UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

José Augusto Burato

VERIFICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER APLICADA NO CÁLCULO FRACINÁRIO

Orientador: Prof. Dr. José Noboru Maki

Maringá, 16 Novembro / 2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

José Augusto Burato

VERIFICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER APLICADA NO CÁLCULO FRACINÁRIO

Trabalho de conclusão de Curso entregue ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá – UEM, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharelado, sob a orientação do Prof. Dr. José Noboru Maki

Maringá, 16 Novembro / 2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, Ieda Gracindo Burato, e aos meus irmãos Jean Pierre,Tom Jefferson, Katilcia e Giovanni, por todo incentivo e apoio tanto emocional quanto financeiro.

A minha mulher Jaciele pelo carinho, amor e paciência.

Aos meus amigos Alan e Cleverson pelo apoio e companheirismo.

Ao professor Maki pela orientação e paciência.

Agradeço aos meus ex-professores da UEM pela formação acadêmica.

OBJETIVOS

- Estudar uma das vertentes de derivada fracionária que usa função seno ou cosseno.

- Estudar o desenvolvimento da derivada fracionária de uma função em série de Fourier.

- Descobrir a sistemática para poder aplicar essa derivada fracionária.

MÉTODOS

Aplicar matemática experimental (simulação), cálculo numérico e gráfico usando programas da MATHEMATICA versão 3.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo desenvolver o uso das conhecidas derivadas fracionárias de seno e cosseno, interpretada como rotação. Estudamos o desenvolvimento dessa derivada fracionária no contexto da série de Fourier com o objetivo de descobrir algumas sistemáticas e propriedades. Por isso, fizemos vários experimentos matemáticos para descobrir a sistemática do processo. Constatamos que o cálculo fracionário apoiado na teoria de série de Fourier parece não funcionar a contento. Acontece que, muitas vezes a série não converge, ela diverge oscilando e muito. Quando a série de Fourier diverge, não se consegue reproduzir a derivada ordinária, e por inferência também não se consegue reproduzir a derivada fracionária. Conseguimos mostrar um caminho que evita essa divergência.

Sumário

Introdução 1

Capítulo I
Uma Visão Geral Sobre Cálculo Fracionário 3

Capítulo II
Explanação Sobre o Método 9

Capítulo III
Revisão da Teoria de Fourier 16

Capítulo IV
Desenvolvimento da Teoria de Derivada Fracionária Usando Série de Fourier Limitada 30

Conclusão 50

Referências Bibliográficas 52

INTRODUÇÃO

Neste trabalho vamos estudar a série de Fourier aplicada no cálculo fracionário. O cálculo fracionário é denominação de uma extensão completa e unificada do cálculo ordinário. Como sabemos, esse cálculo ordinário que aprendemos no primeiro ano da universidade trata separadamente a derivação e a integração ordinária. Todo cálculo fracionário tem que ser consistente, assim todos eles tem como requisito de se tornar idêntico ao cálculo ordinário quando o parâmetro de ordem coincidir com a ordem inteira.

Por outro lado, é relevante estudar, compreender e pesquisar essa espetacular ferramenta matemática, a derivada fracionária, porque ela aparece como um importante termo em diversas equações utilizadas no contexto da Física. O interesse pela aplicação de derivada fracionária emerge porque, em geral, tem-se mostrado que os resultados utilizando a derivada fracionária, são melhores do que oriunda da derivada ordinária. Como regra de extensão, todas essas formulações necessariamente dão a mesma expressão funcional do cálculo ordinário somente quando a ordem de derivação fracionária tomar um valor numérico inteiro.

Com o objetivo de encontrar a derivada fracionária de uma função *f(x)* vamos montar um esquema simples que requer nada mais que conhecimento da teoria de série de Fourier e dois postulados trigonométricos.

Dada uma função f(x) → *Função f(x) expandida em série de Fourier*

↓

Derivada fracionária de f(x) ← *Derivada fracionária de f(x) em outra série de Fourier*

Em primeira instância, esse esquema de obtenção da derivada fracionária, em série de Fourier que convirja, serve como um crivo para verificar se os resultados obtidos, aplicando alguns dos métodos conhecidos, ficam consistentes com o resultado dessa expansão. Para verificar isso basta expandir a derivada fracionária obtida por esses conhecidos métodos em termos de série de Fourier.

O método do presente esquema consiste em apenas associar a operação derivada ordinária de funções seno e cosseno a um efeito, que é equivalente a rotação sobre essas duas funções, conforme as definições dessas funções num círculo unitário trigonométrico. Esse efeito equivale a uma rotação de $\pi/2$ radianos no sentido horário. Em resumo, derivar é sinônimo de girar de $\pi/2$ radianos no sentido horário. Vamos definir a derivada fracionária dessas funções circulares levando em conta suas facetas de equivalência, a derivada ordinária equivale à rotação de um ângulo reto. Em palavras precisas, a cada aplicação de derivada ordinária nessas funções circulares ficam equivalentes a um efeito de uma rotação inteira de $-\pi/2$ radianos, assim como a cada aplicação de derivada fracionária nas funções seno e cosseno ficam equivalentes, agora proporcionalmente a uma rotação fracionária de $-\pi/2$ radianos que possuirá a notação dada por $(-\alpha\pi/2)$, cuja fração α de rotação $\pi/2$ é também a tal ordem de derivação. Por isso, a derivada fracionária é vista como uma extensão da operação de derivação ordinária.

Um conhecimento básico para o nosso TCC (trabalho de conclusão de curso) é estudar a série de Fourier, um dos mais antigos assuntos em análise matemática, de grande importância para matemáticos, físicos e engenheiros.

Temos também as condições de contorno de Dirichlet onde são suficientes, mas não são necessárias, isto é, se elas são satisfeitas, a convergência de série de Fourier está garantida. Não sendo elas satisfeitas, a série poderá convergir, ou não. Dessa forma podemos definir a série de Fourier e seus coeficientes em um intervalo definido. A identidade de Parseval, no entanto é de grande valia se soubermos de antemão que um determinado sistema de funções é completo. Podemos determinar a soma de certas séries de interesse prático, a custa da relação de Parseval. Por fim fizemos alguns exemplos mostrando funções que convergem e outras que divergem quando expandidas em série de Fourier.

Desenvolvemos a teoria do cálculo fracionário para algumas funções testes tipo senoidal. Para casos de monômios que dão certo e os que não dão certo e por fim mostramos a derivada de uma constante onde em nosso trabalho ela não é zero, depende da ordem de derivação.

Capítulo I

1. Uma Visão Geral Sobre Cálculo Fracionário

O primeiro vislumbre sobre a possibilidade da existência de derivada fracionária remonta ao início do aparecimento de elaborações de derivada ordinária. Essas elaborações se devem aos eminentes físicos matemáticos da época, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Foi devido à notação adotada por G. W. Leibniz para a derivação, $\frac{d^n}{dx^n}$, em 1695, especificamente de uma carta do matemático Marquês de L'Hôpital (Guillaume François Antoine) ao Leibniz que aparece a primeira discussão sobre uma possível extensão da derivada de ordem inteira para uma ordem semi-inteira, $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$, e conseqüentemente para outras ordens fracionárias [1].

Sabemos que a denominação derivada fracionária não está mais adequada com o que essa representação descreve, entretanto essa denominação prevalece por esse citado motivo histórico. Na verdade, derivada fracionária trata-se de uma derivada de ordem arbitrária, sendo que ordem pode ser inteiro, racional, real e até mesmo número complexo [1]. Além disso, a ordem de derivação fracionária pode ser positiva ou negativa. Quando a ordem é negativa temos a operação inversa da derivação, isto é, integração fracionária. Por estar tratando unificadamente tanto de ordem positiva como negativa, o correto é designar de cálculo para ordem genérica. Portanto, cálculo fracionário é denominação de uma extensão completa e unificada do cálculo ordinário. Como sabemos, esse cálculo ordinário que aprendemos nos primeiros anos da universidade trata separadamente a derivação e a integração ordinária.

Em se tratando de extensão não é preciso que tenhamos uma única versão estendida. Por causa disso encontramos várias versões de cálculo fracionário, todas consistentes e todas tendo como requisito de se tornar idêntico ao cálculo ordinário quando o parâmetro de ordem coincidir com a ordem inteira.

Tem se notícia que a primeira aplicação dessa extensão foi para obter a solução do problema da curva Tautocrônica, proposto por Niels Henrik Abel em 1820 e trabalhado por Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet em 1840 [2]. Desde então surgiram diversos estudos sobre aplicações e também inúmeros trabalhos para o estabelecimento da utilidade prática do cálculo fracionário.

Por outro lado, é relevante estudar, compreender e pesquisar essa espetacular ferramenta matemática, derivada fracionária, porque ela aparece como um importante termo em diversas equações utilizadas no contexto da física. Citemos alguns exemplos; circuitos eletrônicos, problemas de difusão, fenômenos de vibrações mecânicas, além de aparecerem em diversas áreas da física e tantas outras fora da física quantas em matemática.

O interesse pela aplicação de derivada fracionária emerge porque, em geral, tem-se mostrado que os resultados utilizando a derivada fracionária são melhores do que oriunda de derivada ordinária. Por esses motivos o estudo do conceito de cálculo fracionário está nos últimos 30 anos tomando forte impulso na física teórica, não como uma simples curiosidade sobre um objeto matemático bizarro, mas, muito pelo contrário, porque está aparecendo diversas questões à espera de investigação, cuja compreensão dessa temática se torna cada vez mais imprescindível. Para verificar isso basta verificar um aumento expressivo de novos livros lançados no mercado nesta década, isto é, vêm aparecendo diversos livros tratando do tema cálculo fracionário e suas aplicações. Brevemente haverá um livro em idioma português a ser lançado aqui no Brasil pelo Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira, pesquisador da UNICAMP, departamento de Matemática-IMECC. Este lançamento está previsto para o ano 2012. Tudo isto sem falar nos diversos simpósios pelo mundo afora tratando a respeito. Devido ao seu grande interesse na comunidade de físicos teóricos e físicos matemáticos, nos últimos 50 anos tem aberto diversas seções especializadas nesse assunto em várias revistas de físicas aplicadas à física matemática e não esqueçamos, também tem aumentado maciçamente publicações em matemática pura e para indicar a relevância da temática já existem revistas especializadas tratando somente no assunto cálculo fracionário; por exemplo: *Fractional derivatives and special functions*. Hoje os físicos teóricos dão atenção especial ao assunto o que os matemáticos nunca abandonaram da sua relevância em pesquisar desde seu aparecimento.

Existem hoje algumas fórmulas matemáticas consagradas para desenvolver a operação de derivada fracionária; dentre elas destacamos a derivada de Grunwald-Letnikov, derivada de Riemann-Liouville, derivada de Weyl, generalização da derivada usando integral de Cauchy, utilização de série de Fourier, da transformada de Fourier e etc. Nem todas elas dão mesmo resultado, em outras palavras, não são equivalentes ou resumidamente, a formulação de cálculo fracionário não é unívoca, e seus resultados não são equivalentes. Em se tratando de extensão, isto não é nada de se estranhar. Como regra de extensão todas essas formulações necessariamente dão a mesma expressão funcional do cálculo ordinário somente quando a ordem de derivação fracionária tomar um valor numérico inteiro. Assim, um resultado do cálculo fracionário, a expressão analítica, pode não ser compatível com nenhum dos outros métodos, só são iguais quando a ordem se torna um número inteiro.

A principal motivação e objetivo desde trabalho monográfico é mostrar como formular e como trabalhar nessa nossa formulação que utilizou a série de Fourier no nível aprendida no curso de física teórica da UEM/DFI lecionado por cerca de um mês cuja duração total das aulas é em torno de 16 horas.

Só para constatar, vamos então mostrar algumas dessas fórmulas matemáticas já prontas e até consagradas que aparecem em livros especializados em cálculo fracionário, omitindo totalmente seus detalhes:

A integral ordinária de Cauchy é dada por [3]:

$$D^n f(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt \,. \qquad [1.1]$$

Assim, derivada fracionária de Cauchy toma a forma:

$$ {}_{z_0}D_z^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_{C(z_0,z^+)} \frac{f(t)}{(t-z)^{\alpha+1}} dt \, . \qquad [1.2] $$

A derivada de Riemann-Liouville com o limite inferior de integração *a* é dada por [3]:

$$ {}_{a}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt. \qquad [1.3] $$

A derivada fracionária de Weyl é dada por [3]:

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt. \qquad [1.4] $$

Esta é idêntica com a de Riemann-Liouville quando a = -∞. Dentre estas derivadas fracionárias a de Riemann-Lioville é que aparece com mais freqüência nas aplicações [3].

Vamos mostrar como foi construída a fórmula de derivação fracionária de A. K.Grünwald (1867) e A. V.Letnikov (1868) [3].

Como sabemos, a derivada ordinária de uma função *f(x)* é definida conforme:

$$ \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad [1.5] $$

Operando derivada ordinária n vezes e rearranjando, obtemos:

$$ \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} f(x-mh), \qquad [1.6] $$

Válido para *n* = 0, 1, 2,... , onde *n* = 0 significa simplesmente que não foi efetuada a derivação.

Para generalizar para qualquer ordem de derivação, isto é, seja de ordem real ou complexa, para isto introduzimos função gama que é a extensão de fatorial [3]:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}. \qquad [1.7]$$

Assim, a fórmula final de derivação fracionária tem a forma [3]:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}}(-1)^{m}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(n-m+1)}f(x-mh) \qquad [1.8]$$

Vamos aproveitar a deixa de A. K.Grünwald e A. V.Letnikov e modificar a aplicabilidade da sua fórmula trocando o termo *f(x-mh)* por um operador de deslocamento aplicado em *f(x)*, assim avançamos levemente esta versão tomando a forma:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}}(-1)^{m}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(n-m+1)}e^{-mh\frac{d}{dx}}f(x)=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{m=0}^{\frac{x-a}{h}}(-1)^{m}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(n-m+1)}\left(1-mh\frac{d}{dx}+\frac{(mh)^{2}}{2!}\frac{d^{2}}{dx^{2}}-\frac{(mh)^{3}}{3!}\frac{d^{3}}{dx^{3}}+...\right)f(x), \qquad [1.9]$$

que é mais uma fórmula, que pode ter interessantes aplicações, por exemplo, para derivar polinômios, já que o operador aplicado em f(x), $e^{-mh\frac{d}{dx}}f(x)$, é representação de operadores em série de Taylor e obviamente com todas as ordens inteiras.

Vamos agora mostrar como foi construída a fórmula de derivação fracionária de Jean-Baptiste Joseph Fourier usando transformada de Fourier [4].

Desse modo, a transformada de Fourier é definida por:

$$F\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(x)dx. \qquad [1.10]$$

Enquanto que sua transformada inversa é definida por:

$$F^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx. \qquad [1.11]$$

Para derivada enésima de uma função f(x) é definida por [4]:

$$F\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\} = (it)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx = (it)^n F\{f(x)\}. \qquad [1.12]$$

Generalizando para ordem não inteira, temos:

$$F\{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)\} = (it)^\alpha F\{f(x)\}, \qquad [1.13]$$

Donde, a derivada fracionária:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = F^{-1}\{(it)^\alpha F\{f(x)\}\}. \qquad [1.14]$$

Assim, fizemos um pequeno apanhado geral sobre o contexto de cálculo fracionário.

Capítulo II

2. Explanação Sobre o Método

2.1 Idéias usadas para desenvolvimento do método de obtenção da derivada fracionária:

Com o objetivo de encontrar a derivada fracionária de uma função *f(x)* vamos montar um esquema simples que requer nada mais que conhecimento da teoria de série de Fourier e dos dois postulados, que serão apresentados adiante, precisamente dados nas equações eq.(2.9) e eq.(2.10).

Desde que a série de Fourier convirja, a esquemática é a seguinte:

Dada uma função f(x) → *Essa função f(x) é desenvolvida em série de Fourier*

↓

Obtém-se derivada fracionária da série de Fourier

Em primeira instância, esse esquema de obtenção da derivada fracionária em série de Fourier que convirja, serve como um crivo para verificar se os resultados obtidos aplicando alguns dos métodos conhecidos ficam consistentes com o resultado dessa expansão. Para verificar isso basta expandir a derivada fracionária obtida, por esses conhecidos métodos, em termos de série de Fourier. Assim fazendo, constataremos diretamente a equivalência dos resultados com o que estamos apresentando. Caso contrário, esta esquemática passará a ser mais uma versão de obtenção da derivada fracionária.

Se formos um pouco adiante nesse desenvolvimento, essa esquemática usada passará a ter *status* de um esquema de obtenção da função derivada fracionária para uma dada função *f(x)* em forma analítica exata e fechada.

Entretanto, para obter essa expressão, exata e fechada, precisaremos resolver o problema inverso, isto é, a resolução de uma equação integral, cuja obtenção da solução sempre requer perspicácias e várias habilidades técnicas de cálculos matemáticos. Assim, o esquema completo fica:

Dada uma função f(x) → *Função f(x) expandida em série de Fourier*
↓
Derivada fracionária de f(x) ← *Derivada fracionária de f(x) na série de Fourier*

Nesta empreitada mostramos que é trivial obter a formulação esquemática, onde na última etapa envolve um problema inverso. Assim temos uma esquemática pronta para a obtenção de derivada fracionária, fácil de memorizar, mas, com certeza é muito difícil de obter a função analítica e exata da derivada fracionária *f(x)* da última etapa para não dizermos que em caso dessa derivada fracionária for uma expressão complicada, é praticamente impossível obter a procurada solução, isto é, a derivada fracionária em forma exata e analítica.

Quanto à obtenção esquematicamente direta da derivada fracionária de uma dada função *f(x)*,

Dada uma função f(x)
↓
Derivada fracionária de f(x),

como sabemos, existem várias formulações prontas,entre eles, as já citadas anteriormente, no capítulo 1.

2.2 Explanações Sobre os Dois Postulados Adotados:

Antes de desenvolver a esquemática, precisamos mostrar os dois postulados adotados nesta esquemática, isto é, qual é a premissa fenomenal subjacente a esta adoção. Assim, vamos explanar essa premissa de um modo um tanto minucioso.

Sabemos que as derivadas ordinárias das funções circulares, especificamente, do seno e do cosseno, são respectivamente [6]:

$$\frac{d}{dx}sen(x)=\cos(x)\,, \qquad [2.1]$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x)=-sen(x)\,. \qquad [2.2]$$

O método do presente esquema consiste em apenas associar a operação derivada ordinária de funções seno e cosseno a um efeito, que é equivalente a rotação sobre essas duas funções, conforme a definição dessas funções num círculo unitário trigonométrico. Esse efeito (premissa fenomenal) equivale a uma rotação de π/2 radianos no sentido horário. Em resumo, derivar é sinônimo de girar de π/2 radianos no sentido horário [6].

Assim, os resultados das eq.[2.1] e eq.[2.2] podem ser reescritas em termos desse giro que fica representado nas suas fases conforme as seguintes notações [6]:

$$\cos(x)=sen(x+\frac{\pi}{2})\,, \qquad [2.3]$$

$$-sen(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})\,. \qquad [2.4]$$

Portanto, podemos reescrever a derivada ordinária de seno e cosseno como sendo um efeito de rotação mostrado nas identidades dadas em eq.[2.3] e eq.[2.4], isto é [6]:

$$\frac{d}{dx}sen(x)=sen(x+\frac{\pi}{2}), \qquad [2.5]$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \, . \qquad [2.6]$$

Em outras palavras, como sabemos, a cada aplicação do operador derivada ordinária a uma dessas funções circulares, sua derivada torna-se sua complementar a menos de sinal ±, e por isso reescrevemos essas funções introduzindo esse comportamento especificado em suas respectivas fases. Vamos então generalizar esse fato nas funções dadas pelas seguintes expressões; $\text{sen}(ax + b)$e $\cos(ax + b)$.

Assim, ao efetuar as *n* aplicações do operador derivada ordinária nessas duas funções, obteremos expressões das derivadas escritas em notações tradicionais, que também podemos reescrevê-las em formas equivalentes a essas expressões usando a propriedade de rotação, dessa forma essas derivadas após *n* operações de derivadas ficam dadas por [5]:

$$\frac{d^n}{dx^n} sen(ax + b) = a^n sen(ax + b + \frac{n\pi}{2}), \qquad [2.7]$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos(ax + b) = a^n \cos(ax + b + \frac{n\pi}{2}) \, , \qquad [2.8]$$

onde *n* é a ordem da derivada, é um número natural, *n* = 0, 1, 2,... .

Vamos definir a derivada fracionária dessas funções circulares levando em conta suas facetas de equivalência, a derivada ordinária equivale à rotação de um ângulo reto. Em palavras precisas, a cada aplicação de derivada ordinária nessas funções circulares ficam equivalentes a um efeito de uma rotação inteira de -π/2 radianos, assim como a cada aplicação de derivada fracionária nas funções seno e cosseno ficam equivalentes, agora proporcionalmente a uma rotação "fracionária" de -π/2 radianos que possuirá a notação dada por$-\alpha\pi/2$, cuja "fração α" de rotação π/2 é também a tal ordem de derivação. Por isso, a derivada fracionária é vista como uma extensão da operação de derivação ordinária, aonde considera somente a derivação inteira. Assim, para uma operação de derivação totalmente arbitrária obtemos [5]:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} sen(ax+b) = a^{\alpha} sen(ax+b+\frac{\alpha\pi}{2}), \qquad [2.9]$$

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \cos(ax+b) = a^{\alpha} \cos(ax+b+\frac{\alpha\pi}{2}), \qquad [2.10]$$

onde, doravante a ordem de derivação α será restrita a um número real positivo, $0 \leq \alpha < \infty$. Veja bem, α é mais do que um número racional do tipo *p/q*, onde *p* e *q* são números inteiros, donde historicamente foi batizado de derivada fracionária. Não trabalharemos com o caso de operação com a ordem negativa, $\alpha < 0$, que é uma integração fracionária. O caso da ordem α tomar valor complexo também não será tratado e nem discutido neste trabalho.

Por fim, observe que se aplicarmos da derivação, $\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}$, tal que $\alpha + \beta = n\pi/2$ na relação eq.(2.9) ou eq.(2.10), teremos então o resultado dado pela eq.(2.7) ou eq.(2.8).

Enfim, definimos (postulamos) e justificamos a regra de derivação para funções seno e cosseno estendendo derivada ordinária ($n \in \mathbf{N}$) a um contínuo ($\alpha \in \mathbf{R}$) cuja derivação na ordem α é efetuar uma operação de rotação de um ângulo igual a -απ/2 radianos e isto indicamos explicitamente na sua fase. Por outro lado, existem comprovações da validade da eq.(2.9) e da eq.(2.10) usando outros métodos de generalização da derivada ordinária e obviamente outros postulados. Na verdade, matematicamente basta simplesmente postular que:- derivar é o mesmo que girar de απ/2 radianos em sentido horário quando aplicado à função seno ou cosseno. É claro que escolhido um deles decorre naturalmente para o seu complementar. Mas, por questão didática apresentamos as duas como um modo de definir (postular) derivada fracionária; obviamente, as demais propriedades matemáticas decorrerão a partir desses postulados.

2.3 Duas importantes derivadas dedutíveis diretamente a partir dos dois postulados, mas não usando a teoria de Fourier

Vamos efetuar duas deduções imediatas de derivadas fracionais. Essas duas deduções são essenciais e serão obtidas diretamente dos postulados eq.(2.9) e eq.(2.10). Vamos deduzi-las porque cada uma desempenha um papel preponderante para obter outras funções definidas como suas combinações, e neste trabalho usaremos para testar rapidamente os resultados das operações matemáticas quanto a suas consistências [7].

(a) A derivada fracionária de exponencial com argumento imaginário puro, $f(x) = e^{ix}$.

Aplicando o operador derivada fracionária $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ em ambos os membros da função $f(x) = e^{ix}$, $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{ix}$ e daí utilizando a fórmula de Euler $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{ix} = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[\cos x + isenx]$ e então aplicando os postulados, $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{ix} = \cos(x - \frac{\alpha\pi}{2}) + isen(x - \frac{\alpha\pi}{2})$ e por fim voltando à re-utilização da fórmula de Euler $\cos(x - \frac{\alpha\pi}{2}) + isen(x - \frac{\alpha\pi}{2}) = e^{i(x-\frac{\alpha\pi}{2})}$ e ajeitando,

$$= e^{i(x-\frac{\alpha\pi}{2})} = e^{ix} e^{-\frac{i\alpha\pi}{2}} = (e^{-\frac{i\pi}{2}})^\alpha e^{ix} = \left(\frac{1}{-i}\right)^\alpha e^{ix} = i^\alpha e^{ix},$$

temos, portanto:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{ix} = i^\alpha e^{ix}. \qquad [2.11]$$

(b) A derivada fracionária de uma exponencial *f(x)* = e^{ax}.

Se fizermos *y* = - *aix* em $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{iy} = i^\alpha e^{iy}$ que foi obtida no item (a), eq.(2.11), então, concluímos diretamente que:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}e^{ax}=a^{\alpha}e^{ax}. \qquad [2.12]$$

Assim, temos duas funções essenciais, pois sabemos que muitas das funções importantes são construídas através delas. Note que as expressões matemáticas dessas derivadas fracionárias são bem semelhantes à suas derivadas ordinárias. Não vamos trabalhar com esta vertente de obter derivada fracionária. Esta vertente é usar a trigonometria no contexto de variáveis complexas [7].

Capítulo III

3.1 Revisão da teoria de Fourier

Neste capítulo 3 apresentaremos uma parte necessária da teoria de série de Fourier para compreensão deste trabalho. Resumiremos a teoria baseada na referência [8]. Como está explicado no Capítulo 2 para obtenção da derivada fracionária. Um dos métodos é conhecer o desenvolvimento de uma função em uma série de senos e cossenos. É preciso verificar sempre se essa série converge.

3.2 Função periódica.

Diz-se que uma função $f(x)$ tem período P, ou que é periódica com período P, se, para todo x, $f(x+P)$=$f(x)$, P constante positiva. O menor valor de P> 0 é chamado período mínimo, ou simplesmente período, de $f(x)$[8].

3.3 Condições de Dirichlet.

As condições de Dirichlet são definidas por:

(i) $f(x)$ seja definida, exceto possivelmente em um número finito de pontos de (-L, L);

(ii) $f(x)$ seja periódica de período 2L;

(iii) $f(x)$ e $f'(x)$ sejam seccionalmente contínuas em (-L, L).

As condições (i), (ii) e (iii) impostas a f(x) são suficientes, mas não são necessárias, isto é, se elas são satisfeitas, a convergência está garantida. Não sendo elas satisfeitas, a série poderá convergir, ou não. As condições em questão são em geral satisfeitas nos problemas que surgem na ciência ou na engenharia [8].

Não se conhecem, até o presente, condições necessárias e suficientes para a convergência das séries de Fourier. É conveniente notar que a continuidade de f(x), por si só, não garante a convergência de uma série de Fourier [8].

3.4 Definição da Série de Fourier.

Seja f(x) definida no intervalo (-L, L) e determinada fora desse intervalo por f(x+2L)=f(x), isto é, suponhamos f(x) função periódica de 2L. Define-se a série de Fourier, ou desenvolvimento de Fourier, de f(x), como[8]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad (3.1)$$

sendo os coeficientes a_0 e a_n, b_n para n = 1, 2, 3,... , dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx\,, \qquad (3.2)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad (3.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \qquad (3.4)$$

3.5 Identidade de Parseval.

Pode ser possível obter a derivada fracionária, desde que descubramos como resolver este problema inverso, porque temos em mãos a identidade de Parseval[8]. Ela afirma que

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \qquad (3.5)$$

Se a_n e b_n são coeficientes da série de Fourier correspondente a f(x) e se f(x) satisfaz as condições de Dirichlet.

Vejamos a dedução da identidade, eq.(3.5) [8]:

Se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$, então, multiplicando por f(x) e integrando termo a termo de –L a L, temos:

$$\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx =$$
$$\frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\} = \frac{a_0^2}{2}L +$$
$$L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

sendo os resultados utilizados:

$$a_0 L = \int_{-L}^{L} f(x)dx,$$
$$a_n L = \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

e

$$b_n L = \int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

obtidos de coeficientes de Fourier.

3.6 Exemplos de séries de Fourier:

Fizemos os cálculos e os gráficos deste tópico e de todos os capítulos vindouros baseado no pacote Mathematica versão 3 [10].

Exemplo (1):

Neste exemplo será utilizada a função f(x) = x. Aplicando f(x) nos coeficientes de Fourier, eq.(3.2) e eq.(3.3), temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

Observe que, para série de Fourier correspondente a uma função ímpar, com intervalos simétricos, só aparecem os termos em senos, assim a_0 e a_n anulam.

Para calcular b_n usando a eq.(3.4):

Cálculo de b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\mathrm{n}}.$$

Dessa forma a expressão da série de Fourier para 50 termos é dada por:

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mathrm{n}}\,\mathrm{sen}(nx). \qquad (3.6)$$

O gráfico da figura 3.1, resultante da série para n = 50 é aproximadamente de um polinômio de primeiro grau.

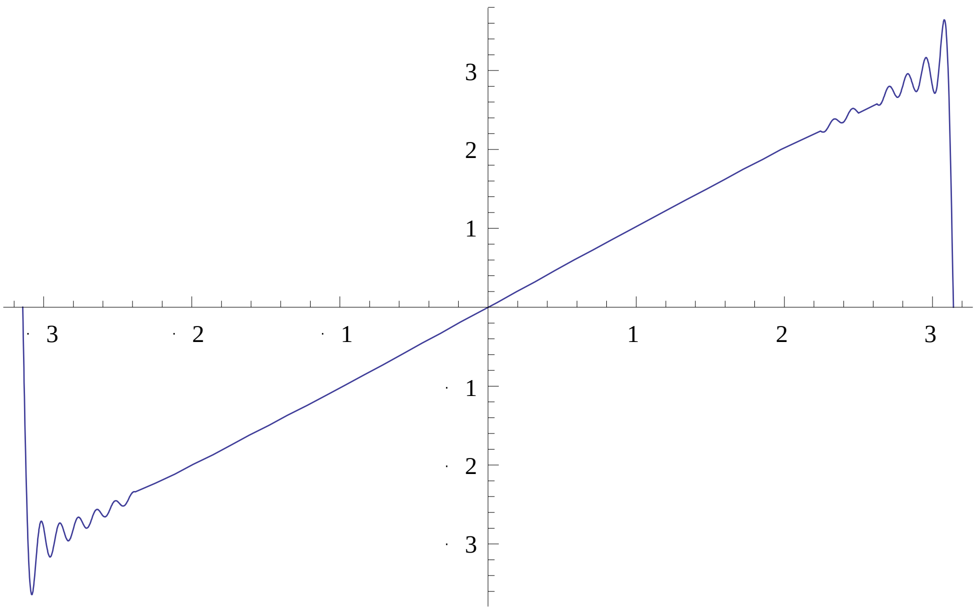

Figura 3.1: Gráfico, resultante da série para n = 50

Exemplo (2):

Neste exemplo será utilizada a função f(x) = x^2.

Utilizando a função f(x) = x^2, e substituindo nasfórmulas, eq.(3.4),eq.(3.2) e eq.(3.3), verifica-se que aparecem apenas os termos em cossenos, pois a função é par e os termos b_n zeram . Assim:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Então, a série de Fourier é dada por:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right). \tag{3.7}$$

Pode-se observar que o gráfico da figura 3.2, da série de Fourier é o mesmo de um x^2 na aproximação de n = 50.

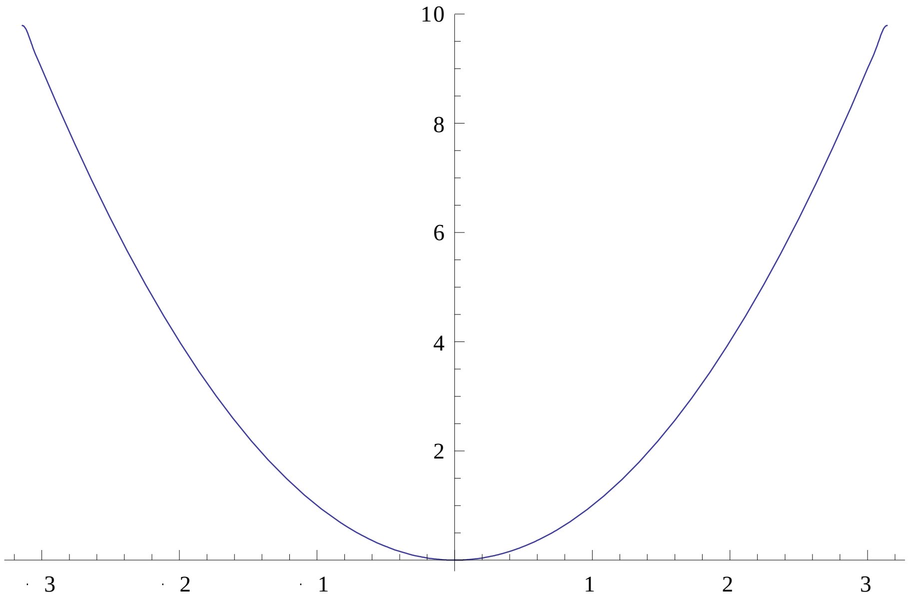

Figura 3.2 : Gráfico da série de Fourier para x^2 com n=50

Fazendo a derivada para $f(x)=x^2$, temos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right)\right\} = 2x$$

ou,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\mathrm{n}}\operatorname{sen}(nx)\right) \qquad (3.8)$$

O gráfico desse resultado é o mesmo da figura 3.1. Com esse resultado observamos que a derivada da série resulta na resposta do exemplo anterior, um resultado importante para nosso problema de verificação se derivar uma série de Fourier é válida ou não.

Exemplo (3):

Utilizando a função f(x) = x^3, e substituindo nas fórmulas,eq.(3.2), eq.(3.3) e eq.(3.4), verifica-se que aparecem apenas os termos em senos, pois a função é ímpar e os termos a_n e a_0 zeram, isto é:.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{2(-1)^{1+n}(-6+n^2\pi^2)}{n^3},$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\pi)dx = 0.$$

Então, a série de Fourier é dada por:

$$f(x) = x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{1+n}(-6+n^2\pi^2)}{n^3}\,\mathrm{sen}(nx)\right) \qquad (3.9)$$

O gráfico da figura 3.3, da série de Fourier para n = 150 é dada por:

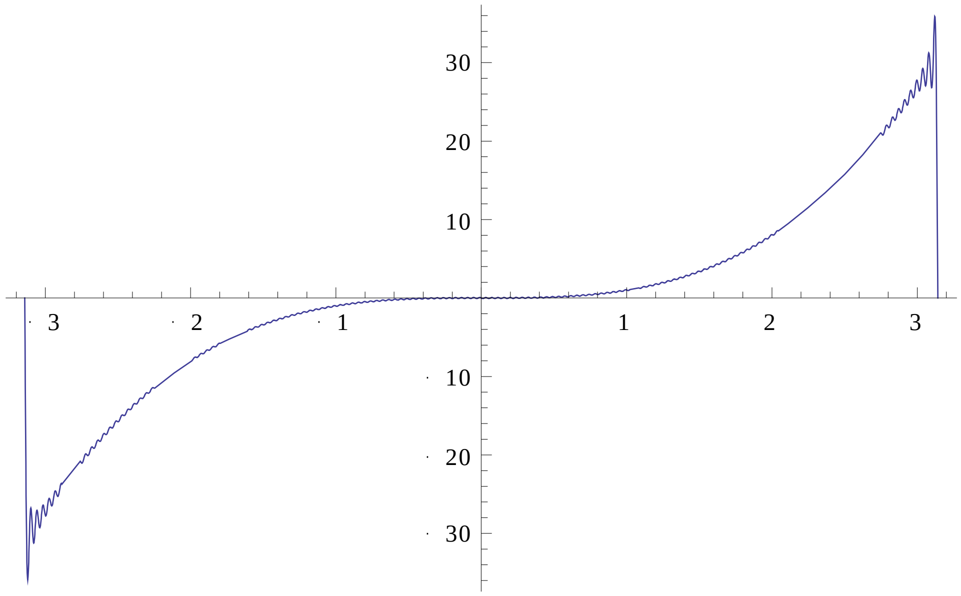

Figura 3.3: Gráfico da série de Fourier para x^3 com n=150

Fazendo a derivada para f(x)= x^3 temos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{150}\left(\frac{2(-1)^{1+n}(-6+n^2\pi^2)}{n^3}\operatorname{sen}(nx)\right)\right\} =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}(-6+n^2\pi^2)}{n^2}\cos{(nx)}$$

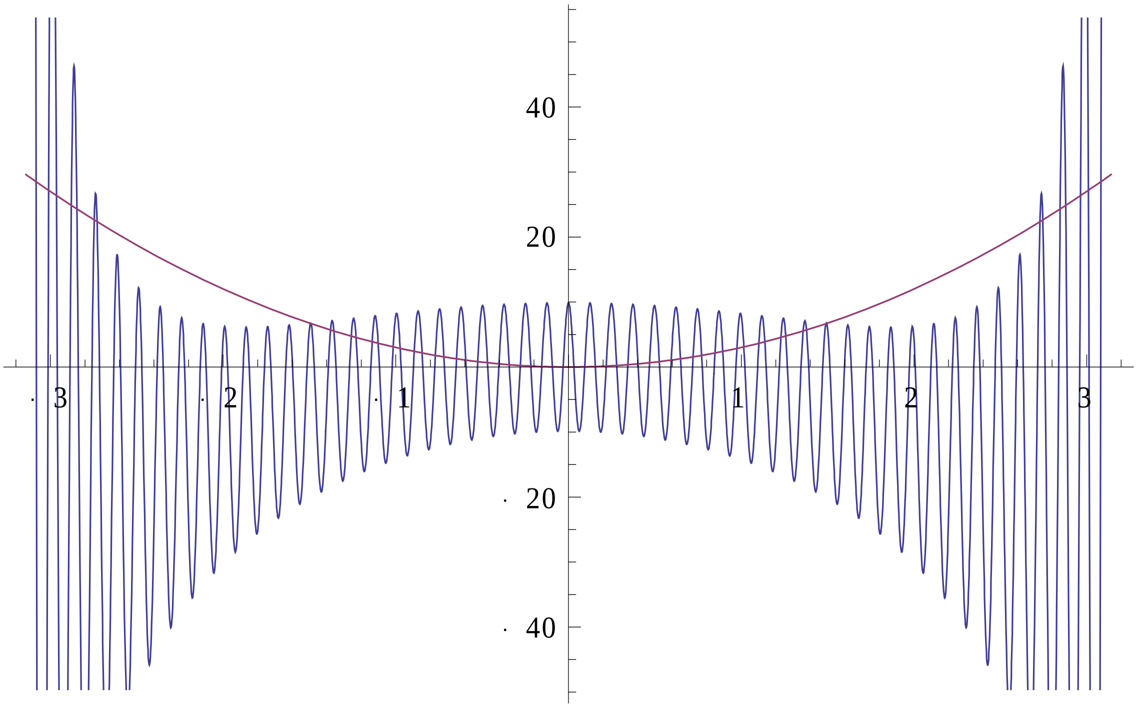

Figura 3. 4: gráfico da derivada da série de Fourier para x^3

Onde o resultado é bem diferente da eq. (3.7):

$$3x^2 = 3(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{150}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)).$$

Nesse exemplo não conseguimos o resultado esperado, que seria o gráfico da figura 3.2. O gráfico da figura 3.4 mostra a derivada (ordinária) da série de Fourier divergindo de modo oscilante.

Exemplo (4):

Utilizando a função f(x) = x^4, e substituindo nas equações dos coeficientes da série de Fourier, eq.(3.2), eq.(3.3) e eq.(3.4), verificamos que aparecem apenas os termos em cossenos, pois a função é par, e o termo b_n zera .

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\pi)dx = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}8(-6+n^2\pi^2)}{n^4}$$

A série de Fourier é dada por:

$$f(x) = x^4 = \frac{2\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}8(-6+n^2\pi^2)}{n^4}\cos(nx) \qquad (3.10)$$

O gráfico da figura 3.5 da série de Fourier para n = 150 é dada por:

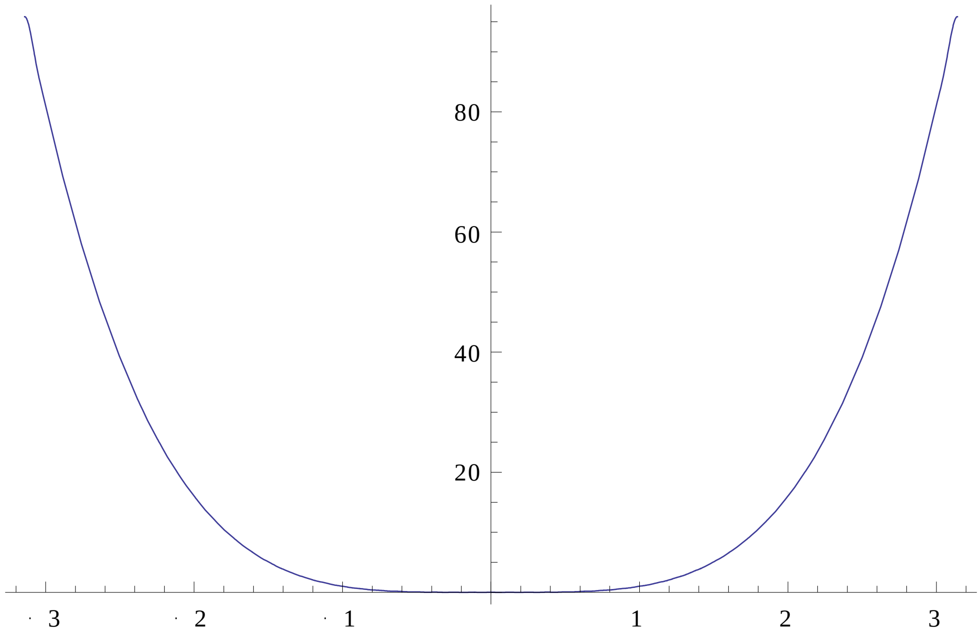

Figura 3.5: Gráfico da série de Fourier para x^4 com n=150

Fazendo a derivada da série de Fourier e seu gráfico dado pela da figura 3.6, temos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{2\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{150} \frac{(-1)^{\mathrm{n}} 8(-6+n^2\pi^2)}{n^4}\cos(nx)\right\} =$$

$$= 4\mathrm{x}^3 = -\frac{8(-6+n^2\pi^2)(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{sen}(nx)}{n^3}$$

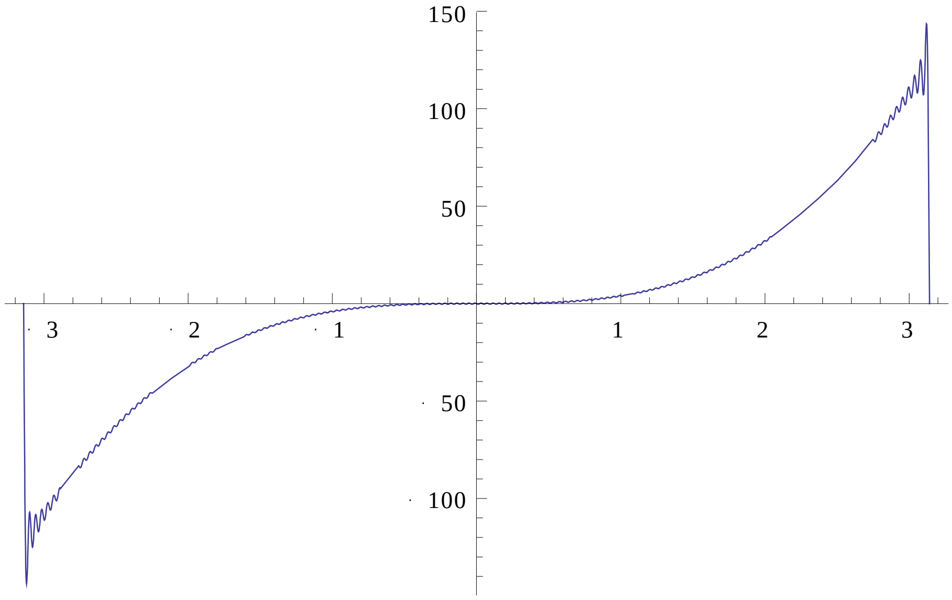

Figura 3.6: gráfico da derivada da série de Fourier para x^4

Assim podemos comparar com o resultado da função x^3, eq.(3.9).

$$x^3 = \sum_{n=1}^{150} \frac{2(-1)^{1+n}(-6+n^2\pi^2)}{n^3}\mathrm{sen}(nx)$$

Com esse resultado conseguimos retornar a série do exemplo 3.

Exemplo (5):

Utilizando a função f(x) $=x^5$, e substituindo nas equações dos coeficientes da série de Fourier, verifica-se que aparecem apenas os termos em senos, pois a função é ímpar e os termos a_ne a_0 zeram.

.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}2(120 - 20n^2\pi^2 + n^4\pi^4)}{n^5}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(n\pi)dx = 0$$

A série de Fourier é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}+1}2\left(120-20n^2\pi^2+n^4\pi^4\right)}{n^5}\,\mathrm{sen}(nx) \qquad (3.11)$$

E para série de Fourier o gráfico da figura 3.7, para n = 150 é dada por:

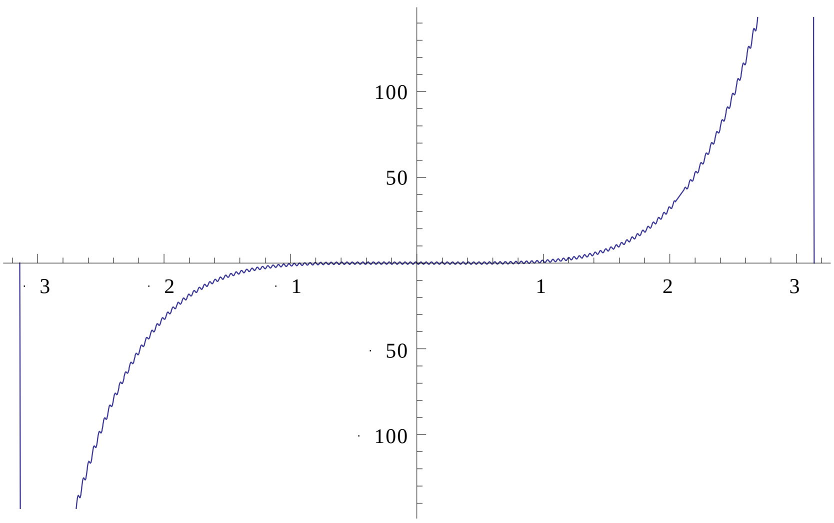

Figura 3.7: Gráfico da série de Fourier para x^5 com n=150

Fazendo a derivada de f(x) e o gráfico da figura 3.8 para n = 150, temos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}+1} 2(120 - 20n^2\pi^2 + n^4\pi^4)}{n^5} \operatorname{sen}(nx)\right\} = 5\mathrm{x}^4 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{\mathrm{n}+1}(120 - 20n^2\pi^2 + n^4\pi^4)\cos(nx)}{n^4} \qquad (3.12)$$

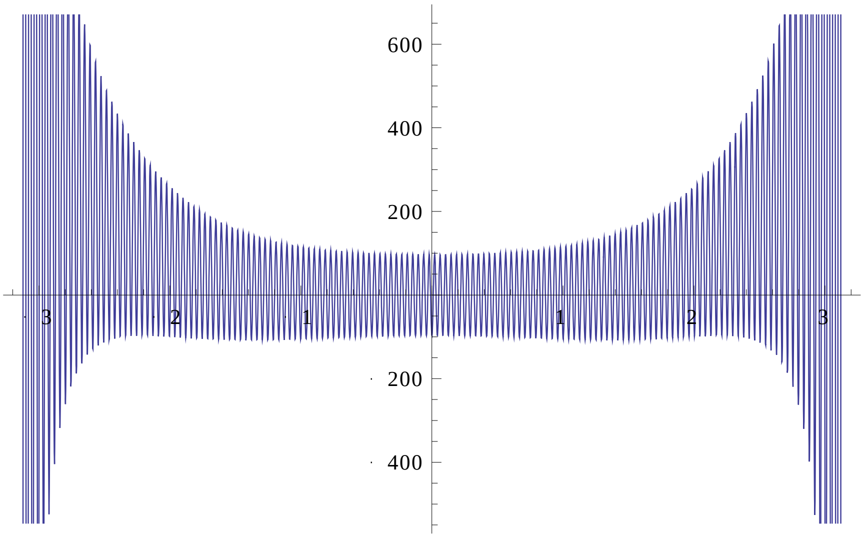

Figura 3.8: gráfico da derivada da série de Fourier para x^5

Nesse exemplo não conseguimos o resultado esperado, que seria o gráfico da figura 3.5. A série diverge oscilando e muito.

3.7 Exemplo de função exponencial:

Agora será feito para uma função exponencial f(x) = e^x.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\, dx = \frac{-e^{-\pi} + e^{\pi}}{\pi} = 2\operatorname{senh}(\pi)/\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx = \frac{2((-1)^n \operatorname{senh}(\pi))}{(1 + n^2)\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \mathrm{sen}(nx)\, dx = \frac{2n(-1)^{n+1}\mathrm{senh}(\pi)}{(1+n^2)\pi}$$

A série de Fourier para $f(x) = e^x$ é dada por:

$$f(x) = \frac{-e^{-\pi}+e^{\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{100}\left(\frac{2(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{senh}(\pi)}{(1+n^2)\pi}\cos(nx) + \frac{2n(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{senh}(\pi)}{(1+n^2)\pi}\mathrm{sen}(nx)\right). \qquad (3.13)$$

O gráfico da equação 3.13 é dado por,

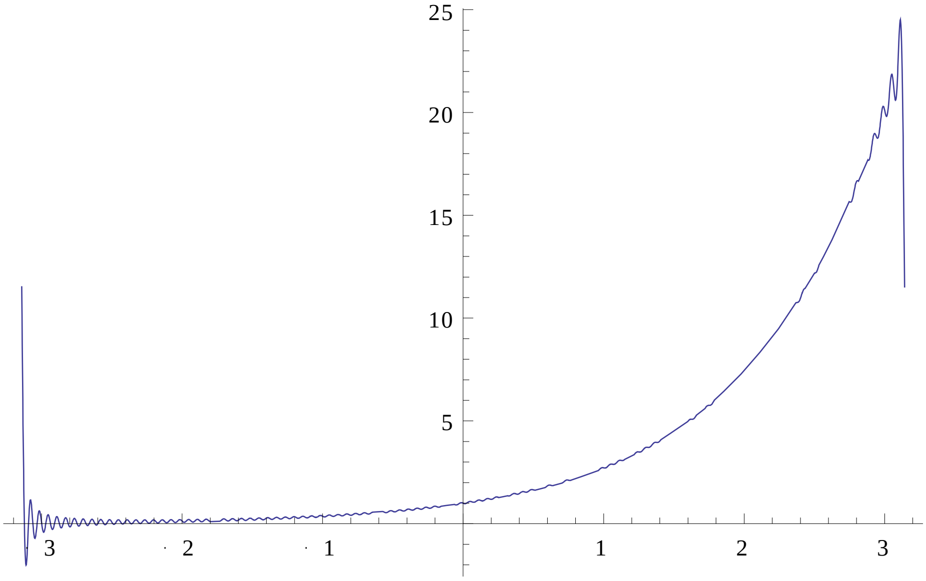

Figura 3.9: Gráfico da série de Fourier para e^x com n=150

Aqui é observado que o gráfico da função $f(x) = e^x$, expandida em série de Fourier se aproxima muito do comportamento de uma função exponencial.Agora vamos fazer a derivada dessa função,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\{\frac{2(-e^{-\pi}+e^{\pi})}{\pi} +$$

$$+\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{2(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{senh}(\pi)}{(1+n^2)\pi}\cos(nx) + \frac{2n(-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{senh}(\pi)}{(1+n^2)\pi}\mathrm{sen}(nx)\right)\}$$

O gráfico da figura 3.10 da derivada da série de Fourier toma a forma:

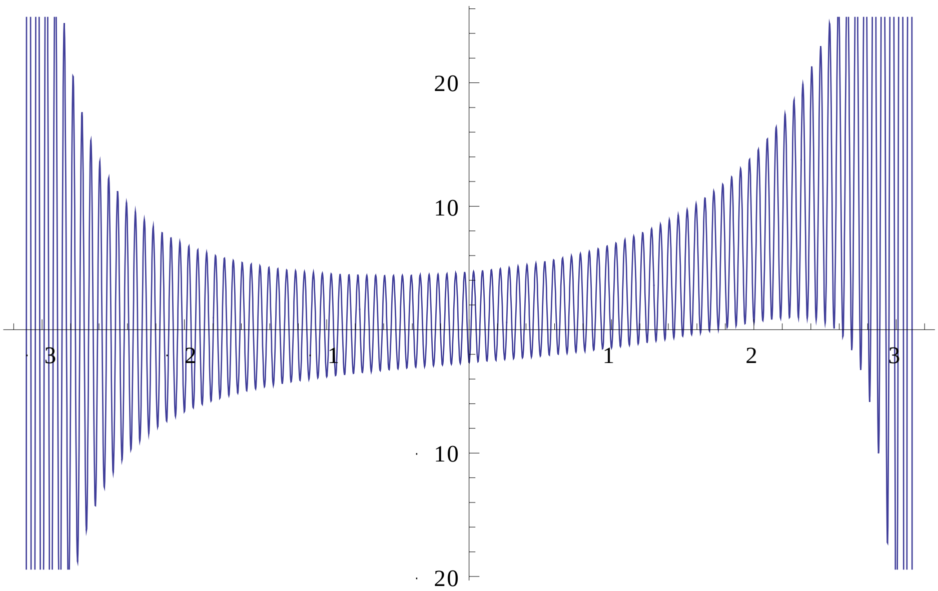

Figura 3.10: gráfico da derivada da série de Fourier para e^x

Sabendo que a derivada de uma função exponencial é ela mesma, o resultado não foi o esperado, já que a derivada da função expandida em série de Fourier é representada pelo gráfico da figura 3.10 e não pelo gráfico da figura 3.9, portanto a propriedade de manter a derivada da exponencial não se verifica.

Conclusão:

(1) a derivada da função x^n com n par e a derivada (ordinária) da sua expansão em série de Fourier mantém a igualdade.

(2) a derivada da função x^n com n ímpar e a derivada (ordinária) da sua expansão em série de Fourier **NÃO** mantém a igualdade porque a série diverge.

(3) A derivada da função e^x e a derivada da sua expansão em série de Fourier **NÃO** mantêm a igualdade porque série diverge.

Assim, concluímos que a operação de derivar a função e sua série de Fourier não é em geral uma operação de manter a igualdade. Eis um problema que temos que superar, doravante no contexto da derivada fracionária!

Capítulo IV

4.1 Verificação da Teoria de Derivada Fracionária Usando Série de Fourier.

Neste capítulo 4 vamos mostrar verificações matemáticas que fizemos para estudar o comportamento da série de Fourier perante a derivada fracionária. Para efetuar cálculos numéricos e construir seus gráficos usamos o software *Mathematica 3* [10]. A pesquisa sobre a proposta inicial não foi completada, mas foi suficiente para descobrirmos a derivada fracionária de uma constante, o comportamento divergente da série de Fourier para funções ímpares e como contorná-la. Enfim, aprendemos um pouco do procedimento sistemático para poder usar quando estamos lidando com o tipo de derivada fracionária usada nesta monografia.

O desenvolvimento da teoria de derivada fracionária foi realizado para algumas funções testes tipo senoidal, aquela série que tem termos limitados. Para isso, primeiramente encontramos sua expansão em série de Fourier, em seguida conferimos estas expansões com o que consta na tabela de integral, [9], só para conferir seu resultado. Após isso, visualizamos o comportamento da série com os gráficos. Neste caso temos séries limitadas, em outras palavras, estas séries são na verdade perfeitas identidades trigonométricas. Portanto, derivar ordinariamente como fracionariamente ambos os membros sempre é operações sobre identidades. Assim, para manter a identidade ao aplicar derivadas fracionárias acabamos descobrindo a expressão funcional da derivada fracionária de uma constante. Temos então o caso de derivar tanto ordinariamente quanto fracionariamente que dão certo perfeitamente.

4.2 Casos que dão certo.

Primeiro caso: Caso sem constante na série de Fourier.

Nesse caso vamos utilizar como amostra a função $\cos^5(x)$. Vamos encontrar os coeficientes a_n da série de Fourier somente para n= 1, 3 e 5. Os demais coeficientes vão dar zeros. Usando a fórmulas de determinação de coeficientes da série de Fourier, eq.(3.2), eq.(3.3) e eq.(3.4), temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx,$$

Obtemos os seguintes valores para a_1 = 5/8; a_3 = 5/16 e a_5 = 1/16 e substituímos na eq. (3.1). Assim, a expansão em série de Fourier toma a seguinte forma:

$$\cos^5(x) = \frac{5}{8}\cos(x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{1}{16}\cos(5x). \qquad (4.1)$$

Fizemos o gráfico da Figura 4.1 para ambos os lados da igualdade a fim de conferir o comportamento da expansão com a função teste, $\cos^5(x)$. Vemos que os dois traços dos gráficos se sobrepõem perfeitamente.

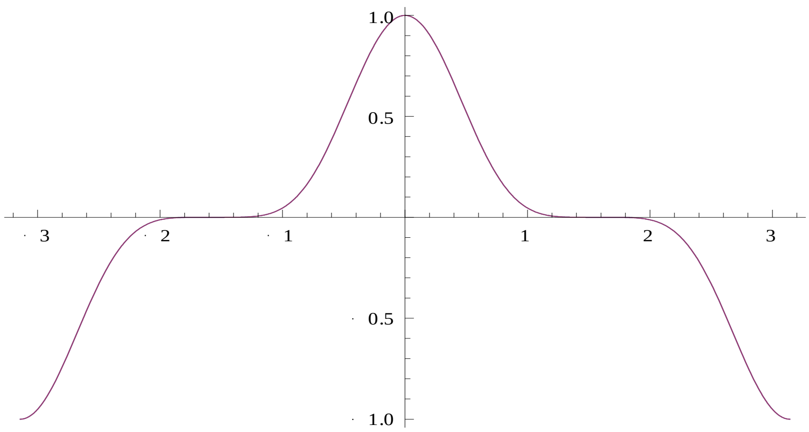

Figura 4.1: Gráfico da função $\cos^5(x)$ sobreposto perfeitamente no gráfico da série de Fourier para esta função

Com a certeza que nossa função está expandida corretamente, derivamos ordinariamente ambos os lados da série de Fourier e observamos o comportamento no gráfico 4.2. A derivação ordinária é dada por:

$$\frac{d\cos^5(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{5}{8}\cos(x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{1}{16}\cos(5x)\right\} = -\frac{5\mathrm{sen}(x)}{8} - \frac{15}{16}\mathrm{sen}(3x) - \frac{5}{16}\mathrm{sen}(5x)$$
$$= -5\cos(x)^4\mathrm{sen}(x) \quad (4.2)$$

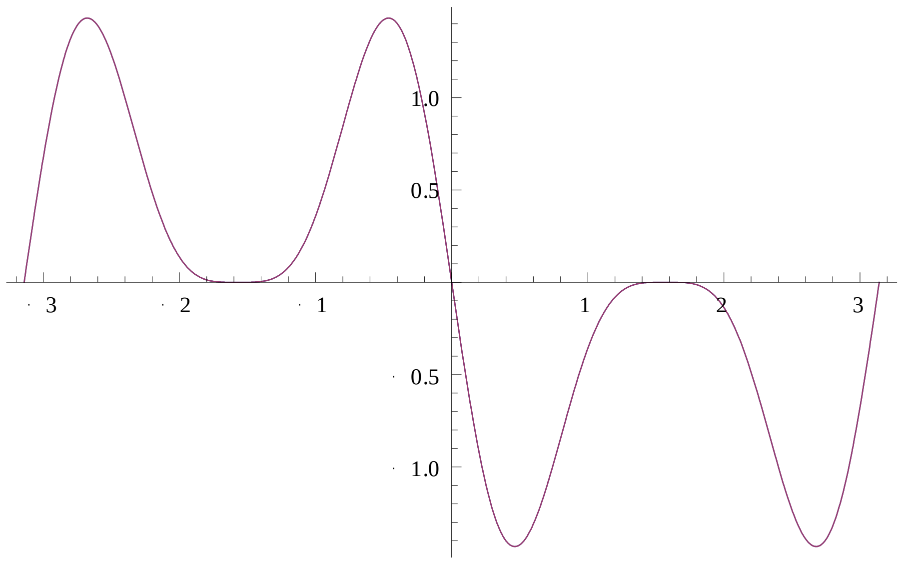

Figura 4.2: Gráfico da derivada ordinária da série de Fourier para a função $\cos^5(x)$

Observamos também que os gráficos ficam sobrepostos.

Com esses resultados temos a certeza que podemos utilizar nossa série, no estudo de derivada fracionária. Assim vamos realizar o mesmo procedimento para a derivada fracionária, onde escolhemos a seguinte ordem de derivação fracionária, α = ½.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\cos^5(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{5}{8}\cos(x) + \frac{1}{16}\cos(2x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{1}{16}\cos(5x)\right)$$

Usando a definição de derivada fracionária, eq.(2.10), obtemos:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\cos^5(x) = \frac{5}{8}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + (2)^{\frac{1}{2}}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + (3)^{\frac{1}{2}}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 5^{\frac{1}{2}}\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

A seguinte figura é o Gráfico 4.3 que mostra a derivada fracionária com α = ½.

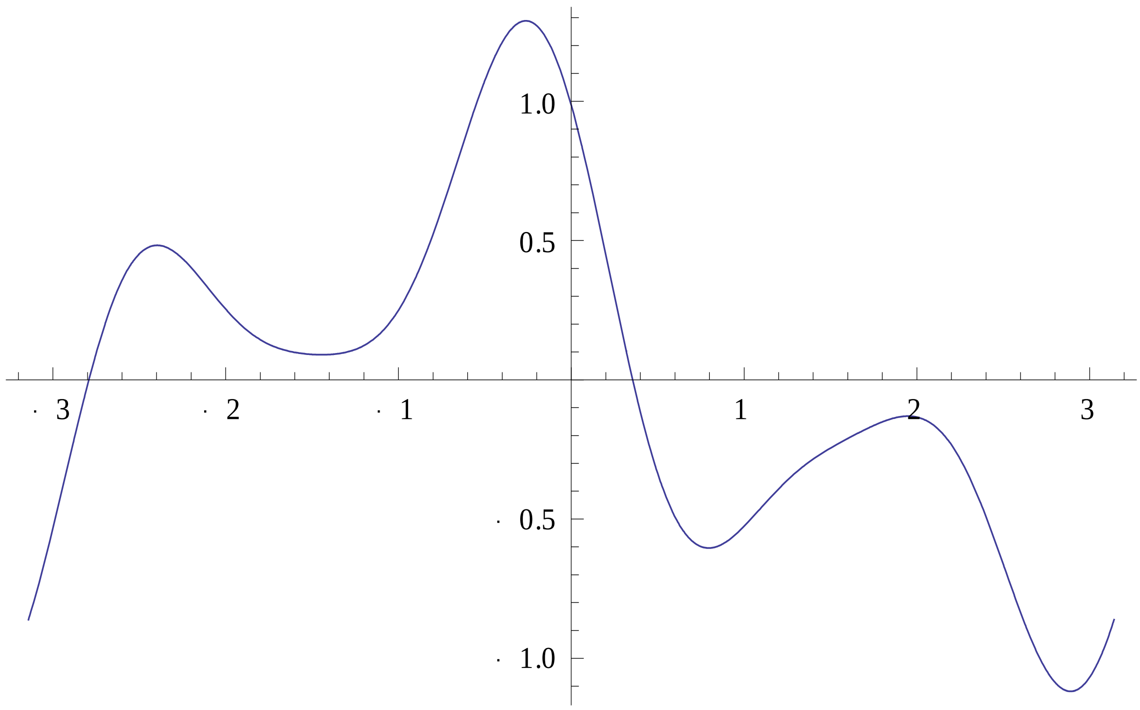

Figura 4.3: Gráfico da derivada fracionária da função $\cos^5(x)$ para α = ½.

A seguir fizemos derivadas fracionárias para α = 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10 da função $\cos^5(x)$. Fizemos seus gráficos que mostra como são os comportamentos das funções derivadas fracionárias.

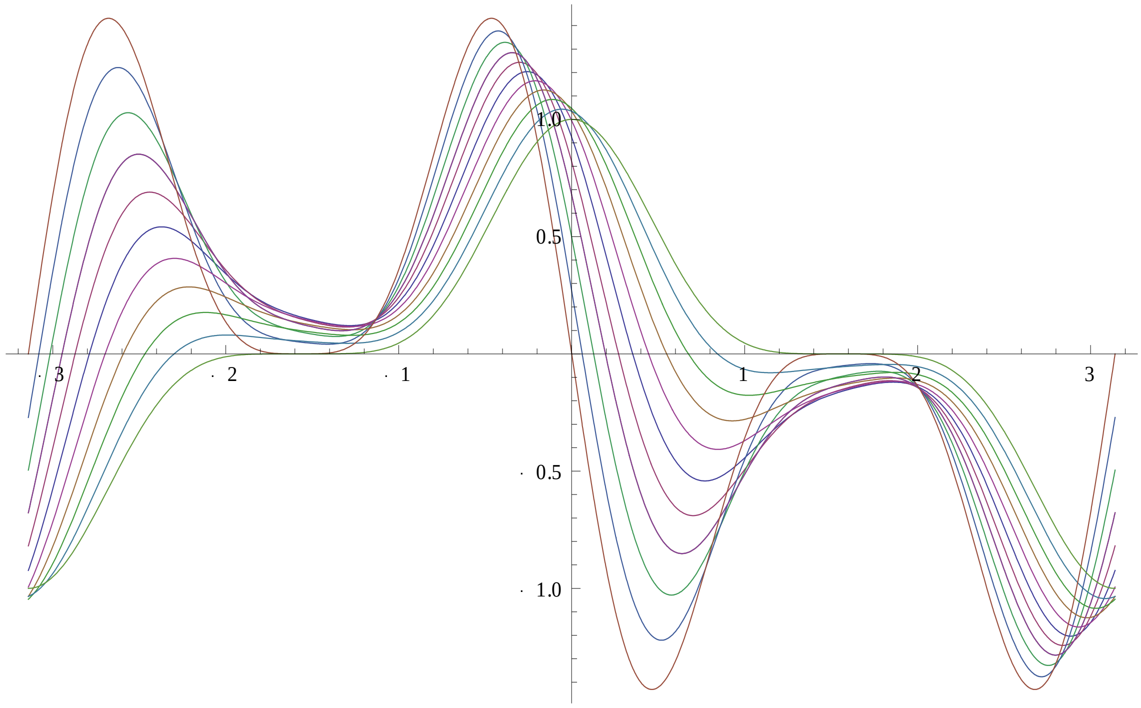

Figura 4.4: Gráfico para visualizar o comportamento de deformações da função quando expandida em série de Fourier e suas derivadas fracionárias para 0<α<1.

As curvas das derivadas fracionárias têm o mesmo comportamento quando alfa se aproxima de 1 tendem a derivada ordinária.

Outro exemplo do primeiro caso:

Nesse caso utilizamos a função sen^5(x), encontramos os termos da série ímpar de Fourier para n= 1, 3 e 5, os demais coeficientes dão zeros. Usando:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5(x)\cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5(x)\operatorname{sen}(nx)\, dx,$$

obtemos que,b_1=5/8; b_3=5/16 e b_5 = 1/16.Esta série de Fourier fica dada por:

$$\text{sen}^5(x) = \frac{5}{8}\text{sen}(x) - \frac{5}{16}\text{sen}(3x) + \frac{1}{16}\text{sen}(5x).$$

Fizemos o gráfico 4.5, para ambos os lados da igualdade a fim de conferir o comportamento da expansão de sen^5(x). Eles se superpuseram exatamente.

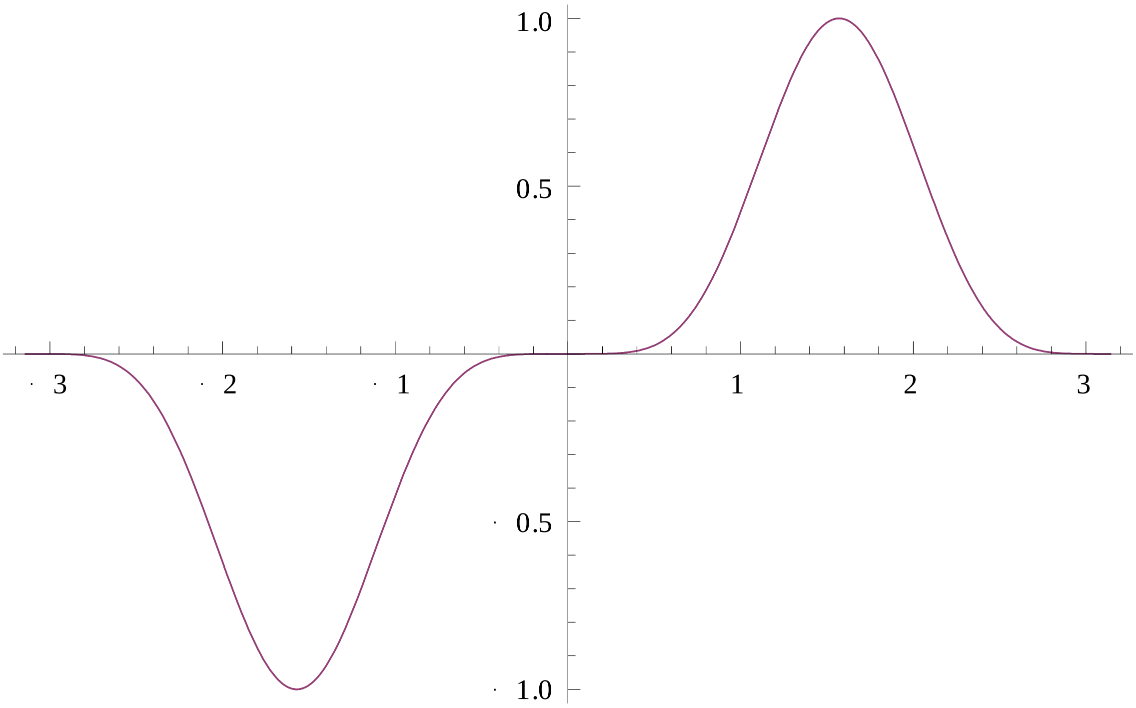

Figura 4.5: Gráfico da função $sen^5(x)$ sobreposto perfeitamente no gráfico da série de Fourier para esta função

Para verificar que a derivada da presente função e quando expandida formam uma identidade correta, fizemos seu gráfico 4.6. Assim a derivada é dada por:

$$\frac{d\text{sen}^5(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{5}{8}\text{sen}(x) - \frac{5}{16}\text{sen}(3x) + \frac{1}{16}\text{sen}(5x)\right\} =$$

$$= \frac{5\cos(x)}{8} - \frac{15}{16}\cos(3x) + \frac{5}{16}\cos(5x) =$$

$$= 5\cos(\text{x})\text{sen}^4(\text{x})$$

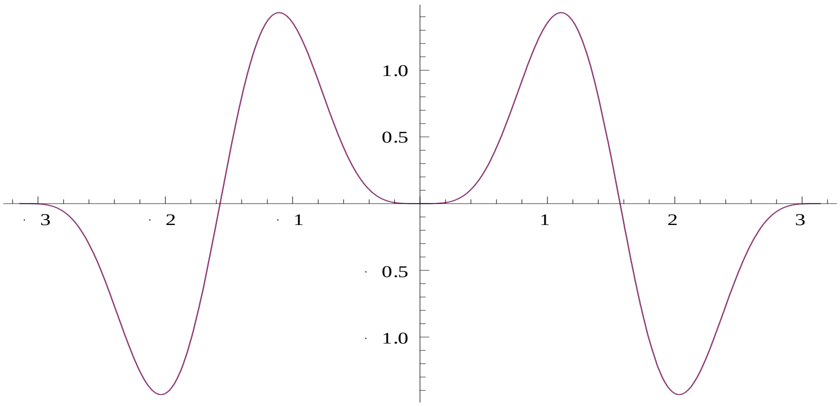

Figura 4.6: Gráfico da derivada ordinária da série de Fourier para a função $\mathbf{sen}^5(x)$

Com esses resultados temos a certeza que podemos utilizar nossa série. Assim vamos realizar o mesmo procedimento para a derivada fracionária, eq.(2.9),onde escolhemos α = ½.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sen}^5(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}(\frac{5}{8}\operatorname{sen}(x) - \frac{5}{16}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{16}\operatorname{sen}(5x))$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\operatorname{sen}^5(x) = \frac{5}{8}\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{5}{16}3^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(3x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{16}5^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(5x + \frac{\pi}{4})$$

O gráfico 4.7 dessa derivada fracionária é dada por:

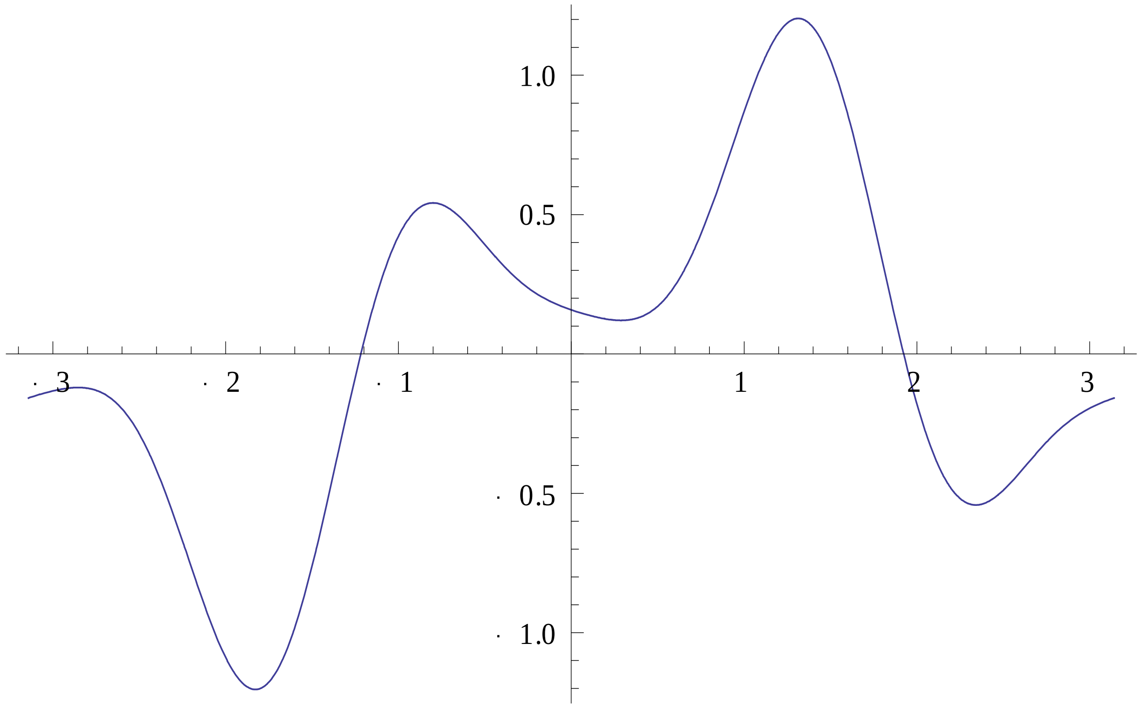

Figura 4.7: Gráfico da derivada fracionária da função $\mathbf{sen}^5(x)$ para α = ½.

Gráfico 4.8, para α = 1/10, 2/10, 3/10, 4/10, 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10 e $sen^5(x)$.

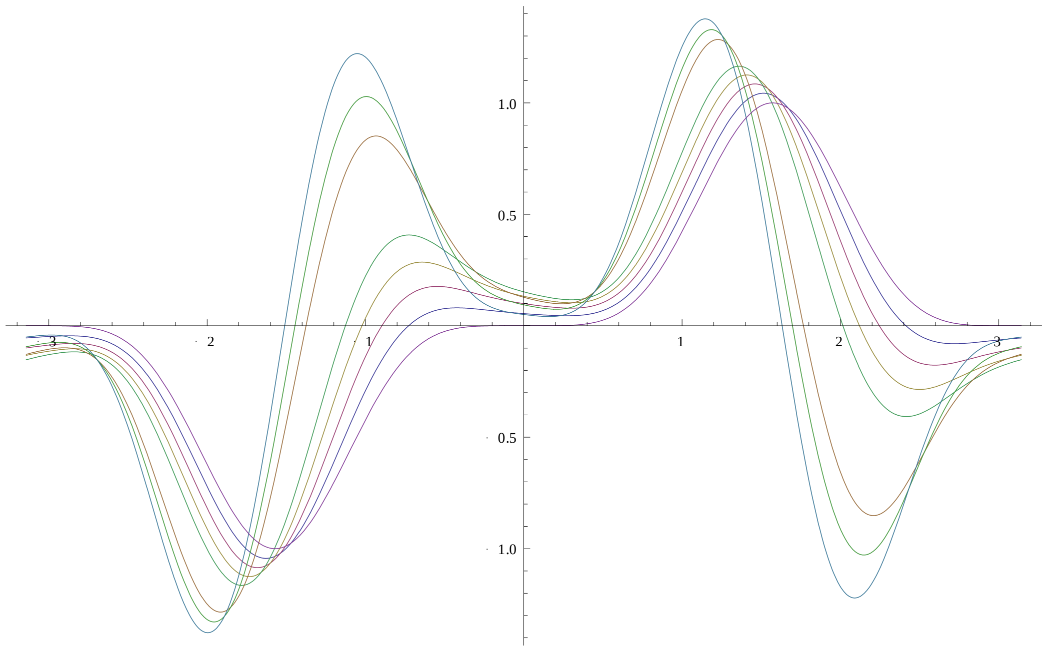

Figura 4.8: Visualização do comportamento da função f(x) = $sen^5(x)$ e **de sua derivada ordinária, estando entre eles derivadas fracionárias, quando 0<α<1.**

Segundo caso: Caso com constante na série de Fourier.

Casos que dão certo, com presença de uma função constante.

1°Exemplo:

Nesse exemplo vamos mostrar que para a derivada fracionária de uma função par estar correta, o termo da constante tem que ser uma função dependente de α.

Os coeficientes de Fourier encontradas são:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^6(x)\, dx = \frac{5}{8} \text{ ,}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^6(x)\cos(nx)\, dx = -\frac{1440\text{sen}(n\pi)}{(-2304n+784n^3-56n^5+n^7)\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^6(x)\text{sen}(nx)\, dx = 0.$$

Substituindo na eq. (3.1), temos a série de Fourier:

$$f(x) = \frac{5}{16} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1440sen(n\pi)}{(-2304n + 784n^3 - 56n^5 + n^7)\pi}\cos(nx) =$$

$$= \frac{1}{32}(10 - 15\cos(2x) + 6\cos(4x) - \cos(6x)).$$

Conferimos nossa série com a tabela de integral [9] e também com o gráfico 4.9 onde f(x) = sen^6(x) está sobreposto no resultado da série de Fourier.

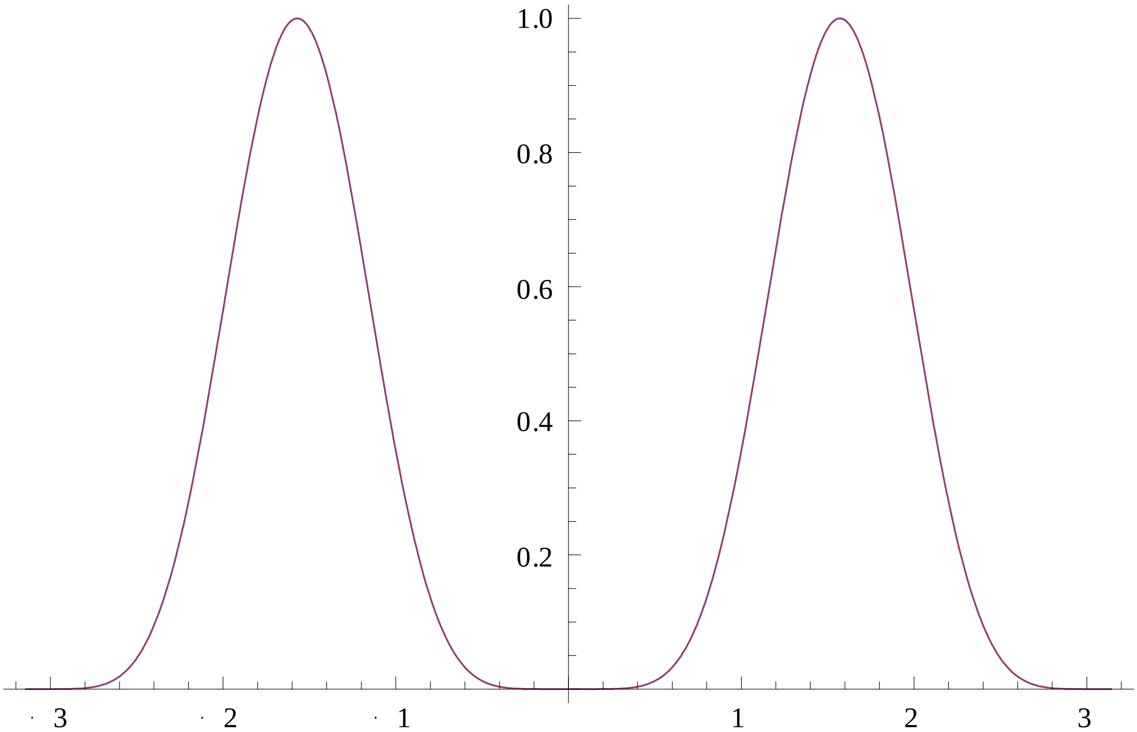

Figura 4.9: Gráfico da função f(x) = sen^6(x) sobreposto perfeitamente no gráfico da série de Fourier para esta função

Agora vamos aplicar o teorema da derivada fracionária que postamos no capítulo 2, eq. (2.10) para a série de Fourier, mas antes devemos observar que o primeiro termo da presente série é constante, essa constante faz com que aderivada fracionária tenha um deslocamento do eixo do x, para corrigir esse deslocamento adicionamos uma função constante que varia com a ordem da derivada fracionária, essa função descoberta é dada por:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} C = C \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Assim temos a expressão,

$$\frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{32}(10 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - 152^{\alpha} \cos\left(2x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) +$$

$$+64^{\alpha} \cos\left(4x + \frac{\alpha\pi}{2}\right) - 6^{\alpha} \cos\left(6x + \frac{\alpha\pi}{2}\right))$$

Substituindo α de 1/10 até 9/10 temos os resultados gráficos na figura 4.10.

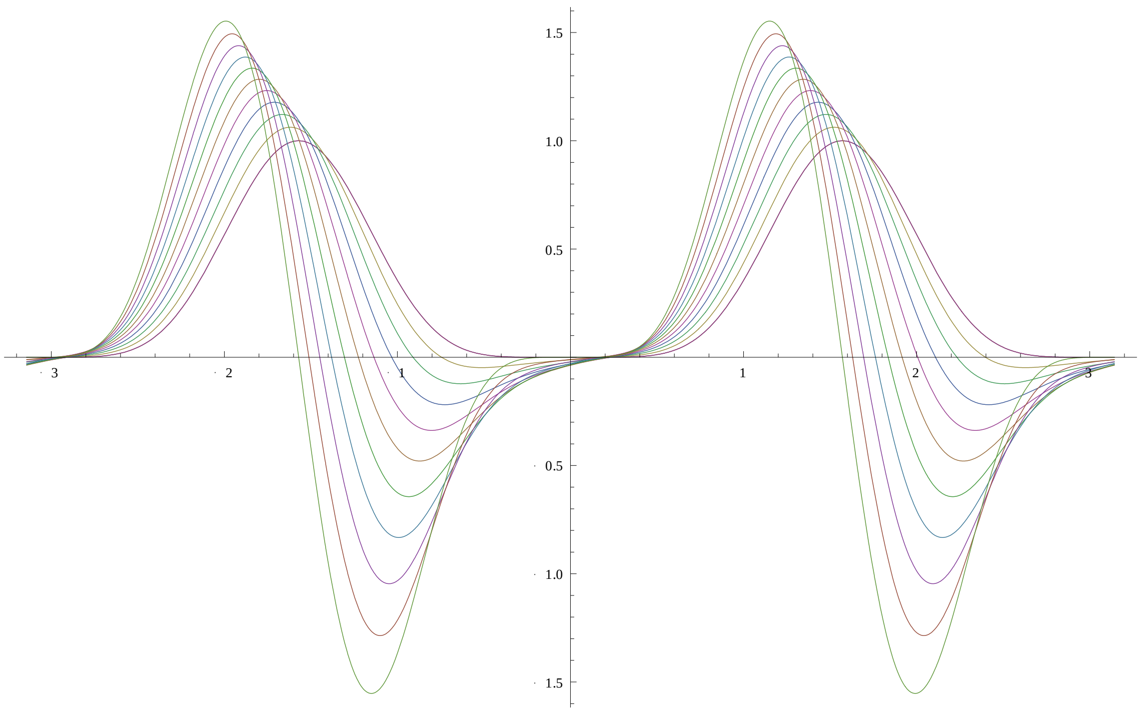

Figura 4.110: Visualização do comportamento da função f(x) = sen^6(x) e **de sua derivada ordinária, estando entre eles derivadas fracionárias, quando 0<α<1, e podemos notar que não há deslocamento do eixo do y devido a correção no termo da constante.**

2°Exemplo:

Vamos exemplificar casos totalmente possíveis de se calcular a derivada fracionária diretamente. Para isso podemos verificar em nosso trabalho feito no capítulo 3 que a derivada ordinária de um monômio de grau ímpar NÃO dá certo porque a série de Fourier, já quando derivado ordinariamente NÃO converge, diverge oscilando.

Entretanto, verificamos que monômio de grau par converge. Assim, para que possamos obter a derivada fracionária correta, tivemos que descobrir a derivada fracionária da função constante. Descobrimos que essa derivada dependente de α, ordem da derivada, ela é dada por:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(\frac{a_0}{2}\right) = \frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Assim, somente monômios de grau par dão derivadas fracionárias corretas diretamente graças a essa descoberta.

Para averiguar o caso de monômio par, escolhemos como exemplo ilustrativo a função x^4, onde encontramos sua série de Fourier e fizemos sua derivada fracionária com derivação fracionária correta usando a derivada fracionária para o termo da constante.

Os coeficientes da série de Fourier são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi^4}{5},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(\mathrm{nx}) \, \mathrm{d}x = \frac{8(-1)^n(-6+n^2\pi^2)}{n^4},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{sen}(\mathrm{nx}) \, \mathrm{d}x = 0,$$

Assim, a série de Fourier com somatória até cinqüenta termos é dada por:

$$\mathrm{x}^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \frac{8(-6+n^2\pi^2)}{n^4} \cos(nx),$$

Usando a expressão para derivada fracionária e do termo da constante, a derivada fracionária fica dada por:

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha(\mathrm{x}^4)}{\mathrm{dx}^\alpha} = \frac{\pi^4}{5}\cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \frac{8(-6+n^2\pi^2)}{n^{4-\alpha}} \cos(nx + \frac{\alpha\pi}{2}))$$

Assim construímos os Gráficos de x^4 e da sua derivada fracionária para $0 < \alpha < 1$,

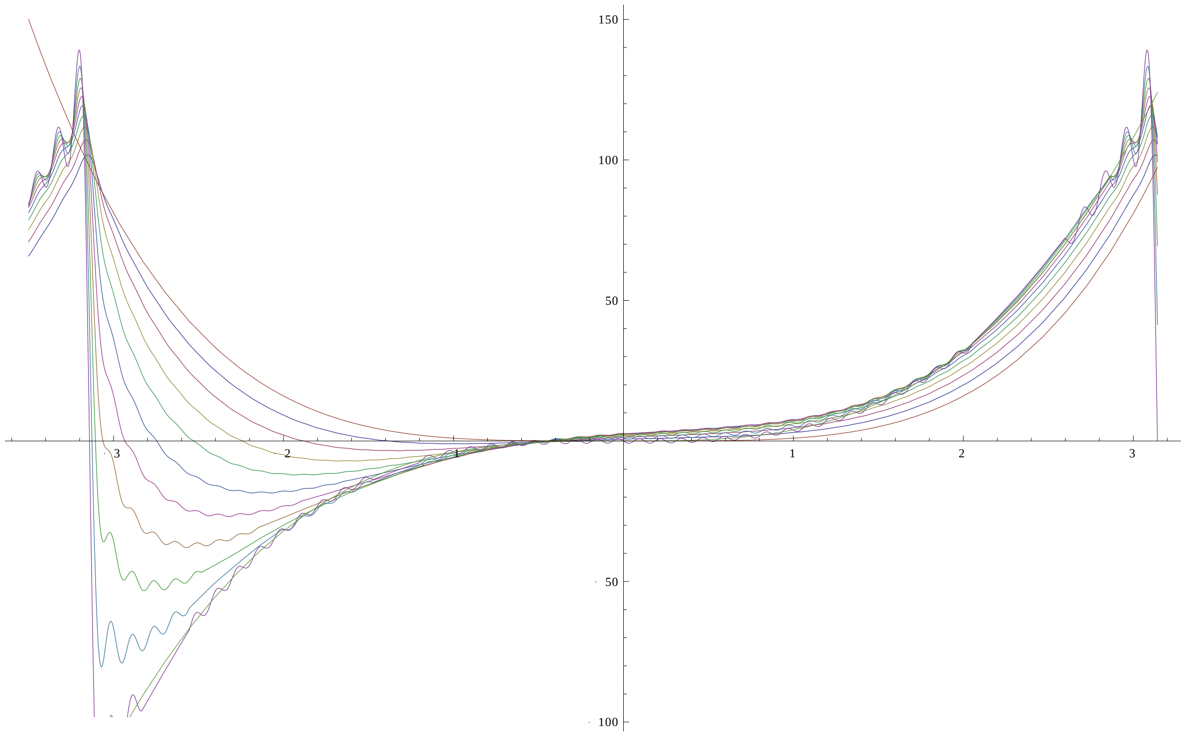

Figura 4.11: Comportamento da função x^4, e de sua derivada ordinária e das suas derivadas fracionárias quando $0<\alpha<1$.

Portanto, no gráfico da Figura 4.11 temos $f(x) = x^4$. Fizemos a derivada fracionária desde $\alpha = 0$ até $\alpha = 1$. Observamos a sua evolução tendendo a derivada de primeira ordem dada por $f'(x)=4x^3$. Se não tivéssemos descoberto a derivada fracionária de uma constante, esses gráficos teriam um deslocamento no eixo vertical, que seria um resultado errado. Apareceram nesse gráfico as ondulações porque expandimos a série de Fourier até 50 termos. Se expandirmos por mais termos essas ondulações tendem a desaparecer.

3°Exemplo

Vamos agora verificar um caso de polinômio, escolhemos como exemplo a função $(x^2-\pi)^2$, onde encontramos sua série de Fourier e fizemos sua derivada fracionária com introdução da derivada fracionária para o termo da constante. Assim, os coeficientes da série de Fourier ficam dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-\pi)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(4\pi^2 - \frac{8\pi^3}{3} + \frac{4\pi^4}{5})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-\pi)^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{8(-6+n^2(-1+\pi)\pi)}{n^4}$$

$$b_n = 0$$

$$f(x) = (4\pi^2 - \frac{8\pi^3}{3} + \frac{4\pi^4}{5}) + \sum_{n=1}^{5}\{(-1)^n\frac{8(-6+n^2(-1+\pi)\pi)}{n^4}cos(nx)\}$$

Os gráficos desse polinômio ficam conforme valor de n:

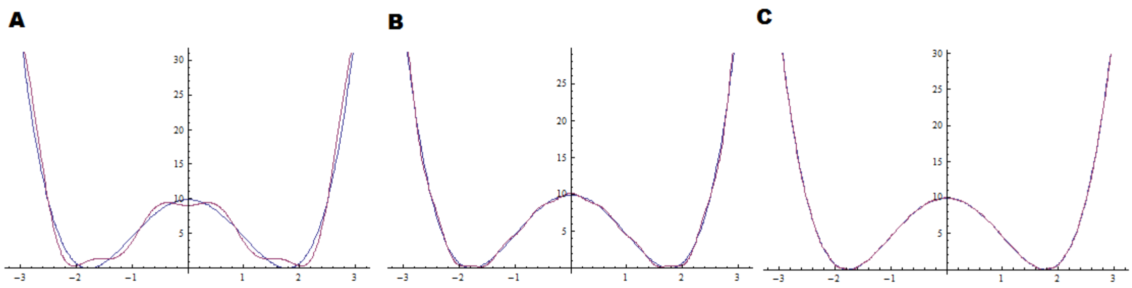

Figura 4.12: Comportamento da Série de Fourier, para n variando, A) **n = 5; B) n = 15; C) n = 20**

Nesses gráficos da figura 4.12 podemos observar que a função expandida em série de Fourier não é exatamente igual a do polinomial. Assim, para que possamos ver uma aproximação aumentamos o número de termos da somatória. Desse modo, observamos que há uma pequena diferença. Observamos que essa diferença aparece entre as figuras dadas pela letra A com o da letra B que ainda é visível as oscilações. Mas podemos notar também no último gráfico que para grandes valores de “n”, a série de Fourier está sobreposto a do polinômio. Com esse resultado vamos encontrar sua derivada fracionária.

Primeiro vamos encontrar a derivada ordinária da série de Fourier e observar o seu comportamento nos gráficos,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{(4\pi^2 - \frac{8\pi^3}{3} + \frac{4\pi^4}{5}) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{8(-6+n^2(-1+\pi)\pi)}{n^4}cos(nx)\}$$

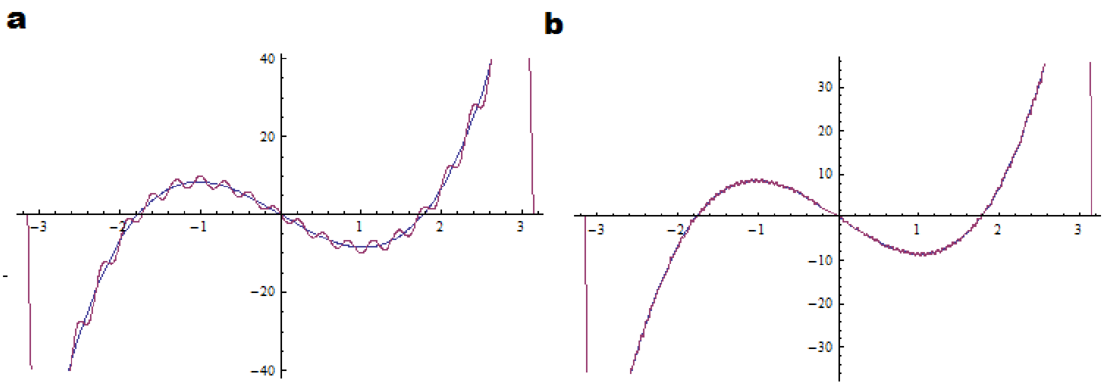

Figura 4.13: Comportamento da derivada ordinária da série de Fourier para a função $(x^2-\pi)^2$, com a) n = 20; b) n = 100

Para a derivada da série de Fourier observamos na figura 4.13, muitas oscilações para n = 20, mas para n = 100 o comportamento da derivada da série de Fourier é muito próximo ao comportamento da derivada do polinômio.

A derivada fracionária em termos da série de Fourier é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}f(x)}{\mathrm{dx}^{\alpha}} = (\pi^2 - \frac{2\pi^3}{3} + \frac{\pi^4}{5})\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{100}(-1)^n\frac{8(-6+n^2(-1+\pi)\pi)}{n^4}n^{\alpha}\cos(nx+\frac{\alpha\pi}{2})$$

O gráfico da figura 4.14 para 0<α<1 é dada por,

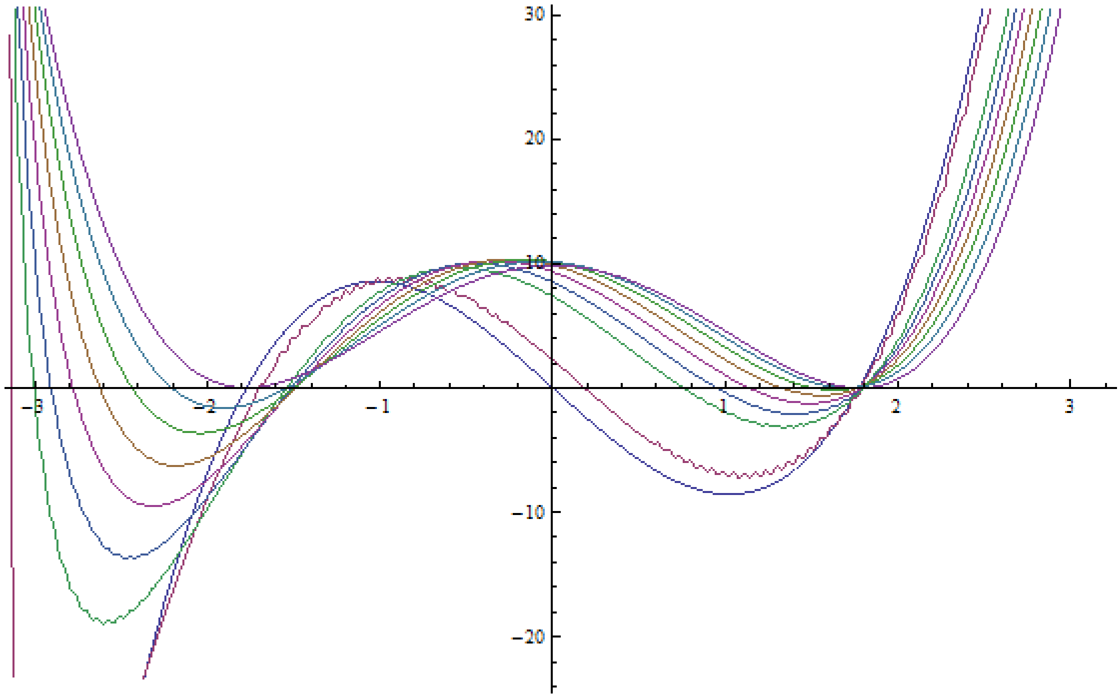

Figura 4.14: Gráfico que ilustra o comportamento da função $f(x) = (x^2-\pi)^2$ e de sua derivada ordinária e de suas derivadas fracionárias quando $0<\alpha<1$.

Portanto, no gráfico 4.14 temos $f(x) =(x^2-\pi)^2$. Fizemos a derivada fracionária desde α =1/10 até α=9/10. Observamos a sua evolução tendendo a derivada de primeira ordem dada por $f(x) = 4x(x^2-\pi)$. Sem a derivada de uma constante, esses gráficos teriam um deslocamento para baixo no eixo vertical.

4.3 Exemplos de casos que NÃO dão certo:

Nesse caso vamos mostrar que para termos α > 1 a derivada fracionária diverge, para isso vamos utilizar uma função já conhecida por nós, $f(x) = x^4$. A série de Fourier para $f(x) = x^4$ é,

$$x^4 = \frac{2\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{8(-6+n^2\pi^2)}{n^4}\cos(n\,x)\right],$$

Usando a expressão para derivada fracionária com o termo da derivada fracionária de constante, fica:

$$\frac{d^{\alpha}(x^4)}{dx^{\alpha}} = \frac{\pi^4}{5}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{8(-6+n^2\pi^2)}{n^{4-\alpha}}\cos\left(nx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)$$

Agora mostramos alguns gráficos, onde α varia de α = 1.1 até α = 1.6 para n = 50.

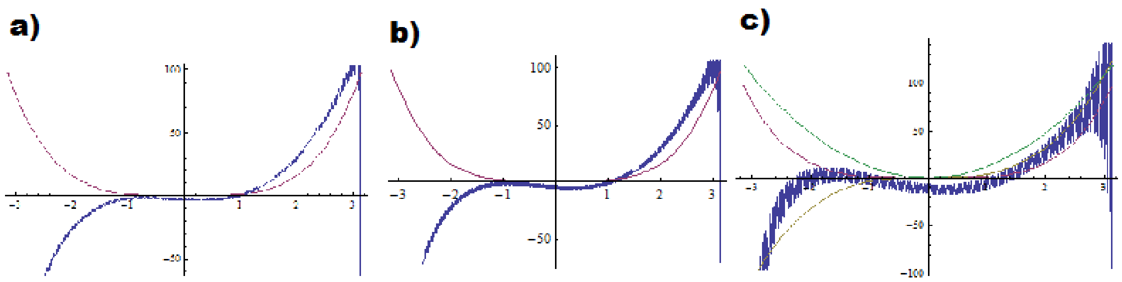

Figura 4.15: , a) mostra na cor azul o comportamento α = 1.2 e vermelho para $f(x) = x^4$. b) mostra em azul α = 1.3 e $f(x) = x^4$ agora na letra c) temos α = 1.6 na cor azul, vermelho para $f(x) = x^4$, verde é $f(x) = 12x^2$ e na cor bege temos $f(x) = 4x^3$.

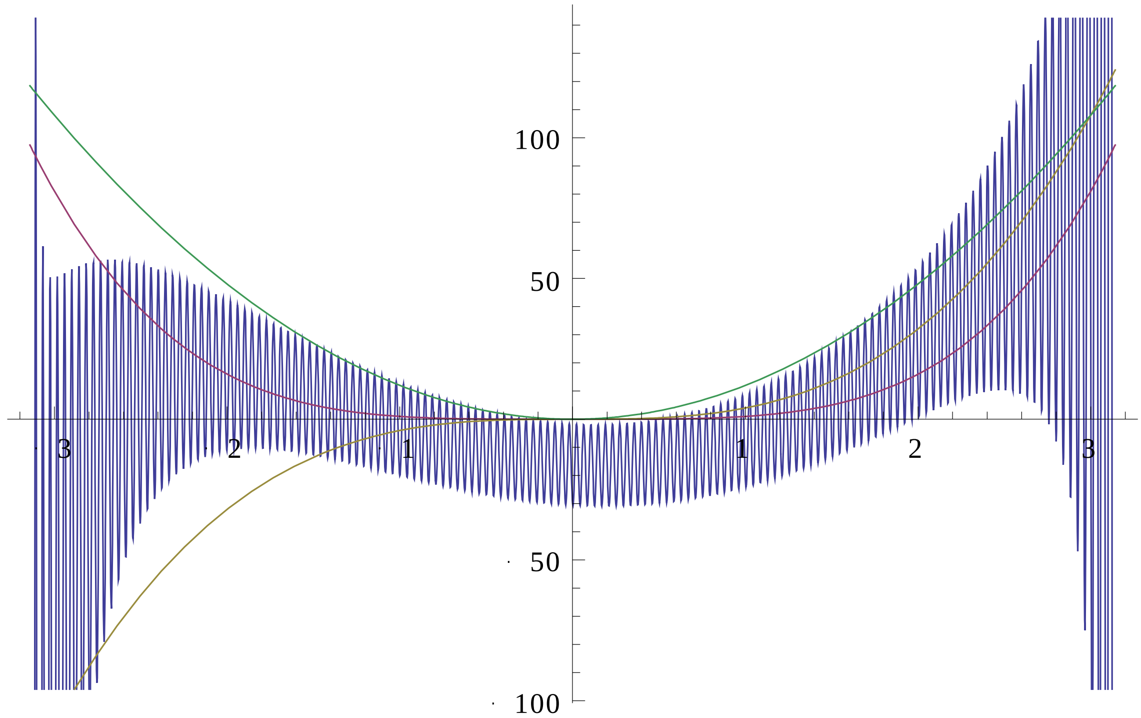

Figura 4.16: Representação das mesmas funções da figura 4.15, somente em azul variamos α = 1,9, mostrando a oscilação e a divergência da derivada fracionária.

Utilizamos essa função porque já sabemos que derivadas fracionárias de monômios expandidos em série de Fourier, de grau par, convergem. Mas um fato curioso em nosso exemplo é quando α assume valores entre $1,1<\alpha < 1,9$, o mesmo monômio diverge, pois doravante esse monômio passa a ter grau ímpar.

4.4 Um possível caminho para resolver o problema de divergência oscilante da série de Fourier.

Como vimos, existe problema de divergência oscilante na série de Fourier quando se deriva ordinariamente. Esta divergência aparece na componente ímpar da função. Precisamos resolver esse problema ainda no contexto da série de Fourier, isto é, devemos usar restritamente a teoria estabelecida por ela.

Para resolver o problema usamos o truque de quadrar a função que não converge, pois seu quadrado é função par, cuja expansão agora, com certeza, converge. Sabendo disso, expandimos essa função quadrada em série de Fourier. Feito isto, derivamos fracionariamente ambos os membros e por fim extraímos a raiz quadrada de ambos os membros. Assim, a função quadrada retorna à função anterior, que tinha a série divergente, cuja derivada fracionária era desconhecida. Mesmo assim, vimos que o problema não está plenamente resolvido.

Como um exemplo ilustrativo, damos a derivada da função $f(x) = x^3$. O procedimento é quadrar a função, assim temos: $f^2(x) = g(x) = x^6$. Esta função quando derivado e expandida converge. Seguindo o procedimento relatado no parágrafo anterior obtemos a derivada fracionária.

O gráfico a seguir mostra o comportamento da função x^3 derivada fracionariamente de acordo com o procedimento citado.

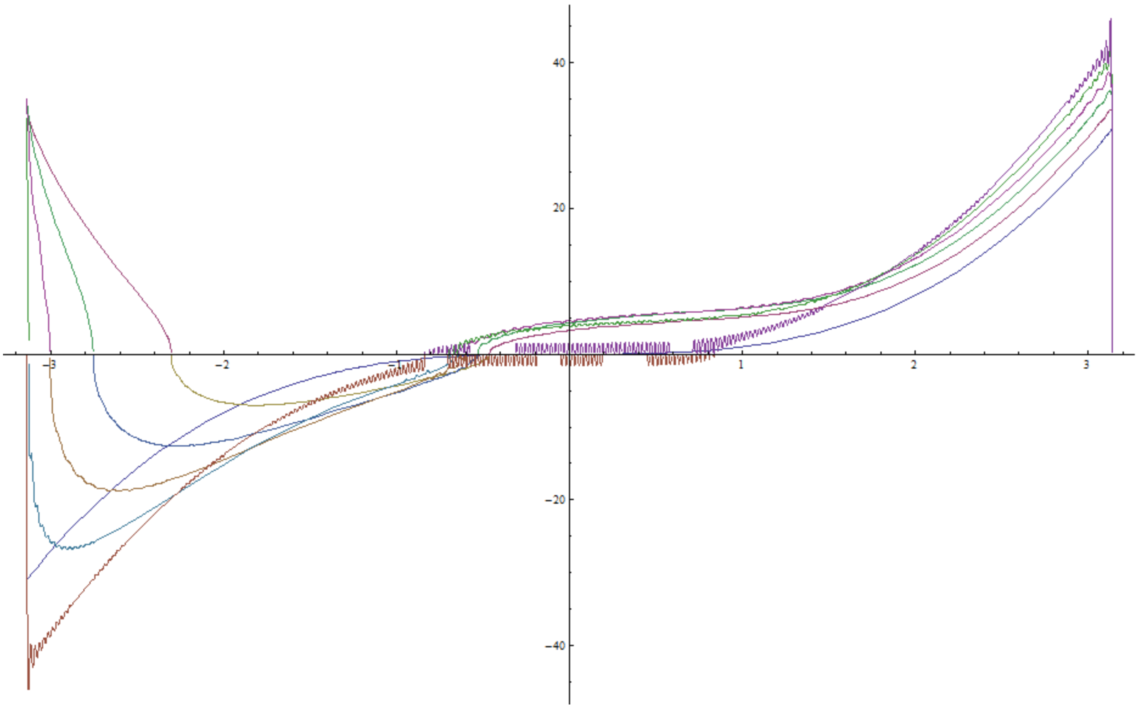

Figura 4.17 o comportamento da função x^3 derivada fracionariamente

Portanto, averiguamos um pouco da sistemática de derivar fracionariamente usando a série de Fourier e os postulados dados em eq.(2.9) e eq.(2.10). Ainda faltam muitos problemas a resolver, isto é, problemas em aberto. Acreditamos que estamos em caminho certo.

Nesse gráfico da figura 4.17 ainda encontramos divergências no trecho central da figura 4.17, assimetria em geral. Apesar de dar resultado, é um resultado próximo. Devemos ainda pesquisar esses problemas.

CONCLUSÃO

Esperamos termos indicado os problemas corretamente. Um dos problemas encontrado foi como derivar uma constante. Acreditamos que conseguimos resolver parcialmente esse problema de derivar fracionariamente uma constante. Foi resolvido no contexto de série de Fourier limitado e usado no contexto de funções polinomiais em potências pares. Essa derivada fracionária é dada por:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}C = Ccos(\frac{\alpha\pi}{2})$$

que não consta na literatura científica. Em geral, na literatura considera que a derivada fracionária, no contexto de série de Fourier, de uma constante é zero.

Desse modo, o trabalho apresentado nos indicou que o estudo da série de Fourier aplicado no cálculo fracionário não é trivial. Constatamos que para os casos onde testamos derivar ordinariamente a série de Fourier algumas das funções convergem e outras não (funções ímpares).Verificamos o cálculo fracionário usando a teoria de série de Fourier, não funciona diretamente. Para funções, diferente de polinomiais, o cálculo fracionário usando a teoria de série de Fourier não funciona em geral. Pudemos corrigir o deslocamento vertical da série, mas não podemos corrigir plenamente a divergência oscilante.

Quanto ao problema de divergência da série de Fourier descobrimos um caminho de contorná-lo, porém ainda falta pequeno ajuste, pois o resultado indica que existe um pequeno problema de assimetria visual, e uma minúscula divergências centrais.Assim, não podemos cumprir com toda proposta da monografia porque apareceram problemas durante a sua execução. Como foi visto esses problemas são de divergência da série de Fourier, derivada de uma constante.E principalmente a falta de tempo, que é muito restrito para execução desta monografia.

Não pudemos cumprir com a proposta inicial completamente, mas conseguimos propor uma expressão bem aproximada para a derivada fracionária de monômio par, que depende do parâmetro de ordem α, isto é:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}(x^{2m}) = (2m)^{\alpha}x^{2m-\alpha}$$

Por fim, esta pesquisa está aberta e tem muito a pesquisar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Miller K.S., Ross B., Capítulo 1, *An introduction to the fractional calculus and fractionaldifferential equations* (Wiley, 1993), 1-15.

[2] Derivada Fracionária, disponível em: *http://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada_fracion%C3%A1ria#cite_note-0*,Acesso em: 31/10/2011

[3]Fractional Calculus, Disponível em: *http://www.xuru.org/fc/toc.asp*, acesso em: 06/09/2011

[4] Tang K T, *Mathematical Methods For Engineers And Scientists 3, Fourier Analysis, Partial Differential Equations And Variational Methods*, - (Springer 2007) 61-103.

[5]P. L. Butzer e U. Westphal, Capítulo 1, *Applications of fractional calculus in physics (World Scientific 1999), 3-15*

[6] M. Kleinz e Thomas J. Osler, *A Child's Garden of Fractional Derivatives*, (The College Mathematics Journal, March 2000, Volume 31, Number 31), 82-88

[7] M.R. Spiegel,*Handbook Of Math Formulas- Schaum,(Rensselaer Polytechnic Institute 1968)* 60-110

[8]M.R. Spiegel, Capítulo 2, *Análise de Fourier- Schaum*, (McGraw-Hill), 28-48.

[9] I.S.Gradshteyn e I.M.Ryzhik,*Table of Integrals, Series, and Products*,(Alan Jaffrey), 29-33

[10] S.Wolfram, *The Mathematica Book*, (Wolfram Media), 4-21