Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física
Trabalho de Conclusão de Curso

Gabriel Antonio Flizikowski Siqueira

ONDAS GRAVITACIONAIS: UMA APLICAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL

Orientadora: **Profª. Drª. Hatsumi Mukai**

Maringá

29 de fevereiro de 2016

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física
Trabalho de Conclusão de Curso

Gabriel Antonio Flizikowski Siqueira

ONDAS GRAVITACIONAIS: UMA APLICAÇÃO DA RELATIVIDADE GERAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito para a obtenção do título de bacharel em Física.

Banca Examinadora:

Prof^{a}. Dr^{a}. Hatsumi Mukai (Orientadora)
Prof. Dr. Paulo Ricardo Garcia Fernandes
Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá

29 de fevereiro de 2016

Sumário

Lista de Figuras

Ao meu pai, Marco Aurélio (in memoriam).

It has been said that astronomy is a humbling and character building experience. There is perhaps no better demonstration of the folly of human conceits than this distant image of our tiny world. To me, it underscores our responsability to deal more kindly with one another, and to preserve and cherish the pale blue dot, the only home we‘ve ever known.

Carl Sagan, *Pale Blue Dot*, 1994.

Agradecimentos

À professora Hatsumi, pela orientação, apoio, dedicação e paciência nesse tempo todo, e aos professores Paulo Ricardo e Breno pelas sugestões e conselhos durante os seminários.

À minha mãe, Marilena, pela dedicação, pela parceria, pelos sacrifícios que fez e faz por mim e meu irmão e pela confiança em minhas decisões, mesmo quando eu mesmo não confiava em mim. Ao meu irmão, João, meu padrasto, Júlio, meus meio irmãos Jardel e Juliana, meus tios, Nano e Caprine e meus avós, Jango e Maria, por sempre estarem comigo. Eu amo vocês!

Aos meus queridos amigos, vocês sabem quem são. Obrigado pelo apoio e pela parceria. Em especial ao Pedro pelas conversas e pela força, *tamo* junto, irmão!

À Kim, pela paciência e apoio, principalmente nos tempos turbulentos de entrega do trabalho.

Aos meus colegas e amigos, que acolheram um intruso no curso de Física, em especial ao Arthur, Artur, César, Eduardo, Hugo, Michely, Roger e Zé.

Ao Leandro e ao Thiago pela atenção e serviços prestados da secretaria.

E à todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que esta monografia pudesse ser realizada. Muito obrigado!

Resumo

Teorias da Gravitação, em particular a Teoria da Relatividade Geral, fascina estudantes de Física de todo o mundo, especialmente os iniciantes, devido à sua popularização pelo ícone da física Albert Einstein (Ulm, 14 de março de 1879 – Princeton, 18 de abril de 1955), e até mesmo mais recentemente com os trabalhos publicados acerca dos buracos negros de autoria do físico e cosmólogo Stephen Hawking (Oxford, 8 de janeiro de 1942). A Teoria da Relatividade Geral prediz que massas aceleradas podem causar deformações no tecido do espaço-tempo, são as ondas gravitacionais. Ondas que se propagam com a velocidade da luz e que transmitem energia perturbando o campo gravitacional. A comprovação experimental da existência dessas ondas é tão difícil quanto fundamental, pois é uma das poucas (se não a última) das predições da teoria que ainda não puderam ser comprovadas. Entretanto, este é um tópico que recentemente tem chamado a atenção de físicos por todo o globo, com um anúncio oficial podendo sair a qualquer momento. Nesta monografia apresentamos um estudo sobre alguns tópicos essenciais para um estudo introdutório sobre as ondas gravitacionais, como a álgebra tensorial direcionada a relatividade geral. O foco do estudo sobre ondas gravitacionais está voltado na aproximação de campo fraco e nos graus de polarização. Neste âmbito apresentou-se brevemente duas seções sobre a detecção da onda gravitacional (cuja detecção foi divulgada pouco antes do término desta monografia, em fevereiro de 2016).

Palavras-chave: relatividade geral, ondas gravitacionais, álgebra tensorial.

Abstract

Theories of gravitation, in particular the General Theory of Relativity, fascinates physics students from around the world, especially the beginners, due to its popularization by the physics icon Albert Einstein (Ulm, March 14^{th}, 1879 - Princeton, April 18^{th} 1955), and even more recently with the published works about the black holes of the authorship of the physicist and cosmologist Stephen Hawking (Oxford, January 8^{th}, 1942). The general theory of relativity predicts that accelerated masses can cause deformations in the fabric of space-time, the gravitational waves. Waves that propagate at the speed of light and transmit energy disturbing the gravitational field. The experimental proof of the existence of these waves is as difficult as important because it is one of the few (if not the last) of the predictions of the theory which have not yet been proven. However, this is a topic that has recently called the attention of physicists around the globe, with the possobility of an official announcement at any time. In this monography we show a study on some key topics for an introductory study on gravitational waves, like tensor algebra directed to general relativity . The focus of the study of gravitational waves is the weak field approximation and the degrees of polarization. In this context one presented briefly two sections on the detection of gravitational wave (whose detection was annouced just before the end of this monography on February, 2016).

Key words: general relativity, gravitational waves, tensor algebra

Introdução

As ondas gravitacionais são pequenas perturbações no espaço-tempo, que se propagam com a velocidade da luz. Estas ondas transportam energia na forma de radiação gravitacional. Podemos dizer em analogia à teoria eletromagnética, em que o pacote de onda é formada por fótons, que o "pacote de onda" da gravidade é a partícula chamada gráviton[1]. A teoria de Newton assegura que os efeitos da gravitação movem-se instantaneamente através do espaço. Einstein (em 1916), por outro lado, não aceitou esta ideia, pois um de seus seu principais postulados requer que a velocidade da luz seja uma velocidade limite absoluta, não apenas para energia radiante, mas para todos efeitos: luz, tempo, magnetismo e gravitação. A idéia é que se os efeitos gravitacionais se movem a velocidade da luz, então assim como na teoria eletromagnética, onde temos as ondas eletromagnéticas, podemos supor a existência de ondas gravitacionais [1].

Ainda sobre as predições das ondas gravitacionais, Einstein obteve que suas equações de campo, quando linearizados (expansão de campo fraco) tinham soluções de ondas transversais de tensão espacial que viajam à velocidade da luz, gerado por variações temporais de momento de quadrupolo das massas [2].

Assim, o estudo de ondas gravitacionais é um tema que permite ampliar os conhecimentos vistos na graduação, e de forma geral é um assunto bastante amplo e curioso, pois abrange estudos que envolvem desde o Big Bang, com a análise da radiação cósmica de fundo até sua detecção nos dias de hoje[2]. Contudo, por um lado as ondas eletromagnéticas estão, de certa forma, bastante presentes em nosso dia a dia, ainda mais durante um curso graduação em Física, as ondas gravitacionais são muito pouco exploradas. No Brasil, existe o detector Mario Schenberg [4], no Instituto de Física da USP − SP. Poucos alunos do curso de graduação de instituições de fora de São Paulo têm conhecimento dele.

Portanto, em vista de apresentar este trabalho o separamos como segue:

No Capítulo 1, apresentamos tópicos referentes à Álgebra Tensorial, ou seja, operações algébricas com tensores, como adição e subtração, multiplicação e contração. E também abordamos um pouco de Cálculo Tensorial, que trata de operações diferenciais com tensores. Mais especificamente, tratamos do problema da derivada covariante, onde

[1]Partícula prevista teoricamente mas não detectada até o momento.

[2]Durante o desenvolvimento do presente trabalho ainda não tinha sido divulgado a detecção da mesma, que ocorreu em 11/02/2016. Um artigo sobre o assunto pode ser encontrado na referência [3].

se mostra necessário a utilização de um mecanismo chamado *transporte paralelo* [5–8] para que assim possamos estender a definição usual de derivada para espaços Riemannianos, e para que tenhamos uma boa base desta que é a ferramenta matemática que necessitamos para compreender os estudos em Relatividade Geral, e consequentemente, sobre as Ondas Gravitacionais .

No Capítulo 2, damos uma fundamentação história e uma introdução teórica ao estudo de Relatividade Geral. Vemos que a conexão afim (coeficientes que surgem devido ao transporte paralelo) não é independente, ou seja, que ela é função da métrica e suas derivadas. Com isso, definimos o Tensor Curvatura (e suas propriedades), o Tensor de Ricci, a Identidade de Bianchi e a Identidade de Einstein. Então, apresentamos a equação do campo gravitacional: a equação de Einstein [9–16].

No Capítulo 3, apresentamos um estudo introdutório sobre as Ondas Gravitacionais, partindo da aproximação de campo fraco da equação de Einstein [1, 2, 4, 17–21]. Fazemos também, no decorrer do capítulo, uma breve analogia entre as Ondas Gravitacionais e Eletromagnéticas. Discutimos um pouco sobre os detectores das ondas gravitacionais e apresentamos uma seção sobre a detecção ocorrida em 14/09/2015 e divulgada em 11/02/2016.

Por fim, encerramos este trabalho apresentando as considerações finais sobre o assunto.

Notação:

- ; $\rightarrow$ derivada covariante.
- , $\rightarrow$ derivada parcial.

Capítulo 1

Álgebra e Cálculo Tensorial

Neste capítulo, apresentamos a ferramenta matemática necessária para podermos entender um pouco da Teoria da Relatividade Geral, o que nos permitirá, no futuro, discutir um pouco sobre as ondas gravitacionais, assunto principal deste trabalho.

Para o estudo de Tensores (ou Vetores), é preciso nos familiarizarmos com a ideia de mudança de base. Comecemos por aí.

1.1 Vetores, Mudança de Base e Tensores

Estamos muito acostumados com a definição usual de vetor: uma grandeza física que possui *módulo*, *direção* e *sentido*. Tal grandeza é representada por uma seta, em que o seu tamanho corresponde ao seu módulo, o segmento da reta fornece a direção, e a orientação da seta representa o sentido. Entretanto, algumas grandezas físicas exigem a utilização de um conceito mais geral de vetor, para isso devemos generalizar a própria definição de vetor [5–7].

Podemos representar um vetor $\vec{V}$ no sistema cartesiano como

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k}, \tag{1.1}$$

em que $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ (ver Figura 1.1) são os vetores unitários (ou versores) das coordenadas x, y e z, respectivamente. E V_x, V_y e V_z são as componentes de $\vec{V}$ em cada coordenada. É importante ressaltar que os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ formam uma *base* para o espaço de três dimensões de vetores, isto é, qualquer vetor pode ser escrito em termos destes vetores unitários nesta base. Outras bases existem, e é isso que irá nos ajudar a "atualizar" nossa definição de vetor.

Tomemos agora uma nova notação para os vetores unitários de uma determinada base (ortogonal) de um espaço vetorial: vamos considerar $\hat{e}_i$, em que i varia de 1 a 3. Desta forma $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$ representam os três vetores unitários de uma base tridimensional,

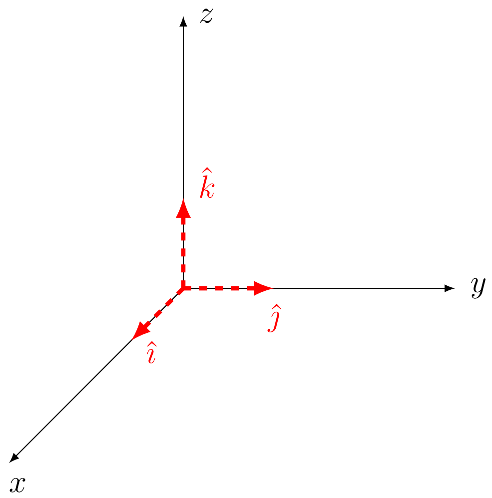

Figura 1.1: Representação dos versores do sistema de coordenadas cartesiano.

podendo ser, por exemplo, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ do espaço euclidiano[1].

Como estamos trabalhando com bases ortogonais, é evidente que

$$\hat{\mathrm{e}}_i \cdot \hat{\mathrm{e}}_j = \delta_{ij}, \tag{1.2}$$

uma vez que δ_{ij} é o chamado Delta de Kronecker, e é definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Com essa nova notação, o vetor $\vec{V}$ é agora escrito como

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_1\hat{\mathrm{e}}_1 + V_2\hat{\mathrm{e}}_2 + V_3\hat{\mathrm{e}}_3 && (1.3) \\ &= \sum_1^3 V_i\hat{\mathrm{e}}_i \ , && (1.4) \\ &= V_i\hat{\mathrm{e}}_i \ . && (1.5) \end{aligned}$$

Para fins de simplificação, sempre que houver subíndices repetidos, podemos subentender a somatória e omiti-la da expressão[2].

Agora tomemos uma outra base qualquer $\hat{\mathrm{e}}'_i$ (sempre ortogonal), $\vec{V}$ nesta nova base é escrito como:

[1]O espaço euclidiano leva esse nome em homenagem ao matemático grego Euclides [22] (300 a.C.), pois foi quem primeiro desenvolveu o estudo de objetos bidimensionais em uma superfície plana. Assim, o espaço euclidiano é um espaço vetorial real cuja dimensão é finita, conhecido também como espaço plano.

[2]Essa simplificação é conhecida como Convenção (ou Notação) de Einstein para índices repetidos, pois foi ele o primeiro a notar que, nesse caso, era desnecessário o uso explícito do símbolo de somatória, em seus estudos da Relatividade Geral.

$$\vec{V} = V_i'\hat{e}_i' \ . \tag{1.6}$$

Para determinarmos uma relação entre as componentes V_i e V_i', basta tomarmos a projeção (produto escalar) dos vetores unitários na base de interesse,

$$\hat{e}_i = (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j')\hat{e}_j' \ . \tag{1.7}$$

Substituindo a equação (1.7) na equação (1.5), teremos

$$\vec{V} = V_i\hat{e}_i = V_i(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j')\hat{e}_j' \ . \tag{1.8}$$

Comparando com a equação (1.8) com a equação (1.6) encontramos a seguinte relação

$$\begin{aligned} V_i' &= (\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_j)V_j \\ &= a_{ij}V_j \ , \end{aligned} \tag{1.9}$$

ou matricialmente

$$\begin{aligned} V_1' &= a_{11}V_1 + a_{12}V_1 + a_{13}V_1 \\ V_2' &= a_{21}V_2 + a_{22}V_2 + a_{23}V_2 \\ V_3' &= a_{31}V_3 + a_{32}V_3 + a_{33}V_3 \ . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Na equação (1.9), a_{ij} é a matriz transformação (3×3), que faz a mudança da base de um vetor "sem linha" para a base "com linha". É a partir desta informação que podemos definir o novo conceito de vetor: uma grandeza física que quando submetida a uma mudança de base, obedece a expressão (1.10). E mais, podemos agora definir o conceito de tensor, que é simplesmente a generalização de um vetor e que, assim como esse último, obedece determinadas regras de transformação.

A álgebra tensorial[3] é uma ferramenta matemática essencial em diversas áreas da física, tal como a relatividade geral, gravitação, cristais líquidos e a eletrodinâmica. Escalares e vetores são notações especiais de tensores. Um escalar é invariante sobre uma mudança de base e é na verdade um tensor de ordem 0. Um vetor, quando submetido a uma mudança de base, segue as condição da equação (1.9). Um vetor é simplesmente um tensor de primeira ordem.

Para generalizar o conceito de tensor, devemos deixar de pensar no espaço como sendo descrito unicamente por coordenadas euclidianas, pois, essa generalização poderá ser es-

[3]O cálculo tensorial foi desenvolvido em 1890 por Gregorio Ricci-Curbastro [23] e em 1900 por Tullio Levi-Civita [24]. Sua ampla divulgação se deu com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein em 1915.

tendida para espaços não-euclidianos (espaços curvos). A regra de transformação das componentes de um certo vetor $\vec{A}$ para um vetor $\vec{A'}$ pode ser representada por

$$A'_i = a_{ij} A_j, \tag{1.11}$$

com i e $j = 1, 2, 3, ..., n$. Para mostrar o primeiro tipo de tensor vamos apenas elevar os subíndices de A

$$A'^i = a_{ij} A^j. \tag{1.12}$$

Considerando o diferencial da função x'^i, tal função se transforma da seguinte forma:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \ , \tag{1.13}$$

e, se tomarmos

$$a_{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \ , \tag{1.14}$$

podemos concluir que

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j. \tag{1.15}$$

Assim, é definido o *vetor contravariante*, o qual possui índices sobrescritos, e que quando submetido a uma mudança de coordenadas obedece a regra da equação (1.15).

Seja agora $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ as componentes de operador gradiente de um escalar φ de um sistema de coordenadas. Quando escrito em outro sistema (sistema linha) temos

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \ , \tag{1.16}$$

sendo a matriz transformação, a inversa da matriz transformação para as componentes de um vetor contravariante

$$a^{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \ . \tag{1.17}$$

Assim, é definido *vetor covariante*[4], que possui índices sobscritos, e que respeita a regra de transformação da equação (1.16):

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \ . \tag{1.18}$$

[4]Estes termos um tanto confusos são devido à J. J. Sylvester [25]. Ambas as transformações dos vetores são covariantes no sentido da relatividade especial, ou seja, estão de acordo com as transformações de Lorentz. Alguns autores preferem simplesmente usar os termos "sobrescritos" ou "sobescritos" afim de diferenciar esses tipos de vetores e reservar o sentido de covariante [8].

1.2 Tensores de Ordem Superior

Os tensores de segunda ordem representam combinações (produto) de dois vetores. Seguindo o raciocínio, tensores de ordem n são combinações (produto) de n vetores.

Podemos definir tensores contravariantes, covariantes e mistos para tensores de segunda ordem.

Um tensor de segunda ordem duas vezes contravariante é um tensor de componentes A^{ij} que segue a seguinte transformação:

$$A'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}A^{lk} \ , \tag{1.19}$$

ou seja, produto de dois vetores contravariantes. Um tensor de segunda ordem é duas vezes covariante quando suas componentes seguem a seguinte transformação como produto de dois vetores covariantes:

$$A'_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}A_{lk} \ . \tag{1.20}$$

Por fim, um tensor é misto ou, uma vez contravariante e uma vez covariante, quando suas componentes se transformam como o produto de um vetor covariante por um contravariante:

$$A'^i{}_j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}A^l{}_k \ . \tag{1.21}$$

Geralmente, quando se trabalha com análise tensorial, existe uma convenção quanto à utilização dos índices. Usa-se índices latinos (i, j, k, por exemplo) para representar coordenadas espaciais que vão de 1 até 3. E usa-se índices gregos (como λ, μ e ν) quando se trabalha com coordenadas que vão de 1 até 4 (ou, de 0 até 3, dependendo da convenção), sendo 4 ou 0 o termo temporal, e de 1 a 3 as coordenadas espaciais.

1.3 Diferença Geométrica Entre as Componentes Contravariante e Covariante

Vamos agora, de maneira bastante simplificada, ilustrar a diferença entre essas notações considerando dois vetores (neste caso, por simplicidade, unitários) não ortogonais

$$\hat{\varepsilon}_1 \ e \ \hat{\varepsilon}_2 \ ; \ |\hat{\varepsilon}_1| = |\hat{\varepsilon}_2| = 1 \ .$$

Definindo os eixos x^1 e x^2 de um plano conforme a Figura 1.2, podemos fazer algumas observações:

- As componentes contravariantes A^1 e A^2 de $\vec{A}$ são dadas pelas projeções *paralelas*

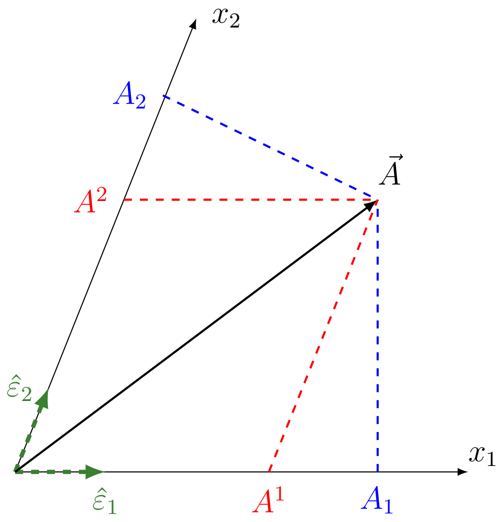

Figura 1.2: Representação das componentes contravariante e covariante de um vetor $\vec{A}$, em relação aos eixos x^1 e x^2.

(em vermelho) aos eixos.

- As componentes covariantes A_1 e A_2 de $\vec{A}$ são dadas pelas projeções *ortogonais* (em azul) aos eixos.
- Se os eixos forem ortogonais, notamos que $A_1 = A^1$ e que $A_2 = A^2$.

Tendo isso em vista, seguimos agora com algumas propriedades algébricas dos tensores.

1.4 Adição e Subtração de Tensores

A adição e subtração de tensores é, como para vetores, definida em termos dos elementos individuais, tal que

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij} \ , \tag{1.22}$$

desde que os tensores A^{ij} e B^{ij} sejam tensores de mesma ordem e sejam expressos em um espaço com mesmo número de dimensões.

1.5 Simetria e Antissimetria

Chama-se tensor simétrico aquele em que $T_{ij} = T_{ji}$, ou seja, a troca da posição dos índices não altera o sinal do tensor e antissimétrico aquele em que $T_{ij} = -T_{ji}$, ou seja, a troca dos índices altera o sinal do tensor. Todo tensor pode ser escrito em forma da soma de um tensor simétrico e um antissimétrico:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \ . \tag{1.23}$$

O produto de um tensor simétrico com um antissimétrico, de forma geral, é nulo.

1.6 Contração

Em análise tensorial, o processo conhecido como contração se dá quando dois índices, um contravariante e um covariante são igualados, por exemplo, vamos igualar os índices do tensor de segunda ordem $A'^{i}{}_{j}$ $(i = j)$:

$$\begin{aligned} A'^{i}{}_{i} &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}A^l{}_k \ , && (1.24)\\ &= \frac{\partial x^k}{\partial x^l}A^l{}_k \ , && (1.25)\\ &= \delta^k{}_l A^l{}_k \ , && (1.26)\\ &= A^k{}_k \ , && (1.27)\end{aligned}$$

feito isso, percebemos que o tensor de segunda ordem, quando submetido a uma contração, tornou-se um invariante, ou seja, um escalar. Em geral, a contração de um tensor reduz por 2 o número de sua ordem.

1.7 Produto Direto

Outra operação que pode ser realizada com tensores, é o produto direto. Multiplicando dois tensores de primeira ordem, um covariante e outro contravariante obtemos

$$\begin{aligned} A'_i B'^j &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}B^l \ , && (1.28)\\ &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}A_k B^l \ , && (1.29)\end{aligned}$$

que é na verdade um tensor de segunda ordem. O produto direto é uma operação a qual aumenta a ordem dos tensores, e a nova ordem é igual a soma das ordem dos tensores que realizaram o produto direto.

1.8 Tensor Métrico

O termo métrica está relacionado diretamente às medidas, como por exemplo, métricas de software (medidas de produtividade e qualidade). Os Matemáticos focam as métricas no estudo da Geometria, já entre os Físicos o que desperta mais atenção é quando estudamos a teoria da relatividade, pois esta é a base da teoria da Gravitação, bem como das métricas que estudamos nos modelos cosmológicos. Neste caso, uma métrica é uma ferramenta matemática que nos informa as propriedades geométricas do espaço-tempo, e que permite calcular distâncias entre os acontecimentos.

Tomemos um espaço qualquer. Neste espaço (tridimensional apenas por convenção), um vetor qualquer, consideremos por exemplo, o vetor deslocamento, pode ser escrito como:

$$\vec{r} = q^i \hat{\varepsilon}_i \ . \tag{1.30}$$

com i variando de 1 a 3 e com q^i podendo ser (x, y, z); (r, θ, ϕ); (ρ, ϕ, z) ou qualquer outro sistema de coordenadas q^1, q^2, q^3.

Se tomarmos o quadrado do deslocamento infinitesimal entre dois pontos quaisquer neste espaço, teremos,

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (dq^i \hat{\varepsilon}_i) \cdot (dq^j \hat{\varepsilon}_j) = (\hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_j) dq^i dq^j, \tag{1.31}$$

chamamos de tensor (covariante) métrico, o elemento[5] $\hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_j$:

$$\hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_j = g_{ij} \ , \tag{1.32}$$

que pela definição, podemos observar que é simétrico, ou seja, $g_{ij} = g_{ji}$. E ele obedece a seguinte relação

$$g^{ij} g_{ik} = \delta^j{}_k \ , \tag{1.33}$$

de forma que, g^{ij} é o tensor (contravariante) métrico, e é o inverso de g_{ik}. Usa-se o contravariante g^{ij} para elevar índices, transformando índices covariantes em contravariantes. Já o covariante g_{ik} é usado justamente para o contrário, abaixar índices, ou seja, transformar

[5] Note que $\hat{\varepsilon}$ não é o versor unitário ê. Como estamos considerando qualquer sistema de coordenadas, ortogonal ou não, $\hat{\varepsilon}$ não é constante, muito menos unitário, como é o versor ê.

Em coordenadas esféricas, por exemplo, $\hat{\varepsilon}_i$ é dado por:

$$\hat{\varepsilon}_r = \hat{\mathrm{e}}_r = \hat{\mathrm{r}}, \quad \hat{\varepsilon}_\theta = r\hat{\mathrm{e}}_\theta = r\hat{\theta}, \quad \hat{\varepsilon}_\phi = r \operatorname{sen}\theta \hat{\mathrm{e}}_\phi = r \operatorname{sen}\theta \hat{\phi} \ .$$

Em geral, definimos $\hat{\varepsilon}$ da seguinte forma, considere a transformação de um vetor $\vec{r}$ de um sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3), para outro (q^1, q^2, q^3):

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} dq^j \ ,$$

ou, vetorialmente,

$$d\vec{r} = dq^j \hat{\varepsilon}_j \ ,$$

assim, podemos definir $\hat{\varepsilon}_j$ como sendo,

$$\hat{\varepsilon}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} \ .$$

um índice contravariante em covariante, por exemplo

$$g^{ij}\hat{\varepsilon}_j = \hat{\varepsilon}^i \,, \tag{1.34}$$

$$g_{ij}F^j = F_i \,. \tag{1.35}$$

É importante ressaltar que o vetor base $\hat{\varepsilon}^i$ apesar de possuir o acento característico de vetores unitários não necessariamente tem magnitude igual a 1. Isso ocorre apenas no caso cartesiano em que $\hat{\varepsilon}^i = \hat{\mathrm{e}}^i$.

Se o sistema em questão é o sistema cartesiano ortogonal convencional, a métrica g_{ij} é justamente a delta de Kronecker (equação (1.2)), uma vez que $\hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_j \rightarrow \hat{\mathrm{e}}_i \cdot \hat{\mathrm{e}}_j$, e não há diferença alguma entre as notações covariante e contravariante. Agora, quando trata-se de um sistema curvilíneo (não necessariamente ortogonal), g_{ij} tem uma forma para cada tipo de sistema e existe uma diferença entre as duas notações covariante e contravariante. Vejamos, por exemplo, a métrica g_{ij} e sua inversa, para coordenadas esféricas:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad , \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \end{pmatrix} . \tag{1.36}$$

No caso da Relatividade Geral o tensor métrico (métrica de Minkowski) pode ser representado como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.37}$$

Tal que o uso de uma ou outra representação depende puramente da convenção adotada.

Na próxima secção veremos o que acontece quando queremos fazer uma operação diferencial, como a derivada, com tensores. Veremos que a definição usual de derivada não é exatamente correta quando tratamos de espaços curvilíneos. Um ajuste deve ser feito. E esse ajuste é conhecido como *conexão afim* ou símbolo de Christoffel[6].

1.9 O Problema da Derivada

Vejamos o que acontece quando derivamos um vetor covariante qualquer $B'_\mu = \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu$. Lembrando que não estamos tratando do espaço euclidiano comum, aqui os vetores base

[6]Nomeado em homenagem à Elwin Bruno Christoffel, matemático e físico alemão (10 de novembro de 1829 — 15 de março de 1900.) [26].

do sistema de coordenadas podem variar

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'_\mu(x')}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} B_\lambda\right) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial B_\lambda}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\nu} B_\lambda \, . \end{aligned} \tag{1.38}$$

A equação (1.38) seria correspondente a regra de transformação de um tensor de 2ª ordem, não fosse o último termo da direita, que aparece pois os próprios coeficientes de transformação, em um sistema curvilíneo, variam com a posição. Isto é um problema, pois a derivada de um vetor, por definição, deve ser um tensor de 2ª ordem. Por esta razão, devemos, de alguma forma, realizar um ajuste na definição de derivada que conhecemos

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} = \lim_{\delta x^\nu \to 0}\left(\frac{B_\mu(x^\lambda + \delta x^\lambda) - B_\mu(x^\lambda)}{\delta x^\nu}\right) \, . \tag{1.39}$$

pois, tratando-se de coordenadas curvilíneas, o numerador da equação (1.39) não é um vetor, e portanto, sua derivada não segue a regra de transformação de um tensor.

Tal ajuste é feito por meio de um mecanismo conhecido como *transporte paralelo*, e falaremos agora um pouco sobre ele.

1.9.1 Transporte Paralelo e Derivada Covariante

Quando fazemos a derivada de um vetor estamos, essencialmente, tomando a diferença desse vetor em dois pontos diferentes, infinitesimalmente separados, no espaço-tempo. Para que possamos fazer esta espécie de generalização da derivada, para sistemas curvilíneos, essa diferença deve ser tomada em um mesmo ponto do espaço-tempo, ou seja, transportamos o vetor para o ponto infinitesimalmente próximo, tal que quando estamos no sistema cartesiano, essa diferença seja simplesmente dB^μ e as componentes de B^μ permaneçam inalteradas, de modo que esse "transporte" é simplesmente o deslocamento do vetor paralelo a ele próprio [9], como podemos ver na representação da Figura 1.3.

Já em um sistema curvo, as componentes do vetor, geralmente sofrem uma variação δB_μ no transporte paralelo, e mais, devido às características do sistema, o transporte pode não ser literalmente paralelo (ver Figura 1.4), só é paralelo de fato, no caso cartesiano [9].

Agora, para estabelecermos a nossa derivada no espaço-tempo, precisamos determinar o valor da diferença DB_μ, mais especificamente, precisamos saber como se comporta a variação δB_μ. Assim, assumimos o mais simples: δB_μ depende, de alguma forma, linearmente de B_μ e dx^μ

$$\delta B_\mu = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} B_\lambda dx^\nu \, , \tag{1.40}$$

de maneira que $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ são coeficientes que fazem essa ligação linear entre os outros vetores e

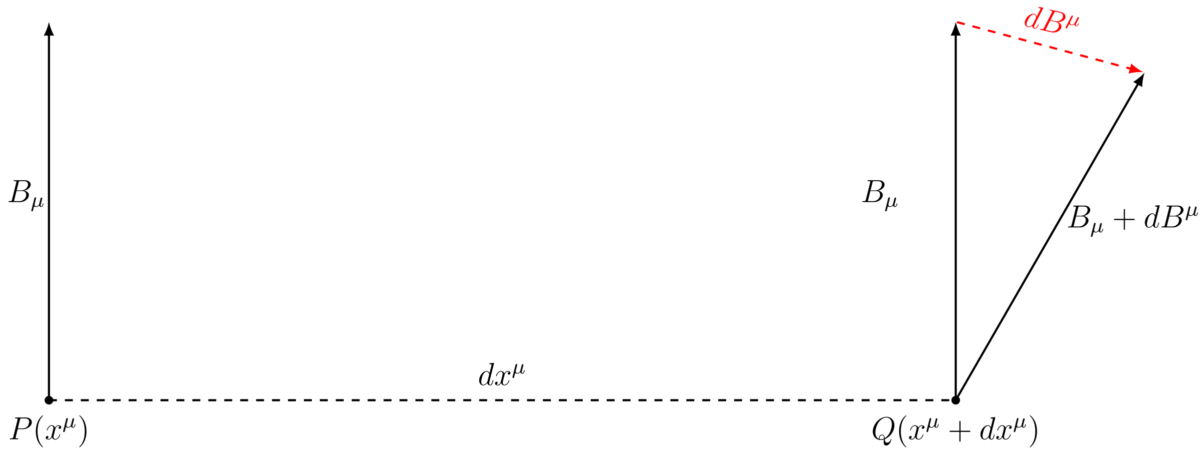

Figura 1.3: Ilustração representativa do vetor transportado paralelamente ao vetor B_μ, no caso do sistema cartesiano.

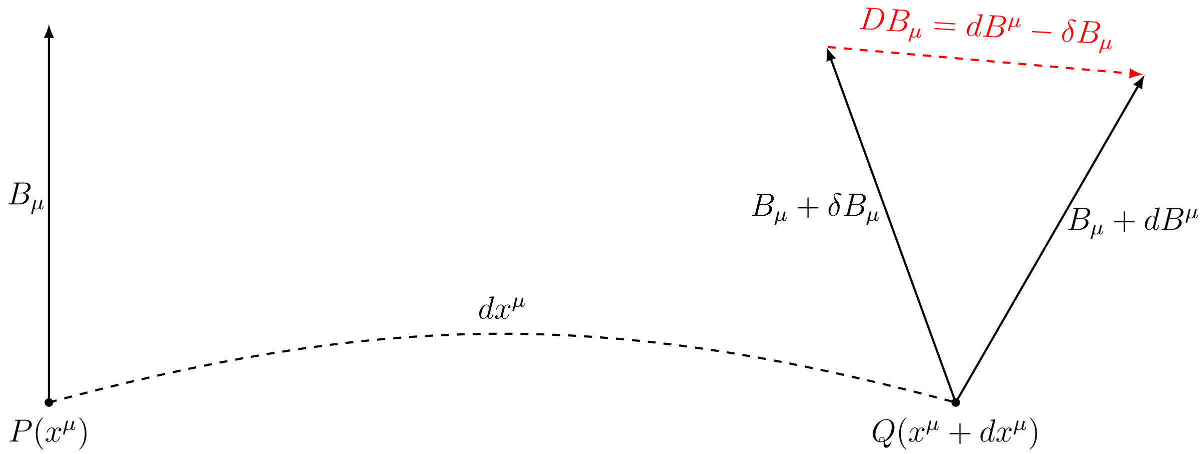

Figura 1.4: Ilustração representativa do vetor transportado "paralelamente" ao vetor B_μ, no caso de um sistema curvilíneo.

é chamado de *conexão afim* ou *símbolo de Christoffel de segunda ordem*. O sinal negativo é uma convenção.

Feito isso, $DB_\mu = dB^\mu - \delta B_\mu$, agora, transforma-se como um vetor. Assim, podemos definir a chamada *derivada covariante* da seguinte forma

$$\begin{aligned}
DB_\mu = dB^\mu - \delta B_\mu &= \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} B_\lambda dx^\nu \\
&= \left[\frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} + {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} B_\lambda\right] dx^\nu \\
\frac{DB_\mu}{Dx^\nu} \equiv B_{\mu\,;\nu} &= \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} + {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} B_\lambda = B_{\mu\,,\,\nu} + {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} B_\lambda \, . \qquad (1.41)
\end{aligned}$$

Esta derivada é, por sua vez, um tensor de 2ª ordem[7]. Recebe o nome de covariante,

[7] Este fato pode ser demonstrado utilizando as regras de transformação do diferencial e da conexão afim. O cálculo é simples, porém, relativamente longo. Não o faremos aqui explicitamente, mas pode ser encontrado na referência [9].

pois o índice $;\nu$ transforma-se como o índice de um vetor covariante. No próximo capítulo, veremos que no caso euclidiano $\Gamma = 0$ e, assim, a derivada covariante recai em sua forma usual.

Para a derivada covariante de um vetor contravariante A^μ, por exemplo, observamos o fato de que o produto escalar é um invariante, ou seja

$$\begin{aligned} A^2 &= g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = A^\mu A_\nu \\ \delta(A^\mu A_\mu) &= A^\mu \delta A_\mu + \delta A^\mu A_\mu = 0 \ , \end{aligned}$$

assim sendo

$$\begin{aligned} \delta A^\mu A_\mu = -A^\mu \delta A_\mu &= A^\mu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda dx^\nu \ , \\ &= A^\lambda \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A_\mu dx^\nu \ , \end{aligned} \tag{1.42}$$

em que trocamos μ por λ e λ por μ, pois são índices mudos, assim, portanto

$$\delta A^\mu = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu \ . \tag{1.43}$$

Por conseguinte, de maneira geral, para cada índice covariante adicionamos um termo $-\Gamma$, e para cada índice contravariante um termo $+\Gamma$. Por exemplo

$$A_{\mu\nu;\alpha} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} A_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} A_{\mu\lambda} \ , \tag{1.44}$$

$$B^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = \frac{\partial B^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} B^{\nu\lambda} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\lambda} B^{\lambda\mu} \ , \tag{1.45}$$

$$C^\mu{}_{\nu;\alpha} = \frac{\partial C^\mu{}_\nu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda} C^{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} C_{\nu\lambda} \ . \tag{1.46}$$

Com isso, encerramos este capítulo. Tivemos até aqui uma pequena base no estudo de tensores. Vimos algumas de suas propriedades algébricas, assim como a definição de derivada para o caso de sistemas curvilíneos, onde utilizamos de um recurso chamado transporte paralelo. Agora, usaremos um pouco desse conhecimento no próximo capítulo, em que faremos uma modesta introdução à Relatividade Geral de Einstein.

Capítulo 2

Introdução à Relatividade Geral

Neste capítulo, começamos com uma pequena contextualização da Relatividade Geral. Abordaremos alguns dos fatores que ajudaram ou levaram ao desenvolvimento da teoria publicada por Albert Einstein[1] em 1915.

2.1 Contextualização Histórica e Princípios

A Relatividade Geral, é a primeira teoria puramente geométrica da gravidade [9]. Em outras palavras, dizemos que a dinâmica dos corpos (matéria) é agora resultado da geometria do espaço-tempo, que por sua vez é resultado da distribuição de matéria. Isso tem uma importante implicação: não existe espaço absoluto, tal qual temos na mecânica clássica[2].

A Relatividade Geral é também uma generalização da Relatividade Restrita[3]. Isso se dá ao fato de que na Relatividade Restrita, a *velocidade* é um conceito completamente relativo, já que todos os referenciais inerciais são físicamente equivalentes. Porém, com a Relatividade Geral, damos ainda um passo adiante: todos os referenciais (inerciais ou não) são equivalentes, pois até mesmo a *aceleração* perde seu significado absoluto [9]. Isso ficará mais claro quando tratarmos, mais adiante, do princípio da equivalência.

O primeiro passo em direção à formulação da teoria publicada em 1915 veio com a perda do conceito de espaço absoluto e de referêncial privilegiado[4]. Isso se dá com um livro [14] de Berkeley[5], no qual ele criticava a ideia de referencial absoluto (ou aceleração

[1]Físico teórico alemão (14 de março de 1879 – 18 de abril de 1955) [27].

[2]Na realidade esta implicação já acontece com a Relatividade Restrita, porém na Relatividade Geral isso vale para qualquer referencial, não somente os inerciais.

[3]Neste trabalho não abordaremos a fundo todos os conceitos e detalhes da Relatividade Restrita, mas o leitor pode encontrar uma boa introdução, com linguagem bastante didática, na referêcia [10], ou nas referências [11, 12], para um abordagem mais aprofundada. Existe também uma versão traduzida do artigo original publicado por Einstein em 1905 na referência [13], o qual contém ainda os quatro artigos publicados por Einstein neste ano.

[4]Referencial em que, segundo Lorentz e Poincaré, a velocidade da luz era conhecida, e de valor c.

[5]George Berkeley, filósofo irlandês (12 de março de 1685 – 14 de janeiro de 1753) [28].

absoluta) de Newton[6]. Basicamente, a ideia de Berkeley foi resumida por Mach[7] no que Einstein chamou mais tarde de "*Princípio de Mach*":

> "Não apenas as forças inerciais dependem da presença e do comportamento da matéria ao seu redor, como também a própria inércia de um corpo não é uma propriedade intrínseca à ele, mas sim devido à existência de toda a matéria do Universo [15]."

As ideias de Mach, mesmo não tendo comprovação experimental e sendo muito criticadas do ponto de vista teórico, tiveram um papel importante para Einstein na generalização da Teoria da Relatividade.

Outro passo importante foi o experimento de Galileu[8] que mostrava que corpos com massas diferentes caem com mesma aceleração no campo gravitational da Terra [9]. Tal resultado é importante pois leva à afirmação de que a massa gravitacional m_g de um corpo é igual à sua massa inercial m_i. Para mostrar isso, consideramos dois corpos de massas m_1 e m_2 caindo no campo gravitacional da Terra, ou seja

$$m_{i1}a_1 = \frac{GMm_{g1}}{r^2} , \tag{2.1}$$

$$m_{i2}a_2 = \frac{GMm_{g2}}{r^2} , \tag{2.2}$$

tal que M seja a massa da Terra e $G = 6,67 \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}$ a constante da gravitação universal de Newton. Tomando a razão entre as duas massas

$$\frac{m_{i1}}{m_{g1}}\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_{i2}}{m_{g2}} , \tag{2.3}$$

agora, como sabemos pelo experimento de Galileu, ambos os corpos caem com mesma aceleração, portanto

$$\frac{m_{i1}}{m_{g1}} = \frac{m_{i2}}{m_{g2}} , \tag{2.4}$$

ou seja, a razão entre as massas gravitacional e inercial é constante. Ou então, podemos dizer simplesmente que a massa gravitacional é porporcional à massa inercial.

Muitos experimentos foram feitos em busca de comprovar a veracidade dessa afirmação. O primeiro veio com o próprio Newton que, usando um mecanismo de dois pêndulos de mesmo tamanho e diferentes materiais, chegou à conclusão que a diferença entre o

[6] Isaac Newton, físico e matemático inglês ou como ele mesmo se autodenominava, "filósofo natural" (4 janeiro de 1643 – 31 de março de 1727, segundo o calendário Gregoriano) [29].

[7] Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach, físico e filósofo austríaco (18 de fevereiro de 1838 – 19 de fevereiro de 1916) [30].

[8] Galileu Galilei, astrônomo, físico, engenheiro, filósofo e matemático italiano, considerado "Pai da Física" e "Pai da Ciência" (15 de fevereiro 1564 – 8 janeiro 1642) [31].

período de oscilação dos pêndulos deveria ser menor que uma parte em 10^3. Outro experimento foi feito por Eötvös[9], utilizando uma balança de torsão. Percebeu que a diferença entre as massas deveria ser menor do que uma parte em 10^9.

Obteve-se uma precisão ainda melhor em um experimento realizado por Dicke[10] [34] e Braginsky[11] [36]. Ambos realizaram seus experimentos com dois corpos caindo em queda livre no campo gravitacional da Terra quando o Sol estava "acima" da Terra e, doze horas depois, com o Sol "abaixo" da Terra. Obtiveram uma diferença menor do que 10^{11} e 10^{12}, repectivamente. Essa evidência talvez seja o fator mais importante para a construção da teoria de Einstein, pois é nela que se baseia o "Princípio da Equivalência":

> "Forças inerciais (ou fictícias) em referênciais acelerados não podem ser distinguidas, localmente, de forças gravitacionais."

Podemos ilustrar o princípio da equivalência com o clássico exemplo do elevador, ou a variação mais moderna, o exemplo do foguete:

Um observador em um foguete, em uma região suficientemente afastada de toda e qualquer presença de matéria, viaja em um movimento retilíneo e a velocidade constante. No momento em que o foguete ligar seus propulsores, o observador irá sentir uma força no sentido contrário ao do foguete, provocada por sua aceleração, tal como se uma força gravitacional estivesse presente nessa direção. O fato é que se o observador não tiver acesso a informação de que os propulsores foram ligados, ele não tem como dizer se está sob efeito de um campo gravitacional ou se está de fato sendo acelerado. Ou seja, não é possível distinguir *localmente*, forças inerciais de gravitacionais. Com efeito, referenciais não inerciais e campos gravitacionais são indistinguíveis (localmente).

A ênfase na palavra "localmente" é proposital pois ela tem uma importância fundamental. As conclusões deste exemplo (e o princípio da equivalência em si) só são válidas se o campo ou a aceleração for uniforme *ou* se o foguete (ou elevador) for suficientemente pequeno para que (o campo ou a aceleração) seja interpretado como uniforme. Podemos pensar em um caso extremo: o foguete está nas proximidades de um buraco negro[12]. Neste caso, a diferença entre a gravidade sentida pelos pés e pela cabeça do observador, por exemplo, seria tão grande que é possível dizer que ele estaria diante de um (intenso) campo gravitacional, a medida que seu corpo sofre um processo chamado "espaguetificação" (do inglês, *spaghettification*[13]).

[9] Baron Loránd Eötvös de Vásárosnamény, físico austro-húngaro (27 de julho de 1848 – 8 de abril de 1919) [32].

[10] Robert Henry Dicke, físico americano (6 de maio de 1916 – 4 de março de 1997) [33].

[11] Vladimir Braginsky, físico russo professor da M. V. Lomonosov Moscow State University [35].

[12] Estrela colapsada que possui um campo gravitacional muito grande, ou até mesmo infinito, para todos os efeitos [37].

[13] Processo que ocorre, em teoria, com um corpo sujeito a um campo gravitacional muito intenso, como o de um buraco negro, tal que o corpo seria esticado de maneira tão bruta, que restaria somente uma fileira formada por átomos do observador [38]. A palavra entrou para o dicionário Collins da língua inglesa em 20 de outubro de 2014 [39].

Foi inspirado por estas ideias, princípios e observações que Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral, a qual para todos os efeitos, todos os referenciais, inerciais ou não, são equivalentes para a descrição dos fenômenos da natureza. E mais, com todas essas considerações existe uma consequência matemática muito importante: a introdução de uma geometria do espaço não euclidiana, ou seja, curva [9]. Podemos exemplificar isso, de maneira razoavelmente simples, da seguinte forma: considere dois referenciais, um inercial S, e outro S' localizado ao longo da circunferência de um disco. S deve medir a razão entre a circunferência C do disco e seu diâmetro D. Se S' parmanecer parado em relação à S, este, por sua vez, chegará a conclusão de que $\frac{C}{D} = \pi$. Agora, se o disco, e consequentemente S', estiver rodando em relação a S, ele medirá que $\frac{C}{D} < \pi$, pois a circunferência do disco sofrerá uma contração de Lorentz. Assim, se $\frac{C}{D} < \pi$ a geometria do espaço para sistemas não inerciais deve ser não euclidiana. E considerando o princípio da equivalência, podemos ainda dizer que na presença de campos gravitacionais (que são localmente indistinguíveis de sistemas não inerciais) a geometria do sistema deve ser não euclidiana. Mais do que isso, na presença de matéria (que produz campos gravitacionais) a geometria do espaço deve ser não euclidiana.

Com esta afirmação, fica um pouco mais claro o porque de a Relatividade Geral ser dita uma teoria geométrica da gravidade.

Feita esta pequena introdução histórica e conceitual, podemos de fato começar a abordar alguns de seus aspectos matemáticos.

2.2 Geometria Riemanniana

Comecemos pelo estudo de espaço curvos, em que a geometria é chamada Riemanniana[14]. Nesta geometria, temos duas implicações importantes e que tornarão nossos cálculos mais simples

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} \;\text{ e }\; g_{\mu\nu\,;\lambda} \equiv 0 \,. \tag{2.5}$$

Estas duas relações fazem da Relatividade Geral a teoria mais simples da gravidade! A primeira diz que a conexão afim é simétrica nos índices de baixo. Isso equivale a dizer que a Teoria da Relatividade Geral é livre de torsão espacial. Existem teorias da gravidade que não consideram essa simetria, e assim é possível definir um tensor torsão, como é o caso da Teoria de Einstein-Cartan[15].

[14]Em referência a Bernhard Riemann, matemático alemão (17 de setembro de 1826 – 20 de julho de 1866) [40].

[15]Esta teoria não será abordada neste trabalho, mas existem ótimos livros que discutem sobre o tema, como é o caso do livro dos italianos Sabatta e Gasperini [41].

A segunda é conhecida como Teorema de Ricci[16], ou Postulado da Metricidade, e está ligada à invariância do produto escalar sob transporte paralelo. Em outras palavras, a derivada covariante comuta com a métrica. Para que possamos entender isso melhor, considere o vetor contravariante (Figura 1.4):

$$dA^\mu - \delta A^\mu = DA^\mu \ , \tag{2.6}$$

utilizando o tensor métrico podemos escreve-lo como um vetor covariante

$$DA_\mu = g_{\mu\nu} DA^\nu \ , \tag{2.7}$$

considerando que a métrica comuta com a derivada covariante temos

$$D(g_{\mu\nu}A^\nu) = A^\nu Dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}DA^\nu \ , \tag{2.8}$$

desta forma, para que a equação (2.7) seja igual à equação (2.8) devemos impor

$$Dg_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{2.9}$$

e desta forma, podemos escrever

$$\frac{Dg_{\mu\nu}}{Dx^\alpha} = g_{\mu\nu;\alpha} = 0 \ , \tag{2.10}$$

que é o Teorema de Ricci. O mesmo resultado pode ser obtido ao considerarmos inicialmente um vetor covariante DA_μ. Existem teorias que não consideram o Teorema de Ricci, ou seja, $g_{\mu\nu;\alpha} \neq 0$, como é o caso da teoria de Weyl[17].

Partindo do Teorema de Ricci, veremos agora que a conexão afim Γ não é independente, ou seja, os coeficientes da função afim são funções da métrica e de suas derivadas. Para isso, vamos escrever explicitamente a derivada covariante do Teorema de Ricci variando ciclicamente os 3 índices

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} &= 0 \ , && (2.11)\\
\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} &= 0 \ , && (2.12)\\
\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} g_{\beta\mu} - \Gamma^\beta{}_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} &= 0 \ , && (2.13)
\end{aligned}$$

onde usamos que $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Agora, multiplicando a equação (2.11) por $\dfrac{1}{2}$ e as equações

[16] O mesmo Ricci que desenvolveu o cálculo tensorial junto com Levi-Civita. Quando o Teorema de Ricci é satisfeito, dizemos que a conexão Γ é compatível com a métrica.

[17] Hermann Weyl, matemático, físico teórico e filósofo alemão (9 de novembro de 1885 – 8 de dezembro de 1955) [42]. A teoria de Weyl também não será abordada neste trabalho, porém existe uma versão traduzida para o inglês de seu artigo original de 1917 [43] que pode sanar qualquer tipo de curiosidade.

(2.12) e (2.13) por $-\frac{1}{2}$ e utilizando a simetria de Γ e da métrica, podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}\right) + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} g_{\beta\alpha} &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}\right) + \Gamma_{\mu\nu\alpha} &= 0 \,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

tal que

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}\right) = 0 \,, \tag{2.15}$$

é chamado de *símbolo de Christoffel de primeira ordem* e é simétrico nos dois primeiros índices. Multiplicando a equação (2.14) por $g^{\beta\alpha}$ ficamos finalmente com

$$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \,, \tag{2.16}$$

que é o já conhecido símbolo de Christoffel de segunda ordem.

Assim, conseguimos escrever a conexão inteiramente em termos da métrica e suas derivadas. Note que este resultado não seria alcançado caso não tivessemos tomado a simetria de Γ e o Teorema de Ricci, do contrário a expressão final teria uma cara muita mais "medonha", e por isso dizemos que a Relatividade Geral é a mais simples das teorias da gravitação.

Como uma espécie de aplicação dos conceitos vistos até aqui, podemos calcular a equação da geodésica (equação de movimento) de uma partícula pontual (sem massa) livre, na Relatividade Geral.

A equação da geodésica é consequência do "Princípio Variacional"

$$\delta \int ds = 0 \,, \tag{2.17}$$

em que ds é a raiz quadrada do elemento de linha ds^2, que em referenciais não inerciais tem a seguinte forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,, \tag{2.18}$$

em que $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo.

No caso de uma partícula livre, sabe-se da relatividade restrita que

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = 0 \,, \tag{2.19}$$

ainda no caso da relatividade restrita, a equação da geodésica seria calculada levando em conta a métrica de Minskowski $\eta_{\mu\nu}$, e o resultado seria uma linha reta. Entretanto, quando tratamos de partículas sujeitas a um campo gravitacional, a métrica, em geral, não é a métrica de Minkowski, e consequentemente, o resultado não é mais uma linha reta. A partícula segue uma trajetória tal que a distância no espaço-tempo seja a menor possível (princípio de mínima ação).

Vamos primeiramente calcular a equação da geodésica usando um método estritamente matemático, que é o princípio variacional, ou seja, não usaremos, por enquanto nenhum resultado da Relatividade Geral. Para isso, precisamos encontrar uma expressão para δds

$$\begin{aligned} \delta ds^2 = 2ds\delta ds &= \delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \\ &= \delta(g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}(\delta dx^\mu)dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu(\delta dx^\nu) \\ \Rightarrow \delta ds &= \frac{1}{2}\frac{1}{ds}\left[\delta(g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu}(\delta dx^\mu)dx^\nu + g_{\mu\nu}dx^\mu(\delta dx^\nu)\right] . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Feito isso, substituímos a equação (2.20) na equação (2.17), e multiplicamos ambos os lados por $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$

$$\int \delta ds = \frac{1}{2}\int \left[\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta dx^\mu + g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta dx^\nu\right] ds = 0 , \tag{2.21}$$

a integral dos dois últimos termos entre colchetes pode ser calculada por meio do método da integração por partes, em que ficamos com uma expressão da seguinte forma, para cada um deles

$$g_{\mu\nu}\int \underbrace{\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}}_{u}\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta x^\mu ds}_{dv} = g_{\mu\nu}\left[\delta dx^\mu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\Big|_{x^\mu(x_1)}^{x^\mu(x_2)} - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\delta dx^\nu ds\right] , \tag{2.22}$$

tal que o primeiro termo entre colchetes se anula pois δdx^μ, do cálculo variacional, se anula nos limites de integração[18]. Desta forma, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha - g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\delta dx^\mu + \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\delta dx^\nu\right]\right\} ds &= 0 \\ \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[g_{\alpha\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} + g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right]\right\}\delta dx^\alpha ds &= 0 , \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde fizemos a troca $\mu \to \alpha$ e $\alpha \to \mu$, pois são índices mudos. Aplicando a derivada nos termos entre colchetes, levando em conta que

$$\frac{\mathrm{d}g_{\alpha\nu}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} ; \frac{\mathrm{d}g_{\mu\alpha}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} , \tag{2.24}$$

[18] Esta passagem pode ser difícil de ser visualizada, porém, fica mais claro se recordarmos das bases do cálculo variacional. Uma abordagem mais detalhada por ser encontrada no livro *Mathematical Methods for Physicists* [44].

obtemos a seguinte expressão

$$\frac{1}{2}\int\left\{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}-g_{\alpha\nu}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial s^2}-g_{\mu\alpha}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial s^2}\right\}\delta dx^\alpha ds=0\ , \tag{2.25}$$

que só é completamente satisfeita, fazendo a troca $\nu\rightarrow\mu$ no penúltimo termo, se

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}\right\}-g_{\alpha\mu}\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}=0\ , \tag{2.26}$$

então, multiplicando-a por $g^{\alpha\mu}$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}g^{\alpha\mu}\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}\right\}-\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}=0\ , \tag{2.27}$$

e finalmente, temos a equação da geodésica da partícula pontual livre

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2}+\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\underbrace{\frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}+-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)}_{\text{Conexão Afim }\Gamma}=0\ . \tag{2.28}$$

Agora, para realizar este mesmo cálculo, com o mínimo de esforço, utilizando da Relatividade Geral, é necessário falarmos de uma das principais motivações que levaram Einstein a desenvolve-la, o "Princípio da Covariância", também chamado de princípio da Relatividade Geral:

> "*Todas* as leis físicas da natureza devem ter a *mesma* forma em *todos* os referenciais[19]."

Em outras palavras, todos os referenciais são equivalentes. Não existe referencial absoluto! Pelo princípio da covariância fica claro o porquê da utilização de um formalismo matemático de tensores, pois equações tensoriais (e consequentemente vetoriais) são independentes do sistema de coordenadas escolhido. Podemos ver aí a grandeza da Relatividade Geral.

O princípio da covariância equivale a dizer que na teoria da Relatividade Geral, devemos substituir as derivadas ordinárias das equações da física, como, exemplo, a equação de Laplace e as equações de Maxwell, por derivadas covariantes [16], ou seja

$$\frac{\mathrm{d}f(x^\mu)}{\mathrm{d}x^\mu}\rightarrow\frac{Df(x^\mu)}{Dx^\mu}. \tag{2.29}$$

Agora, se aplicarmos isso na equação (2.19) temos

[19] Pode ser entendido como a generelização do princípio da relatividade restrita, também conhecido como o primeiro postulado, que diz que todas as leis físicas da natureza são iguais em todos os referenciais *inerciais*.

$$\frac{Du^{\mu}}{Dx^{\nu}} = 0 \; , \tag{2.30}$$

de maneira que $u^{\mu} = \dfrac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}$, então

$$\begin{aligned} Du^{\mu} &= du^{\mu} - \delta u^{\mu} = 0 \\ &\Rightarrow du^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} u^{\alpha} dx^{\nu} = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

multiplicando ambos os lados por $\dfrac{1}{ds}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} u^{\alpha} u^{\nu} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s} &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

que é a equação da geodésica. A mesma equação que obtivemos partindo do princípio variacional. Podemos perceber que pelo fato de a conexão Γ depender somente da métrica (e suas derivadas), uma vez que conhecemos a métrica do espaço-tempo, podemos determinar a trajetória da partícula. No caso da relatividade restrita, em que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, que é constante, $\Gamma = 0$ e recaímos na equação (2.19), a qual tem por solução uma reta. Assim, fica um pouco mais fácil de se convencer de que na presença de um campo gravitacional, o espaço não é plano. Basta notar que a solução da equação (2.32) dificilmente é a equação de um reta, e é inteiramente dependente da métrica do espaço-tempo.

Até agora, falamos inúmeras vezes sobre espaços não euclidianos ou espaços curvos. Mas um leitor suficientemente atento poderia se perguntar: existe uma forma de quantificar, ou representar, matematicamente a curvatura do espaço? A resposta para essa pergunta é sim, e isso é fundamental para a construção das equações básicas da teoria de Einstein. Portanto, vamos definir o que é chamado de Tensor Curvatura.

Existem duas formas de se construir o tensor curvatura:

1) Em um espaço curvo, um vetor deslocado por transporte paralelo ao longo de um caminho fechado não necessariamente volta à sua posição original. Essa variação entre a posição inicial e final do vetor introduz o tensor curvatura. Este método, mesmo talvez sendo o mais simples e formal, não será demonstrado nesse trabalho, porém, o cálculo muito bem comentado pode ser encontrado no livro *Introduction to Gravitation* [9].

2) Em um espaço curvo, duas derivadas covariantes de um vetor, em geral, não comutam [12]. Por consequência isso leva à definição do tensor curvatura. A demonstração, que

é do tipo “à força bruta”, será explicitada a seguir.

Considere um vetor covariante qualquer, A_ν, por exemplo. A derivada covariante de A_ν em relação a dois índices diferentes é

$$A_{\nu\,;\rho} = \partial_\rho A_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} A_\alpha \; ; \; A_{\nu\,;\sigma} = \partial_\sigma A_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} A_\alpha \; , \tag{2.33}$$

Usaremos as seguintes abreviações para a derivada parcial

$$\frac{\partial A}{\partial x^\rho} \equiv \partial_\rho A \equiv A_{,\rho} \; ,$$

tomando, em seguida, uma segunda derivada covariante com os índices intercalados obtemos

$$(A_{\nu\,;\rho})_{;\sigma} = (A_{\nu\,;\rho})_{,\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} A_{\alpha\,;\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\rho} A_{\nu\,;\alpha} \; , \tag{2.34}$$

$$(A_{\nu\,;\sigma})_{;\rho} = (A_{\nu\,;\sigma})_{,\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} A_{\alpha\,;\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\rho} A_{\nu\,;\alpha} \; , \tag{2.35}$$

e, então, tomamos a diferença entre as equações (2.34) e (2.35) e cancelamos os termos iguais

$$\begin{aligned} A_{\nu\,;\rho\,;\sigma} - A_{\nu\,;\sigma\,;\rho} = & + \cancel{\partial_\sigma \partial_\rho A_\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu\,,\sigma} A_\alpha - \cancel{\Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} A_{\alpha\,,\sigma}} - \cancel{\partial_\rho \partial_\sigma A_\nu} \qquad (2.36) \\ & + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu\,,\rho} A_\alpha + \cancel{\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} A_{\alpha\,,\rho}} - \cancel{\Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} A_{\alpha\,,\rho}} + \cancel{\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} A_{\alpha\,,\rho}} \\ & + \cancel{\Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} A_{\alpha\,,\sigma}} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu} \Gamma^\beta{}_{\alpha\sigma} A_\beta - \cancel{\Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} A_{\alpha\,,\rho}} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma^\beta{}_{\alpha\rho} A_\beta \; , \qquad (2.37) \end{aligned}$$

por fim, com os termos que restam define-se um tensor de 4ª ordem denominado Tensor Curvatura $R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma}$

$$A_{\nu\,;\rho\,;\sigma} - A_{\nu\,;\sigma\,;\rho} = \underbrace{\left[\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu\,,\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\rho\nu\,,\sigma} - \Gamma^\beta{}_{\sigma\nu} \Gamma^\alpha{}_{\beta\rho} - \Gamma^\beta{}_{\nu\rho} \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\right]}_{\text{Tensor Curvatura } R^\alpha_{\nu\rho\sigma}} A_\alpha = R^\alpha{}_{\nu\rho\sigma} A_\alpha \; , \tag{2.38}$$

também chamado de Tensor Curvatura de Riemann-Christoffel ou simplesmente Tensor Curvatura de Riemann. Outra maneira de se expressar o tensor curvatura é com todos os índices abaixados

$$g_{\mu\lambda} R^\lambda_{\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} . \tag{2.39}$$

Por conta dos termos de Γ, o tensor curvatura contém termos de primeira e segunda derivadas da métrica $g_{\mu\nu}$. Por consequência disso, se o tensor curvatura for igual a 0, significa que o espaço é plano. Com isso, convém diferenciar dois tipos de curvatura espacial. Um espaço é dito intrinsecamente plano se o tensor curvatura for 0 em todo o espaço, tal que não exista nenhuma transformação de coordenadas que possa encontrar $R_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$. Por outro lado, um espaço pode ser extrinsecamente plano, se o tensor curvatura for nulo apenas em uma certa região desse espaço. Um fato importante, é que como todos os referenciais são equivalentes, do ponto de vista da Relatividade Geral, e também devido ao princípio da equivalência, sempre é possível aproximar um espaço curvo como sendo um espaço plano (métrica de Minkowski), contanto que estejamos considerando uma região suficientemente pequena deste espaço [45].

Existem certas propriedades do tensor curvatura. São elas:

i) $R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ são simétricos nos dois últimos índices. O que podemos perceber quando vemos a maneira como definimos o tensor curvatura.

ii) Quando permutamos ciclicamente os índices de baixo de $R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma}$, podemos obter a seguinte relação:

$$R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma} + R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\nu} + R^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} = 0 \ . \tag{2.40}$$

iii) $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é antisimétrico nos dois primeiros índices.

iv) $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é simétrico quando fazemos uma troca dos dois primeiros com os dois últimos índices, ou seja $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$.

Existe também uma versão contraída do tensor curvatura, que possui apenas dois índices, chamado Tensor de Ricci, e é definido da seguinte forma

$$R_{\nu\rho} = R^{\lambda}{}_{\nu\rho\lambda} \text{ ou } R_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \ , \tag{2.41}$$

e que é simétrico, ou seja, $R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}$. Ao realizarmos mais uma contração, obtemos um escalar R conhecido como Curvatura Escalar ou Curvatura Total.

2.3 As Relações de Bianchi

As relações de Bianchi, também chamadas de Identidade de Bianchi, são equações diferenciais satisfeitas pelas componentes do tensor curvatura. Vamos considerar uma região do espaço que pode ser aproximada à um plano, isto é, nessa região, $\Gamma = 0$, mas não suas derivadas! Assim, o tensor curvatura pode ser escrito como

$$R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu\ ,\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu\ ,\sigma} \ , \tag{2.42}$$

aplicando em seguida uma derivada covariante, obtemos

$$R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma\,;\alpha} = \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu\,,\rho\alpha} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu\,,\sigma\alpha} \tag{2.43}$$

esta última passagem é um tanto tediosa, e por isso, a omitiremos, mas o segredo é cancelar todos os termos de Γ, já que são nulos no caso que estamos trabalhando.

Em seguida, ao realizarmos a permutação dos índices ρ, σ e α chegamos no seguinte resultado

$$R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma\,;\alpha} + R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\alpha\,;\rho} + R^{\lambda}{}_{\nu\alpha\rho\,;\sigma} = 0\ , \tag{2.44}$$

que são as relações de Bianchi. Vale lembrar que estamos tratando de uma equação tensorial, e que portanto, é independente do sistema de coordenadas. Dessa relação, podemos contrair os índices λ e ρ e ficamos com

$$\begin{aligned} R^{\lambda}{}_{\nu\lambda\sigma\,;\alpha} + R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\alpha\,;\lambda} + R^{\lambda}{}_{\nu\alpha\lambda\,;\sigma} &= 0\ , \\ -R_{\nu\sigma\,;\alpha} + R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\alpha\,;\lambda} + R_{\nu\alpha\,;\sigma} &= 0\ , \end{aligned} \tag{2.45}$$

contraindo mais uma vez multiplicando por $g^{\nu\sigma}$

$$\begin{aligned} -R_{\,;\alpha} + R^{\lambda}{}_{\alpha\,;\lambda} + R^{\sigma}{}_{\alpha\,;\sigma} &= 0 \quad \sigma \to \lambda \\ R^{\lambda}{}_{\alpha\,;\lambda} - \frac{1}{2} R_{\,;\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

em que o sinal negativo aparece devido à antissimetria de σ e ρ e no último termo da primeira equação fizemos a troca da variável muda σ por λ. Multiplicando ambos os lados por $g^{\mu\alpha}$ obtemos a seguinte relação

$$(R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R)_{\,;\lambda} = G^{\mu\lambda}{}_{;\lambda} = 0\ , \tag{2.47}$$

que é conhecida como Identidade de Einstein, e o termo entre parênteses

$$G^{\mu\lambda} = R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R\ , \tag{2.48}$$

é chamado de Tensor de Einstein.

A esta altura já estamos mais do que prontos para obter as equações de campo de Einstein, que serão abordadas na próxima seção.

2.4 As Equações de Campo de Einstein

Na teoria da gravitação como desenvolvida por Newton e que é, naturalmente, não relativística, o potencial gravitacional satisfaz a seguinte equação de Poisson

$$\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho \ , \tag{2.49}$$

onde ρ é a densidade de matéria e G a constante da gravitação universal de Newton. Essa equação tem como solução um potencial da forma

$$\phi(\vec{x}) = -G\int \frac{\rho(x')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'. \tag{2.50}$$

A generalização da densidade de matéria é o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, como se sabe a partir da Relatividade Restrita [9]. Ao calcular a equação da geodésica, observa-se também que a métrica $g_{\mu\nu}$ apresenta um comportamento similar ao do potencial gravitacional. Em vista disso, para determinar as equações de campo de Einstein, podemos fazer uma analogia com a teoria de Newton. Mais especificamente, buscamos uma expressão que tenha do lado direito da igualdade algo relacionado com o tensor momento-energia e do lado esquerdo algo relacionado com a métrica. Além disso, para que tenhamos essa analogia, devido à equação de Poisson, a equação que buscamos também deve obedecer duas restrições: não ter derivadas de ordem maior que 2 na métrica $g_{\mu\nu}$, e ser linear na segunda derivada de $g_{\mu\nu}$. Coincidentemente, essas condições são satisfeitas pelo tensor de Einstein, de modo que Einstein postulou a seguinte equação de campo

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \tag{2.51}$$

Ao tomarmos o traço do tensor de Einstein ficamos com

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = G_{\mu}{}^{\mu} &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\underbrace{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}_{=4}R \\ &= R - 2R = -R = \chi T \ , \end{aligned}$$

tal que $T = T_{\mu}{}^{\mu}$. Disso tiramos a importante relação $R = -\chi T$ que nos permite reescrever as equações de campo com o tensor curvatura em termos do tensor momento-energia

$$R_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \ . \tag{2.52}$$

Para determinarmos o valor de χ, partimos da ideia de que as equações (2.49) e (2.52) devem coincidir no limite não relativístico. Para tal, consideremos a equação da geodésica da partícula livre (2.32)

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \ , \tag{2.53}$$

com isso, no caso não relativístico, o elemento de linha pode ser escrito como $ds^2 = c^2dt^2 = (dx^4)^2$, pois, desprezamos os termos dx^2, dy^2 e dz^2 [9]. Então a equação da geodésica passa a ser

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} &= -\Gamma^{\mu}{}_{44}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right)^2 , \\
\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}t^2} &= -\Gamma^{\mu}{}_{44}\left(\frac{c}{c}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right)^2 ,
\end{aligned}
$$

Supondo que o campo é estático, tal que $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^4} = 0$, e que no limite não relativístico vale a aproximação de campo fraco, ou seja, podemos escrever a métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (veremos mais sobre a aproximação de campo fraco no Capítulo 3), a conexão afim torna-se então

$$\Gamma^{k}{}_{44} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(-\frac{\partial g^{44}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial h^{44}}{\partial x^k} , \tag{2.54}$$

lembrando que o índices latinos correspondem apenas às coordenadas espaciais. Assim sendo, a geodésica pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{c^2}{2}\overrightarrow{\nabla} h_{44} . \tag{2.55}$$

Da mecânica Newtoniana, temos

$$\frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\overrightarrow{\nabla}\phi , \tag{2.56}$$

ou seja, temos motivos para acreditar que

$$h_{44} = \frac{2}{c^2}\phi. \tag{2.57}$$

Tomando ainda o caso de movimentos muito lentos, o termo que mais contribui no tensor momento-energia é $T_{44} = \rho c^2$ [9], cujo traço é simplesmente $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \approx g^{44}T_{44} = \rho c^2$. Desta forma, podemos escrever a equação (2.52) como

$$R_{44} = \frac{1}{2}\chi\rho c^2 , \tag{2.58}$$

então, se desprezarmos ainda termos em Γ^2 e as derivadas temporais (movimentos muito lentos), implicitos na equação (2.41), ficamos com

$$R_{44} = \frac{\partial \mathit{\Gamma}^{k}{}_{44}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 h_{44} = \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}^2\phi . \tag{2.59}$$

Ao compararmos com a equação (2.58) observamos, enfim, que

$$\vec{\nabla}^2\phi = \frac{1}{2}\chi\rho c^2 , \tag{2.60}$$

que é igual à equação de Poisson (2.49), somente se

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} = 2,073 \times 10^{-48} \ , \tag{2.61}$$

em unidades de c vezes grama segundo.

Substituindo, então, o valor da constante χ, temos as equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \text{ ou } R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \ . \tag{2.62}$$

Este pode ser considerado, talvez, o grande resultado da Relatividade Geral. Temos uma equação que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria em uma região do espaço. Estamos presenciando uma das grandes quebras de paradigma do século XX: se por um lado Newton diz que a Terra exerce uma força que nos "puxa" até ela, Einstein diz que, na verdade, a massa da Terra causa uma deformação do espaço-tempo ao seu redor, fazendo com que sejamos "empurrados" em sua direção.

Dentre os resultados, ou predições, mais notáveis da Relatividade Geral estão: a dilatação temporal gravitacional, o *redshift* gravitacional, a deflexão da luz, a precessão do periélio de Mercúrio e as ondas gravitacionais.

No próximo capítulo, apresentaremos um estudo um pouco mais detalhado do último caso: as ondas gravitacionais. Falaremos um pouco da matemática por trás dessas ondas, e no decorrer do texto faremos uma pequena comparação com as ondas eletromagnéticas e abordaremos os seus mecanismos de detecção.

Capítulo 3

Ondas Gravitacionais

Para o estudo das ondas gravitacionais, faremos neste capítulo o que é chamada de aproximação de campo fraco das equações de campo de Einstein. Isso, basicamente, consiste em considerar que a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ difere muito pouco da métrica de Minskowki $\eta_{\mu\nu}$,

3.1 Equações de Campo Fraco ou Linearizadas

Neste secção, obteremos as equações de campo de Einstein tomando a seguinte consideração

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \ , \tag{3.1}$$

ou seja, a métrica $g_{\mu\nu}$ difere muito sutilmente da métrica de Minkowski, tal que podemos expandir-la em uma série perturbativa, em que ε, aqui, é o parâmetro adimensional da perturbação e $h_{\mu\nu}$ é chamado tensor de perturbação métrica [2]. Termos em ε^2 ou superiores serão desconsiderados. Outra consideração, é a condição de contorno de que no limite assintótico o espaço-tempo é plano

$$\lim_{r\to\infty} h_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{3.2}$$

de modo que r representa um certo parâmetro radial.

Podemos encontrar a forma inversa da métrica $g_{\mu\nu}$, para isso definimos

$$h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \ , \tag{3.3}$$

e a métrica pode ser escrita na forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu} \ , \tag{3.4}$$

uma que vez

$$(\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\lambda} - \varepsilon h^{\nu\lambda}) = \delta^{\lambda}_{\mu} \ . \tag{3.5}$$

Para redefinirmos as equações de campo considerando, agora, uma métrica da forma (3.1) e (3.4) começamos redefinindo a própria conexão afim

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left\{ g_{\alpha\lambda,\,\beta} + g_{\alpha\beta,\,\lambda} - g_{\beta\lambda,\,\alpha} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \eta^{\mu\alpha} \left\{ h_{\alpha\lambda,\,\beta} + h_{\alpha\beta,\,\lambda} - h_{\beta\lambda,\,\alpha} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon \left\{ h^{\mu}{}_{\lambda,\,\beta} + h^{\mu}{}_{\beta,\,\lambda} - h_{\beta\lambda,}{}^{\mu} \right\} \ .
\end{aligned}$$

Naturalmente, com uma nova expressão para a conexão afim[1], podemos determinar as equações de campo percorrendo um caminho muito semelhente com o que desenvolvemos no Capítulo 2. Assim sendo, encontramos que o tensor curvatura de Riemann, agora, pode ser expresso da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon (h_{\mu\beta,\,\nu\alpha} + h_{\nu\alpha,\,\mu\beta} - h_{\mu\alpha,\,\nu\beta} - h_{\nu\beta,\,\mu\alpha}) \ . \tag{3.6}$$

Perceba que agora, tanto a conexão afim como o tensor curvatura dependem apenas de $h_{\mu\nu}$ (que é uma pequena mudança na métrica de Minkowski) e suas derivadas, pois $\eta_{\mu\nu}$ é constante. Isso também tem uma implicação importante nas relações de Bianchi. Tínhamos visto que elas eram definidas por

$$R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma\,;\alpha} + R^{\lambda}_{\nu\sigma\alpha\,;\rho} + R^{\lambda}_{\nu\alpha\rho\,;\sigma} = 0 \ , \tag{3.7}$$

agora, com a aproximação que estamos realizando, os termos passam a depender apenas da derivada parcial usual

$$R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma\,,\alpha} + R^{\lambda}_{\nu\sigma\alpha\,,\rho} + R^{\lambda}_{\nu\alpha\rho\,,\sigma} = 0 \ . \tag{3.8}$$

Temos também que a nova expressão para o tensor de Ricci é

$$R_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon (h^{\alpha}_{\mu,\,\nu\alpha} + h^{\alpha}_{\nu,\,\mu\alpha} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\,\mu\nu}) \ , \tag{3.9}$$

aqui, usamos que

$$h \equiv \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h^{\alpha}_{\alpha} \ , \tag{3.10}$$

e também que $\Box$ é o operador d'Alambertiano, definido como

[1] É importante ressaltar que em nossa abordagem desconsideramos os termos em h^2, pois levamos em conta que $|h| << 1$.

$$
\begin{aligned}
\Box &= \eta_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \\
&= \partial^\mu\partial_\mu \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] .
\end{aligned}
$$

Como havíamos visto no Capítulo 2, uma contração do tensor de Ricci leva ao escalar R (escalar de Ricci), aqui, neste caso, contraindo (3.9) ficamos com

$$
R = \varepsilon({h^{\alpha\beta}}_{,\,\mu\nu} - \Box h) , \tag{3.11}
$$

e, finalmente, de maneira muito análoga ao que foi feito no Capítulo 2, é possível encontrar uma nova expressão para o tensor de Einstein:

$$
G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}({h^\alpha}_{\mu,\,\nu\alpha} + {h^\alpha}_{\nu,\,\mu\alpha} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}{h^{\alpha\beta}}_{,\,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\Box h) . \tag{3.12}
$$

Quando realizamos, no Capítulo 2, o cálculo da geodésica de uma partícula livre usando técnicas variacionais (princípio variacional) não foi apenas uma simples alternativa à resolução do problema. Na verdade, existe toda uma abordagem da Relatividade Geral considerando as técnicas variacionais. Por exemplo, a mesma expressão para o tensor de Einstein que acabamos de obter pode ser encontrada utilizando o seguinte Lagrangiano[2]

$$
\mathcal{L}({h^{\mu\nu}}_{,\alpha}) = \frac{1}{2}\varepsilon({h^{\mu\nu}}_{,\nu}{h^\alpha}_{\alpha,\,\mu} - h^{\mu\nu,\,\alpha}h_{\alpha\nu,\,\mu} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta,\,\mu}h_{\alpha\beta,\,\mu} - \frac{1}{2}{h^\alpha}_{\alpha,\,\mu}{{h^\beta}_\beta}^{,\,\mu}) , \tag{3.13}
$$

tal que o tensor de Einstein é definimo como

$$
G_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h^{\mu\nu}} . \tag{3.14}
$$

Neste trabalho, não nos aprofundaremos neste método de abordar as equações de Einstein e a Relatividade Geral, contudo, o leitor pode encontrar ótimas discussões em *Gravitation* [20] e *Introducing Einstein's Relativity* [12].

As equações de onda podem ser obtidas ao observarmos algo interessante que acontece ao realizarmos a seguinte transformação de sistema de coordenadas

[2] A densidade lagrangiana da equação de campo de Einstein é dada por:

$$
\mathcal{L} = R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}
$$

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu \ , \tag{3.15}$$

então, derivando, obtemos

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \varepsilon\xi^\mu{}_{,\,\nu}. \tag{3.16}$$

Quando fazemos este procedimento na regra de transformação da métrica

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, g_{\alpha\beta}(x) \ , \tag{3.17}$$

ficamos com algo parecido em termos de $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} \to h'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\,\nu} - \xi_{\nu,\,\mu} \ , \tag{3.18}$$

que é uma transformação de gauge de $h_{\mu\nu}$, ou seja, observamos que o tensor curvatura e suas versões contraidas (tensor e escalar de Ricci) quando submetidos a uma mudança do tipo (3.18) permanecem inalterados! Isto é, temos uma certa liberdade de tomar algumas condições sobre $h_{\mu\nu}$, sem afetar a equações de campo.

Agora, se despretensiosamente definirmos a seguinte variável

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \ , \tag{3.19}$$

tal que $h = h^\mu{}_\mu = \eta^\nu h_{\mu\nu}$ e o tensor e o escalar de Ricci, então, seriam escritos como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon(\psi^\alpha_{\mu,\,\nu\alpha} + \psi^\alpha_{\nu,\,\mu\alpha} - \Box h_{\mu\nu}) \tag{3.20}$$

e

$$R = \frac{1}{2}\varepsilon(2\psi^{\alpha\beta}{}_{,\,\alpha\beta} - \Box h) \ , \tag{3.21}$$

respectivamente. Obviamente, isso também alteraria a estrutura do tensor de Einstein, que seria, portanto,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon(\psi^\alpha{}_{\mu,\,\nu\alpha} + \psi^\alpha{}_{\nu,\,\mu\alpha} - \Box\psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\psi^{\alpha\beta}{}_{,\,\alpha\beta}) \ . \tag{3.22}$$

Desta forma, é possível notar (talvez não muito facilmente) que se tomarmos que

$$\psi^\mu{}_{\nu,\,\mu} = 0 \ , \tag{3.23}$$

ou então, de maneira equivalente, que

$$h^\mu{}_{\nu,\,\mu} - \frac{1}{2}h_{\,,\,\nu} = 0 \ , \tag{3.24}$$

é possível obter soluções do tipo onda, a partir das equações de campo! A condição (3.23), que torna isso possível, é conhecida como gauge de Einstein[3]. Se tomarmos uma transformação de coordenadas do tipo (3.15) mediante (3.23), ficamos com uma resultado muito parecido com o que obtivemos com (3.15)

$$\psi_{\mu\nu} \rightarrow \psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\,\nu} - \xi_{\nu,\,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\,\alpha} \;, \tag{3.25}$$

se então, elevarmos o índice μ (utilizando (3.4)) e em seguida derivarmos em relação ao mesmo, ficamos com

$$\psi'^{\mu}{}_{\nu\,,\mu} = \psi^{\mu}{}_{\nu\,,\mu} - \Box\xi_{\nu} \;. \tag{3.26}$$

Note que (3.26) só será igual ao gauge de Einstein se

$$\Box\xi_{\mu} = \psi^{\mu}{}_{\nu\,,\mu} \;, \tag{3.27}$$

em outras palavras, só teremos equações do tipo onda como solução das equações de campo, se (3.27) for satisfeita. Ao substituir essas considerações na equação de Einstein, obtemos as equações linearizadas

$$\frac{1}{2}\varepsilon\Box\psi_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu} \;, \tag{3.28}$$

que pode ser interpretada como uma equação de onda[4] que possui termos de fonte (devido ao tensor momento energia). Entretanto, temos liberdade de sempre escolher um sistema de coordenadas tal que

$$\Box\xi_{\mu} = 0 \;, \tag{3.29}$$

o que não afeta em nada o gauge de Einstein.

Assim, encontramos as equações de campo do gauge de Einstein para o vácuo

$$\Box\psi_{\mu\nu} = 0 \;. \tag{3.30}$$

Podemos encontrar uma equação simplesmente em termos de $h_{\mu\nu}$ ao tomarmos o traço da equação (3.30) (multiplicando por $\eta^{\mu\nu}$)

$$\eta^{\mu\nu}\Box\psi_{\mu\nu} = \Box(\eta^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}) = \Box(h - 2h) = -\Box h = 0 \;, \tag{3.31}$$

portanto,

[3]Na literatura, podemos encontrar esta condição sendo chamada de diversos nomes, dentre eles: gauge de de Donder, de Hilbert ou de Fock, além do gauge de Einstein [12].

[4]As equações (3.28) e (3.32) são representações da equação de onda na forma tensorial, cujas soluções são da forma $\psi_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik(x-ct)}$, que são ondas monocromáticas propagando-se com velocidade c em uma direção x na geometria do espaço-tempo. Esta é uma onda gravitacional de magnitude $k = \omega c$.

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.32}$$

Podemos, neste momento, realizar uma pequena comparação com o eletromagnetismo, onde também encontramos uma solução do tipo onda, a partir da equação

$$\Box A_{\mu} = 0 \ , \tag{3.33}$$

sendo que, $A_{\mu\nu}$, é o quadrivetor potencial eletromagnético, e cuja fonte é a corrente J_{μ}, tal que

$$\Box A_{\mu} = -\mu_0 J_{\mu} \ , \tag{3.34}$$

cuja solução particular é

$$A_{\mu}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3\vec{r}' J_{\mu}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \ , \tag{3.35}$$

conhecido como potencial retardado. Aqui, no caso de ondas gravitacionais, também temos soluções particulares devido à termos de fonte

$$h_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = 2G \int \frac{d^3\vec{r}' \mathcal{J}_{\mu\nu}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \ , \tag{3.36}$$

porém, neste trabalho, nos atentaremos somento para o caso das equações de campo no vácuo, ou seja, sem termos de fonte.

É interessante notar que em ambas as equações (3.32) e (3.33), está implícito no operador d'Alambertiano o fator velocidade da onda e que é igual a c. Ou seja, assim como as ondas eletromagnéticas, as gravitacionais também se propagam à velocidade da luz, e isso contradiz a gravitação Newtoniana, em que pode-se concluir que a gravidade, de alguma forma, é "sentida" instantaneamente, ou propagada à velocidade infinita.

Embora em nossa abordagem tenhamos chegado a uma aparente conclusão de que ao linearizarmos as equações de campo de Einstein por meio da aproximação de campo fraco, e então obtermos soluções do tipo onda, existe a possibilidade de poder se levantar uma objeção dizendo que os resultados obtidos, possam depender da escolha de sistema de coordenadas, e com isso, (3.32) não necessariamente pode ser considerado um indício da existência das ondas.

Porém, podemos nos convencer, ao menos um pouco, ao recordarmos do começo do capítulo, em que fizemos a consideração de que a métrica do espaço-tempo, varia muito pouco em relação à métrica de Minkowski. Como consequência disso, foi possível escrever o tensor curvatura inteiramente em termos de $h_{\mu\nu}$ e suas derivadas. Assim, é no mínimo razoável, imaginarmos que se (3.32) for verdade, então o mesmo deve valer para o próprio tensor curvatura

$$\Box R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \ , \tag{3.37}$$

e por isso, (3.37) torna-se, de certa forma, um argumento mais digerível sobre a existência das ondas gravitacionais, pois nos diz que a própria curvatura do espaço-tempo segue uma equação de onda.

Em vista de encontrar uma solução para as equações de campo para o vácuo, razoavelmente simples, propomos uma solução que visa reduzir ao máximo o número de termos independentes do tensor curvatura, como, por exemplo, uma solução do tipo onda plana infinita se propagando na direção x. Ou seja, $h_{\mu\nu}$ é da forma

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t, x) \ , \tag{3.38}$$

assim, evidentemente,

$$h_{\mu\nu\, ,\, 2} = h_{\mu\nu\, ,\, 3} = 0 \ . \tag{3.39}$$

De fato, isso acaba por reduzir os termos independentes do tensor de 4ª ordem $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ em "apenas" os seguintes (que estão separados em três famílias):

$$R_{0123} = R_{0223} = R_{0323} = R_{1223} = R_{1323} = R_{2323} = 0 \ ; \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= \frac{1}{2}\varepsilon(2h_{01\, ,\, 01} - h_{00\, ,\, 11} - h_{11\, ,\, 00}) \ , \\
R_{0102} &= \frac{1}{2}\varepsilon(h_{02\, ,\, 01} - h_{12\, ,\, 00}) \ , \\
R_{0103} &= \frac{1}{2}\varepsilon(h_{03\, ,\, 01} - h_{13\, ,\, 00}) \ , \\
R_{0112} &= \frac{1}{2}\varepsilon(h_{02\, ,\, 11} - h_{12\, ,\, 01}) \ , \\
R_{0113} &= \frac{1}{2}\varepsilon(h_{03\, ,\, 11} - h_{13\, ,\, 01}) \ ;
\end{aligned} \tag{3.41}$$

e,

$$
\begin{aligned}
R_{0202} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{22\,,\,00}\ , \\
R_{0203} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{23\,,\,00}\ , \\
R_{0212} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{22\,,\,01}\ , \\
R_{0213} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{23\,,\,01}\ , \\
R_{0303} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{33\,,\,00}\ , \\
R_{0213} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{33\,,\,01}\ , \\
R_{1212} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{22\,,\,11}\ , \\
R_{1213} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{23\,,\,11}\ , \\
R_{1313} &= -\frac{1}{2}\varepsilon h_{33\,,\,11}\ .
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Podemos, ainda, sem que haja qualquer tipo de perda de generalidade ou de informação, escolher um sistema de coordenadas tal que $R_{\mu\nu} = 0$, e assim, por exemplo,

$$
R_{13} = R^{\mu}{}_{1\mu 3} = R_{0103} = 0\ , \tag{3.43}
$$

de modo que a segunda família de equações seja nula, o que reduz ainda mais o número de termos independentes. Feito isso, podemos escrever os termos independentes em apenas dois grupos,

$$
h_{\mu\nu} = h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu}\ , \tag{3.44}
$$

são eles

$$
h^{(1)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}\ , \tag{3.45}
$$

e

$$
h^{(2)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{02} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{03} & h_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.46}
$$

Ao substituirmos cada um dos termos de $h^{(2)}_{\mu\nu}$ no tensor curvatura (3.6), notamos (depois de um certo tempo), que o tensor curvatura de $h^{(2)}_{\mu\nu}$ é zero! Restando apenas soluções em $h^{(1)}_{\mu\nu}$. E mais, podemos ainda tomar

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t - x) \ , \tag{3.47}$$

que é, verdadeiramente, uma solução do tipo onda plana para as equações de campo de Einstein (representada, ilustrativamente na Figura 3.1), e nesse caso, se propagando na direção de x, cuja forma mais geral é do tipo [19]

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \cos k_\alpha x_\alpha \ , \tag{3.48}$$

ou ainda, na forma exponencial [21]

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x_\alpha} + \epsilon *_{\mu\nu} e^{-ik_\alpha x_\alpha} \ , \tag{3.49}$$

tal que $\epsilon_{\mu\nu}$ e k_α são tensores constantes.

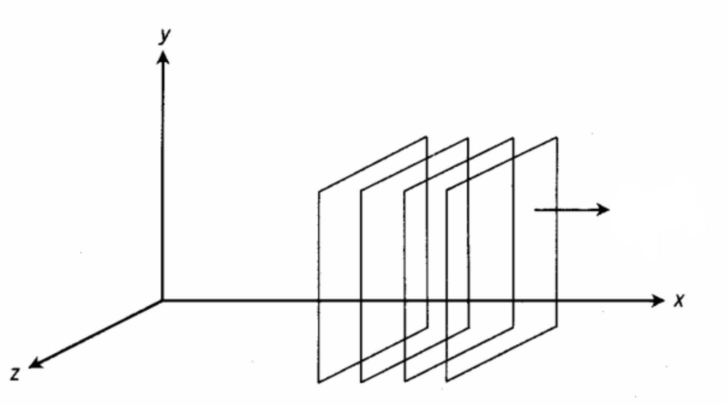

Figura 3.1: Representação ilustrativa de uma onda gravitacional se propagando na direção x [17].

Se considerarmos o gauge de Einstein na forma (3.24) ficamos ainda com a seguinte relação

$$\begin{aligned} h_{00,0} - h_{01,1} - h_{\ ,0} &= 0 \ , \\ h_{01,0} - h_{11,1} - h_{\ ,1} &= 0 \ , \\ h_{02,0} - h_{12,1} &= 0 \ , \\ h_{03,0} - h_{13,1} &= 0 \ , \end{aligned} \tag{3.50}$$

então, integrando[5], encontramos

[5]Tomando muito cuidado, pois aqui, não podemos nos esquecer que o argumento de h é $(t - x)$.

$$
\begin{aligned}
h_{00} + h_{01} - \frac{1}{2}h &= f_1 \ , \\
h_{01} + h_{11} + \frac{1}{2}h &= f_2 \ , \\
h_{02} + h_{12} &= f_3 \ , \\
h_{03} + h_{13} &= f_4 \ ,
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

perceba que $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \equiv f(y, x)$. Porém, devido à condição de contorno (3.2) de que no limite assintótico o espaço é plano, temos que

$$
f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0 \ , \tag{3.52}
$$

pois, nesse caso, $h_{\mu\nu} = 0$. E, com isso, temos mais um "corte" na quantidade de termos independentes, pois

$$
\begin{aligned}
h_{12} &= -h_{02} \ , \\
h_{13} &= -h_{03} \ , \\
h_{01} &= -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) \ , \\
h_{33} &= -h_{22} \ .
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

Então h_{ab} pode ser representado da seguinte forma

$$
h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h_{00} & -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) & h_{02} & h_{03} \\ -\frac{1}{2}(h_{00} + h_{11}) & h_{11} & -h_{02} & -h_{03} \\ h_{02} & -h_{02} & h_{22} & h_{23} \\ h_{03} & -h_{03} & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix} , \tag{3.54}
$$

e a forma de $h_{\mu\nu}$ que contribui para a solução tipo onda é simplesmente

$$
h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix} , \tag{3.55}
$$

podendo ainda ser separada em duas, uma apenas com termos em $h_{22}(t-x)$ outra apenas com $h_{23}(t-x)$. Como veremos na próxima seção, estas funções referem-se aos diferentes tipos de polarização das ondas gravitacionais.

3.2 Graus de Polarização

Primeiramente, vamos considerar o caso em que $h_{\mu\nu}$ depende apenas de h_{22}, ou seja, $h_{23} = 0$. O elemento de linha pode ser escrito, substituindo na expressão linearizada de $g_{\mu\nu}$, como

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \{1 - \varepsilon h_{22}(t-x)\}\, dy^2 - \{1 + \varepsilon h_{22}(t-x)\}\, dz^2 \ . \tag{3.56}$$

Para ilustrar o efeito de ondas do tipo h_{22} vamos considerar essas ondas incidindo em uma distribuição de partículas no plano yOz.

A distância entre duas partículas próximas é dada por

$$ds^2 = -(1 - \varepsilon h_{22}(t-x))dy^2 \ , \tag{3.57}$$

e por

$$ds^2 = -(1 + \varepsilon h_{22}(t-x))dz^2 \ , \tag{3.58}$$

que são as distâncias próprias entre as partículas na componente y e z, respectivamente. Como h_{22} deve ter um carácter oscilatório, ou seja, assume valores que vão de $h_{22} > 0$ à $h_{22} < 0$. A medida que h_{22} cresce, a distância em y tende a diminuir, enquanto em z à aumentar. Por outro lado se h_{22} descresce observa-se o contrário, como podemos ver na representação da Figura 3.2, e esse tipo de polarização é chamado de "polarização +".

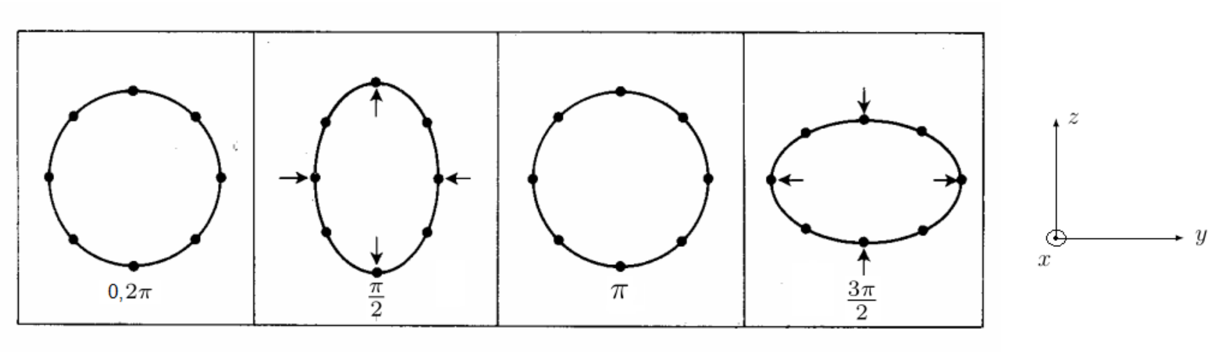

Figura 3.2: Representação ilustrativa do efeito da incidência de ondas gravitacionais de polarização + em um conjunto de partículas teste em um ciclo $0, 2\pi$ [17].

Também podemos observar na Figura 3.2 a característica transversa dessas ondas, ou seja, a direção de propagação é perpendicular ao plano de oscilação.

Analizando, agora, o caso de ondas de polarização h_{23}, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 + 2\varepsilon h_{23}(t-x)dydz - dz^2 \ , \tag{3.59}$$

o que se observa é que trata-se exatamente da mesma situação das ondas h_{22}, porém, sob uma rotação de 45° no plano yOz, pois quando fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} y \to y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z) , \\ z \to z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z) , \end{aligned} \tag{3.60}$$

obtemos exatamente o mesmo elemento de linha do caso anterior. A representação deste tipo de polarização está representada na Figura 3.3.

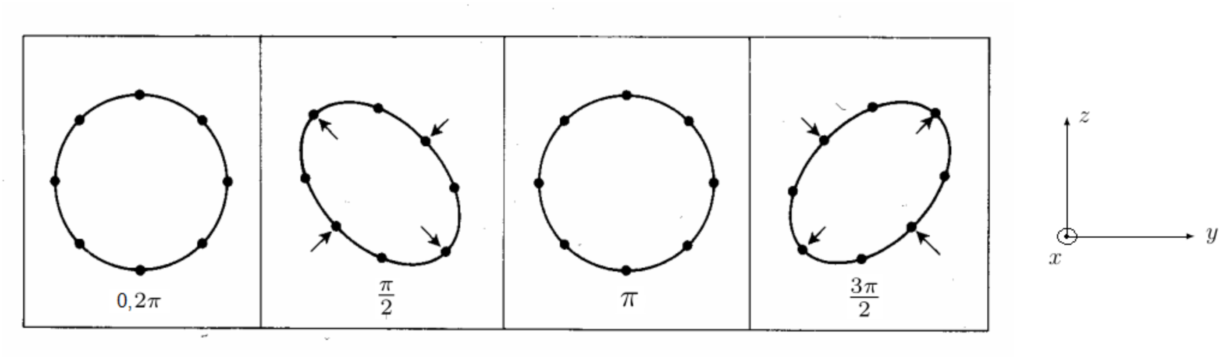

Figura 3.3: Representação ilustrativa do efeito da incidência de ondas gravitacionais de polarização $\times$ em um conjunto de partículas teste em um ciclo $0, 2\pi$ [17].

Da mesma coisa que na Figura 3.2, na Figura 3.3 também podemos observar a característica transversa dessas ondas.

Quando comparamos com o eletromagnetismo, vemos que as ondas eletromagnéticas possuem graus de polarização que diferem, não de 45° como no caso gravitacional, mas de 90°. Isso, se dá ao fato que de a solução de ondas eletromagnéticas vêm de uma equação de onda com quadrivetor potencial eletromagnético A^{μ}, que é um tensor de primeira ordem. Já as ondas gravitacionais vêm de uma equação de onda com o o tensor $h_{\mu\nu}$, que por sua vez, é uma tensor de segunda ordem. Ainda nesta comparação, temos que no campo eletromagnético, os 2 graus de polarização são invariantes por uma rotação de 360°, e à quantização associa-se ao fóton (partícula de spin 1 e de massa de repouso nula), enquanto no campo gravitacional, os graus de polarização são invariantes por uma rotação de 180° e sua partícula associada à quantização do campo é o gráviton (partícula de spin 2 e de massa de repouso nula), que ainda não foi observado experimentalmente. Na tabela 3.1 são mostradas mais algumas analogias entre esses campos.

Na próxima seção falaremos de um pouco sobre a detecção das ondas gravitacionais.

	Eletromagnetismo	Gravitação
Fonte de Campo	J^{μ}	$T^{\mu\nu}$
Lei de Conservação	$\partial_{\mu}J^{\mu}$	$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}$
Campo	A^{μ}	$h^{\mu\nu}$
Transformação de Gauge	$A^{\mu} \to A^{\mu} + \partial^{\mu}\Lambda$	$h^{\mu\nu} \to h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\Lambda^{\nu}$
Gauge escolhido	$\partial_{\mu}A^{\mu}$	$\partial_{\mu}(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h)$
Momento-energia de uma partícula	$\frac{d}{dx^4}p_{\mu} = qF_{\mu\nu}u^{\nu}$	$\frac{d}{dx^4}p_{\mu} = \frac{\varepsilon}{2}mh_{\alpha\beta\ ,\ \mu}u^{\alpha}u^{\beta}$

Tabela 3.1: Algumas analogias entre os campos (ondas) eletromagnéticos e gravitacionais [19].

3.3 Detecção das Ondas

O primeiro estudo teórico publicado sobre a existência das ondas gravitacionais foi feito pelo próprio Einstein, em 1916, somente um ano após a publicação dos artigos sobre a Relatividade Geral.

As primeiras tentativas de se detectar as ondas aconteceu apenas nos anos 60, com os trabalhos de Weber[6], utilizando de um método que ficou conhecido como "barras de weber". Basicamente, o método consistia de analisar as deformações causadas em um tipo de cilindro de alumínio, devido às diferentes acelerações sentidas pelas partículas causadas pela incidencia das ondas gravitacionais no aparato. Weber, em 1968, afirmou ter detectado, pela primeira vez na história as ondas, por meio de seu experimento. Contudo, houve muitas dúvidas sobre a veracidade dos resultados obtidos por ele. Dizia-se, na época, que a sensibilidade das barras não era suficiente para diferenciar efeitos causados por ondas gravitacionais de ruído.

O trabalho pioneiro de Weber, entretanto, fez com que a comunidade científica passasse à prestar mais atenção na questão da detecção das ondas. Tanto é que, devido a isso, começou a ganhar forma o projeto do interferômetro LIGO[7].

Podemos diferenciar três tipo de fontes de radiação gravitacional [17, 20]: do tipo estouro, ou ruptura (*burst*, do inglês); do tipo periódica e do tipo estocástica.

Dentre as fontes de radiação do tipos *burst* podemos citar: o colapso e ricocheteio do núcleo de estrelas massivas (chamadas supernovas) e também colisões entre buracos negros ou entre buracos negros e estrelas de nêutrons. Já entre as fontes periódicas de radiação gravitacional estão: sistemas binários de estrelas e a rotação de estrelas deformadas ou anãs brancas deformadas. Por fim, entre as fontes estocásticas temos: o *big bang* e inomogeneidades ocorridas no começo do universo.

Entre os tipos de detectores, três se destacam: as barras de Weber, interferômetros a *laser* e o rastreamento de veículos espaciais (*spacecraft tracking*, do inglês).

No Brasil, temos o detector de ondas gravitacionais Mario Schenberg, que é basica-

[6]Joseph Weber, físico americano (17 de maio de 1919 — 30 de setembro de 2000) [46].
[7]Este interferômetro será discutido com mais detalhes na próxima seção.

mente um detector do tipo barras de Weber, mas com esferas maciças no lugar de barras. O detector vem sendo construído por um grupo de cientistas brasileiros no que chamam de "Projeto Gráviton" [2].

O detector Mario Schenberg é constituído por uma esfera maciça que é composta por Cobre (94%) e Alumínio (6%), a qual apresenta $1149,53\ kg$ de massa e $32,388\ cm$ de raio a uma temperatura de $4\ K$ [2]. Devido às suas características, este tipo de detector é mais eficiente para realizar medidas de ondas gravitacionais provenientes de eventos impulsivos, tais como coalescências de buracos negros e explosões de anãs brancas.

3.4 A Detecção Feita pelo LIGO

Poucas semanas antes da entrega deste trabalho, por incrível coincidência, no dia 11 de fevereiro de 2016, pesquisadores em entrevista coletiva, anunciaram à comunidade científica que finalmente houve uma detecção direta de ondas gravitacionais por meio de um interefômetro a *laser*. O sinal foi captado por meio do LIGO (sigla do inglês para *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) e ocorreu precisamente em 14 de setembro de 2015, pelos 2 detectores irmãos do LIGO (ver Figura 3.4), um que se localiza em Livingston, no estado de Louisiana nos Estados Unidos e outro em Hanford, no estado de Washington. O evento que gerou as tão procuradas ondas gravitacionais (ver Figura 3.5) foi a colisão entre dois buracos negros (com massas da ordem de 30 massas solares) ocorrido a 1,3 bilhões de anos-luz (a saber, 1 ano-luz = $9,41 \times 10^{12}\ km$) e foi detectado, nos detectores do LIGO em 14 de setembro de 2015.

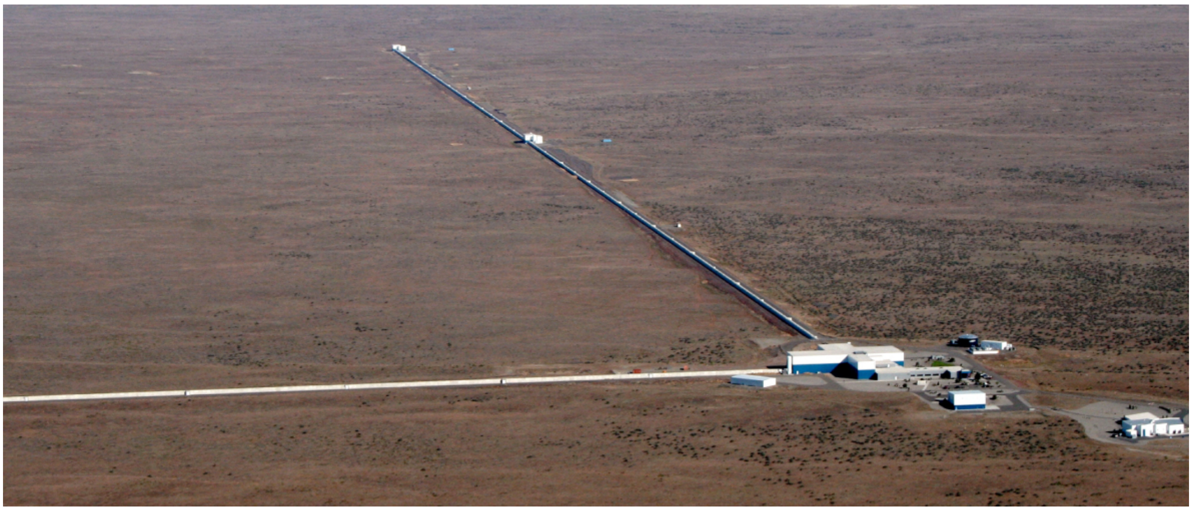

Figura 3.4: Foto de um dos detectores do LIGO (sigla do inglês para *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) – cortesia CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [47].

Neste evento, o equivalente a três massas do nosso Sol foi emitido puramente como radiação gravitacional em menos de um segundo. Isso corresponde a uma potência de cerca de 50 vezes a potência emitida pelo Universo todo.

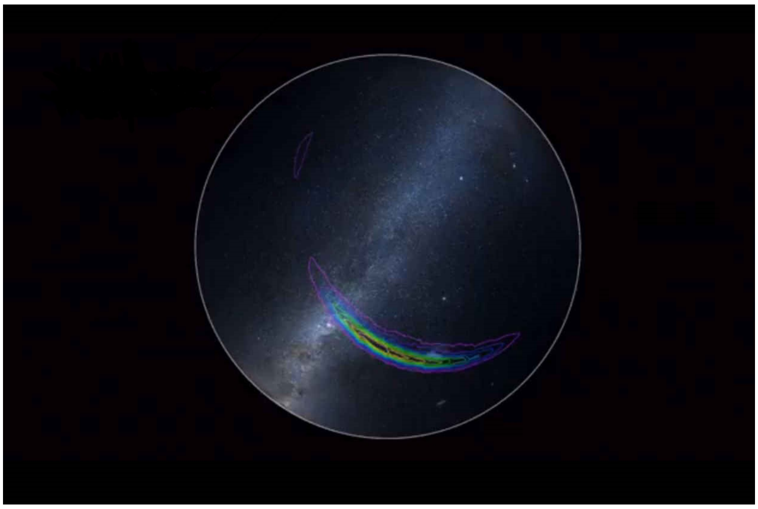

Figura 3.5: Provável localização da colisão entre os buracos negros – cortesia CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [47].

Cada braço de cada detector tem cerca de 4 km de comprimento. Durante a passagem de uma onda gravitacional por eles, um de seus braços iria se contrarir, enquanto o outro se esticar, causando uma diferença no caminho ótico percorrido pelos fótons emitidos pelos *lasers* que é, então, registrado pelos detectores dos interferômetros. Caso ocorra um sinal captado pelos dois aparatos simultaneamente (ver Figura 3.7), estatisticamente pode-se dizer com mais de 99,99% de certeza que o sinal é proveniente de radiação gravitacional e não por ruído. Um esquema ilustrativo de um interferômetro a *laser* pode ser visto na Figura 3.6.

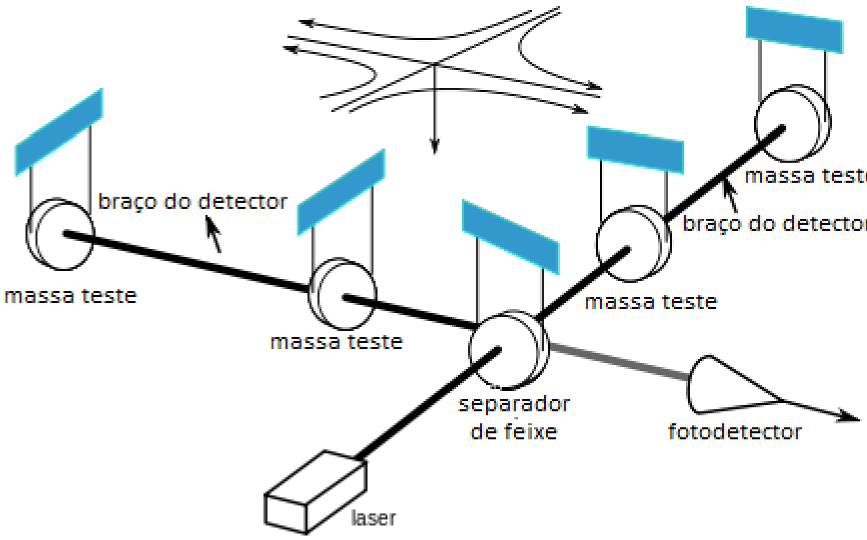

Figura 3.6: Representação ilustrativa de um interferômetro a *laser* – cortesia CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [47].

Em 2014, pesquisadores do telescópio BICEP2, que fica localizado na Antártida, anunciaram a detecção de ondas gravitacionais em análise feita na radiação cósmica de fundo.

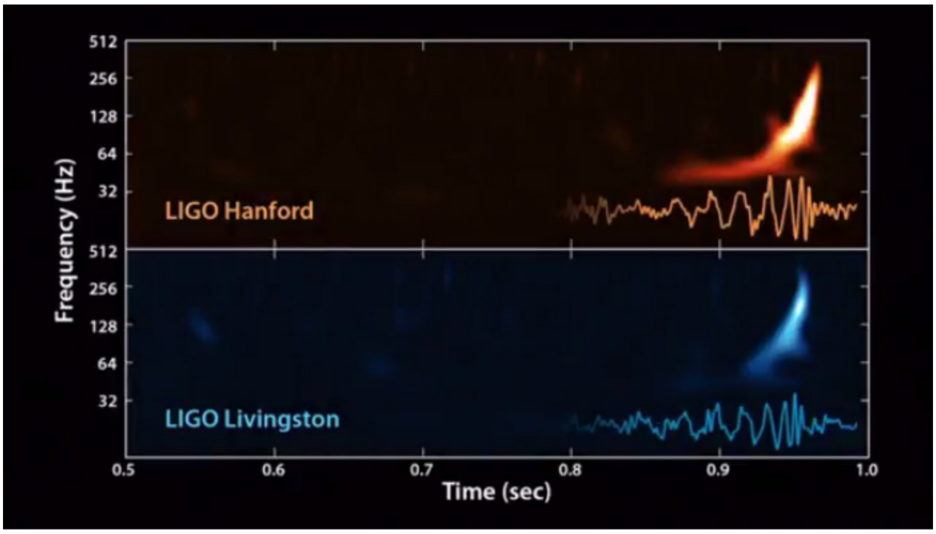

Figura 3.7: Imagem original da sobreposição dos dados encontrados pelos dois detectores – cortesia CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [47].

Entretanto, logo em seguida, outro grupo de cientistas provou que o sinal era muito provavelmente poeira estelar da nossa galáxia.

Durante os dias que seguiram ao anúncio oficial, feita por pesquisadores do LIGO e da também americana NSF (sigla em inglês para*National Science Foundation*), o assunto das ondas gravitacionais e sua detecção foram destaque nos principais meios de comunicação ao redor do mundo, especialmente os eletrônicos, de onde pode-se citar matérias muito esclarecedoras sobre o anúncio no portal eletrônico da *Science Magazine* [47] e do *Space* [48].

Assim, neste capítulo pudemos ver como a aproximação de campo fraco das equações de campo de Einstein lineariza tais equações, e como consequência disso é possível obervar soluções do tipo onda plana para as equações de campo. Discutimos também brevemente acerca dos detectores de ondas gravitacionais e encerramos com uma apresentação da grande detecção anunciada em fevereiro de 2016.

Em seguida, apresentaremos as considerações finais desta monografia de conclusão de curso.

Considerações Finais

Durante o decorrer do desenvolvimento deste trabalho, vimos como são surpreendentes os fatos históricos. No ano de 2015 comemoramos os 100 anos da Teoria da Relatividade (ano mundial da luz), então no fim deste mesmo ano detectam-se ondas gravitacionais (14/09/2015) provenientes de uma colisão entre dois buracos negros (com massas da ordem de 30 massas solares) ocorrido a 1,3 bilhões de anos-luz (1 ano-luz $= \ 9,41 \times 10^{12}\ km$), cujo resultado foi divulgado apenas no começo 2016, pouco tempo antes da apresentação desta monografia e 100 anos após Einstein ter predito as ondas gravitacionais, a partir de uma expansão em campo fraco, que foi um dos tópicos estudados neste trabalho. No ano 2012 (4 décadas após a previsão por Peter Higgs e a François Englert) foi divulgado para o mundo a descoberta do Bóson de Higgs. Assim, a última década, para a teoria de Física de Partículas elementares, gravitação, astronomia, astrofisica e cosmologia tem sido uma década e tanto.

Sobre o trabalho em si, compreendemos como trabalhar com mais uma ferramenta matemática, que é o cálculo tensorial, além disso vimos a importância de definir uma métrica em teoria da gravitação. Novos conceitos foram vistos, como a derivada covariante de tensores covariantes e contravariante, que não são vistos no curso de graduação. Além disso, vimos que para definir a derivada covariante, foi necessário estudar o mecanismo do transporte paralelo; vimos também, que a Teoria da Relatividade Geral é dita uma teoria geométrica da gravidade, e que é a mais simples das teorias de gravitação; que a equação de Einstein é o grande resultado da Relatividade Geral, visto que trata-se de uma equação que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria em uma região do mesmo, o que fora "apenas" uma das grandes quebras de paradigma do século XX: se por um lado Newton diz que a Terra exerce uma força que nos "puxa" até ela, Einstein diz que, na verdade, a massa da Terra causa uma deformação do espaço-tempo e que essa deformação acaba por nos "empurrar" em direção à ela.

Dentre os resultados da Relatividade Geral, estudamos as ondas gravitacionais. Notamos ainda, o quão semelhante é o estudo da teoria da gravitação com a teoria eletromagnética. Assim como ocorre na teoria eletromagnética, vimos que é necessário fixar um "gauge" para resolvermos a equação de campo fraco. Este gauge é o chamado "gauge de Einstein" (dentro outros nomes), e se faz necessário para diminuirmos os graus de liberdade do sistema. Outra semelhança é o fato de que tanto ondas eletromagnéticas como gravitacionais possuem graus de polarização, que diferem de 90 e 45°, respectivamente. Isso, se dá ao fato da solução de ondas eletromagnéticas vir de uma equação de onda com o quadrivetor potencial eletromagnético A_μ, que é um tensor de primeira ordem. Já as ondas gravitacionais vêm de uma equação de onda com o tensor $h_{\mu\nu}$, que por sua vez, é uma tensor de segunda ordem.

Por fim, em relação aos detectores, no Brasil temos o detector Mario Schenberg que consiste de uma esfera (massa de ressonância), transdutores paramagnéticos que monitoram os modos fundamentais de vibração, e quando acoplados a uma antena funciona como um sistema massa-mola. O detector que foi responsável pela detecção das ondas gravitacionais, por outro lado, foi um interferometro a *laser*. Os pesquisadores que coordenam o projeto Gráviton (detector Mario Schemberg) também fazem parte do projeto LIGO (*Laser Interferometer Gravitational–Wave Observatory*), como o Prof. Dr. Odilio Aguiar do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais).

Referências Bibliográficas

[1] S. GIBILISCO, *Understanding Einstein's Theories of Relativity – Man's New Perspective on the Cosmos*. New York: Dover publications, 1st ed., 1983.

[2] "Biblioteca Eletrônica do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Simulador de Comportamento do Detector de Ondas Gravitacionais Mario Schenberg." Disponível em: <http://www.bibl.ita.br/xencita/Artigos/36.pdf> Acessado em 23 de fevereiro de 2016.

[3] B. P. ABOTT *et al.*, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Phys Review Letters*, vol. 106, no. 061102, (2016).

[4] O. D. AGUIAR *et al.*, "The gravitational wave detector mario schenberg: Status of the project," *Brazilian Journal of Physics*, vol. 32, no. 4, (2002).

[5] J. B. NETO, *Matemática Para Físicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 1ª ed., 2010.

[6] G. B. ARFKEN and H. J. WEBER, *Mathematical Methods For Physicists*. London: Elsevier Academic Press, 6th ed., 2005.

[7] D. F. LAWDEN, *Introduction to Tensor Calculus Relativity and Cosmology*. Mineola, NY: Dover Publications, INC, 1982.

[8] T. LANCASTER and S. J. BLUNDELL, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. Oxford: Oxford University Press, 1st ed., 2014.

[9] V. SABATTA and M. GASPERINI, *Introduction to Gravitation*, ch. I-III, pp. 1–67. Singapore: World Scientific, 1st ed., 1985.

[10] R. GAZZINELLI, *Teoria da Relatividade Especial*. São Paulo: Editora Blucher, 2ª ed., 2009.

[11] D. HALLIDAY, R. RESNICK, and J. WALKER, *Fundamentos de Física*, vol. 4. Rio de Janeiro: LTC, 8ª ed., 2009.

[12] R. D'INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity.* Oxford: Oxford University Press, 1st ed., 1992.

[13] J. STACHEL, *O ano miraculoso de Einstein.* Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1ª ed., 2001.

[14] G. BERKELEY, *De motu*, vol. I. Oxford: Oxford-Clarendon Press, 1st ed., 1901.

[15] E. MACH, *History and Root of the Principle of the Conservation of Energy.* Cambridge University Press, 2014. Cambridge Books Online.

[16] L. JAUNEAU, *Introduction to Gravity and Cosmology.* Laboratoire de l'accélérateur de particules, 1988.

[17] R. D'INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity*, ch. 20, pp. 271 – 287. Oxford: Oxford University Press, 1st ed., 1992.

[18] M. G. BOWLER, *Gravitation and Relativity*, ch. 8, pp. 103 – 122. Oxford: Pergamon Press, 1st ed., 1976.

[19] H. C. OHANIAN, *Gravitation and Spacetime.* London: W. W. Norton & Company, INC, 1st ed., 1976.

[20] C. W. MISNER, K. S. THORNE, and J. A. WHEELER, *Gravitation.* No. 3 in Gravitation, W. H. Freeman, 1973.

[21] S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* New York: John Wilay & Sons, 1st ed., 1972.

[22] "Wikipedia, Euclides." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid> Acessado em 14 de janeiro de 2016.

[23] "Wikipedia, Gregorio Ricci-Curbastro." Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Gregorio_Ricci-Curbastro> Acessado em 30 de março de 2015.

[24] "Wikipedia, Tullio Levi-Civita." Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Tullio_Levi-Civita> Acessado em 30 de março de 2015.

[25] "Wikipedia, James Joseph Sylvester." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/James_Joseph_Sylvester> Acessado em 14 de janeiro de 2016.

[26] "Wikipedia, Elwin Bruno Christoffel." Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Elwin_Bruno_Christoffel> Acessado em 30 de março de 2015.

[27] "Wikipedia, Albert Einstein." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[28] "Wikipedia, George Berkeley." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/George_Berkeley> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[29] "Wikipedia, Isaac Newton." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[30] "Wikipedia, Ernst Mach." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Mach> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[31] "Wikipedia, Galileu Galilei." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[32] "Wikipedia, Loránd Eötvös." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Lorand_Eotvos> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[33] "Wikipedia, Robert H. Dicke." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_H._Dicke> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[34] P. G. Roll, R. Krotkov, and R. H. Dicke, "The equivalence of inertial and passive gravitational mass," *Annals of Physics*, vol. 26, pp. 442–517, 1964.

[35] "Faculty of Physics, Faculty and Staff Members Search." Disponível em: <http://www.phys.msu.ru/eng/staff/all/index.php?ID=13483> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[36] V. B. Braginsky and V. I. Panov, "Zh. Eksp. Teor. Fiz.," p. 62, 1971.

[37] "NASA, What Is a Black Hole?." Disponível em: <http://www.nasa.gov/audience/forstudents/k-4/stories/nasa-knows/what-is-a-black-hole-k4.html> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[38] "NASA, Black Holes and Tidal Forces." Disponível em: <http://spacemath.gsfc.nasa.gov/blackh/4Page33.pdf> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[39] "Collins Dictionary, Spaghettification." Disponível em: <http://www.collinsdictionary.com/submission/12943/spaghettification> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[40] "Wikipedia, Bernhard Riemann." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[41] V. SABATTA and M. GASPERINI, *Introduction to Gravitation*, ch. X, pp. 228–270. Singapore: World Scientific, 1st ed., 1985.

[42] "Wikipedia, Hermann Weyl." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Weyl> Acessado em 26 de dezembro de 2015.

[43] H. W. WEYL, "On the Theory of Gravitation: Translation by Christian Nutto and Stephen j. Crothers," *Ann. d. Physk*, vol. 57, p. 117, (1917). Disponível em: <http://www.sjcrothers.plasmaresources.com/Weyl-2.pdf> Acessado em 5 de janeiro de 2016.

[44] G. B. ARFKEN and H. J. WEBER, *Mathematical Methods For Physicists*, ch. 17, pp. 1037–1040. London: Elsevier Academic Press, 6th ed., 2005.

[45] "YouTube, General Relativity (Stanford Lectures)," 2012. Video-aulas disponibilizadas no canal do YouTube da Universidade de Stanford, ministradas pelo professor Leonard Susskind. Disponível em: <http://tinyurl.com/gl4b8n2> Acessado em 12 de agosto de 2015.

[46] "Wikipedia, Joseph Weber." Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Weber> Acessado em 21 de dezembro de 2015.

[47] "Science Magazine, Gravitational Waves, Einstein's Ripples in Spacetime, Spotted for First Time, note = Disponível em: <http://www.sciencemag.org/news/2016/02/gravitational-waves-einstein-s-ripples-spacetime-spotted-first-time> Acessado em 23 de fevereiro de 2016,."

[48] "Space, In Historic First, Einstein's Gravitational Waves Detected Directly." Disponível em: <http://www.space.com/31900-gravitational-waves-discovery-ligo.html> Acessado em 21 de fevereiro de 2016.