

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Estudo de Ondas tipo Sóliton por
Teoria Clássica de Campos**

(Trabalho de Conclusão de Curso)

Icaro Joshua Morales Ullion

Maringá - PR

7 de dezembro de 2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Estudo de Ondas tipo Sóliton por
Teoria Clássica de Campos**

(Trabalho de Conclusão de Curso)

Icaro Joshua Morales Ullion
Orientador: Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne

Trabalho de Conclusão de Curso
submetido departamento de Física
da Universidade Estadual de Maringá
para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Maringá - PR
7 de dezembro de 2012

"The more success the quantum theory has, the sillier it looks "
Albert Einstein

Agradecimentos

Primeiramente faço um agradecimento especial à minha família. Minha mãe Mauricia, por todo amor, cuidado e preocupação que sempre teve comigo e com meus irmãos. Por ela ter sido forte num momento muito difícil de nossas vidas e seguindo em frente sempre cumprindo um papel de Mãe e de Pai ao mesmo tempo. Agradeço a minha irmã Priscilla, por todo amor e carinho que sempre teve comigo, e a quem devo toda essa oportunidade que tive de realizar um curso superior. Ao meu irmão Miguel, por todo amor e enorme amizade que sempre tivemos um com o outro, e foi quem sempre me motivou e influenciou a vir estudar Física. Ao meu irmão caçula Lothar, por todo amor que tenho e me incentiva a me tornar um bom exemplo para seu futuro.

A minha namorada Ketlin, que há mais de 5 anos está do meu lado, mesmo estando longe, incentivando e me dando todo apoio que sempre precisei, e também todo o amor que sempre tivemos um pelo outro.

Agradeço ao professor Luis Carlos Malacarne, por ter aceitado a me orientar nesse trabalho de conclusão de curso.

A meus amigos de turma: Adriane, Gustavo, Julio, Maike, Otavio, Jakeline e Veridiana pela amizade e tanto tempo junto estudando e jogando conversa fora ao longo do curso.

Por fim, mais não menos importante, faço um agradecimento aos meus grandes amigos da ALATTE: Allan, Angel, Tiago, Ricardo, Thalisson, Rodrigo Thomas, Rodrigo(Birigui) e Pedro. Para mim são como uma família aqui em Maringá e com o qual fizemos incontáveis rodas de tereré, sempre muito bem descontraídas. E também são com quem sempre pude contar, quando precisei, enquanto estive aqui.

Resumo

Neste trabalho fizemos uma revisão da formulação Lagrangiana e Hamiltoniana da Mecânica Clássica(MC) e da Mecânica Relativística(MR). Em MR fizemos um estudo da notação tensorial, cuja importância em usar uma teoria envolvendo quadritensores é que estas relações são as mesmas em qualquer referencial inercial, isto é, a teoria é covariante. Ainda em MR, a relatividade especial pode ser convenientemente descrita associando-se os eventos físicos a um ponto num espaço vetorial quadridimensional munido da pseudométrica Lorentziana. Este espaço é denominado espaço de Minkowski, também é abordado neste trabalho. As revisões de MC e MR são importante para o estudo da Teoria de Clássica de Campos. O último capítulo deste trabalho apresentamos um estudo sobre ondas solitárias clássicas. Partimos de uma densidade Lagrangiana que descreve uma onda solitária clássica e obtemos duas soluções distintas para o campo φ , uma solução estática e outra que depende tanto do tempo quanto do espaço. Para finalizar calculamos a energia total armazenada na onda para estas duas soluções distintas.

Abstract

In this work, we review the Lagrangian and Hamiltonian formulation of Classical Mechanics (CM) and Relativistic Mechanics (RM). In RM we studied the tensor notation, which the fundamental importance of theory involving quadritensores is that these relationships are the same in any inertial frame, *i.e.*, the theory is covariant. In addition, special relativity can be conveniently described by associating physical events to a point in a four-dimensional vector space endowed with the Lorentzian pseudo-metric. This space is called Minkowski space, which is also being approached in this work. The revisions of CM and RM are important for the study of Classical Field Theory. In the last chapter of this work, we present a study of classic solitary waves. Initially, a Lagrangian density that describes a classic solitary waves is introduced and two distinct solutions for the field φ are obtained, a static and a dynamic solutions. Finally, we calculate the total energy stored in the wave for these two distinct solutions.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Mecânica Analítica	3
1.1 Coordenadas Generalizadas	3
1.2 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange	5
1.2.1 Oscilador Harmônico Unidimensional	6
1.3 Dinâmica Hamiltoniana	7
1.3.1 Equações de Hamilton	7
2 Mecânica Relativística	10
2.1 Transformações de Lorentz	10
2.2 Princípio da Relatividade de Einstein	11
2.3 Intervalo	13
2.4 Vetores e Tensores no espaço tridimensional	15
2.4.1 Tensores simétricos e anti-simétricos	16
2.4.2 Tensor de Levi-Civita	17
2.4.3 Representação Covariante e Contravariante	17
2.5 Espaço de Minkowski	19
3 Teoria Clássica de Campos	23
3.1 Teoria de Campos na Forma Lagrangiana	23
3.1.1 Vários Campos em Três Dimensões	25
3.2 Teoria de Campos Relativísticas	26
3.2.1 Campo de Klein-Gordon	26
3.3 Teoria de Campos na Forma Hamiltoniana	27

3.3.1	Equação de Hamilton	27
4	Estudo de Ondas Solitárias	29
4.1	Densidade Lagrangiana de Ondas Solitárias	29
4.2	Energia da Onda Solitária Clássica	30
4.2.1	Solução constante e estacionária	31
4.2.2	Solução dependente do tempo	34
	Considerações Finais	36
	Referências Bibliográficas	37

INTRODUÇÃO

Sistemas contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade e são descritos por campos. É fato notável que praticamente todas as teorias de interesse físico podem ser descritas pelos formalismos de Lagrange e Hamilton. As interações das partículas elementares, constituintes básicos da matéria, são expressas por meio de teorias quânticas de campos. Por sua vez, a construção das teorias quânticas das interações fundamentais da natureza depende crucialmente da possibilidade de primeiro formulá-las como teoria clássicas de campos nas linguagens Lagrangiana e Hamiltoniana.

A descrição dos campos físicos começou antes do advento da teoria da relatividade. Consequentemente, as teorias clássicas de campos geralmente são classificadas como não-relativista e relativista. Na parte relativística são estudadas duas das forças fundamentais da natureza, a eletromagnética e a gravitacional.

Como a teoria clássica de campos tem uma parte relativística, é de grande importância o estudo de relatividade para melhor entendimento dos conceitos envolvidos. Quando as partículas movem-se com velocidades próximas a velocidade da luz no vácuo, a mecânica Newtoniana entra em contradição e precisa ser reformulada. Esta reformulação deu origem a teoria da relatividade restrita, a qual é voltada para o desenvolvimento de um formalismo que permita formular as leis da Física numa forma válida em todos os sistemas de referencia inerciais. Ela substitui os conceitos independentes de espaço e tempo da Teoria de Newton pela ideia de espaço-tempo como uma entidade geométrica unificada.

Tanto a teoria da relatividade quanto a teoria clássica de campos podem ser escritas na linguagem Lagrangiana e Hamiltoniana. Devido a isso a mecânica analítica tem sua grande participação na descrição destas duas teorias. Neste trabalho dedicamos ao estudo da Teoria Clássica de Campos e ao final fazemos uma aplicação desta teoria para o estudo de ondas solitárias.

A onda solitária foi observada pela primeira vez por John Scott Russell em 1834. Ele

estava observando o movimento de um barco, que deslocava-se rapidamente ao longo de um canal estreito quando o barco parou de repente. Russell observou que havia uma massa de água que acumulava-se diante do barco assumindo a forma de uma onda solitária que seguiu pelo canal sem perder sua forma e velocidade [1].

O nome sóliton foi criado pelo cientista D.J. Korteweg e seu aluno G. de Vries quando estes deduziram a equação que descreve o comportamento desse tipo de onda [2]. Os sólitons ou ondas solitárias são pulsos que não perdem energia facilmente, ou seja, a amplitude de onda permanece constante por um longo período. Para esse tipo de onda, nem a amplitude nem a velocidade são funções do tempo.

CAPÍTULO 1

MECÂNICA ANALÍTICA

Muito antes da Ciência atingir o estado de complexidade atual, Lagrange imaginou um método uniforme de ataque a todos os problemas de dinâmica. Esse método constitui a base para quase todo o trabalho da teoria geral da dinâmica, e é o fundamento da mecânica quântica. Nas partes mais elementares da mecânica, o método ainda não suplantou a aproximação física direta, pois é um tanto abstrato, e seu caráter geral faz com que ele pareça difícil. Entretanto, parece provável que, com o decorrer do tempo, o método de Lagrange seja empregado de princípio a fim nos manuais de mecânica.

Sistemas mecânicos sujeitos a vínculos de natureza geométrica ou cinemática ocorrem com frequência. Em situações particulares pode ser difícil ou mesmo impossível obter expressões explícitas para essas forças de vínculos. O poderoso e elegante formalismo desenvolvido por Lagrange permite escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos relevantes a partir de uma única função escalar expressa em termos de coordenadas independentes arbitrárias, com a vantagem adicional de não envolver as forças de vínculo.

1.1 Coordenadas Generalizadas

Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas no sistema podem ser especificadas. Nos problemas em que é necessário usar coordenadas generalizadas, podem-se escrever as equações do movimento, de Newton, em termos de coordenadas cartesianas e, então, transformá-las em coordenadas generalizadas. No entanto seria desejável e conveniente um método geral que estabelecesse diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas. Tal

método foi inventado por Joseph-Louis Lagrange, e foi exposta pela primeira vez no livro "Méchanique Analytique" em 1788

Em sistemas holônomos é possível introduzir um certo número n de variáveis independentes, denotadas genericamente por q_1, q_2, \dots, q_n e denominadas coordenadas generalizadas, de sorte que: **(a)** o vetor posição de cada partícula é determinada univocamente em cada instante pelos valores destes parâmetros; **(b)** os vínculos são identicamente satisfeitos se expressos em termos de q_1, q_2, \dots, q_n . Logo uma partícula movendo-se num plano poderá ser descrita por duas coordenadas, q_1 e q_2 , que em casos especiais, podem ser as coordenadas cartesianas x e y , ou as coordenadas polares r e θ , ou qualquer outro par apropriado.

A configuração de um sistema de N partículas pode ser especificadas por qualquer conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} . Como para cada configuração do sistema, as coordenadas generalizadas devem ter um conjunto definido de valores, e as coordenadas q_1, \dots, q_{3N} serão funções das coordenadas cartesianas e, possivelmente, também do tempo no caso de sistemas de coordenadas em movimento:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t), \\ q_2 &= q_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t), \\ &\vdots \\ q_{3N} &= q_{3N}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N; t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como as coordenadas q_1, \dots, q_{3N} especificam a configuração do sistema, deve ser possível expressar as coordenadas cartesianas (ou qualquer sistema de coordenadas que esteja sendo utilizada) em termos das coordenadas generalizadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t), \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t), \\ &\vdots \\ z_N &= z_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}; t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

Se as Eqs. (1.1) são conhecidas, pode-se obter x_1, y_1, \dots, z_N para determinas as Eqs (1.2) e vice-versa.

Seja um sistema mecânico de N partículas submetidas a p vínculos. Das $3N$ coordenadas apenas $n = 3N - p$ podem ser tomadas como independentes entre si, e diz-se que o sistema possui n graus de liberdade. O espaço formado pelas coordenadas genera-

lizadas é chamado de *espaço de configurações*. As derivadas primeiras das coordenadas generalizadas em relação ao tempo são chamadas de *velocidades generalizadas*.

1.2 Princípio de Hamilton e Equações de Lagrange

Princípios minimais em física tem uma longa e interessante história. A origem para tais princípios está no fato de que a natureza sempre busca minimizar certas quantidades importantes quando um evento físico ocorre.

Seja um sistema caracterizado por N coordenadas generalizadas. A configuração deste sistema num certo instante t_1 é dada pelos valores das N coordenadas e das N velocidades generalizadas no instante t_1 . Num instante t_2 , a configuração será provavelmente outra. Estamos interessados na seguinte questão: Como o sistema evolui da configuração 1 (coordenadas e velocidades generalizadas no instante t_1) para a configuração 2.

Caracterizando o sistema por uma função escalar L, definida pela diferença entre a energia cinética e potencial da partícula, dependendo das N coordenadas e N velocidades generalizadas, podendo depender também do tempo, temos:

$$L = T(\dot{q}_k) - U(q_k) = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (1.3)$$

ou compactamente,

$$L = L(q, \dot{q}, t), \quad (1.4)$$

sendo L a Lagrangiana do sistema e a quantidade

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.5)$$

é chamada de ação.

O princípio de Hamilton, também conhecido como princípio da mínima ação, estabelece que:

"De todos os possíveis caminhos ao longo dos quais um sistema dinâmico pode mover-se de um ponto à outro num intervalo de tempo especificado (consistente a qualquer vínculo), o caminho real seguindo é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre as energias cinética e potencial", isto é:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (1.6)$$

A variação da ação $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ é dada por

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt. \quad (1.7)$$

Efetuada uma integração por partes obtêm-se

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.8)$$

Levando em conta que as variações das coordenadas generalizadas anulam-se nos pontos extremos, esta última equação reduz-se a

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k(t). \quad (1.9)$$

Como os $\delta q_k(t)$ são funções arbitrárias de t , a condição de mínimo (princípio de Hamilton), $\delta S = 0$, é satisfeita se

$$\sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k(t) = 0. \quad (1.10)$$

Se não houver relação de vínculo entre os q_k , temos que os diversos δq_k são independentes. Neste caso temos

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

Estas são as **equações de movimento de Lagrange** para a partícula, e a quantidade $L = T - U$ é chamada de **função de Lagrange** ou **Lagrangiana** do sistema. Para exemplificar, vamos obter a Equação de Lagrange de um sistemas muito conhecido na física, o Movimento de um oscilador harmônico unidimensional.

1.2.1 Oscilador Harmônico Unidimensional

Nesse caso temos apenas uma coordenada generalizada, que no caso é a coordenada cartesiana x , ou qualquer outra direção a escolha. Temos então as energias do sistema,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad e \quad U = \frac{1}{2} K x^2.$$

Assim a Lagrangiana do sistema é dada por

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2.$$

Temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}.$$

Logo a equação de Lagrange fornece

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow -kx - m\ddot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0,$$

que é a mesma equação do O.H.S. obtida pelas Mecânica de Newton.

É importante lembrar que a dinâmica Lagrangiana não constitui uma nova teoria no sentido da palavra. Os resultados das análises Lagrangiana e Newtoniana devem ser as mesmas para qualquer sistema mecânico. A única diferença está no método utilizado para obter estes resultados. Enquanto a notação Newtoniana enfatiza a ação externa atuando sobre um corpo (força), a notação Lagrangiana trata apenas com quantidades associadas com o corpo (energias cinética e potencial), e essa é uma propriedade importante porque a energia é uma quantidade escalar, e portanto, a função Lagrangiana para um sistema é invariante à transformações de coordenadas.

1.3 Dinâmica Hamiltoniana

A formulação Hamiltoniana é uma forma alternativa de se descrever a mecânica clássica, que utiliza a função Hamiltoniana em lugar da Lagrangiana. A dinâmica de Hamilton consiste em substituir n equações de Lagrange por um certo conjunto equivalente de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Elas são equações diferenciais de primeira ordem no tempo que, quando combinadas, levam às mesmas equações diferenciais obtidas pelo formalismo Lagrangiano, que por sua vez, eram as mesmas obtidas pela segunda lei de Newton. A importância do formalismo Hamiltoniano reside em fornecer um método poderoso, geral e flexível para a investigação de questões estruturais da mecânica, e, sobretudo, em servir de fundamento para a mecânica quântica e a mecânica estatística.

1.3.1 Equações de Hamilton

Na formulação Lagrangiana considerávamos que as variáveis independentes eram (q, \dot{q}, t) . No caso da formulação Hamiltoniana o conjunto de variáveis independentes é dado por (q, p, t) . Diferentemente do formalismo Lagrangiano, na formulação de Hamilton as equações de movimento, num sistema com n graus de liberdade, são $2n$ equações diferenciais de primeira ordem. O movimento pode ser representado por uma curva traçada no *espaço de fase*. Diferentemente do espaço de configurações, um ponto no espaço de fase determina o estado do sistema, isto é, sua configuração (posição da partícula) e o momento da

partícula num dado instante.

Em 1835 Hamilton mostrou que sua formulação seria conseguida graças à descrição da dinâmica por intermédio das quantidades q_i e p_i , onde p_i é o momento canônico conjugado a q_i definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Assim a descrição hamiltoniana envolve a substituição das variáveis (q, \dot{q}) por (q, p) em todas as grandezas mecânicas, e a introdução da função $H(q, p, t)$ em lugar da Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ para gerar a dinâmica. Tal mudança na descrição realiza-se mediante a substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e na introdução da função de Hamilton, denominada hamiltoniana $H(q, p, t)$ definida por

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t). \quad (1.13)$$

As consequências mais imediatas da formulação de Hamilton podem ser obtidas mediante a diferencial da função hamiltoniana $H(q, p, t)$:

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right]. \quad (1.14)$$

Utilizando a definição dos momentos canônicos, dado por (1.12), e das equações de Lagrange, a Eq.(1.14) reduz-se a

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (1.15)$$

desta última equação, pode-se concluir que de fato H só depende dos q_i e p_i . Por outro lado, como H é função de q, p e t , podemos tomar a diferencial total de H , temos

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (1.16)$$

Comparando as Eqs. (1.15) e (1.16) resulta

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.17)$$

As equações (1.17) são conhecidas como as equações de Hamilton ou equações canônicas de Hamilton, e formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem equivalente ao sistema de n equações de segunda ordem de Lagrange.

CAPÍTULO 2

MECÂNICA RELATIVÍSTICA

A teoria da Relatividade especial, como a conhecemos hoje, foi apresentada por Einstein em 1905. Antes, porém, em três trabalhos (1899, 1900 e 1904) Poincaré já havia sugerido interpretações sobre o resultado da experiência de Michelson e Morley que conduziam na mesma direção. No presente capítulo apresentaremos os postulados da teoria de Einstein e mostraremos algumas consequências desta teoria, junto com as transformações de Lorentz.

2.1 Transformações de Lorentz

Seja S um referencial inercial e S' um outro referencial inercial que se move em relação a S com velocidade constante v (os eixos de S' são paralelos aos eixos de S). Para evitar complicações desnecessárias, suponhamos que as origens O e O' coincidam nos instantes $t = t' = 0$ e que a velocidade relativa v seja paralela ao eixo x de S . Então as coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , atribuídas a um mesmo evento por observadores fixos nos respectivos referenciais, estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

As equações (2.1) constituem uma transformação de Lorentz e foram deduzidas por Einstein em 1905 com base no postulado fundamental da constância da velocidade da luz no vácuo. Formalmente, o limite não relativístico da transformação de Lorentz obtém-se fazendo $c \rightarrow \infty$. De fato, passando ao limite $c \rightarrow \infty$ as Eqs. (2.1) reduz-se a

$$x' = x - vt \ , \ y' = y \ , \ z' = z \ , \ t' = t, \quad (2.2)$$

que é uma transformação de Galileu, característica da mecânica newtoniana.

2.2 Princípio da Relatividade de Einstein

A teoria da relatividade especial de Einstein apoia-se em dois postulados:

1. As leis da natureza são invariantes para todos os observadores inerciais.
2. As velocidades de propagação das interações é finita e independente do sistema de referência.

Como vemos, o princípio da relatividade de Einstein contrasta com o de Galileu na velocidade de propagação das interações. Na relatividade galileana, esta velocidade é infinita. O valor finito, estabelecido no segundo postulado de Einstein, é a velocidade da luz no vácuo

$$c = 2,998 \cdot 10^8 m/s, \quad (2.3)$$

que é a mesma para todos os observadores inerciais. Este postulado está em concordância com o resultado da experiência de Michelson-Morley. Este segundo postulado traz mudanças drásticas a muitos conceitos usuais da Física, tais como: dilatação do tempo, contração de Lorentz e relatividade da simultaneidade.

Relatividade da Simultaneidade

O conceito de simultaneidade, que era absoluto na relatividade de Galileu, possui um significado relativo na teoria de Einstein. Seja o seguinte exemplo: consideremos num sistema S' os pontos B e C localizados sobre o eixo x' , equidistante de um ponto A também localizado em x' .

O sistema S' move-se com velocidade \vec{v} (constante) em relação ao sistema S . Consideremos que do ponto A sejam emitidos sinais luminosos. Como estes sinais propagam-se com a mesma velocidade em todas as direções e independentemente dos sistemas de referência, em S' os sinais atingem B e C simultaneamente. Já para observadores no sistema S , um sinal atinge B antes de um sinal atingir C .

Dilatação Temporal e Contração de Lorentz

Observando as transformações de Lorentz, dadas por (2.1), vemos que, por exemplo, o relacionamento entre os instantes em que ocorreu um evento, registrado em S e S' , depende também do ponto do espaço onde este evento ocorreu para um observador em S . Isto, juntamente com o fator $(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ que aparece em duas das transformadas de Lorentz, traz consequências interessantes. Vejamos um exemplo.

Suponhamos uma viagem espacial da Terra a um planeta de uma estrela situada a 10^3 ano-luz de distância; é uma viagem aparentemente impossível para a conhecida média de vida dos seres terrestre. Entretanto, um grupo de astronauta deseja fazê-la em apenas 10 anos. Com o uso das transformações de Lorentz, vejamos como isto é realmente possível. A distancia de 10^3 anos-luz é uma distancia em relação ao referencial da Terra (supostamente inercial). Já o tempo de viagem de 10 anos é o tempo medido pelo relógio de bordo da nave. Este é um intervalo de tempo próprio para os passageiros da nave.

A primeira das transformadas de (2.1) permite calcular a velocidade da nave (desprezando-se o trecho inicial em que a nave é acelerada até atingir a velocidade \vec{v}):

$$\begin{aligned}10^3 \text{anos} - \text{luz} &= \frac{0 + 10 \text{anos} \cdot V}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\10^3 \text{anos} \cdot c &= \frac{10 \text{anos} \cdot V}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\10^4 c^2 (1 - v^2/c^2) &= v^2 \\(10^4 + 1)v^2 &= 10^4 c^2 \quad \Rightarrow \quad v = 0.99995c.\end{aligned}$$

Assim, tendo a nave uma velocidade de $0.99995c$, os astronautas conseguirão realizar a viagem em 10 anos. Vejamos agora quantos anos terão decorridos para os habitantes da Terra. Como a distância é 10^3 anos-luz e a velocidade é $0.99995c$, temos

$$t' = \frac{10^3 \text{anos} \cdot c}{0.99995c} = 1000.05 \text{anos}.$$

É este o fenômeno a que chamamos de "**dilatação temporal**". De uma maneira mais geral, isto significa que o intervalo de tempo próprio é sempre menos que este mesmo intervalo quando medido por outros observadores inerciais. Assim da última relação de (2.1) podemos escrever:

$$dt = \frac{dt' + V(dx')/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Se dt' é um intervalo de tempo próprio, temos $dx'=0$. Consequentemente,

$$dt' = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.4)$$

Este é o denominado intervalo de tempo próprio, que é um invariante de Lorentz. Isto significa, por exemplo, o seguinte: o tempo próprio de vida de uma pessoa, de uma partícula etc., é sempre o mesmo, qualquer que seja o seu referencial inercial e isto parece ser coerente. Não poderíamos esperar que o nosso tempo de vida fosse dilatado para certos sistemas de referência.

Voltando ao nosso exemplo, para os habitantes da Terra, a viagem da nave para percorrer os 1000 anos-luz leva 1000.05 anos. Entretanto, para os passageiros da nave, como vimos, esta viagem dura apenas 10 anos. Sob o ponto de vista destes passageiros, isto é possível porque a distância não é mais 1000 anos-luz. Vejamos qual é o valor da distância para eles.

Se a nave se aproxima-se da estrela com velocidade $0.99995c$, isto significa que, em relação à nave, é a estrela que se aproxima com esta velocidade. Portanto, como a viagem dura 10 anos, a distância inicial entre a nave e a estrela vale

$$0.99995c \times 10\text{anos} = 9.9995\text{anos} - \text{luz},$$

ou seja, a distância para eles não são os mesmos 10^3 anos-luz. A este fenômeno damos o nome de "**contração de Lorentz**".

2.3 Intervalo

Vamos introduzir agora o importante conceito de "intervalo entre dois eventos". Um evento é algo que ocorre num certo ponto do espaço e num certo tempo. Sejam, então, dois eventos, que chamaremos de A e B , caracterizados por

$$\text{Evento } A : r_A, t_A$$

$$\text{Evento } B : r_B, t_B,$$

chamaremos de intervalo entre os eventos A e B a quantidade S_{AB} dada por

$$S_{AB} = [c^2(t_B - t_A)^2 - (r_B - r_A)^2]^{1/2}. \quad (2.5)$$

O aspecto importante contido nesta definição é que o intervalo é uma quantidade invariante sob as transformações de Lorentz. Da relação (2.5), podemos caracterizar os

intervalos quanto às seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned}
 S_{AB}^2 > 0 & \text{ intervalo tipo tempo} \\
 S_{AB}^2 < 0 & \text{ intervalo tipo espaço} \\
 S_{AB}^2 = 0 & \text{ cone de luz.}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Como os intervalos são invariantes por transformações de Lorentz, as propriedades anteriores são mantidas para todos os referenciais inerciais, isto é, se por exemplo um intervalo é tipo tempo para um referencial inercial, ele o será para qualquer outro referencial inercial. No caso de intervalos do tipo tempo, é sempre possível achar um referencial onde eles ocorrem num mesmo ponto do espaço. Já no caso de intervalos do tipo espaço, existe um certo referencial onde os eventos ocorrem simultaneamente.

O chamado "cone de luz" é a região que corresponde ao limite da separação entre os intervalos do tipo tempo e do tipo espaço. Para obter a equação do cone de luz, façamos o ponto A da relação (2.5) como origem e o ponto B, genérico. Assim, usando a condição do cone de luz, obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \tag{2.7}$$

que é a equação de um cone no espaço quadridimensional formado pelas coordenadas x , y , x , t .

Sejam os pontos A e B da relação (2.5) infinitamente próximos. Assim, podemos escrever

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2, \tag{2.8}$$

se imaginarmos $d\vec{r}$ o deslocamento no movimento de uma partícula correspondente a intervalo de tempo dt , temos, considerando c como um limite de velocidade, que o gráfico espaço-tempo do movimento fica contido no interior do cone de luz. Na figura a seguir, tomamos o cone em apenas uma dimensão.

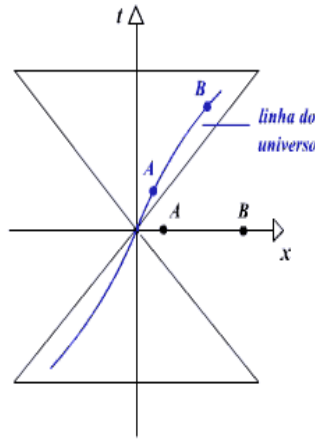


Figura 2.1: Cone Luz

A linha sinuosa que liga os pontos A e B corresponde ao gráfico de um suposto movimento de uma partícula. Esta linha é chamada de "linha do universo" da partícula e o movimento da partícula é limitado para que ocorra apenas no interior do cone.

2.4 Vetores e Tensores no espaço tridimensional

Revisaremos aqui alguns conceitos e propriedades mais importantes do espaço que nos é familiar, o chamado "espaço Euclidiano" (em 3-D). A finalidade de estudarmos primeiro o espaço tridimensional usual é que a maior parte dos conceitos e propriedades introduzidas neste estudo será facilmente estendida quando ao estudo em quatro dimensões.

Iniciaremos com o conceito de vetor. Chamaremos de vetor as quantidades x_i que, numa rotação do sistema de coordenadas ou inversão de eixos (transformação de paridade), transformam-se como

$$x'_i = a_{ij}x_j, \quad (2.9)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, e adotaremos a chamada convenção de Einstein, onde dois índices repetidos subentendem soma. Portanto, na relação acima, está havendo soma no índice j . Nestas transformações, o módulo do vetor permanece invariante. Isto acarreta uma certa condição para os coeficientes a_{ij} :

$$x'_i x'_i = a_{ij} a_{ik} x_j x_k. \quad (2.10)$$

Para que $x'_i x'_i = x_i x_i$, deveremos ter que a_{ij} devem satisfazer a condição $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ que é chamada de "condição de ortogonalidade" e que corresponde à usual definição de matriz ortogonal, isto é, $A = A^{-1}$.

É importante lembrar a forma da matriz que corresponde à rotação em torno de um dos eixos coordenados. Por exemplo, uma rotação anti-horária de um ângulo θ , em torno

do eixo 3, é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

O conceito de tensor é uma generalização da relação (2.9). Chama-se tensor de segunda ordem a quantidade T_{ij} que, numa transformação ortogonal do sistema de coordenadas, transforma-se como

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (2.12)$$

De maneira geral, para um tensor de ordem N, teríamos

$$T'_{i_1, i_2, \dots, i_N} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N}. \quad (2.13)$$

O vetor e o escalar podem ser considerados como casos particulares de tensor. Vetor é um tensor de ordem 1 e escalar de ordem zero.

Temos duas propriedades importantes sobre os tensores:

1ª) O produto de um tensor de ordem N com um de ordem M é um tensor de ordem N+M.

2ª) O produto de um tensor de ordem N, pelo tensor δ_{ij} para $j, k \leq N$, é um tensor de ordem N-2, este processo é chamado de contração do tensor.

2.4.1 Tensores simétricos e anti-simétricos

Há dois tipos especiais de tensores de ordem 2, que são os chamados tensores simétricos e anti-simétricos, cujas definições são

$$\begin{aligned} \text{Tensor simétrico : } T_{ij} &= T_{ji} \\ \text{Tensor anti-simétrico : } T_{ij} &= -T_{ji}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

No primeiro caso, temos seis elementos independentes: $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$. No segundo, apenas três, pois $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$.

Os tensores simétricos e anti-simétricos permitem escrever duas propriedades importantes:

(i) Qualquer tensor de ordem 2 pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico

com um anti-simétrico:

$$R_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji})}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji})}_{\text{anti-simétrico}}. \quad (2.15)$$

(ii) A contração de um tensor simétrico com um anti-simétrico é nula.

2.4.2 Tensor de Levi-Civita

O tensor de Levi-Civita ϵ_{ijk} que, na verdade, é um pseudotensor de ordem 3, é completamente anti-simétrico. O produto

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$$

forma um tensor de ordem 6. Como ϵ_{ijk} possui a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas cartesianos, isto é, não varia numa transformação ortogonal, temos que o tensor $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ também será independente do sistema de coordenadas. Por outro lado, os tensores δ_{ij} são tensores simétricos de ordem 2 e que possuem estas mesmas propriedades. Portanto, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$ deve ser escrito como uma combinação dos produtos de três tensores δ_{ij} . Realmente, pode-se verificar diretamente que

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

2.4.3 Representação Covariante e Contravariante

Seja um vetor do espaço euclidiano tridimensional que, em lugar de denota-lo por x_i , passaremos a fazê-lo convenientemente por x^i . A transformação (2.9) é, então, reescrita por

$$x^i = a^{ij} x^j. \quad (2.17)$$

Desta relação, obtemos

$$a^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \quad (2.18)$$

Seja agora um outro vetor, dado pelo gradiente de um campo escalar, isto é, $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$. Pela regra da cadeia, podemos escrever

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i}. \quad (2.19)$$

Esta relação pode ser vista como o resultado de uma mudança do sistema de coordenadas. Entretanto comparando (2.18) e (2.19), vemos que os vetores x^i e $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ transformam-se de maneiras diferentes numa mudança do sistema de coordenadas.

Poderíamos, à primeira vista, pensar que $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ não é um vetor, pois se transformam de uma maneira diferente da que estabelecemos para caracterizar um vetor. Mas isto não é verdade. A transformação (2.19) é ortogonal

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = (a^{-1})^{ji} (a^{-1})^{ki} = (\tilde{a})^{ji} (\tilde{a})^{ki} = (a)^{ij} (a)^{ik} = \delta^{jk}.$$

Então, tanto x^i como $\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ são vetores. Mas, entre (2.18) e (2.19), há uma diferença: um vetor que se transforma da maneira representada por (2.18), ou seja, da maneira estudada até então, é dito vetor "contravariante" e é representado convencionalmente com o índice em cima. Um vetor que se transforma como o gradiente, ou seja, da maneira representada por (2.19), é chamado vetor "covariante" e sua representação é com índice embaixo.

Observações:

(i) Embora x^i seja um vetor contravariante, pela relação (2.19) vemos que $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é um vetor covariante. Por este motivo, costuma-se representar $\frac{\partial}{\partial x^i}$ por ∂_i (índice embaixo: característica da notação covariante). Analogamente, $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial^i$.

(ii) O termo "contravariante" possui dois significados: um deles foi visto acima para designar uma das representações de um vetor. O outro significado é "invariância de forma". Diz-se que uma certa relação é covariante se, numa transformação característica, ela permanece invariante em sua forma após a transformação.

(iii) Essa notação covariante e contravariante aplicada aos tensores nos dá, por exemplo,

$$\begin{aligned} T^{ij} & \text{ tensor contravariante,} \\ T_{ij} & \text{ tensor covariante,} \\ T^i_j & \text{ tensor misto.} \end{aligned}$$

Se o tensor for simétrico, a representação para o tensor misto é T^i_j .

2.5 Espaço de Minkowski

Podemos caracterizar os espaços vetoriais pelos elementos de linha destes, os quais são invariantes mediante suas transformações características. Estes elementos de linha são chamados de "métrica". Por exemplo, a métrica do espaço euclidiano é dada por

$$ds^2 = dx_i dx^i = \delta_{ij} dx_i dx^j, \quad (2.20)$$

que é invariante para as transformações ortogonais. O tensor δ_{ij} é chamado de "tensor métrico" do espaço euclidiano.

Vimos na seção (2.3) que o intervalo entre dois eventos é invariante para as transformações de Lorentz. Assim, pode-se pensar num espaço vetorial cuja métrica seja dada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.21)$$

e as transformações características como sendo as transformações de Lorentz. Este espaço é denominado "espaço de Minkowski" e, ao contrário do espaço euclidiano, é um espaço de métrica indefinida, pois ds^2 pode ser positivo, negativo ou zero.

Os vetores no espaço de Minkowski (ou, de uma maneira mais geral, os tensores) são introduzidos através das transformações de Lorentz. Um desses vetores é o chamado quadrivetor coordenada, cujos componentes da representação contravariante assumiremos serem dados por

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z. \quad (2.22)$$

Pela relação dada por (2.21), obtemos a representação covariante do quadrivetor coordenada

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_\mu dx^\mu \\ &= dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3. \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Note que o índice grego μ , nesta notação pode valer $\mu = 0, 1, 2, 3$. Portanto, a representação covariante é dada por

$$x_0 = ct \quad x_1 = -x \quad x_2 = -y \quad x_3 = -z. \quad (2.24)$$

Uma notação resumida é dada por

$$\begin{aligned} x^\mu &= (ct, \vec{x}) \\ x_\mu &= (ct, -\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Um outro quadrivetor no espaço de Minkowski é o quadrivetor momento, que é representado na forma:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \\ p_\mu &= \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

De uma maneira geral, os quadrivetores contravariante e covariante possuem as seguintes transformações

$$\begin{aligned} A'^0 &= \frac{A^0 - \frac{v}{c} A^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & A'_0 &= \frac{A_0 - \frac{v}{c} A_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ A'^1 &= \frac{A^1 - \frac{v}{c} A^0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & A'_1 &= \frac{A_1 - \frac{v}{c} A_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ A'^2 &= A^2 & A'_2 &= A_2 \\ A'^3 &= A^3 & A'_3 &= A_3. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Matricialmente, temos

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Resumidamente, podemos escrever estas transformações como

$$\begin{aligned} A^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \\ A_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu, \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo $\Lambda^\mu{}_\nu$ os elementos da matriz dada por (2.28) e $\Lambda_\mu{}^\nu$ da matriz dada por (2.29).

Para os tensores de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned}
T'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\zeta \Lambda^\nu{}_\xi T^{\zeta\xi} \\
T'_{\mu\nu} &= \Lambda_\mu{}^\zeta \Lambda_\nu{}^\xi T_{\zeta\xi} \\
T'^\mu{}_\nu &= \Lambda^\mu{}_\zeta \Lambda_\nu{}^\xi T^\zeta{}_\xi \\
T'_\mu{}^\nu &= \Lambda_\mu{}^\zeta \Lambda^\nu{}_\xi T_\zeta{}^\xi,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

e assim por diante para os tensores de ordem superior.

Contrariamente ao que foi visto nas transformações ortogonais, as representações covariantes e contravariantes de um vetor não são iguais. Podemos relacioná-las através do tensor métrico

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.32}$$

no qual

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu. \tag{2.33}$$

Assim, de uma maneira geral, temos

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu. \tag{2.34}$$

Pode-se também introduzir o inverso do tensor métrico, $g^{\mu\nu}$, definido pela relação

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu. \tag{2.35}$$

Combinando (2.35) e (2.34), obtemos

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\zeta} = \delta_\mu^\zeta. \tag{2.36}$$

Observações

(i) Tudo que foi abordado, deve ser destacado, que ocorre na ausência de campos gravitacionais. Quando estes estão presentes, a métrica depende de cada ponto do espaço-tempo, nesse caso é uma semelhança a uma geometria em "espaço curvo". O espaço de Minkowski, em consequência, é "chamado de espaço chato". O estudo da relatividade em presença de campos gravitacionais é objeto da relatividade geral.

(ii) Qualquer quantidade do tipo $A_\mu A^\mu$ é um invariante de Lorentz.

(iii) Uma relação escrita em componentes covariantes e contravariantes deve apresentar coerência quanto aos seus índices em ambos os lados do sinal de igualdade.

(iv) A importância de se desenvolver uma teoria por meio de relações envolvendo quadri-vetores e quadritensores é que estas relações serão as mesmas em qualquer referencial inercial, isto é, a teoria é obviamente covariante. Em particular, se um quadritensor é nulo num determinado referencial, ele o será em qualquer outro.

CAPÍTULO 3

TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Sistemas contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade e são descritos por campos. É fato notável que praticamente todas as teorias de campos de interesse físico podem ser descritas pelo formalismo de Lagrange e Hamilton. As interações das partículas elementares, constituintes básicas da matéria, são expressas por meio de teoria quântica de campos. Por sua vez, a construção das teorias quânticas das interações fundamentais da natureza depende crucialmente da possibilidade de primeiro formulá-las como teoria clássica de campos nas linguagens Lagrangiana e Hamiltoniana.

3.1 Teoria de Campos na Forma Lagrangiana

Um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade é descrito pelas coordenadas generalizadas $q_k(t)$. O sistema contínuo mais simples é descrito por uma coordenada $\varphi_x(t)$ associada a cada ponto x do espaço, ou seja, o índice discreto k é substituído pelo índice contínuo x . Por simplicidade, consideremos inicialmente campos em apenas uma dimensão espacial e, em vez de utilizar a coordenada espacial como subscrito, usaremos a notação tradicional $\varphi(x, t)$. Por exemplo, $\varphi(x, t)$ poderia representar o deslocamento transversal no instante t do ponto x de uma corda vibrante.

A Lagrangiana de um sistema discreto envolve uma soma sobre todos os graus de liberdade, de modo que a Lagrangiana de um sistema contínuo deve ser expressa em termos da integral espacial de uma função \mathcal{L} , chamada de densidade lagrangiana. A densidade Lagrangiana deve conter um termo cinético, logo deve depender de $\dot{\varphi}(x, t) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Em contraste com a ideia de ação à distância, suporemos que o campo φ num ponto x interage consigo mesmo somente numa vizinhança infinitesimal desse ponto, de modo

que \mathcal{L} deve depender de $\varphi(x, t)$ e $\varphi(x + dx, t)$. Alternativamente, em vez dessa última quantidade é melhor usar $\varphi'(x, t) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Admitindo uma possível dependência explícita em x e t , a ação mais geral para uma teoria de campos unidimensional tem a forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L}(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, x, t). \quad (3.1)$$

A equação de Lagrange para φ decorre do princípio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \mathcal{L} = 0. \quad (3.2)$$

Como exemplo da corda vibrante com extremos fixos sugere, a variação do campo deve anular-se não apenas nos extremos temporais mas também nos extremos espaciais, ou seja

$$\delta\varphi(x, t_1) = \delta\varphi(x, t_2) = 0 \quad , \quad \delta\varphi(x_1, t) = \delta\varphi(x_2, t) = 0. \quad (3.3)$$

Executando a variação da ação (3.1) resulta

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} \delta\varphi' \right]. \quad (3.4)$$

Usando

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} \quad , \quad \delta\varphi' = \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x}, \quad (3.5)$$

realizando integrações por partes e levando em conta (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \delta\varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \right) \delta\varphi \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \right) \delta\varphi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} \delta\varphi' &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} \delta\varphi \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} \right) \delta\varphi \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} \right) \delta\varphi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Substituindo estes resultados em (3.4), o princípio de Hamilton torna-se

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x)} \right) \right] \delta\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Com isso, a arbitrariedade de $\delta\varphi$ implica a validade da equação de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial t)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0. \quad (3.9)$$

3.1.1 Vários Campos em Três Dimensões

No caso de um sistema de N campos em três dimensões espaciais, representados coletivamente por $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, as equações de Lagrange resultantes do princípio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi, x, t) = 0 \quad (3.10)$$

Aplicando a delta sobre a densidade lagrangiana teremos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha} \delta\varphi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\alpha} \delta\dot{\varphi}_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \delta(\nabla\varphi_\alpha) \right], \quad (3.11)$$

onde as variações dos φ_α são mutuamente independentes e anulam-se nos extremos de interação temporal e na superfície que limita a região tridimensional V . Usando $\delta\dot{\varphi}_\alpha = \partial(\delta\varphi_\alpha/\partial t)$, uma integração por partes como no caso unidimensional fornece

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\alpha} \delta\dot{\varphi}_\alpha = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\alpha} \right) \delta\varphi_\alpha. \quad (3.12)$$

Usando agora $\delta(\nabla\varphi_\alpha) = \nabla(\delta\varphi_\alpha)$ e utilizando também a identidade

$$\mathbf{A} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f\mathbf{A}) - f \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (3.13)$$

podemos efetuar uma integração por partes com a ajuda do teorema da divergência para obter

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \delta(\nabla\varphi_\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \cdot \nabla(\delta\varphi_\alpha) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\Sigma} d\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \delta\varphi_\alpha - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \right) \delta\varphi_\alpha \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \right) \delta\varphi_\alpha, \end{aligned} \quad (3.14)$$

pois as variações $\delta\varphi_\alpha$ anulam-se na superfície que limita a região espacial V . Introduzindo (3.12) e (3.14) em (3.11), o princípio de Hamilton toma a forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\alpha} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_\alpha)} \right) \right] \delta\varphi_\alpha = 0, \quad (3.15)$$

do qual resultam imediatamente as equações de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \right) + \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (3.16)$$

3.2 Teoria de Campos Relativísticas

As equações de Lagrange (3.16) permanecem inalteradas sob uma mudança de escala das coordenadas x, t . Em particular, fazendo $x^0 = ct$ temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_\alpha / \partial t)} \right) = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_\alpha / \partial x^0)} \right) \quad (3.17)$$

Suporemos, de ora em diante, que a derivada temporal é sempre em relação a $x^0 = ct$, de modo que, em termos da notação covariante, as equações de Lagrange (3.16) escrevem-se

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

sendo

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right). \quad (3.19)$$

Se, para um dado valor de α , φ_α for um campo escalar, $\partial_\mu \varphi_\alpha$ será um quadrivetor covariante. Neste caso, se a lagrangiana \mathcal{L} for uma grandeza escalar, $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)$ será um quadrivetor contravariante e o primeiro termo a esquerda na eq. (3.18) será um escalar. De modo geral, para que as eqs. de Lagrange (3.18) sejam manifestamente covariante basta exigir que a Lagrangiana seja um escalar. A propósito, uma vez que o elemento de volume quadridimensional d^4x é invariante sob transformações de Lorentz, a ação $S = \int d^4x \mathcal{L}$ também será um escalar se \mathcal{L} for um escalar.

3.2.1 Campo de Klein-Gordon

Como primeiro exemplo de uma teoria de campos relativística, consideremos a teoria de um méson escalar cuja lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (3.20)$$

onde m é a massa da partícula (em unidades tais que $\hbar = c = 1$). esta lagrangiana é um escalar sob transformação de Lorentz, já que ϕ é um campo escalar(real). Para tornar os cálculos mais transparentes, vamos introduzir a notação $\phi_\mu \equiv \partial_\mu \phi$, em termos da qual

podemos escrever

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} \left(\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \phi_\nu \phi_\lambda \right) = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \delta_\nu^\mu \phi_\lambda + \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \phi_\nu \delta_\lambda^\mu = \frac{1}{2} [g^{\mu\lambda} \phi_\lambda + g^{\nu\mu} \phi_\nu] = \phi^\mu. \quad (3.21)$$

Levando este resultado em (3.18) resulta a equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (3.22)$$

na qual usamos o operador d'Alembertiano definido por:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (3.23)$$

Na teoria quântica de campos esta equação descreve mésons escalares, que são partículas de massa de repouso m sem spin.

3.3 Teoria de Campos na Forma Hamiltoniana

Vamos definir o momento canonicamente conjugado a $\varphi_\alpha(x)$, denotado por $\pi^\alpha(x)$, da mesma forma que na dinâmica de partículas,

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha(x)}. \quad (3.24)$$

Suponhamos que as Eqs (3.24) sejam solúveis para os $\dot{\varphi}_\alpha$. Neste caso, a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} , interpretada como a densidade de energia definida por

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\varphi}_\alpha - \mathcal{L}, \quad (3.25)$$

pode ser expressa em termos de π^α , e φ_α e seus gradientes. A Hamiltoniana

$$H[\varphi_\alpha, \pi^\alpha] = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi_\alpha(x), \nabla \varphi_\alpha(x), \pi^\alpha(x), \nabla \pi^\alpha(x)) \quad (3.26)$$

é um funcional dos campos e de seus momentos conjugados.

3.3.1 Equação de Hamilton

A ação na forma Hamiltoniana escreve-se

$$S = \int_\Omega d^4x \left[\sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\varphi}_\alpha - \mathcal{H}(\varphi_\alpha(x), \nabla \varphi_\alpha(x), \pi^\alpha(x), \nabla \pi^\alpha(x)) \right], \quad (3.27)$$

e as equações de Hamilton decorrem do princípio variacional $\delta S = 0$. Variando independentemente os campos e seus momentos canonicamente conjugados, o princípio de Hamilton toma a forma

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \sum_{\alpha} \left[\pi^{\alpha} \delta \dot{\varphi}_{\alpha} + \delta \pi^{\alpha} \dot{\varphi}_{\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{\alpha}} \delta \varphi_{\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_{\alpha})} \cdot \delta (\nabla \varphi_{\alpha}) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\alpha}} \delta \pi^{\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^{\alpha})} \cdot \delta (\nabla \pi^{\alpha}) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \sum_{\alpha} \left[\left(-\dot{\pi}^{\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{\alpha}} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_{\alpha})} \right) \delta \varphi_{\alpha} + \left(\dot{\varphi}_{\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\alpha}} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^{\alpha})} \right) \delta \pi^{\alpha} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

no qual, como de hábito, uma integração por parte foi feita e termos de fronteira foram descartados. Igualando a zero os coeficientes de $\delta \varphi_{\alpha}$ e $\delta \pi^{\alpha}$ obtemos

$$\dot{\varphi}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\alpha}} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^{\alpha})}, \quad (3.29a)$$

$$\dot{\pi}_{\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_{\alpha}} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_{\alpha})}, \quad (3.29b)$$

que são as equações de campo na forma Hamiltoniana, que em termos das derivadas funcionais podem ser expressa na forma condensada. Obtemos assim as equações canônicas para os campos clássicos

$$\dot{\varphi}_{\alpha}(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi^{\alpha}(x)} \quad , \quad \dot{\pi}^{\alpha}(x) = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_{\alpha}(x)}. \quad (3.30)$$

CAPÍTULO 4

ESTUDO DE ONDAS SOLITÁRIAS

Configurações de campos com energia finita e localizada que se deslocam sem mudança de forma nem diminuição da velocidade são chamadas de ondas solitárias. Essas ondas aparecem tipicamente em teorias de campos não-lineares (Lee 1981) e foram discutidas originalmente por J. Scott Russell(1844), que teve seu primeiro contato com o fenômeno em agosto de 1834.

4.1 Densidade Lagrangiana de Ondas Solitárias

Nesta seção vamos estudar um exemplo de onda solitária unidimensional. Para tanto, consideremos a seguinte densidade Lagrangiana, para um campo escalar real φ , que descreve a evolução de uma onda solitária

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2, \quad (4.1)$$

onde λ e a são constantes positivas. Podemos reescrever a eqs. (4.1) lembrando que

$$\partial^\mu \varphi = \partial^0 \varphi - \partial^1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.2)$$

e

$$\partial_\mu \varphi = \partial_0 \varphi + \partial_1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4.3)$$

de modo que temos,

$$\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2. \quad (4.4)$$

Substituindo estes resultados na Lagrangiana (4.1), obtemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2, \quad (4.5)$$

que é a forma funcional da densidade lagrangiana que vamos utilizar daqui pra frente.

A equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.6)$$

Calculando as derivadas da lagrangiana, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) \quad (4.8)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} = -\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.9)$$

Substituindo os resultados acima na equação de Euler-Lagrange (4.6), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) = 0, \quad (4.10)$$

que resulta em

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi (\varphi^2 - a^2) = 0. \quad (4.11)$$

Esta é a equação de movimento para o campo φ , considerando o modelo unidimensional.

4.2 Energia da Onda Solitária Clássica

Nesta seção, apresentaremos o cálculo da energia total armazenada numa onda solitária clássica para duas situações distintas. A primeira solução corresponde a uma onda estacionária e a segunda a uma onda que depende do tempo, do espaço e viaja a velocidade constante.

4.2.1 Solução constante e estacionária

A densidade Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}, \quad (4.12)$$

com momento canonicamente conjugado a φ

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}. \quad (4.13)$$

Temos então que a densidade hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi^2 - a^2)^2. \quad (4.14)$$

Observe que, para o menor valor possível da energia ($\mathcal{H} = 0$), as soluções da equação de movimento (4.11) são: $\varphi = a$ e $\varphi = -a$. Ambos valores de φ satisfazem à equação (4.11) e retornam $\mathcal{H} = 0$ na equação (4.14). Isto significa que o estado fundamental desse modelo é degenerado, uma vez que, há duas soluções do campo distintas para um mesmo valor da energia. Outra observação importante, é que essas duas soluções são constantes no tempo e no espaço, não apresentando nenhuma dinâmica, o que nos faz buscar outras soluções para a equação (4.11). Desejamos encontrar soluções que apresentam alguma evolução no tempo e/ou espaço.

Primeiramente, vamos resolver a eq. (4.11) para um campo que dependa apenas da posição, $\varphi = \varphi_0(x)$, e que satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = a \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -a. \quad (4.15)$$

Para um campo deste tipo, a equação de movimento é

$$\frac{\partial^2 \varphi_0(x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0(x)}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0(x) (\varphi_0^2(x) - a^2) = 0, \quad (4.16)$$

mas, para esse caso $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, assim a equação de movimento obtida para $\varphi_0(x)$ é

$$-\varphi_0'' + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0 (\varphi_0^2 - a^2) = 0. \quad (4.17)$$

Multiplicando esta última equação por φ_0' deduz-se imediatamente

$$-\varphi_0' \varphi_0'' + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0 \varphi_0' (\varphi_0^2 - a^2) = 0, \quad (4.18)$$

que pode ainda ser reescrita na forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\varphi_0')^2 - \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{4} \frac{d}{dx} (\varphi_0^2 - a^2)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left((\varphi_0')^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 \right) = 0. \quad (4.19)$$

O resultado acima implica que

$$(\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 + C, \quad (4.20)$$

sendo C uma constante.

Aplicando as condições de contorno (4.15) verifica-se que $C = 0$, portanto a equação de movimento do campo φ_0 é

$$(\varphi_0')^2 = \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2. \quad (4.21)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados e tomando a raiz negativa, temos,

$$\varphi_0' = \frac{d\varphi_0}{dx} = -\frac{\lambda}{2} (\varphi_0^2 - a^2). \quad (4.22)$$

Esta equação é solúvel por separação de variáveis. Reescrevendo (4.22) como

$$\frac{d\varphi_0}{\varphi_0^2 - a^2} = -\frac{\lambda}{2} dx. \quad (4.23)$$

Integrando a equação, obtemos

$$\int \frac{d\varphi_0}{\varphi_0^2 - a^2} = -\frac{\lambda}{2} \int dx = -\frac{\lambda}{2} x + C. \quad (4.24)$$

A integral do lado esquerdo é facilmente calculada utilizando frações parciais. Reescrevendo a integral temos

$$\int \frac{d\varphi_0}{\varphi_0^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int d\varphi_0 \left[\frac{1}{\varphi_0 - a} - \frac{1}{\varphi_0 + a} \right] = -\frac{\lambda}{2} x + C, \quad (4.25)$$

cuja solução é

$$\ln |\varphi_0 - a| - \ln |\varphi_0 + a| = \ln \left| \frac{\varphi_0 - a}{\varphi_0 + a} \right| = -\lambda ax + C'. \quad (4.26)$$

Aplicando a exponencial na equação acima, obtemos

$$\frac{\varphi_0 - a}{\varphi_0 + a} = e^{-\lambda ax + C'} = e^{-\lambda ax} e^{C'} = C'' e^{-\lambda ax}, \quad (4.27)$$

onde C''' é uma constante arbitrária.

A solução que estamos procurando, $\varphi_0(x)$, deve corresponder assintoticamente à solução constante ($\varphi = \pm a$ quando $x = \pm\infty$). A solução que conecta as condições de extremo é $\varphi(x = 0) = \varphi_0(x = 0) = 0$, assim,

$$\frac{\varphi_0 - a}{\varphi_0 + a} = C''' = \frac{-a}{a} = -1, \quad (4.28)$$

portanto

$$\frac{\varphi_0 - a}{\varphi_0 + a} = -e^{-\lambda ax}, \quad (4.29)$$

o que implica em

$$\varphi_0 - a = -(\varphi_0 + a)e^{-\lambda ax}. \quad (4.30)$$

Manipulando a equação acima, a fim de separar todos os termos de $\varphi_0(x)$, temos

$$\varphi_0(1 + e^{-\lambda ax}) = a(1 - e^{-\lambda ax}). \quad (4.31)$$

Multiplicando a equação acima por $e^{\frac{\lambda ax}{2}}$, temos a solução

$$\varphi_0(x) = a \tanh\left(\frac{\lambda ax}{2}\right). \quad (4.32)$$

Esta configuração de campo conecta o estado fundamental $\varphi = -a$ em $x = -\infty$ ao estado fundamental $\varphi = a$ em $x = \infty$, e costuma ser chamada de solução tipo kink.

A densidade de energia (hamiltoniana) correspondente ao campo $\varphi_0(x)$ é

$$\mathcal{H}_0 = \pi_0 \dot{\varphi}_0 - \mathcal{L} \quad (4.33)$$

como a solução é independente do tempo, $\pi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$, então

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\varphi_0')^2 + \frac{\lambda^2}{8}(\varphi_0^2 - a^2)^2, \quad (4.34)$$

utilizando a equação (4.22), a densidade hamiltoniana pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0^2 - a^2)^2 = + \frac{\lambda^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2. \quad (4.35)$$

Substituindo a equação (4.32) em (4.35), obtemos

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 a^4}{\cosh^4(\lambda ax/2)}. \quad (4.36)$$

Podemos agora calcular toda energia armazenada na onda solitária

$$\begin{aligned}
E_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_0 dx = \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\cosh^4 y} \\
&= \frac{\lambda a^3}{2} \left[\frac{\sinh y}{3 \cosh^3 y} + \frac{2}{3} \tanh y \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\lambda a^3}{3}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

O resultado (4.37) representa a energia finita e constante de uma onda solitária clássica estacionária.

4.2.2 Solução dependente do tempo

Vamos agora procurar uma solução φ que seja dependente do tempo e do espaço. Uma maneira de obter tal solução é aplicar uma transformação de Lorentz sobre a coordenada x tal que $x \rightarrow \gamma(x - vt)$ onde v representa a velocidade constante da onda, $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ e utilizamos as unidades naturais ($c = 1$). Após esta transformação, o campo φ é escrito como

$$\varphi(x, t) = a \tanh \left[\frac{\lambda a}{2} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right]. \tag{4.38}$$

Aplicando a transformação de coordenada

$$\xi = x - vt \quad e \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{4.39}$$

obtemos o campo $\varphi(x, t)$

$$\varphi_0(x, t) = a \tanh \left(\frac{\lambda' a \xi}{2} \right) = \varphi_0(\xi; \lambda'). \tag{4.40}$$

As derivadas segunda, no tempo e no espaço, do campo $\varphi(x, t)$, podem ser facilmente calculadas

$$\ddot{\varphi}(x, t) = v^2 \varphi_0''(\xi, \lambda') \quad e \quad \varphi''(x, t) = \varphi_0''(\xi, \lambda') \tag{4.41}$$

Devemos agora verificar se este campo satisfaz a equação de Euler-Lagrange (4.11). Para tanto, substituímos as equações (4.38) e (4.41) na equação (4.11), com isso temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{2} \varphi(\varphi^2 - a^2) &= (v^2 - 1) \varphi_0''(\xi; \lambda') + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_0(\xi; \lambda') (\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2) \\
&= -(1 - v^2) \frac{(\lambda')^2}{2} \varphi_0(\varphi_0^2 - a^2) + \frac{(\lambda)^2}{2} \varphi_0(\varphi_0^2 - a^2) = \left(-\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \right) \varphi_0(\varphi_0^2 - a^2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Este resultado mostra que o campo escrito na forma (4.38) representa uma onda solitária que viaja com velocidade constante v . Isto é, o campo $\varphi(x, t) = \varphi_0(\xi, \lambda')$ é, de fato, a solução correspondente. Queremos ainda encontrar a energia total da onda mas, antes disso, devemos calcular a densidade Hamiltoniana da onda solitária.

A densidade de energia (Hamiltoniana) da onda solitária é dada por (4.14), substituindo as derivadas de $\varphi(\xi; \lambda')$ e λ' no lugar de λ em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{v^2}{2} \varphi_0'(\xi; \lambda')^2 + \frac{1}{2} \varphi_0'(\xi; \lambda')^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2)^2 \\
&= \frac{1+v^2}{2} \varphi_0'(\xi; \lambda')^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2)^2 \\
&= \frac{1+v^2}{2} \frac{(\lambda')^2}{4} (\varphi_0^2 - a^2)^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\varphi_0^2 - a^2)^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{8} \left(1 + \frac{1+v^2}{1-v^2} \right) (\varphi_0^2 - a^2)^2 \\
&= \frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{1-v^2} [\varphi_0(\xi; \lambda')^2 - a^2]^2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Esta equação tem mesma forma funcional da equação (4.35). Substituindo a equação (4.38) na densidade Hamiltoniana acima, obtemos

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 a^4}{(1-v^2)} \operatorname{sech}^4 [\lambda a \gamma (x - vt)/2] = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 a^4}{(1-v^2)} \frac{1}{\cosh^4 [\lambda a \gamma (x - vt)/2]}. \tag{4.44}$$

Podemos agora determinar a energia total da onda solitária integrando a densidade Hamiltoniana no espaço,

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 a^4}{(1-v^2)} \frac{1}{\cosh^4 [\lambda a \gamma (x - vt)/2]} \\
&= \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v^2} \frac{\lambda a^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\cosh^4 y} \\
&= \frac{2\lambda a^3/3}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}},
\end{aligned} \tag{4.45}$$

que é exatamente a energia correspondente ao campo φ_0 dividida por $\sqrt{1-v^2}$. Ou seja, o resultado (4.45) corresponde à energia total de uma onda que viaja com uma velocidade constante v . Este resultado também corresponde à energia de uma partícula relativística que se move com velocidade v .

Considerações Finais

Podemos dizer que o objetivo final do trabalho foi do estudo da onda solitária. Para tanto fizemos uma revisão dos conceitos fundamentais da mecânica analítica. Apresentamos um resumo da formulação Lagrangiana e Hamiltoniana da mecânica clássica e a extensão desses conceitos a sistemas com infinitos graus de liberdade, os denominados campos clássicos. Além dessas formulações da mecânica clássica, estudamos as notações da relatividade especial, que é de grande importância para posteriormente fazer a formulação da teoria de campo relativística.

No capítulo final deste trabalho, calculamos a energia total da onda solitária em duas situações distintas. No primeiro caso, escrevemos um campo estático e encontramos a energia total. No segundo caso, escrevemos um campo unidimensional dependente do tempo e do espaço e que viaja com velocidade constante. Nos dois casos, obtivemos um valor constante para a energia total e os valores obtidos representam a energia de uma partícula livre. Note que, estudamos apenas o comportamento de uma onda solitária clássica e nossos resultados mostram que esta pode ser associada a uma partícula. Está fora do interesse deste trabalho discutir o caráter corpuscular dos sóliton, entretanto, sabemos que o campo de aplicação deste fenômeno na mecânica quântica é muito vasto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo5/modulo1/topico1.php>
- [2] D.J. Korteweg, G. de Vries, *Phil. Mag.* 39, 422 (1895).
- [3] W. Galleás, L.H. Ymai, P.L. Natti, E.R. Takano Natti, *Ondas do tipo sóliton em guias dielétricos*, *Rev. Bras. Ensino Fís.* [online]. 2003, vol.25, n.3, pp. 294-304, (2003)
- [4] João Barcelo Neto, *Fundamentos da Relatividade Especial*, Sub-Reitoria de Ensino de Graduação e Corpo Discente, UFRJ; 1994.
- [5] João Barcelo Neto, *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*, 1ª edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004
- [6] J.B. Marion, S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and System*, 4ª edição, Saunders College Publishing, Florida (1995)
- [7] Lemos, Nivaldo A. *Mecânica Analítica*, 1ª edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.
- [8] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. *Lições de Física de Feynman*. vol 2 (cap. 19). Editora Bookman, Porto Alegre, 2008
- [9] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Teoría Clássica de Campos*, Editora Reverté S. A., Barcelona, 1966.