8D\tau + \omega_{0e}^2)}, \quad (3.23)$$

de modo que se substituindo na expressão da variação de temperatura (3.22) e fazendo  $t_c = \omega_{0e}^2/4D$ , sendo que  $t_c$  é o tempo característico para a formação da lente, tem-se

$$\Delta T(r, \lambda, t) = Q_0 \int_0^t Q(\lambda) e^{-\frac{\omega_{0e}^2\lambda^2}{8} 2\tau/t_c} \left[ \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{(1+2\tau/t_c)}}}{(1 + 2\tau/t_c)} \right] d\tau. \quad (3.24)$$

O que falta para encontrar a expressão completa para a variação da temperatura é aplicar a transformada inversa de Fourier cosseno na parte dependente de  $\lambda$  da

equação (3.24). O restante da solução será feito em três seções, uma para o modelo de baixa absorção e outro que segue a lei de Beer.

### 3.1 Low Absortion Model

Para o modelo LAM, o termo de fonte para a coordenada  $z$  é dado pela equação (3.5) e sua Transformada de Fourier Cosseno ( $Q(\lambda)$ ) é

$$Q(\lambda) = \sqrt{2\pi}\delta(\lambda), \quad (3.25)$$

em que  $\delta(\lambda)$  é a delta de Dirac. Assim, a equação (3.24) tem a forma

$$\Delta T(r, \lambda, t) = Q_0 \int_0^t \sqrt{2\pi}\delta(\lambda) e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2}{8} 2\tau/t_c} \left[ \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{(1+2\tau/t_c)}}}{(1+2\tau/t_c)} \right] d\tau. \quad (3.26)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier Cosseno na parte dependente de  $\lambda$ , temos

$$\mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \sqrt{2\pi}\delta(\lambda) e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2}{8} 2\tau/t_c} \right\} = 1, \quad (3.27)$$

de modo que a expressão para a variação da temperatura para uma amostra fracamente absorvedora é

$$\Delta T_{LAM}(r, t) = T_0 \int_0^t \frac{2A_e e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{(1+2\tau/t_c)}}}{\omega_{0e}^2 (1+2\tau/t_c)} d\tau, \quad (3.28)$$

em que  $T_0 = P_e \phi / (\pi c \rho)$ , e o subscrito LAM indica que esta é a expressão para a variação de temperatura para o devido modelo.

### 3.2 Beer's Law Model

Para uma amostra que tem sua absorção óptica descrita pela Lei de Beer, o termo de fonte dependente da coordenada axial é dado pela equação (3.6) e sua transformada de Fourier cosseno é

$$Q(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2}, \quad (3.29)$$

de modo que a equação (3.24) fica escrita como

$$\Delta T(r, \lambda, t) = Q_0 \int_0^t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2} e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2}{8} 2\tau/t_c} \left[ \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{(1+2\tau/t_c)}}}{(1+2\tau/t_c)} \right] d\tau. \quad (3.30)$$

Neste caso, diferentemente das amostras fracamente absorvedoras, não consegue-se inverter a Transformada de Fourier Cosseno utilizando a equação (2.18). Deve-se utilizar a seguinte regra de convolução

$$\mathcal{F}^{-1} \{F(\lambda)G(\lambda)\} = (f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\xi) [g^+(z - \xi) + g(z + \xi)] d\xi, \quad (3.31)$$

em que  $g^+$  é a extensão par de  $g$ ,  $f(z) = \mathcal{F}_c^{-1} \{F(\lambda)\}$  e  $g(z) = \mathcal{F}_c^{-1} \{G(\lambda)\}$ . Fazendo as escolhas apropriadas para  $F(\lambda)$  e  $G(\lambda)$  como

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2} \quad (3.32)$$

e

$$G(\lambda) = e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2}{8} 2\tau/t_c}, \quad (3.33)$$

que permite aplicar a Transformada Inversa de Fourier Cosseno separadamente em cada uma, de modo que tem-se

$$f(z) = \mathcal{F}_c^{-1} \{F(\lambda)\} = \mathcal{F}_c^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_e}{A_e^2 + \lambda^2} \right\} = e^{-A_e z} \quad (3.34)$$

e

$$g(z) = \mathcal{F}_c^{-1} \{G(\lambda)\} = \mathcal{F}_c^{-1} \left\{ e^{-\frac{\omega_{0e}^2 \lambda^2}{8} 2\tau/t_c} \right\} = \frac{e^{-\frac{t_c z^2}{\tau \omega_{0e}^2}} \sqrt{2t_c}}{\sqrt{\tau \omega_{0e}^2}}. \quad (3.35)$$

Desta forma, usando a regra de convolução substituindo as equações (3.34) e (3.35) em (3.31)

$$(f(z) * g(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-A_e \xi} \left[ \frac{e^{-\frac{t_c(z-\xi)^2}{\tau \omega_{0e}^2}} \sqrt{2t_c}}{\sqrt{\tau \omega_{0e}^2}} + \frac{e^{-\frac{t_c(z+\xi)^2}{\tau \omega_{0e}^2}} \sqrt{2t_c}}{\sqrt{\tau \omega_{0e}^2}} \right] d\xi, \quad (3.36)$$

que dá como resultado

$$(f(z) * g(z)) = \frac{e^{\frac{1}{4}\beta\left(-4z + \frac{\beta\tau\omega_{0e}^2}{t_c}\right)} t_c \left[ \operatorname{Erfc} \left[ \frac{-2t_c z + \beta\tau\omega_{0e}^2}{2\sqrt{t_c\tau\omega_{0e}^2}} \right] + e^{2z\beta} \operatorname{Erfc} \left[ \frac{2t_c z + \beta\tau\omega_{0e}^2}{2\sqrt{t_c\tau\omega_{0e}^2}} \right] \right]}{2(t_c + 2\tau)} \quad (3.37)$$

em que  $\operatorname{Erfc}(x)$  é a função erro complementar<sup>1</sup>.

Substituindo (3.37) em (3.30) chega-se ao resultado esperado para a variação de temperatura em uma amostra que absorve energia segundo a Lei de Beer

$$\begin{aligned} \Delta T_{BLM}(r, z, t) = T_0 \int_0^t \frac{A_e e^{A_e(A_e\tau\omega_{0e}^2/t_c - 4z)/4}}{\omega_{0e}^2 (1 + 2\tau/t_c)} \times e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}} \\ \times \left[ \operatorname{Erfc} \left( \frac{A_e\tau\omega_{0e}^2 - 2zt_c}{2\sqrt{\omega_{0e}^2\tau t_c}} \right) + e^{(2A_e z)} \operatorname{Erfc} \left( \frac{A_e\tau\omega_{0e}^2 + 2zt_c}{2\sqrt{\omega_{0e}^2\tau t_c}} \right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.38)$$

em que o subscrito BLM indica que esta é a expressão para a variação de temperatura para o modelo BLM.

### 3.3 BLM Aproximado

Devido a expressão da variação de temperatura do modelo LAM ser útil para amostras fracamente absorvedoras, muitas vezes é necessário a utilização do modelo BLM que descreve com melhor precisão a variação da temperatura em amostras que possuem coeficientes de absorção óptica maiores. Porém, a expressão para o modelo BLM tem sua solução através de integrais numéricas. Um possível método para poder contornar este problema é utilizar uma aproximação em que supõe-se um perfil de temperatura com a solução do modelo LAM multiplicado por  $e^{-A_e z}$  [11]. A lei de Beer descreve o decaimento da intensidade da luz ao atravessar a amostra, desta forma a suposição feita foi que a variação da temperatura também decai seguindo esta lei. Assim tem-se

$$\Delta T_{BLMAP}(r, z, t) = T_0 \int_0^t \frac{2A_e e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{(1+2\tau/t_c)}}}{\omega_{0e}^2 (1 + 2\tau/t_c)} e^{-A_e z} d\tau. \quad (3.39)$$

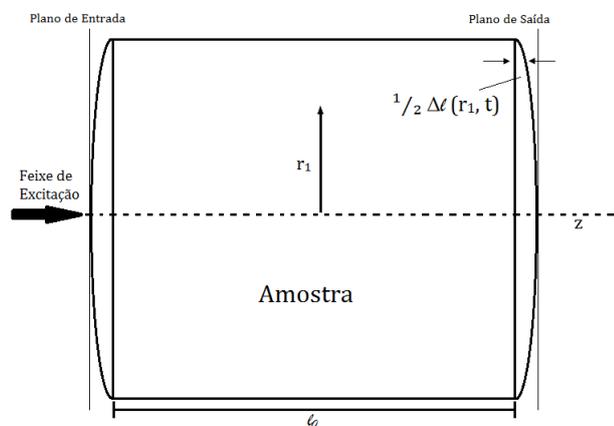
---

<sup>1</sup> $\operatorname{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$

# Capítulo 4

## Variação do Caminho óptico

A incidência de um feixe de laser em um material semitransparente, que absorve parte deste feixe, provoca o aumento de temperatura no material dilatando-o<sup>1</sup> como mostrado na Figura 4.1 mudando o caminho óptico do feixe.



**Figura 4.1:** Esquema da mudança da espessura da amostra sólida ao absorver calor a partir do feixe de laser.

Essa variação dependente da temperatura é definida pelo coeficiente da variação do caminho óptico ( $ds/dT$ ) onde  $s$  é o caminho óptico, que por sua vez, depende do índice de refração da amostra e do seu comprimento. Assim a expressão para o

<sup>1</sup>Assume-se que para líquidos é utilizado uma cubeta confeccionada com materiais que não absorvam muita radiação e não mudem de tamanho.

caminho óptico é definida por [12]

$$s(r, z, T, t) = n(r, z, T, t)l(T), \quad (4.1)$$

em que  $n$  é o índice de refração e  $l$  é a espessura da amostra em função da temperatura. Assumindo que a variação de  $s$  é muito pequena entre o plano de entrada e o plano de saída do feixe, pode-se fazer uma expansão em série de Taylor em torno do raio da amostra  $r_1$  para a expressão (4.1)

$$s(r_1, z, t) = n_0 l_0 + \left[ n_0 \left( \frac{dl}{dT} \right)_{T_0} + l_0 \left( \frac{dn}{dT} \right)_{T_0} \right] \Delta T(r_1, z, t) + [\Delta l(0, z, t) - \Delta l(r_1, z, t)] \quad (4.2)$$

em que  $n_0$  é o índice de refração inicial e  $l_0$  é a espessura inicial da amostra.  $\Delta l(0, t) - \Delta l(r_1, z, t)$  é o comprimento do caminho óptico através do ar em  $(r_1, z, t)$  e

$$\Delta l(r_1, z, t) = \left( \frac{dl}{dT} \right)_{T_0} \Delta T(r_1, z, t). \quad (4.3)$$

A variação do comprimento do caminho óptico em relação ao eixo  $z$  é então

$$\Delta s(r_1, z, t) = l_0 \left[ \frac{n_0 - 1}{l_0} \left( \frac{dl}{dT} \right)_{T_0} + \left( \frac{dn}{dT} \right)_{T_0} \right] [\Delta T(r_1, z, t) - \Delta T(0, z, t)]. \quad (4.4)$$

O coeficiente do comprimento do caminho óptico de uma amostra em temperatura  $T_0$  é então [12]

$$\left( \frac{ds}{dT} \right)_{T_0} = \frac{n_0 - 1}{l_0} \left( \frac{dl}{dT} \right)_{T_0} + \left( \frac{dn}{dT} \right)_{T_0}. \quad (4.5)$$

Pode-se também expressar a relação (4.5) como

$$\frac{ds}{dT} = \frac{n - 1}{l} \frac{dl}{dT} + \frac{dn}{dT}, \quad (4.6)$$

em que o primeiro termo é a mudança da espessura da amostra e o segundo termo é a mudança do índice de refração. Se tratando de amostras líquidas, é assumido que as dimensões das cubetas não variem com o aumento da temperatura devido ao aquecimento do líquido pelo feixe de laser, ou seja, o primeiro termo das equações (4.5) e (4.6) é nulo. Como explicado em [12], quando o estudo é com amostras sólidas,

pode-se, sem perda de generalidade, substituir o termo  $dn/dT$  pela expressão  $ds/dT$  na teoria descrita em [1], assim, no decorrer deste trabalho, as expressões serão deduzidas para amostras sólidas, que pode ter como caso particular o estudo de amostras líquidas.

Assumindo que quando o feixe excita a amostra, a variação do caminho óptico é muito pequena, pode-se escrever esta variação como

$$s(r, z, t) \approx s_0 + \frac{ds}{dT} \Delta T(r, z, t). \quad (4.7)$$

A variação do caminho óptico induz uma variação na fase do feixe do laser de prova. Esta variação na fase é dada pela expressão

$$\Phi_{LT}(r, z, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \int_0^l \Delta s dz, \quad (4.8)$$

em que  $\lambda_p$  é o comprimento de onda do feixe de prova, e  $l$  é a espessura da amostra. Substituindo a equação (4.7) em (4.8) obtém-se a expressão para a mudança de fase induzida pelo efeito de LT na amostra

$$\Phi_{LT}(r, z, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^l [\Delta T(r, z, t) - \Delta T(0, z, t)] dz. \quad (4.9)$$

## Intensidade do campo elétrico

No capítulo 4 foi introduzida a idéia de que o feixe de prova ao atravessar a amostra, sofre uma variação na sua fase induzida pelo efeito de LT. Como visto na equação (4.9), a mudança na fase é devida a variação da temperatura da amostra. Neste capítulo serão finalmente calculadas as expressões para intensidade do feixe de prova em campo distante para cada modelo.

### 5.1 Low Absortion Model

A mudança de fase induzida pela LT para uma amostra fracamente absorvedora é

$$\Phi_{LT_{LAM}}(r, z, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^l [\Delta T_{LAM}(r, z, t) - \Delta T_{LAM}(0, z, t)] dz. \quad (5.1)$$

Lembrando que a variação de temperatura para este modelo não depende de  $z$ , a integral da equação (5.1) resulta em

$$\Phi_{LT_{LAM}}(r, t) = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} [\Delta T_{LAM}(r, t) - \Delta T_{LAM}(0, t)], \quad (5.2)$$

ou seja,

$$\Phi_{LT_{LAM}}(r, t) = \frac{2\pi l T_0}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^t \left[ \frac{2A_e e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}} - 2A_e}{\omega_{0e}^2 (1 + 2\tau/t_c)} \right] d\tau, \quad (5.3)$$

que com algumas simplificações pode-se chegar a seguinte expressão

$$\Phi_{LT_{LAM}}(r, t) = \frac{\theta}{t_c} \int_0^t \left[ \frac{1 - e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}}}{1 + 2\tau/t_c} \right] d\tau, \quad (5.4)$$

em que

$$\theta = -\frac{P_e l A_e \phi}{\lambda_p k} \frac{ds}{dT}. \quad (5.5)$$

Para encontrar a expressão para a intensidade do feixe de prova no detector, deve-se calcular a Integral de Huygens dada no apêndice B pela equação (B.6)

$$U = C \int_0^\infty e^{[-i\Phi_{LT}(g,t) - g(1+iV)]} dg, \quad (5.6)$$

em que  $g = r^2/\omega_p^2$ , sendo  $\omega_{1p}$  o raio do feixe de prova incidente na amostra. A constante  $C$  é definida por

$$C = B \frac{i\pi\omega_{1p}^2}{\lambda_p z_2} e^{-i\frac{2\pi z_2}{\lambda_p}}, \quad (5.7)$$

e  $B$  por

$$\frac{1}{\omega_{1p}} \sqrt{\frac{2P_p}{\pi}} e^{-i\frac{2\pi z_1}{\lambda_p}}. \quad (5.8)$$

Para isto, substituindo (5.4) em (5.6), e fazendo a mudança de variável  $m = \omega_{1p}^2/\omega_{0e}^2$ , que determina o grau de descasamento entre os feixes de prova e de excitação incidentes na amostra,

$$U_{LAM}(z_1 + z_2, t) = C \int_0^\infty \exp \left[ -i\frac{\theta}{t_c} \int_0^t \left[ \frac{1 - e^{-\frac{2mg}{1+2\tau/t_c}}}{1 + 2\tau/t_c} \right] d\tau - g(1 + iV) \right] dg, \quad (5.9)$$

em que  $U_{LAM}$  é o campo elétrico do feixe de prova ao atravessar a amostra.

Para encontrar a expressão da intensidade, basta calcular o valor do módulo ao quadrado do campo elétrico [1]. Assim

$$I_{LAM}(z_1 + z_2, t) = \left| C \int_0^\infty \exp \left[ -i\frac{\theta}{t_c} \int_0^t \left[ \frac{1 - e^{-\frac{2mg}{1+2\tau/t_c}}}{1 + 2\tau/t_c} \right] d\tau - g(1 + iV) \right] dg \right|^2 \quad (5.10)$$

Para os posteriores cálculos será necessário o auxílio do software *Wolfram Mathematica 7.0*.

## 5.2 Beer's Law Model

A variação da fase do feixe de prova em uma amostra com absorção óptica descrita pela Lei de Beer, é dada pela seguinte expressão

$$\Phi_{LT_{BLM}}(r, z, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^l [\Delta T_{BLM}(r, z, t) - \Delta T_{BLM}(0, z, t)] dz. \quad (5.11)$$

Fazendo algumas simplificações obtém-se

$$\Phi_{LT_{BLM}}(r, z, t) = \frac{2lT_0A_e}{2l\omega_{0e}^2} \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^l [\Delta T'_{BLM}(r, z, t) - \Delta T'_{BLM}(0, z, t)] dz. \quad (5.12)$$

em que  $\Delta T'_{BLM}(r, z, t)$  é a nova expressão para a variação da temperatura do modelo BLM devido o termo constante  $T_0A_e/\omega_{0e}^2$  colocado em evidência na expressão anterior. Pode-se introduzir a definição do parâmetro  $\theta$  na equação, de modo que obtém-se

$$\Phi_{LT_{BLM}}(r, z, t) = -\frac{\theta}{2lt_c} \int_0^l \Delta T'_{BLM}(r, z, t) - \Delta T'_{BLM}(0, z, t) dz, \quad (5.13)$$

em que

$$\theta = -\frac{P_e l A_e \phi}{\lambda_p k} \frac{ds}{dT}. \quad (5.14)$$

Devido a expressão da variação da temperatura deste modelo ser muito grande, a expressão do campo elétrico será mantida apenas na forma que se segue, na integral de Huygens

$$U(z_1 + z_2, t) = C \int_0^\infty \exp \left[ i \frac{\theta}{2lt_c} \int_0^l \Delta T'_{BLM}(r, z, t) - \Delta T'_{BLM}(0, z, t) dz - g(1 + iV) \right] dg, \quad (5.15)$$

assim, a expressão para a intensidade em campo distante para o modelo BLM é

$$I(z_1 + z_2, t) = \left| C \int_0^\infty \exp \left[ i \frac{\theta}{2lt_c} \int_0^l (\Delta T'_{BLM}(r, z, t) - \Delta T'_{BLM}(0, z, t)) dz - g(1 + iV) \right] dg \right|^2. \quad (5.16)$$

### 5.3 BLM Aproximado

Neste modelo, a fase induzida pela LT é semelhante ao modelo LAM. Isso é devido a expressão para a variação da temperatura ser a própria expressão da variação de temperatura do modelo LAM multiplicado pelo fator  $e^{-A_e z}$ , como visto anteriormente no capítulo 3. Assim a expressão da fase induzida pela LT é

$$\Phi_{LTBLMAP}(r, z, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} \int_0^l [\Delta T_{LAM}(r, t) e^{-A_e z} - \Delta T_{LAM}(0, t) e^{-A_e z}] dz, \quad (5.17)$$

de forma que se tem uma integral para resolver,

$$\Phi_{LTBLMAP}(r, t) = \frac{2\pi}{\lambda_p} \frac{ds}{dT} [\Delta T_{LAM}(r, t) - \Delta T_{LAM}(0, t)] \int_0^l e^{-A_e z} dz, \quad (5.18)$$

ou seja,

$$\Phi_{LTBLMAP}(r, t) = \frac{4A_e P_e \phi}{\lambda_p c \rho \omega_{0e}^2} \frac{ds}{dT} \times \left( \frac{e^{-A_e l} - 1}{A_e} \right) \int_0^t \left[ \frac{e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}} - 1}{(1 + 2\tau/t_c)} \right] d\tau, \quad (5.19)$$

em que o termo entre parênteses é o resultado da integração em  $z$ . Com algumas simplificações obtém-se

$$\Phi_{LTBLMAP}(r, t) = \frac{\theta}{lt_c} \frac{e^{-A_e l} - 1}{A_e} \int_0^t \left[ \frac{1 - e^{-\frac{2r^2/\omega_{0e}^2}{1+2\tau/t_c}}}{1 + 2\tau/t_c} \right] d\tau, \quad (5.20)$$

em que

$$\theta = -\frac{P_e l A_e \phi}{\lambda_p k} \frac{ds}{dT}. \quad (5.21)$$

Como foi obtida uma expressão semelhante (diferente apenas pelo valor da constante multiplicativa  $\frac{e^{-A_e l} - 1}{A_e l}$ ) ao da equação (5.4) para a fase induzida pela LT

no modelo BLM AP, as expressões para o campo elétrico e intensidade serão também semelhantes. Assim, a expressão para a intensidade do feixe de prova no detector é dada por

$$I_{BLMAP}(z_1 + z_2, t) = \left| C \int_0^\infty \exp \left[ -i \frac{\theta}{t_c} \frac{e^{-A_e l} - 1}{A_e l} \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^t \left[ \frac{1 - e^{-\frac{2mg}{1+2\tau/t_c}}}{1 + 2\tau/t_c} \right] d\tau - g(1 + iV) \right] dg \right|^2. \quad (5.22)$$

# Capítulo 6

## Comparação Entre os Modelos

Para verificar a validade dos modelos aqui descritos, foram feitas comparações através do Software *Wolfram Mathematica* entre os modelos BLM e LAM e também entre os modelos BLM e BLM AP, para uma amostra de vidro com espessura de  $100\mu m$ , com propriedades de vidros aluminossilicatos comuns produzidos pelo GEFF - UEM. Algumas características utilizadas para a realização das simulações computacionais estão disponíveis na Tabela 6.1 [7, 13].

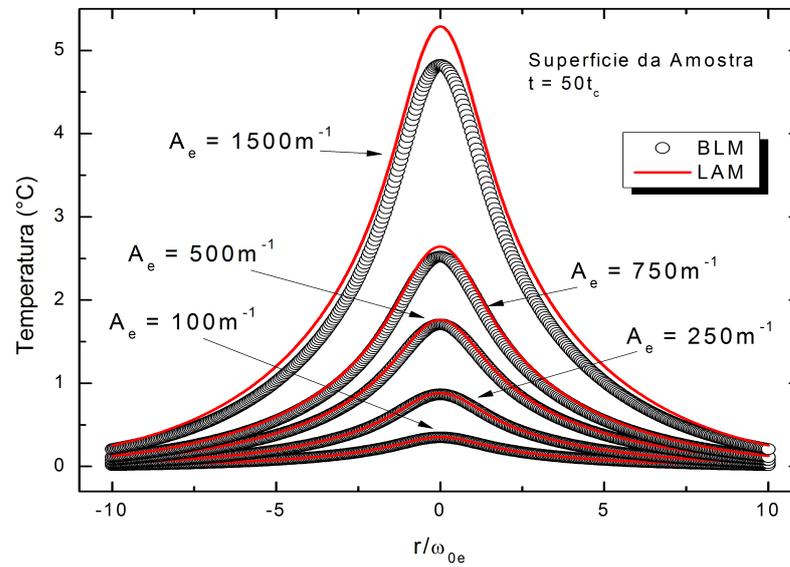
**Tabela 6.1:** Propriedades termo-ópticas utilizadas nas simulações computacionais [7, 13].

| $P_e$<br>( $mW$ ) | $D$<br>( $10^{-3}cm^2/s$ ) | $k$<br>( $W/mK$ ) | $\omega_{0e}$<br>( $\mu m$ ) | $t_c$<br>( $ms$ ) | $\frac{dS}{dT}$<br>( $10^{-6}K^{-1}$ ) | $\phi$ |
|-------------------|----------------------------|-------------------|------------------------------|-------------------|--|--------|
| 20.00             | 6.00                       | 1.50              | 44.00                        | 0.81              | 16.50                                  | 0.72   |

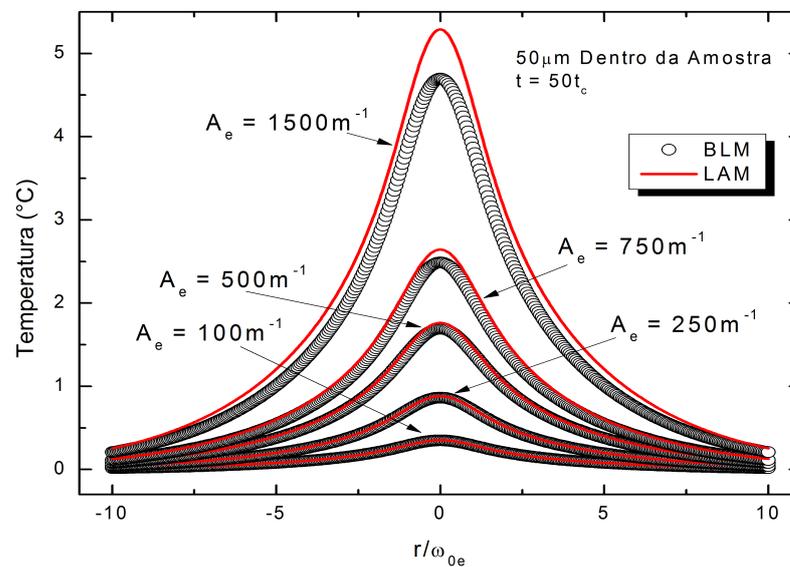
O coeficiente de absorção óptica foi deixado como um parâmetro variável.

### 6.1 BLM *versus* LAM

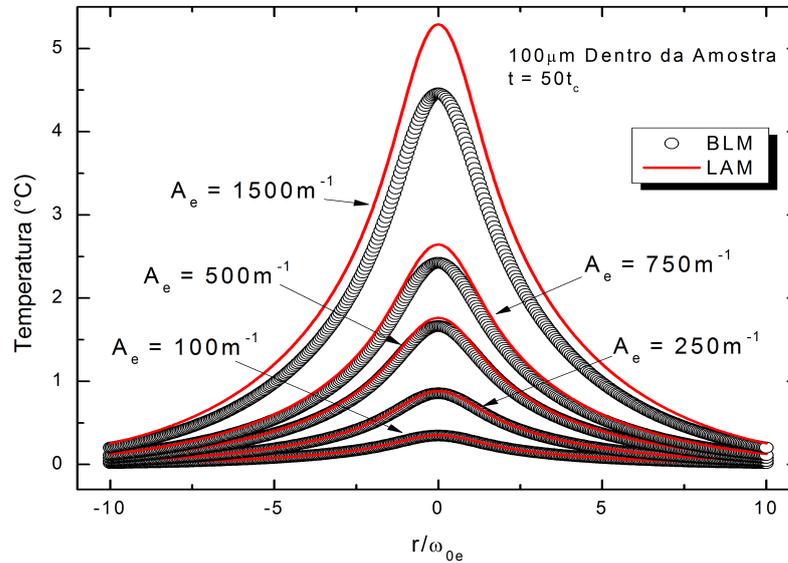
Afim de verificar como cada modelo descreve o comportamento da variação da temperatura na amostra foram simulados curvas da variação da temperatura em função da razão  $r/\omega_{0e}$  para os modelos BLM e LAM, para diferentes coeficientes de absorção em três regiões diferentes da amostra em seu comprimento, como mostradas nas Figuras 6.1, 6.2 e 6.3:



**Figura 6.1:** Variação da temperatura em  $z = 0 \mu\text{m}$  em função de  $r/\omega_{0e}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.



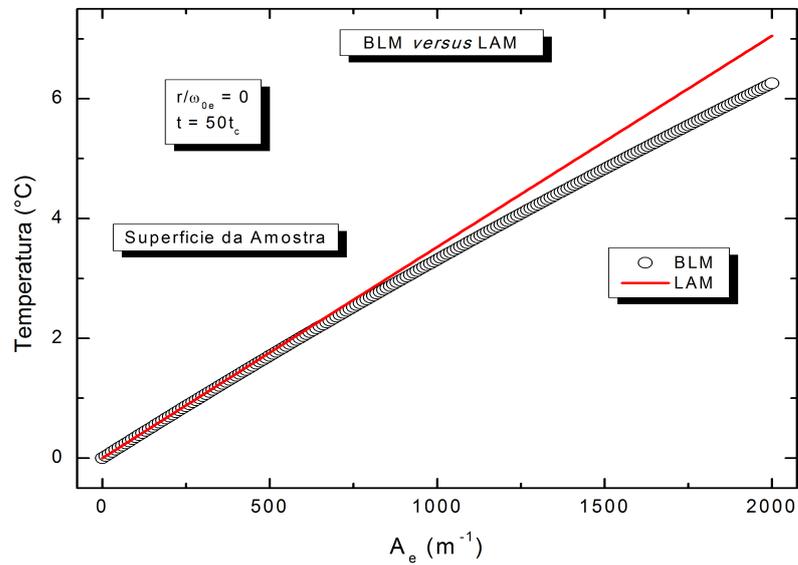
**Figura 6.2:** Variação da temperatura em  $z = 50 \mu\text{m}$  em função de  $r/\omega_{0e}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.



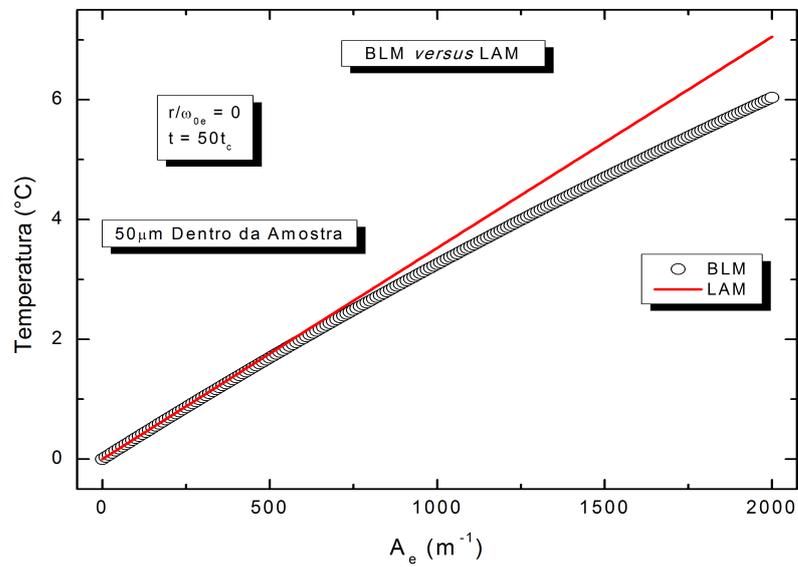
**Figura 6.3:** Variação da temperatura em  $z = 100 \mu\text{m}$  função de  $r/\omega_{0e}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

Observa-se que para as três regiões tem-se uma variação de temperatura semelhante para coeficientes de absorção no intervalo próximo a  $750 \text{ m}^{-1}$ . Com o aumento do coeficiente de absorção óptica verifica-se um maior valor para a variação da temperatura na curva simulada com o modelo LAM do que na curva simulada com o modelo BLM, principalmente no centro do feixe onde este é mais intenso, devido a não dependência com a absorção no eixo azimutal.

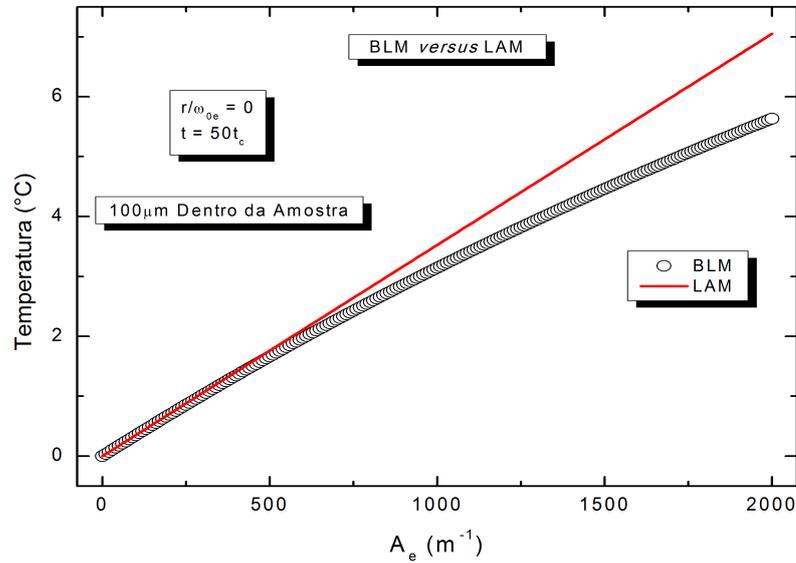
A variação da temperatura no centro da amostra, em função do coeficiente de absorção óptica, é mostrada nas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6, nas mesmas três regiões descritas acima. O centro da amostra foi escolhido para esta comparação devido ser neste ponto onde é observado o maior desvio do valor da variação da temperatura entre os modelos. A partir destes gráficos observou-se a diferença no valor da temperatura para um coeficiente de absorção em torno de  $1000 \text{ m}^{-1}$  na superfície da amostra e  $750 \text{ m}^{-1}$  em  $z = 100 \mu\text{m}$ . Os gráficos também indicam que quanto maior o coeficiente de absorção óptica, menos precisa será a descrição do modelo LAM para este efeito.



**Figura 6.4:** Variação da temperatura em função do coeficiente de absorção óptica em  $z = 0$   $\mu m$  para  $r = 0$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

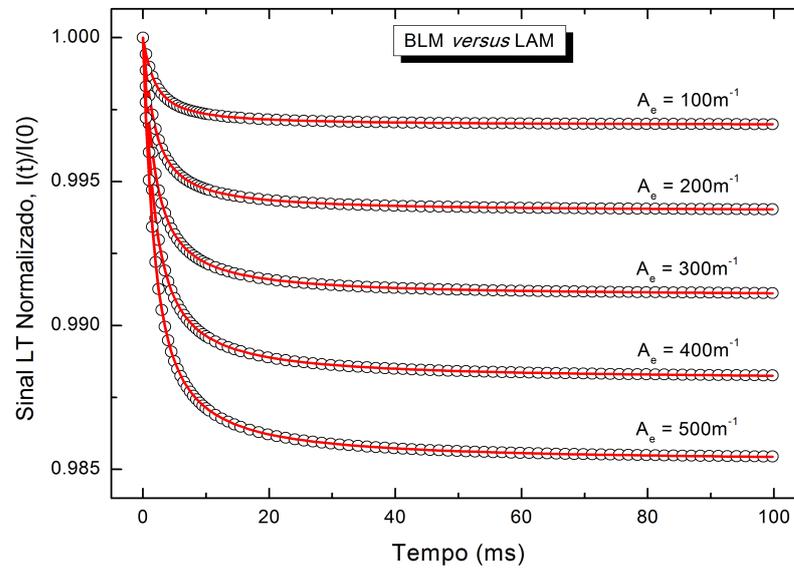


**Figura 6.5:** Variação da temperatura em função do coeficiente de absorção óptica em  $z = 50$   $\mu m$  para  $r = 0$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

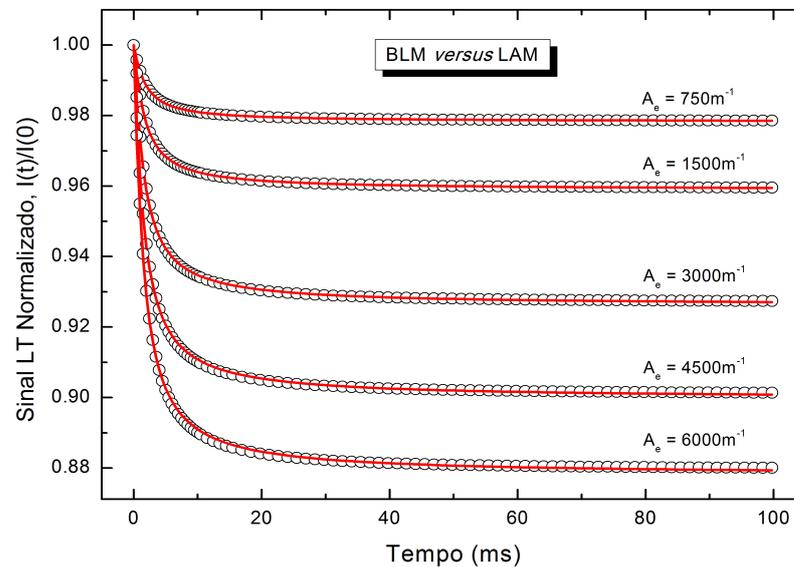


**Figura 6.6:** Variação da temperatura em função do coeficiente de absorção óptica em  $z = 100 \mu m$  para  $r = 0$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

Apesar dos gráficos que demonstram como cada modelo descreve o comportamento da temperatura na amostra, a grandeza mensurável experimentalmente, que indica o efeito de LT é a intensidade do feixe de prova no sensor. Para isso, foram simulados gráficos com o modelo BLM, que representa o efeito real de LT para qualquer coeficiente de absorção óptica. Em seguida foram feitos ajustes dos transientes, para os parâmetros  $\theta$  e  $t_c$  que são os parâmetros relacionados com as propriedades termo-ópticas do material com o modelo LAM, gerando outros valores destes parâmetros. Assim foram gerados transientes com o modelo LAM a partir dos parâmetros obtidos pelos ajustes. Os parâmetros geométricos utilizados para as simulações foram  $m = 35$  e  $V = 8$ . Os transientes obtidos estão representados nas Figuras 6.7 e 6.8.



**Figura 6.7:** Transientes da intensidade do sinal de LT em função do tempo para diferentes coeficientes de absorção óptica. Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.



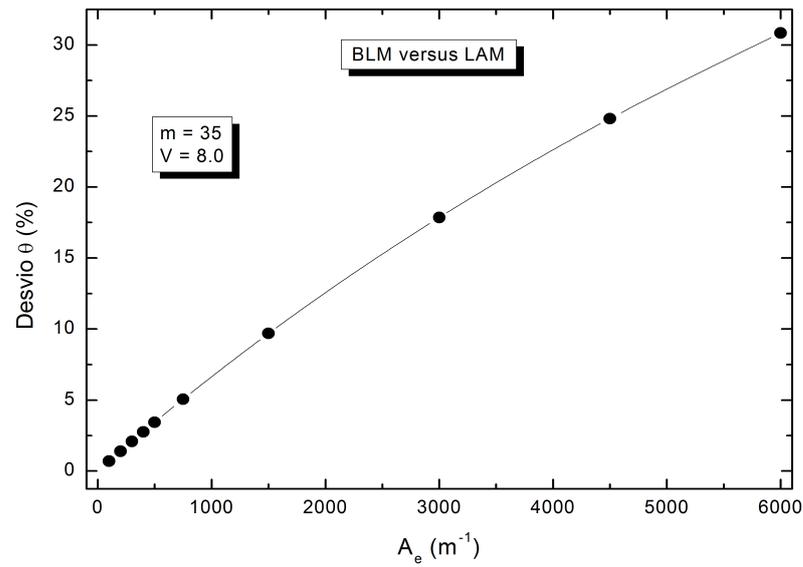
**Figura 6.8:** Transientes da intensidade do sinal de LT em função do tempo para diferentes coeficientes de absorção óptica acima de  $500\text{ m}^{-1}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

Observa-se nos gráficos que os ajustes ficam satisfatórios para coeficientes de absorção óptica de até aproximadamente  $3000\text{ m}^{-1}$  e começam a entrar em discordância para coeficientes maiores. Porém, para determinar a precisão dos ajustes do modelo LAM com os dados gerados pelo BLM obteve-se os desvios dos parâmetros

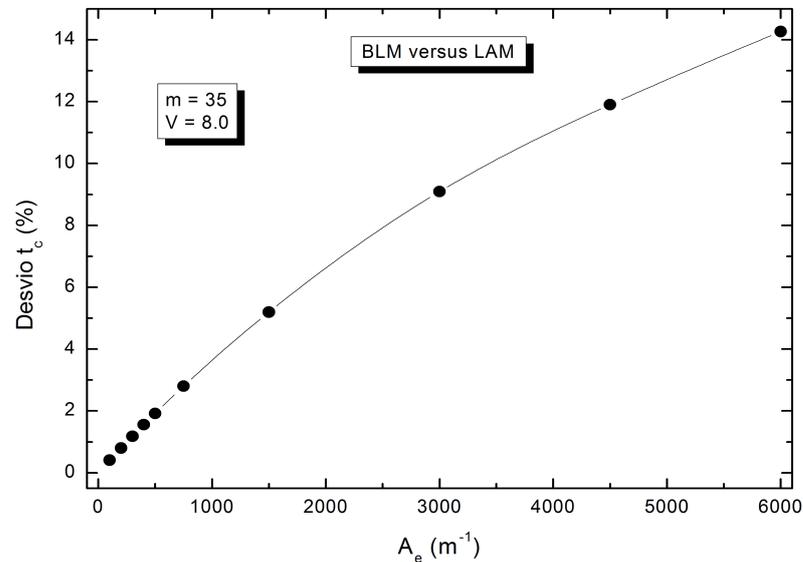
ajustados  $\theta$  e  $t_c$  em função de diferentes coeficientes de absorção através da equação (6.1),

$$D_j(\Lambda) = \left| \frac{j_{real} - j_{ajuste}}{j_{real}} \right| \times 100, \quad (6.1)$$

em que  $\Lambda$  indica o parâmetro variável dos transientes gerados, neste caso o coeficiente de absorção  $A_e$ ,  $j$  indica ou  $\theta$  ou  $t_c$  e os subíndices real e ajuste indicam se os parâmetros são os utilizados para gerar os transientes do modelo BLM ou do ajuste com o modelo LAM respectivamente. Nas Figuras 6.9 e 6.10 verifica-se que quanto maior o coeficiente de absorção, menor será a precisão do modelo LAM para descrever o efeito de LT.



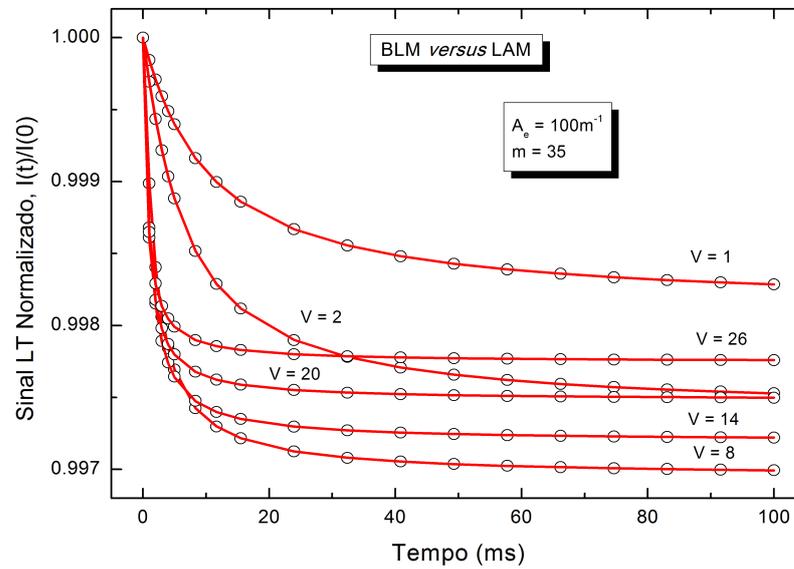
**Figura 6.9:** Desvio do parâmetro  $\theta$  em função do coeficiente de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.



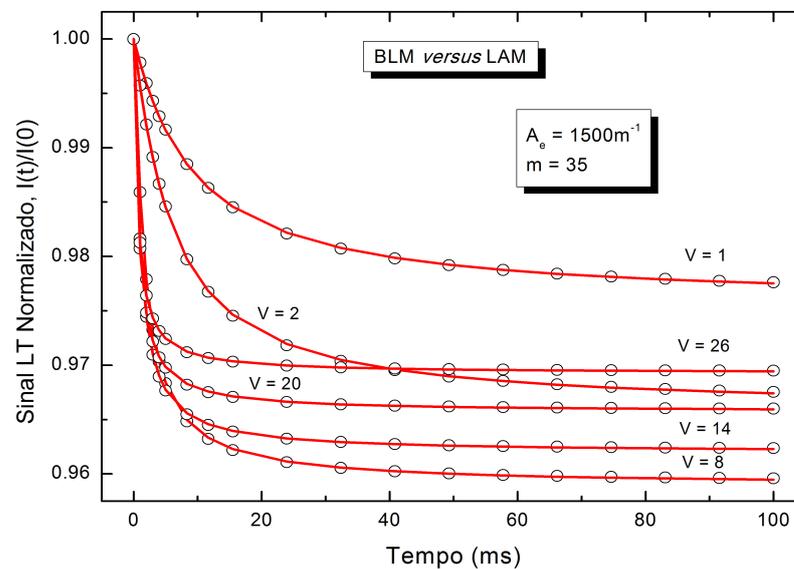
**Figura 6.10:** Desvio do parâmetro  $t_c$  em função do coeficiente de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

Também foram gerados transientes com dois diferentes coeficientes de absorção óptica e variando os parâmetros geométricos do experimento  $m$  e  $V$ , afim de verificar a influência destes parâmetros sobre a descrição do efeito pelos modelos. Inicialmente foram gerados transientes com o modelo BLM para coeficientes de absorção<sup>1</sup>  $100 m^{-1}$  e  $1500 m^{-1}$  para diferentes valores de  $V$  e com  $m = 35$ , assim estes transientes também foram ajustados com o modelo LAM que obteve valores para  $\theta$  e  $t_c$ . A partir destes valores foram simulados transientes com o modelo LAM. Os gráficos obtidos estão apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12.

<sup>1</sup>Valores escolhidos aleatoriamente, sendo que um havia obtido um ajuste em bom acordo e outro valor qualquer no intervalo entre  $750$  e  $6000 m^{-1}$ .



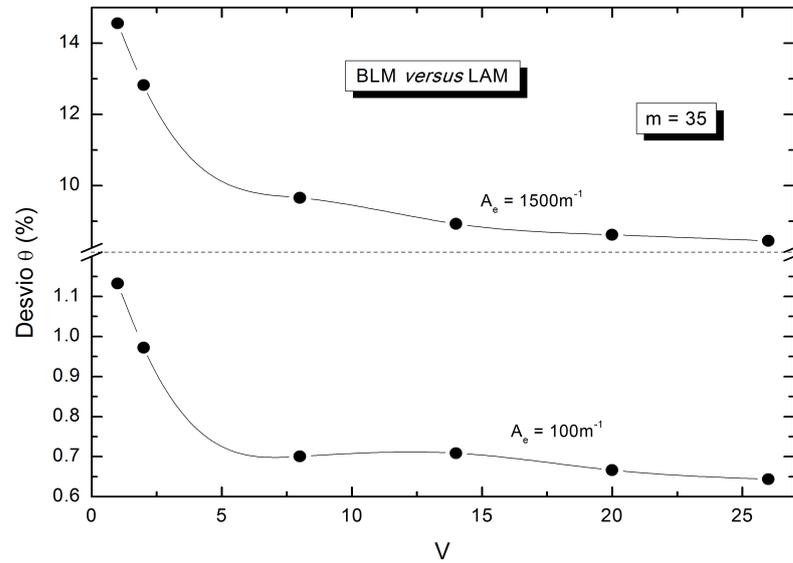
**Figura 6.11:** Transientes da intensidade do sinal de LT em função do tempo para uma amostra com o coeficiente de absorção  $100 \text{ m}^{-1}$  para diferentes valores de  $V$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.



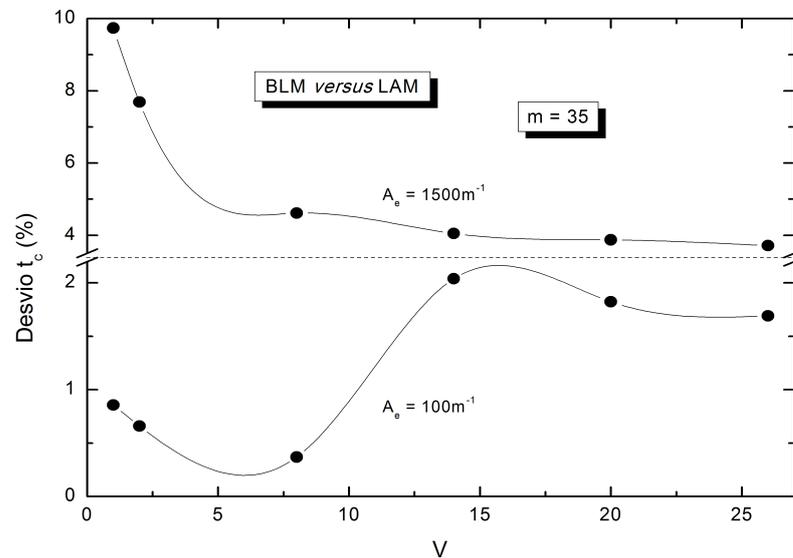
**Figura 6.12:** Transientes da intensidade do sinal de LT em função do tempo para uma amostra com o coeficiente de absorção  $1500 \text{ m}^{-1}$  para diferentes valores de  $V$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

A partir das Figuras 6.11 e 6.12 pode-se notar que os ajustes com o modelo LAM se mantêm em boa concordância. Para observar a precisão deste modelo em função do parâmetro  $V$  foram calculados os desvios dos valores dos parâmetros  $\theta$  e

$t_c$  em função de  $V$  através da equação (6.1) e confeccionados os gráficos, mostrados nas Figuras 6.13 e 6.14.



**Figura 6.13:** Desvio nos valores de  $\theta$  em função do parâmetro geométrico  $V$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

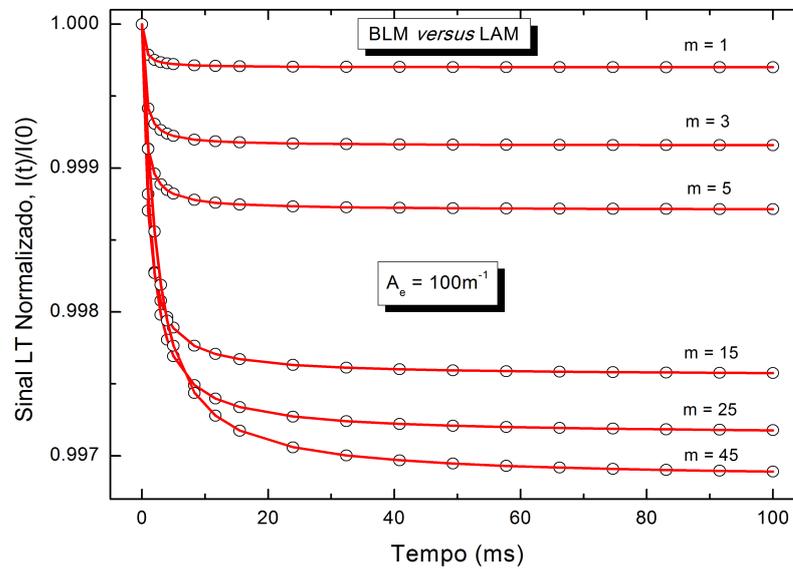


**Figura 6.14:** Desvio nos valores de  $t_c$  em função do parâmetro geométrico  $V$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

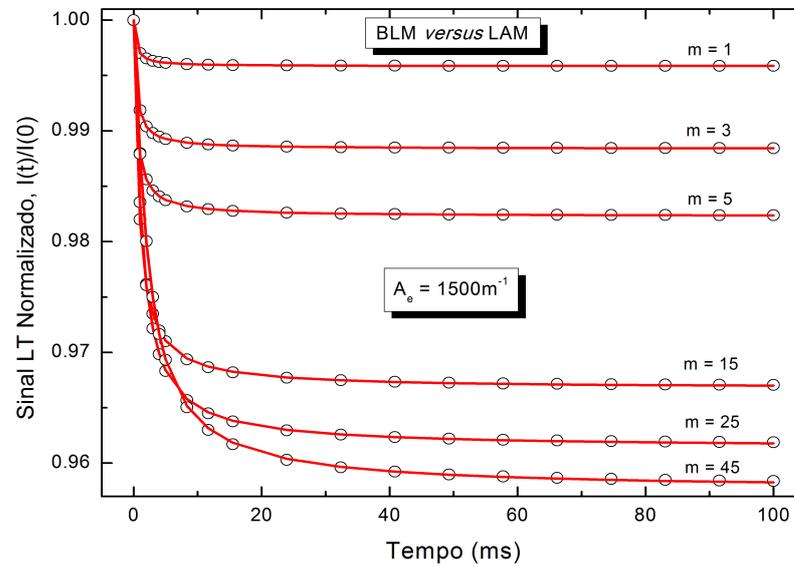
Pode-se observar que para os valores de  $\theta$  o desvio diminui com o aumento de  $V$  se tornando aproximadamente constante após  $V = 8$ , porém a variação mais

significativa é visível para os valores ajustados com o coeficiente de absorção maior, levando em conta que esta variação significativa é de apenas 5%. Para o parâmetro  $t_c$  obteve-se novamente uma variação mais significativa, de aproximadamente 6% para o ajuste com o coeficiente de absorção óptica mais alto.

Outra análise foi feita para os mesmos coeficientes de absorção óptica, porém com o parâmetro  $V = 8$  e diferentes valores de  $m$ . O procedimento para a geração dos transientes e ajustes foram os mesmos utilizados anteriormente. Os gráficos obtidos estão apresentados nas Figuras 6.15 e 6.16.

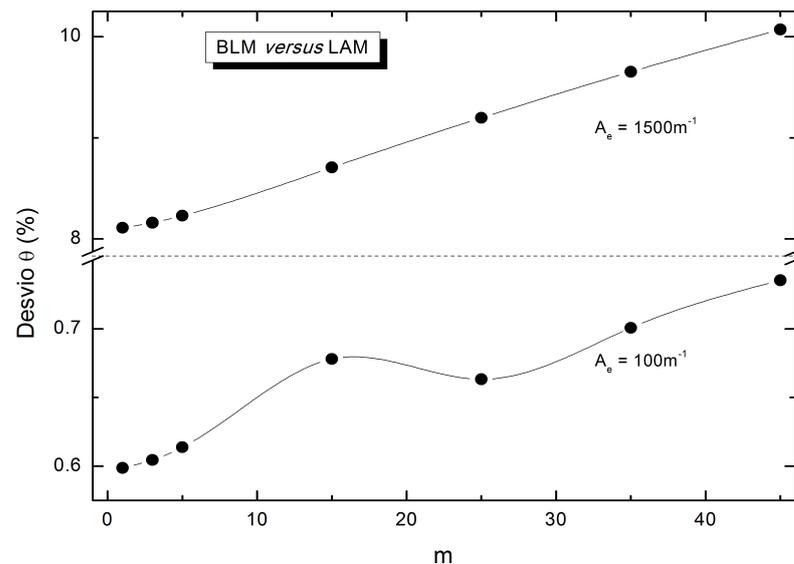


**Figura 6.15:** Transientes da intensidade do sinal de LT em função do tempo para uma amostra com o coeficiente de absorção  $100 \text{ m}^{-1}$  para diferentes valores de  $m$ . Os pontos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

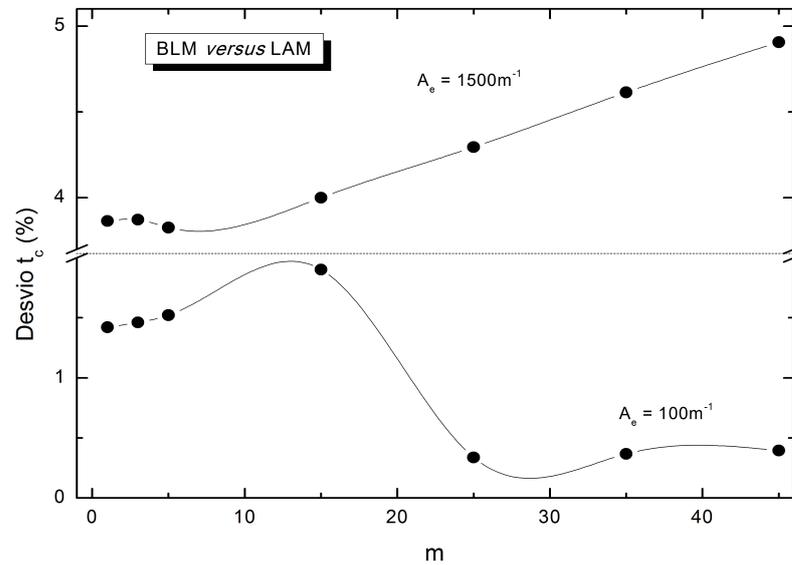


**Figura 6.16:** Transientes da intensidade do sinal de LT em função do tempo para uma amostra com o coeficiente de absorção  $1500 \text{ m}^{-1}$  para diferentes valores de  $m$ . Os pontos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo LAM.

Os ajustes continuam satisfatórios para os dois coeficientes de absorção óptica. Os desvios de  $\theta$  e  $t_c$  também foram calculados através da equação (6.1) e a partir deles confeccionados gráficos, como mostrados nas Figuras 6.17 e 6.18.



**Figura 6.17:** Desvio nos valores de  $\theta$  em função do parâmetro geométrico  $m$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

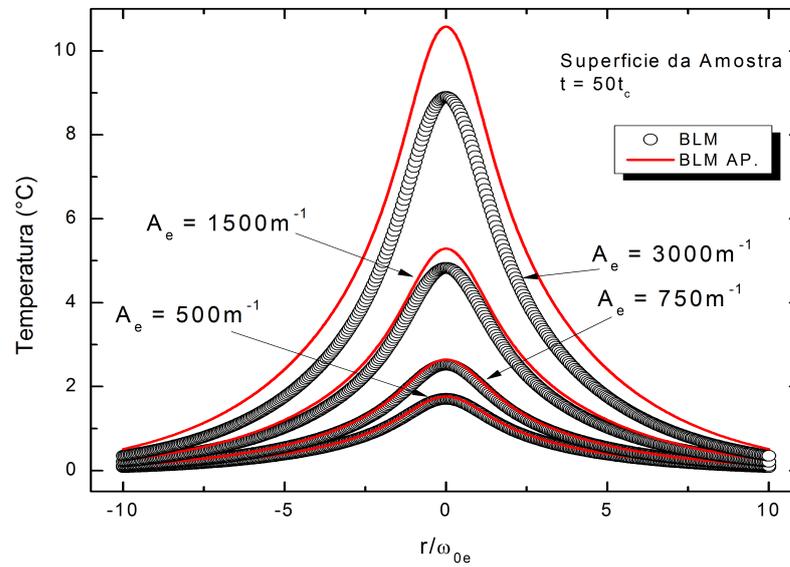


**Figura 6.18:** Desvio nos valores de  $t_c$  em função do parâmetro geométrico  $m$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

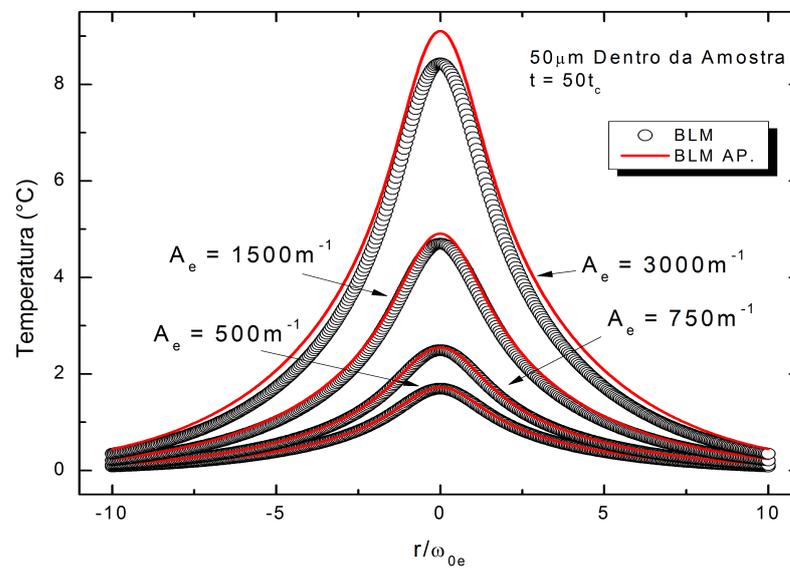
A influência de  $m$  sobre os valores de  $\theta$  é muito pequena, de modo que aumenta o desvio para maiores valores de  $m$ . A variação do desvio foi de aproximadamente 2% para o coeficiente de absorção óptica igual a  $1500 m^{-1}$ . Para o parâmetro  $t_c$ , a influência de  $m$  também é muito pequena, para os dois casos, com aproximadamente 2% de variação.

## 6.2 BLM *versus* BLM Aproximado

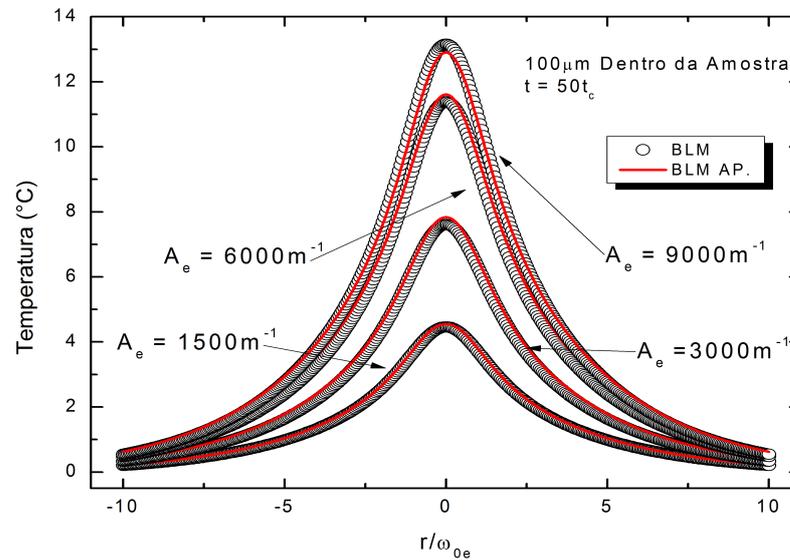
As análises feitas entre os modelos BLM e BLM AP foram semelhantes as análises feitas na seção anterior. As Figuras 6.19, 6.20 e 6.21 mostram a variação da temperatura em função de  $r/\omega_{0e}$ . Observa-se que o modelo BLM AP descreve melhor a variação da temperatura para coeficientes de absorção altos em  $z = 100 \mu m$  mas para  $z = 0$  e  $z = 50 \mu m$  não descreve tão bem quanto.



**Figura 6.19:** Variação da temperatura em  $z = 0 \mu\text{m}$  em função de  $r/\omega_{0e}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo BLM AP.

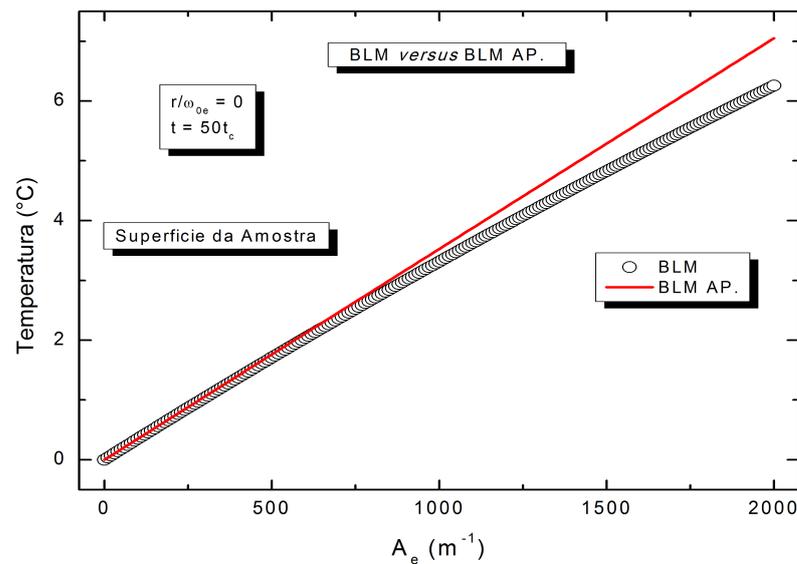


**Figura 6.20:** Variação da temperatura em  $z = 50 \mu\text{m}$  em função de  $r/\omega_{0e}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo BLM AP.

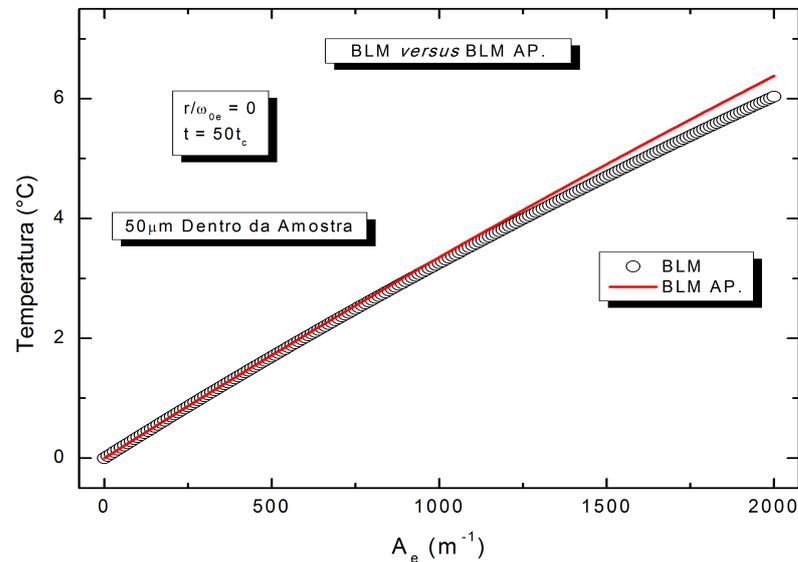


**Figura 6.21:** Variação da temperatura em  $z = 100 \mu\text{m}$  em função de  $r/\omega_{0e}$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo BLM AP.

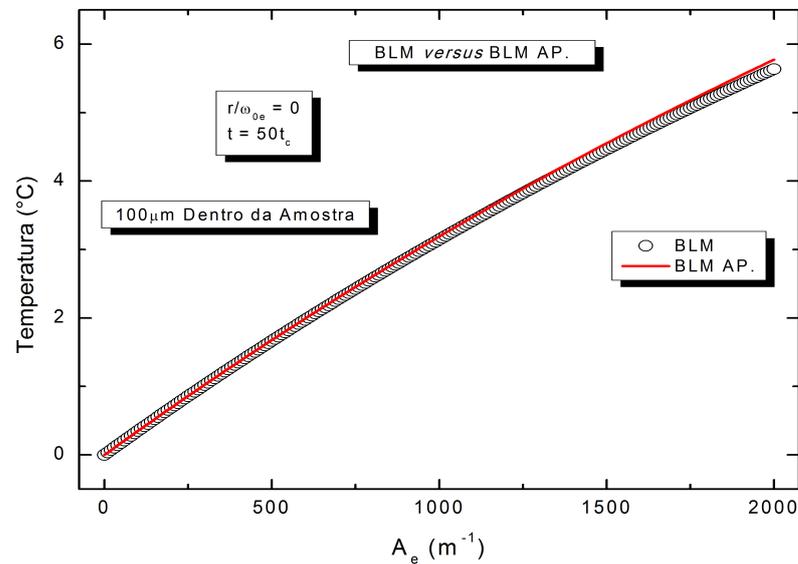
Para confirmar estes resultados foi também avaliado o comportamento da temperatura no centro da amostra em função do coeficiente de absorção. Como observado nas Figuras 6.22, 6.23 e 6.24, a temperatura na amostra é melhor descrita pelo modelo BLM AP em  $z = 100 \mu\text{m}$  para coeficientes de absorção óptica maiores.



**Figura 6.22:** Variação da temperatura em função do coeficiente de absorção óptica em  $z = 0 \mu\text{m}$  para  $r = 0$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo BLM AP.



**Figura 6.23:** Variação da temperatura em função do coeficiente de absorção óptica em  $z = 50 \mu m$  para  $r = 0$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo BLM AP.

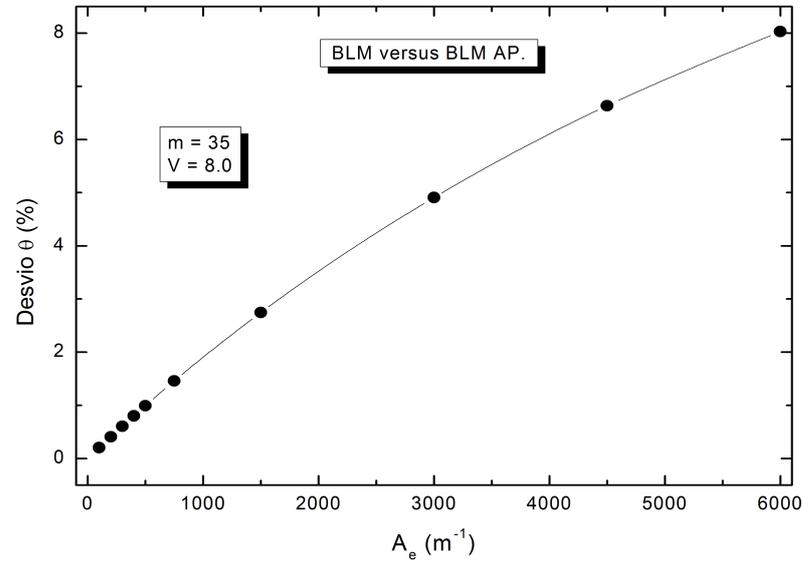


**Figura 6.24:** Variação da temperatura em função do coeficiente de absorção óptica em  $z = 100 \mu m$  para  $r = 0$ . Os círculos abertos representam o modelo BLM e a linha vermelha sólida representa o modelo BLM AP.

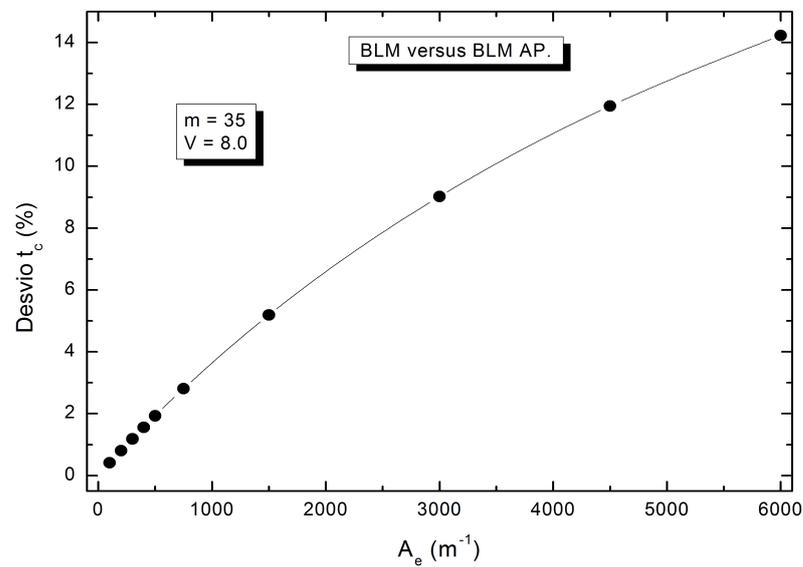
Foram simulados transientes com o modelo BLM para diferentes coeficientes de absorção óptica em função do tempo e depois ajustadas com o modelo BLM AP. obtendo valores dos parâmetros  $\theta$  e  $t_c^2$ . Os valores para os desvios dos dois parâmetros

<sup>2</sup>As imagens dos transientes não serão mostradas neste trabalho devido a grande semelhança

foram também obtidos através da equação (6.1), tais valores estão representados nas Figuras 6.25 e 6.26:



**Figura 6.25:** Desvio do parâmetro  $\theta$  em função do coeficiente de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

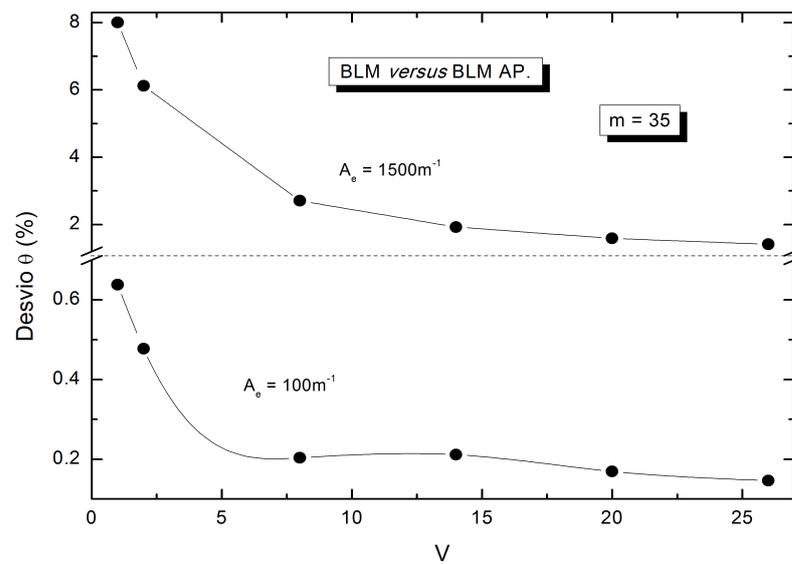


**Figura 6.26:** Desvio do parâmetro  $t_c$  em função do coeficiente de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

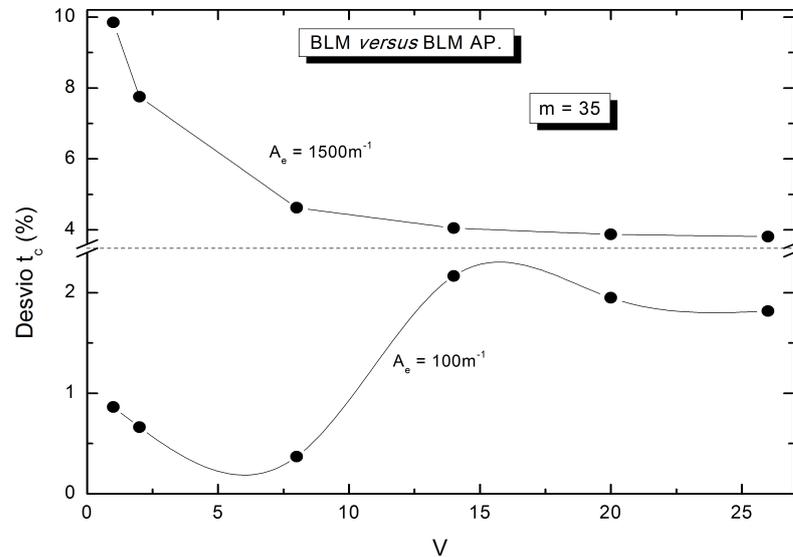
com as Figuras 6.7 e 6.8, do mesmo modo que, quando forem tratados neste texto sobre transientes suas imagens serão omitidas devido o motivo com as imagens obtidas pelo mesmos procedimentos na seção anterior.

Os desvios dos parâmetros  $\theta$  e  $t_c$  possuem um padrão semelhante aos desvios em função do coeficiente da absorção óptica da seção anterior, porém o valor do desvio no parâmetro  $\theta$  se torna menor, devido a sua dependência explícita com o coeficiente de absorção óptica. Já o parâmetro  $t_c$  mantém valores muito semelhantes no desvio, isto porque este parâmetro não tem dependência explícita com o coeficiente de absorção óptica, e que apesar da equação para a intensidade no fotodetector ser diferente para os modelos BLM AP e LAM, isto nada influencia na obtenção do parâmetro  $t_c$ .

Transientes com coeficientes de absorção óptica fixos e diferentes valores dos parâmetros  $V$  e  $m$  foram gerados, e os gráficos para os respectivos desvios nos parâmetros  $\theta$  e  $t_c$  foram confeccionados a partir da equação (6.1). Os desvios em função de  $V$  são mostrados nas Figuras 6.27 e 6.28.



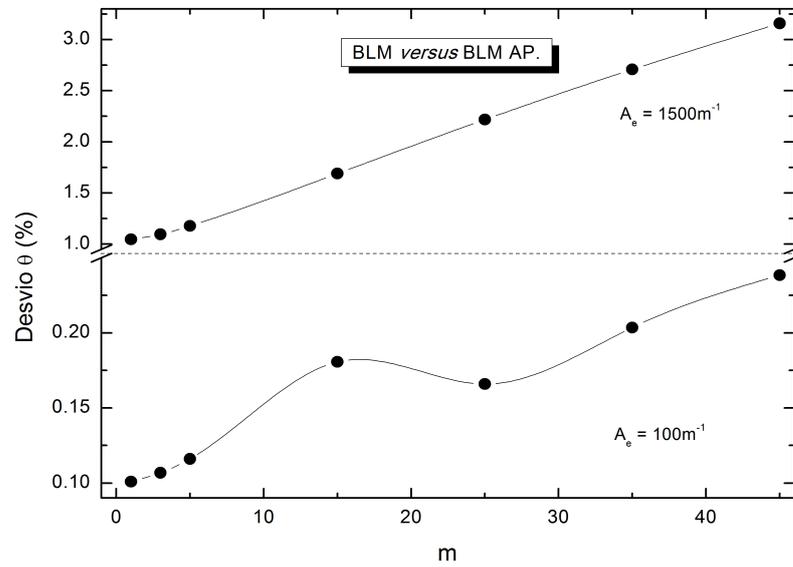
**Figura 6.27:** Desvio nos valores de  $\theta$  em função do parâmetro geométrico  $V$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.



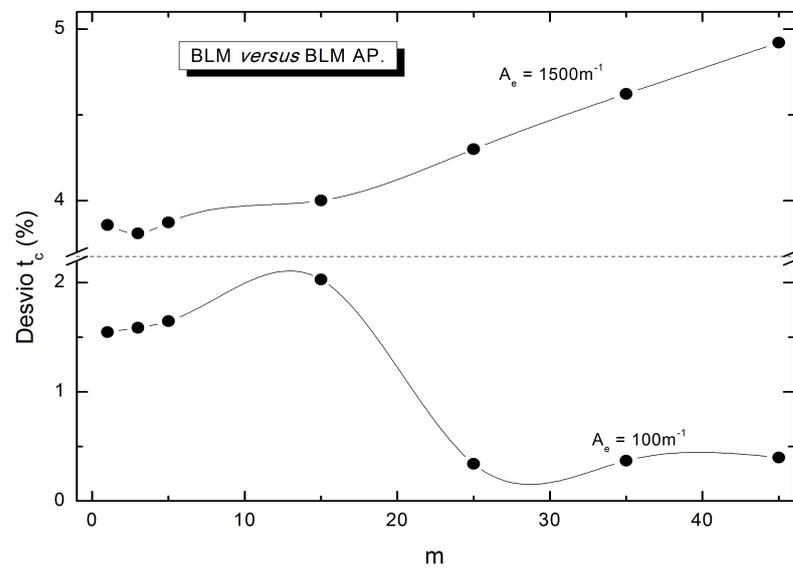
**Figura 6.28:** Desvio nos valores de  $t_c$  em função do parâmetro geométrico  $V$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

Semelhanças entre os gráficos das Figuras 6.27 e 6.14 com as Figuras 6.13 e 6.14, de forma que o desvio no parâmetro  $\theta$  sofre uma diminuição em seu valor comparado com o modelo LAM, enquanto que para o parâmetro  $t_c$  permanece muito próximo.

Por fim, transientes com coeficientes de absorção óptica  $100 m^{-1}$  e  $1500 m^{-1}$  em função de  $m$  foram gerados. Gráficos para os desvios foram gerados e mostrados nas Figuras 6.29 e 6.30. Como esperado, os resultados foram semelhantes, porém com uma diminuição nos valores dos desvios para o parâmetro  $\theta$ . Para o parâmetro  $t_c$  mais uma vez foram obtidos valores muito próximos aos valores mostrados na Figura 6.18.



**Figura 6.29:** Desvio nos valores de  $\theta$  em função do parâmetro geométrico  $m$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.



**Figura 6.30:** Desvio nos valores de  $t_c$  em função do parâmetro geométrico  $m$  para os dois diferentes coeficientes de absorção óptica. A linha que liga os pontos é apenas um guia visual.

# Capítulo 7

## Conclusão

Neste trabalho foram comparados três modelos teóricos que descrevem o efeito de LT para uma amostra específica com propriedades comuns de vidros aluminossilicatos [7, 13] com  $100 \mu m$  de espessura.

A fim de verificar a precisão dos modelos LAM e BLM AP, evidenciando o efeito de LT na amostra, foram simulados gráficos que descrevem o comportamento da temperatura na amostra a partir de um feixe Gaussiano no modo  $TEM_{00}$  sendo verificado que o modelo LAM descreve de modo muito semelhante ao modelo tomado como padrão para coeficientes de absorção na faixa de até  $1000 m^{-1}$  em toda a amostra. Já para o modelo BLM AP notou-se uma melhor aproximação para coeficientes na mesma faixa do modelo LAM para a metade da amostra e para a sua face oposta.

Medidas experimentais detectam a intensidade do feixe de prova no fotodetector, devido a isso foram gerados transientes para diferentes coeficientes de absorção óptica. Observou-se que para o modelo LAM, nesta amostra, que os ajustes estão em bom acordo em torno de  $4500 m^{-1}$ , entretanto o valor do desvio nos parâmetros  $\theta$  e  $t_c$  aumentam juntamente com o coeficiente de absorção. Para o modelo BLM AP verificou-se que o desvio no valor de  $\theta$  diminui comparado ao desvio do modelo LAM, o que mostra uma melhor descrição do efeito através deste modelo. Para o parâmetro  $t_c$  observou-se valores muito próximos, isto se deve ao fato deste parâmetro não depender diretamente do coeficiente de absorção óptica do material, e sim apenas de sua difusividade térmica.

Transientes para diferentes valores dos parâmetros geométricos  $V$  e  $m$  foram gerados para o detalhamento sobre a influência destes parâmetros no efeito de LT. Verificou-se que para o modelo LAM, sua dependência com o parâmetro  $V$  mostra

uma diminuição no desvio do parâmetro  $\theta$  com o aumento de  $V$ , porém o valor deste desvio se mantém aproximadamente constante a partir de um valor para  $V = 10$ . Para o modelo BLM AP, observou-se um mesmo comportamento no desvio do parâmetro  $\theta$ , porém novamente foram obtidos valores menores do que os obtidos para o modelo LAM. Para o parâmetro  $t_c$  foram obtidos valores muito próximos para os dois casos em que a influência do parâmetro  $V$  sobre os valores de coeficientes de absorção óptica mais altos é basicamente a mesma sobre os valores de  $\theta$ , e para os valores menores de coeficiente de absorção observou-se uma variação de aproximadamente 2% no desvio.

A dependência dos parâmetros de ajuste com o parâmetro geométrico  $m$  também foram estudadas mostrando um aumento no desvio do parâmetro  $\theta$  para os modelos LAM e BLM AP, e que novamente, o segundo possui valores menores neste desvio. Para o parâmetro  $t_c$  nota-se que há um aumento no desvio para coeficientes de absorção óptica maiores, mas para coeficientes de absorção menores se mantém aproximadamente constante.

Apesar dos parâmetros geométricos  $V$  e  $m$  influenciarem nos valores dos desvios dos parâmetros  $t_c$  e  $\theta$ , notou-se que a maior influência está por parte do coeficiente de absorção óptica. Assim, pode-se concluir que para amostras que seguem os parâmetros deste trabalho podem ter dados experimentais ajustados com o modelo BLM AP, devido sua simplicidade matemática e menor necessidade de recursos computacionais.

Acredita-se que a precisão para a descrição do efeito de LT pelos modelos LAM ou BLM AP é aceitável mesmo para coeficientes de absorção óptica acima de  $1000\text{ m}^{-1}$  devido a espessura da amostra tratada aqui neste trabalho.

Os resultados apresentados neste trabalho ajudam a criar um mapa de parâmetros ideais  $m$ ,  $V$ , e o tipo de modelo usado, para a realização dos experimentos de LT, estes parâmetros são dados em termos das propriedades dos materiais.

# Apêndice **A**

## Equação de difusão de calor

Suponha um volume fechado  $\nu$ , limitado por uma superfície  $S$  isolado. Assumindo que num dado ponto  $(x, y, z)$  e em um dado tempo  $t$  este ponto possui uma temperatura  $T(x, y, z, t)$ . Quando a temperatura não é constante dentro deste volume, o fluxo de calor acontece das partes com temperaturas mais altas para as temperaturas mais baixas. Assume-se que a condução de calor neste volume é linear, ou obedece a lei de Fourier.

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \quad (\text{A.1})$$

sendo  $k$  a condutividade térmica, dada em  $J \cdot s^{-1} \cdot cm^{-1} \cdot K^{-1}$ . O influxo de calor que passa pela superfície  $S$  por unidade de tempo é

$$Q' = - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.2})$$

Se, em adição, calor é gerado (por uma reação química exotérmica por exemplo) em uma taxa dada por  $s(x, y, z)$  por unidade de tempo e unidade de volume, então o calor total recebido pelo volume  $\nu$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é

$$Q = \left[ - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} + \int_\nu s d\nu \right] \Delta t, \quad (\text{A.3})$$

que também pode ser escrita como

$$Q = \left[ \oint_S k\nabla T \hat{n} \cdot d\mathbf{S} + \int_\nu s d\nu \right] \Delta t. \quad (\text{A.4})$$

De acordo com a fórmula da calorimetria, essa quantidade de calor aumentará a temperatura dentro de  $\nu$  por uma quantidade  $\Delta T$  tal que

$$Q = \int_{\nu} c\rho\Delta T d\nu, \quad (\text{A.5})$$

em que  $\rho$  é a densidade de massa dada em  $g/cm^3$  e  $c$  é o calor específico dado em  $J/Kg \cdot K$ . Entende-se que  $\nu$  é suficientemente pequeno e uma única temperatura  $T$  pode ser atribuída a todo volume, então

$$\oint_S k\nabla T \hat{n} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\nu} \left[ c\rho \frac{\Delta T}{\Delta t} - s \right] d\nu. \quad (\text{A.6})$$

Considerando que o intervalo de tempo  $\Delta t$  é muito pequeno (ou infinitesimal) pode-se trocar  $\frac{\Delta T}{\Delta t}$  por  $\frac{\partial T}{\partial t}$  na equação (A.6). Aplicando o teorema da divergência<sup>1</sup> do lado esquerdo da equação (A.6)

$$k \int_{\nu} \nabla^2 T d\nu = \int_{\nu} \left[ c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - s \right] d\nu. \quad (\text{A.7})$$

Assumindo que  $T(x, y, z, t)$  e  $s(x, y, z, t)$  sejam bem comportadas, suaves, contínuas e que os integrandos são não nulos e definidos para todo volume pode-se assumir que

$$D\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{s}{c\rho}, \quad (\text{A.8})$$

em que  $D = \frac{k}{c\rho}$  e  $\frac{s}{c\rho}$  é o termo de fonte. Esta equação é conhecida Equação de Difusão de Calor, de também pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta T(r, z, t) - D\nabla^2 \Delta T(r, z, t) = Q(r)Q(z)Q(t), \quad (\text{A.9})$$

em que  $Q(r)$  é o termo de fonte dependente da coordenada radial da amostra,  $Q(z)$  é o termo de fonte referente a coordenada azimutal da amostra e  $Q(t)$  é o termo de fonte que é determinado pelo modo em que o *laser* é emitido na amostra.

---

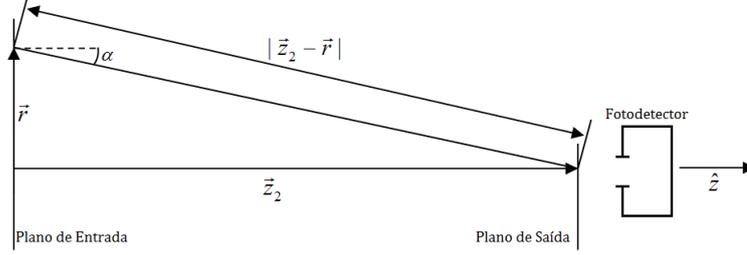
<sup>1</sup> $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\nu} \nabla \mathbf{A} d\nu$

## Propagação do Feixe de Prova

No efeito de LT, o feixe de laser ao excitar a amostra ocasiona uma variação na espessura da amostra fazendo com que haja uma variação no caminho óptico. O feixe de prova, ao atravessar a amostra sofre um efeito semelhante ao que se ele passasse por um meio difrator. Sendo assim para descrever a propagação do feixe de prova pode-se utilizar a teoria de difração de Fresnel e o princípio de Huygens. O princípio de Huygens diz o seguinte [6]

“Dada uma distribuição inicial do campo elétrico,  $E_0(r_0, z_0)$ , em uma superfície fechada  $S_0$ , pode-se considerar cada ponto nessa superfície como uma fonte de uma nova onda, ou *wavelets* de Huygens. O campo resultante em qualquer outro ponto do espaço,  $E(r, z)$ , pode ser calculado somando todos esses wavelets provindos de todos os pontos da superfície  $S_0$ .”

Deste modo pode-se considerar que a onda que chega no detector (ou plano de saída) é a superposição de ondas provindas de todos os pontos da superfície da amostra (ou plano de entrada). A Figura B.1 mostra a representação do sistema descrito acima:



**Figura B.1:** Esquema da geometria da frente de onda da luz laser antes do plano de entrada [11].

Pode-se escrever a amplitude da onda do feixe de prova no centro do plano de saída matematicamente [11]

$$U_{PS}(t) = \frac{i}{\lambda} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_{PE}(r, t) \left( \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \right) \frac{1}{|z_2 - r|} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}|z_2 - r|} r dr d\theta, \quad (\text{B.1})$$

em que  $U_{PE}(r, t)$  é a amplitude da onda no plano de entrada.

Simplificando esta expressão, são feitas aproximações supondo que  $z_2 \gg r$ :

$$\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \approx 1$$

$$|z_2 - r| \approx z_2$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} |z_2 - r| = \frac{2\pi}{\lambda} (z_2^2 + r^2)^{1/2} \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left( z_2 + \frac{r^2}{2z_2} \right),$$

assim, a equação (B.1) fica

$$U_{PS}(t) = A \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U_{PE}(r, t) e^{-i\frac{\pi}{\lambda} \frac{r^2}{z_2}} r dr d\theta. \quad (\text{B.2})$$

A amplitude da onda do feixe de prova antes de passar pela amostra é [11]

$$U_{PE}(r, t) = \sqrt{\frac{2P_p}{\pi}} \frac{1}{\omega_{1p}} \left( e^{-\frac{r^2}{\omega_{1p}^2}} \right) e^{-\frac{i}{\lambda p} \left( 2z_1 + \frac{r^2}{R_{1p}} \right)}, \quad (\text{B.3})$$

em que  $P_p$  é a potência do feixe e  $R_{1p}$  é o raio de curvatura do feixe em  $z_1$ . Quando o feixe de prova atinge a amostra, ele adquire uma fase em sua amplitude, de modo que a expressão (B.3) se torna

$$U_{PE}(r, t) = \sqrt{\frac{2P_p}{\pi}} \frac{1}{\omega_{1p}} \left( e^{-\frac{r^2}{\omega_{1p}^2}} \right) e^{-\frac{i}{\lambda_p} \left( 2z_1 + \frac{r^2}{R_{1p}} + \Phi(r, t) \right)}. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a expressão (B.4) em (B.2), fazendo a integral em  $d\theta$  e definindo

$$B = \frac{1}{\omega_{1p}} \sqrt{\frac{2P_p}{\pi}} e^{-i \frac{2\pi z_1}{\lambda_p}};$$

$$C = B \frac{i\pi\omega_{1p}^2}{\lambda_p z_2} e^{-i \frac{2\pi z_2}{\lambda_p}};$$

$$g = \frac{r^2}{\omega_{1p}^2},$$

obtem-se

$$U_{PS}(z_1 + z_2, t) = C \int_0^\infty e^{-g-i \left[ \frac{\pi}{\lambda_p} \left( \frac{\omega_{1p}^2}{R_{1p}} + \frac{\omega_{1p}^2}{z_2} \right) g + \Phi(g, t) \right]}, \quad (\text{B.5})$$

que é a amplitude do feixe de prova ao chegar no fotodetector. Se o feixe de prova for Gaussiano, tem-se as seguintes relações

$$\omega_{1p}^2 = \omega_{0p}^2 \left[ 1 + \frac{z_1^2}{z_{cp}^2} \right];$$

$$R_{1p} = \frac{z_1^2 + z_{cp}^2}{z_1};$$

$$z_{cp} = \frac{\pi\omega_{0p}^2}{\lambda_p},$$

em que  $z_{cp}$  é a distância confocal do feixe de prova. Desta forma, a equação (B.5) pode ser escrita como

$$U(z_1 + z_2, t) = C \int_0^\infty e^{[-i\Phi(g,t) - g(1+iV)]} dg, \quad (\text{B.6})$$

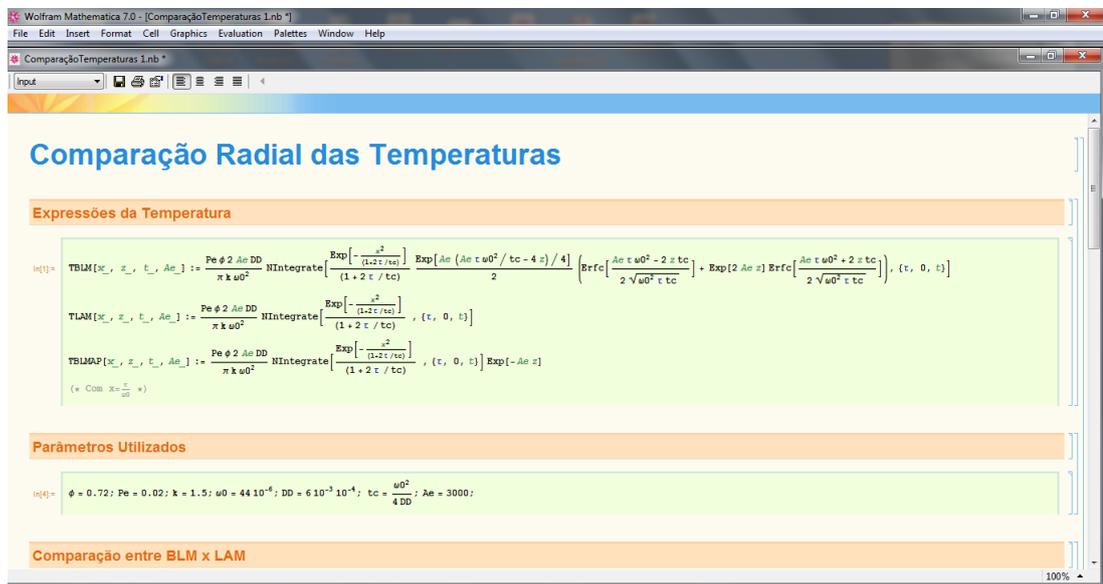
em que

$$V = \frac{z_1}{z_c} + \frac{z_c}{z_2} \left[ 1 + \frac{z_1^2}{z_c^2} \right]. \quad (\text{B.7})$$

# Apêndice C

## Rotinas de Simulação

Neste trabalho, todos os gráficos foram confeccionados teóricamente a partir de rotinas (ou procedimentos) desenvolvidas no software *Wolfram Mathematica 7.0*. Figuras obtidas a partir de fotografias da tela do software estão apresentados abaixo a fim de exemplificar o procedimento utilizado para gerar os gráficos.



**Figura C.1:** Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre a temperatura radial na amostra (Parte 1).

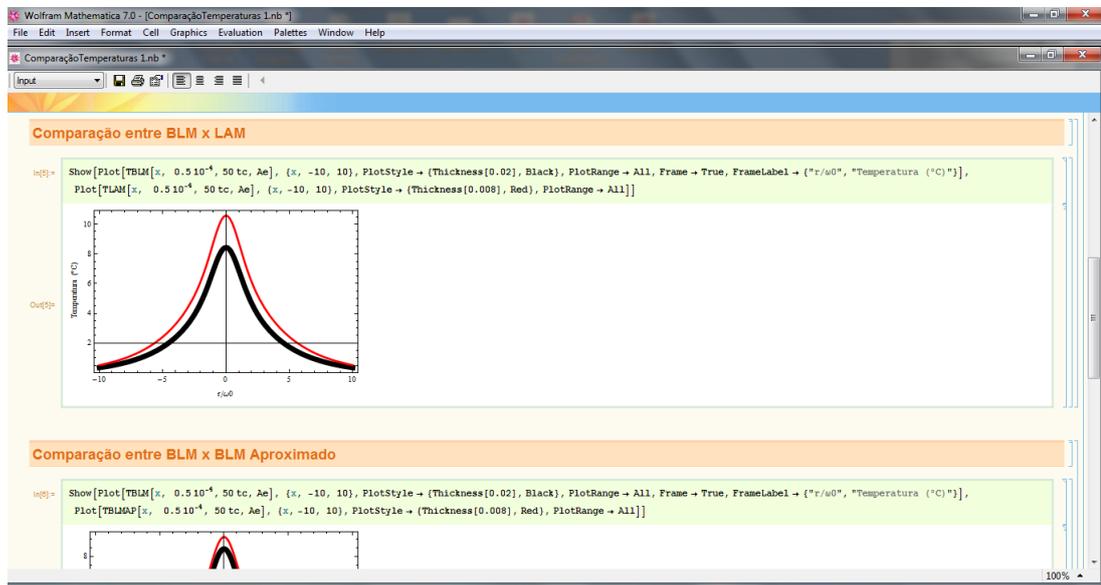


Figura C.2: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre a temperatura radial na amostra (Parte 2).

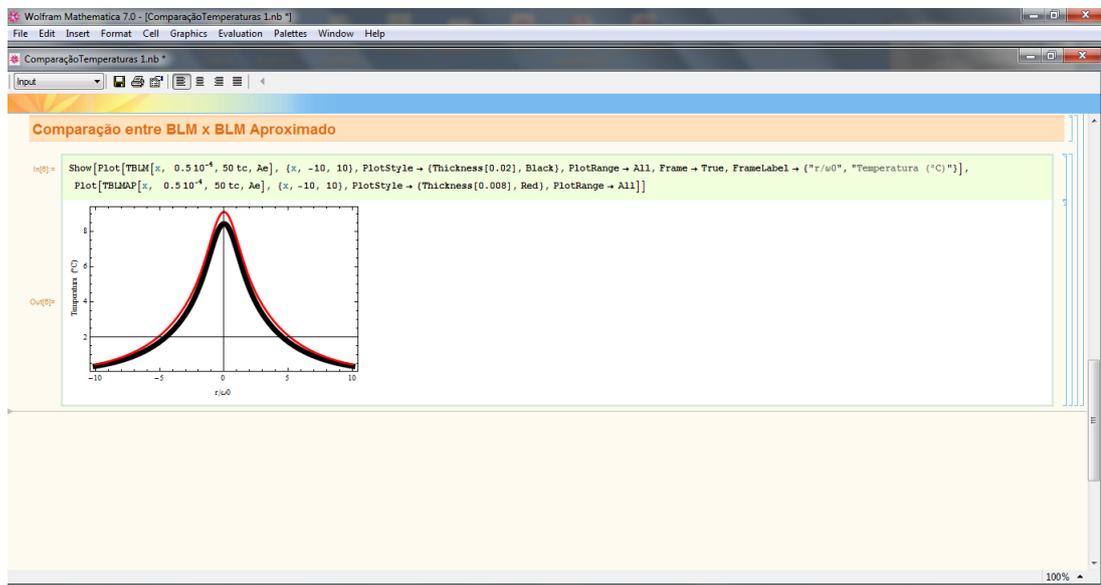


Figura C.3: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre a temperatura radial na amostra (Parte 3).

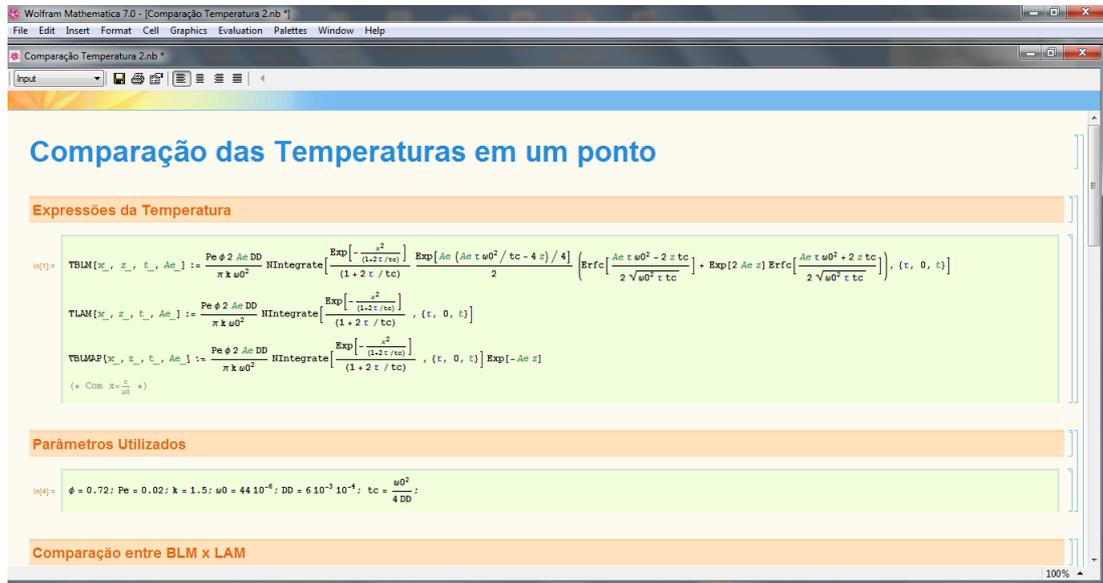


Figura C.4: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre a temperatura em um ponto específico da amostra (Parte 1).

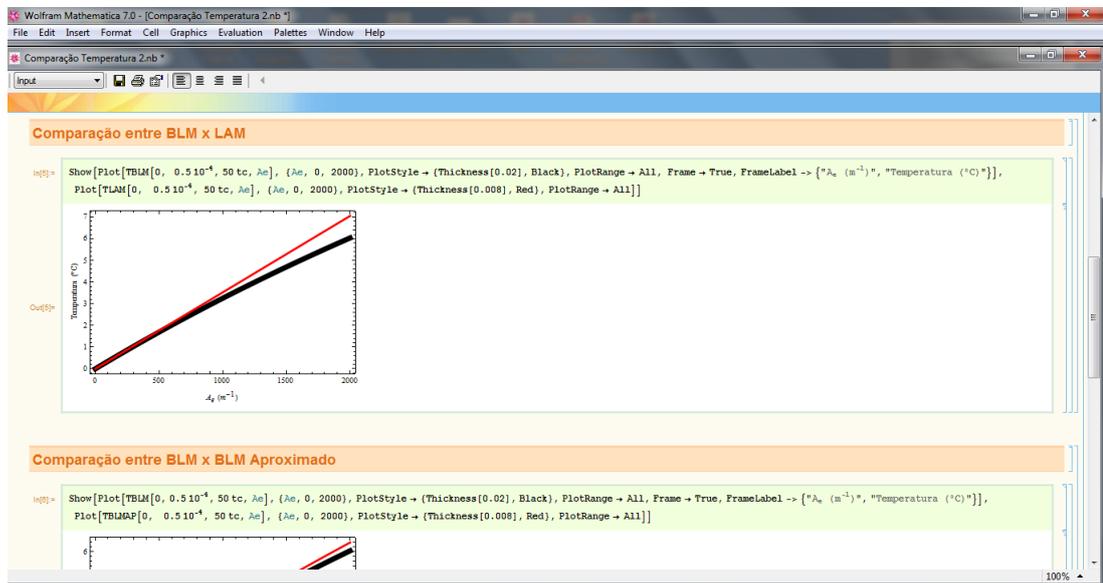


Figura C.5: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre a temperatura em um ponto específico da amostra (Parte 2).

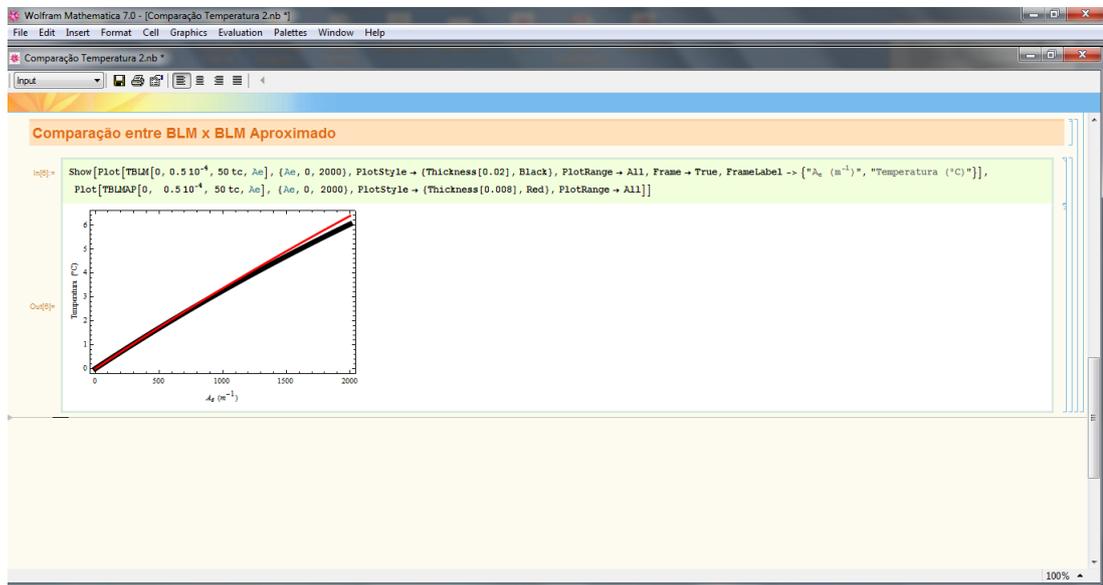


Figura C.6: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre a temperatura em um ponto específico da amostra (Parte 3).

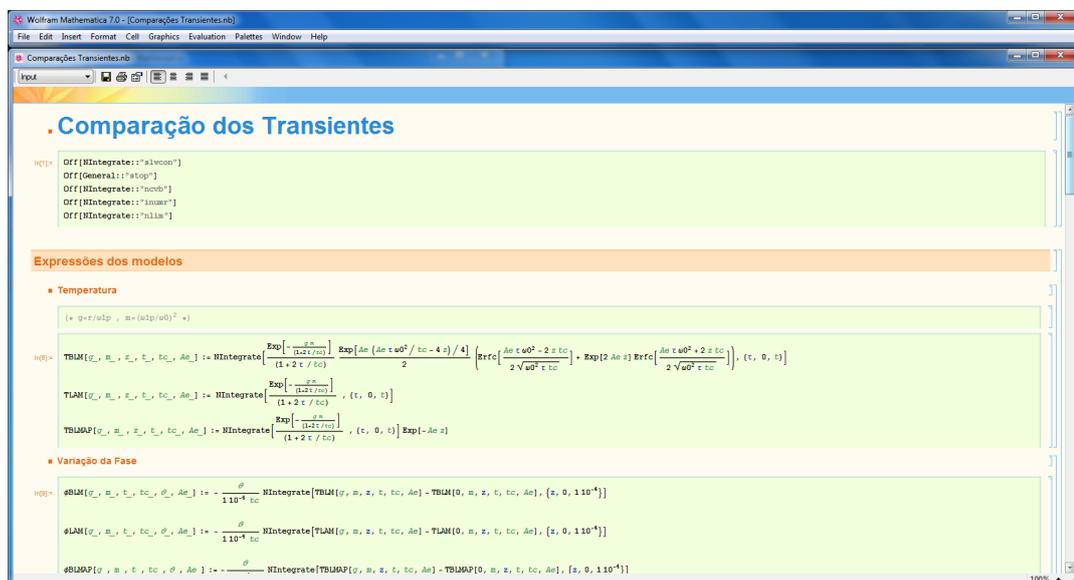


Figura C.7: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre os transientes (Parte 1).

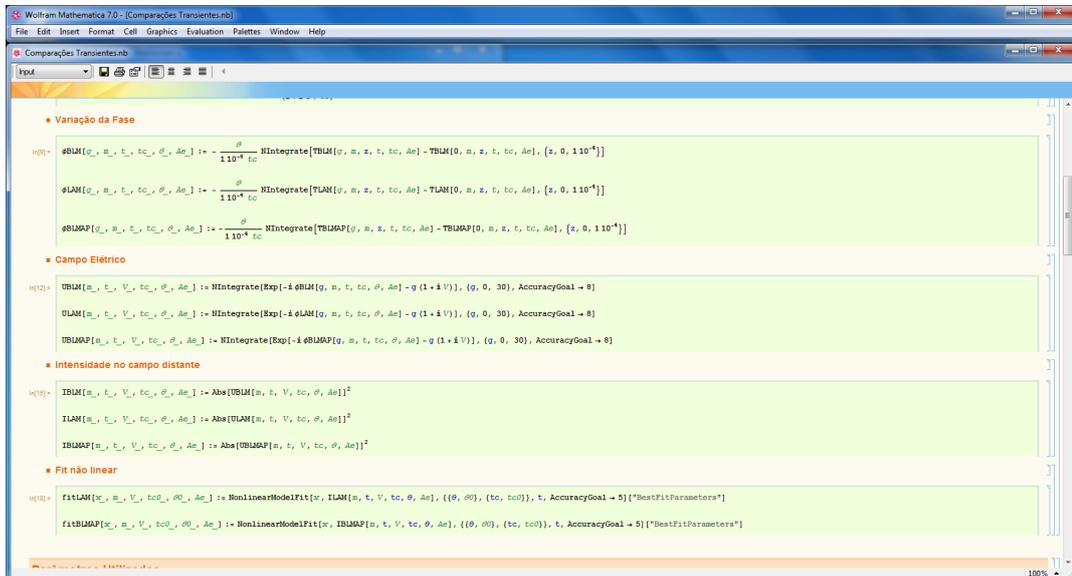


Figura C.8: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre os transientes (Parte 2).

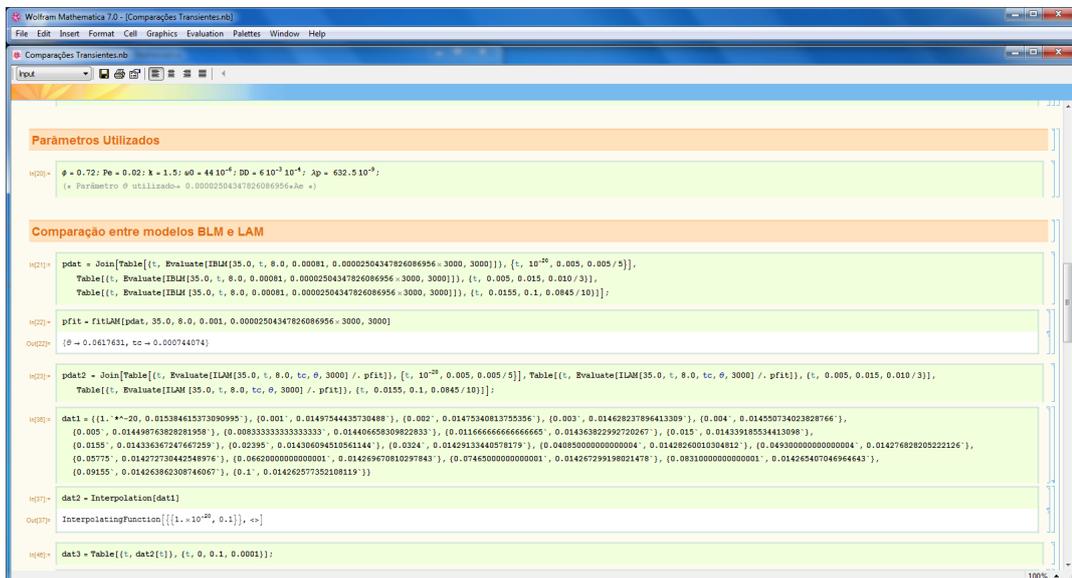


Figura C.9: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre os transientes (Parte 3).

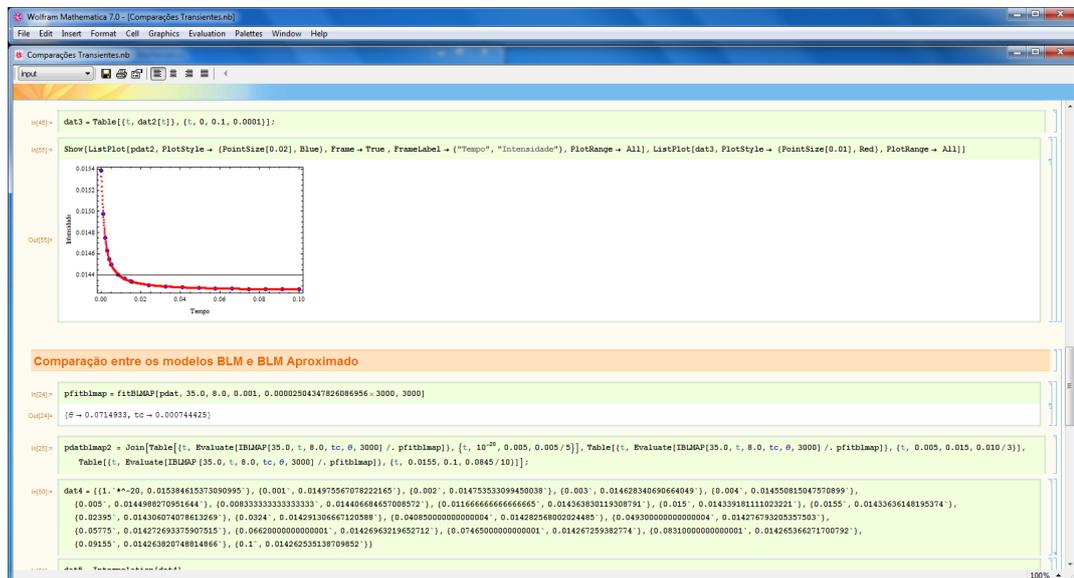


Figura C.10: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre os transientes (Parte 4).

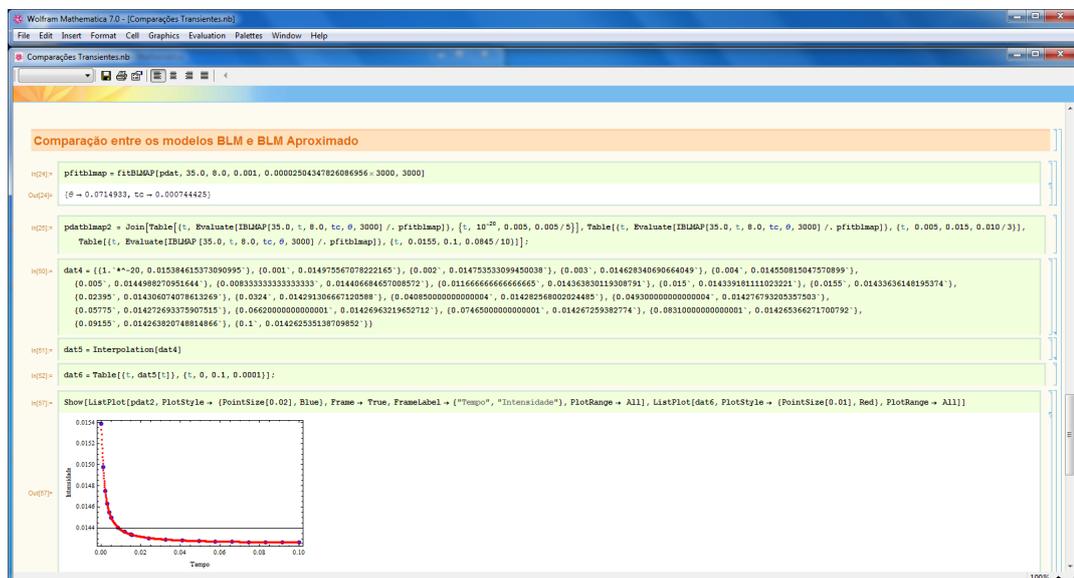


Figura C.11: Procedimento padrão para a confecção de gráficos comparativos entre os transientes (Parte 5).

## Referências Bibliográficas

- [1] J. Shen, R. D. Lowe and R. D. Snook, A model for cw laser induced mode-mismatched dual-beam thermal lens spectrometry, *Chemical Physics* 165, 385-396 (1992)
- [2] C. Jacinto, D. N. Messias, A. A. Andrade, S. M. Lima, M. L. Baesso, T. Catunda Thermal lens and Z-scan measurements: Thermal and optical properties of laser glasses - A review, *Journal of Non-Crystalline Solids* 352, 3582-3597 (2006)
- [3] Pedreira, P. R. B. Desenvolvimento de um protótipo de lente térmica desenvolvida no tempo para estudo de líquidos em condições transitórias em tempo real. 2005. Tese de Doutorado - Física, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2005.
- [4] J. P. Gordon, R. C. C. Leite, R. S. Moore, S. P. S. Porto and J. R. Whinnery, Long-Transient Effects in Lasers with Inserted Liquid Samples, *Journal Applied Physics* 36, (1965)
- [5] S. J. Sheldon, L. V. Knight and J. M. Thorne, Laser-induced thermal lens effect: a new theoretical model, *Applied Optics* 21, 9, 1663-1669 (1982)
- [6] Thomas, R. A. Comparação entre Modelos de Espectrometria de Lente Térmica 2D infinita. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso ÂÛ Bacharelado em Física, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.
- [7] F. Sato, L. C. Malacarne, P. R. B. Pedreira, M. P. Belancon, R. S. Mendes, M. L. Baesso, N. G. C. Astrath, and J. Shen, Time-resolved thermal mirror method: A theoretical study, *Journal of Applied Physics*, 104, 1-9, 2008.

- 
- [8] ARFKEN, George B. Física Matemática: Métodos Matemáticos Para Engenharia e Física 6<sup>a</sup> Edição. Tradução de Arlete Simille Marques. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [9] L. Debnath and D. Bhatta, Integral Transforms and Their Applications, 2<sup>nd</sup> Edition, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [10] BUTKOV, Eugene. Mathematical Physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [11] Belancon, M. P. Análise das técnicas de espelho térmico e de lente térmica para o estudo de materiais semitransparantes e opacos. 2009. Dissertação de Mestrado – Física, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.
- [12] J. Shen, Theoretical Modelling of Photothermal Lens Spectrometry and Its Experimental Applications, Tese apresentada à Faculty of Technology, University of Manchester (1993)
- [13] A. Steimacher, M.J. Barboza, A.M. Farias, O.A. Sakai, J.H. Rohling, A.C. Bento, M.L. Baesso, A.N. Medina, C.M. Lepiensi, Preparation of Nd<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-doped calcium aluminosilicate glasses and thermo-optical and mechanical characterization, Journal of Non-Crystalline Solids, 354, 4749-4754, 2008.