



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## **Tópicos de Relatividade Geral**

Acadêmico: Cesar Augusto Machado de Moraes

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 9 de fevereiro de 2016



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## **Tópicos de Relatividade Geral**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Breno Ferraz de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmico: Cesar Augusto Machado de Moraes

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 9 de fevereiro de 2016

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Introdução	1
<b>1 A Necessidade de uma Nova Teoria</b>	<b>3</b>
1.1 A Mecânica Newtoniana e a Relatividade Restrita . . . . .	3
1.2 O Princípio da Equivalência . . . . .	5
<b>2 Cálculo Tensorial</b>	<b>8</b>
2.1 Tensores Escalares e Vetoriais . . . . .	8
2.2 Tensores de Primeira Ordem e Superiores . . . . .	10
2.3 Tensor Métrico . . . . .	11
2.4 Derivada Covariante e Símbolos de Christoffel . . . . .	13
2.5 A Geodésica . . . . .	16
2.6 O Tensor de Curvatura . . . . .	18
<b>3 O Espaço-tempo da Relatividade Geral</b>	<b>25</b>
3.1 Espaço Pseudo-Riemanniano . . . . .	26
3.2 Princípio da Equivalência . . . . .	28
3.3 Potencial Gravitacional . . . . .	29
3.4 Equação da Relatividade Geral . . . . .	31
3.5 Equação da Relatividade Geral para Campos Fracos: Equação de Poisson .	32
3.6 Solução de Schwarzschild . . . . .	33
<b>4 Novas Possibilidades com a Solução de Schwarzschild</b>	<b>36</b>
4.1 O Periélio de Mercúrio . . . . .	36
4.2 Curvatura da Luz . . . . .	39
Conclusões	42
Referências Bibliográficas	43

# Agradecimentos

Meu sinceros agradecimentos ao prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira, pela paciência em me corrigir e disposição para ajudar.

À minha família, pelo apoio contínuo e incentivo. E também aos meus amigos, que me auxiliaram nesta difícil jornada da graduação.

# Resumo

A teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein, difere da Relatividade Restrita por incorporar o campo gravitacional na teoria e considerá-la essencialmente uma questão de geometria. A Relatividade Geral provê as leis de gravitação e sua relação com outras forças da natureza. Assim, ela deve ser suficiente para, em um limite apropriado, reduzir-se à Relatividade Restrita e gerar a teoria de Newton para a gravitação. Este trabalho tem como objetivo obter as equações da Relatividade Geral, e encontrar uma solução particular para estas equações no espaço vazio que envolve um corpo maciço esfericamente simétrico. Com esta solução, conhecida como solução de Schwarzschild, dois resultados condizentes com os experimentais serão obtidos: o avanço do periélio de Mercúrio e a curvatura da luz.

**Palavras chave:** Relatividade Geral, Solução de Schwarzschild, Gravitação de Newton, Periélio de Mercúrio, Curvatura da Luz.

# Introdução

O homem sempre desejou viajar no tempo. Voltar ao passado permitiria corrigir erros cometidos e mudar acontecimentos, enquanto que ir para o futuro possibilitaria antecipar eventos. No entanto, acredita-se que viagens no tempo sejam impossíveis de acordo com as teorias existentes.

Gosto de pensar que o céu é uma máquina do tempo. Quando olho para os pequenos pontos brilhantes que julgo serem estrelas, estou olhando, na verdade, para aquelas que já *foram* estrelas. Algumas continuam lá, queimando seu combustível. Outras, já explodiram há milhões de anos e ainda não ficamos sabendo.

Acontece que a maior velocidade possível para uma informação viajar no espaço é a da luz. O termo informação, aqui, refere-se à onda eletromagnética - a própria luz. No entanto, poderia se referir à interação entre duas cargas elétricas (que se dá pela interação pelo campo elétrico): se a distância entre elas for muito grande, qualquer perturbação na carga não será percebida instantaneamente pela outra porque a transmissão da informação não é instantânea. Interações desse tipo são estudados pela belíssima teoria da Eletrodinâmica Relativística.

Se o Sol explodisse, somente perceberíamos depois de 8 minutos, que é o tempo que a luz demora para percorrer a distância do Sol até a Terra. A estrela mais próxima de nós, a Próxima Centauri, está distante de *apenas 4,22 anos luz*, ou  $4 \times 10^{13} km$ . Qualquer acontecimento na estrela será percebida por nós depois de mais de 4 anos.

Portanto, quando olho o céu na verdade estou diante do passado do Universo. Mais do que isso, estou olhando para a *posição errada* dos astros.

O ano de 2015 foi o *Ano Internacional da Luz*, porque coincide com a data de algumas descobertas científicas envolvendo a luz: em 1015, o árabe Ibn Al-Haytham divulgou suas importantes observações sobre a óptica; em 1815, o francês Augustin-Jean Fresnel propôs o comportamento ondulatória da luz; em 1865, James Clerk Maxwell desenvolveu toda a teoria eletromagnética da luz; Einstein publicou seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico em 1905 e dez anos depois divulgou sua pesquisa em Relatividade Geral.

A luz é, sem dúvida, preciosa para o ser humano. Além de manter a vida no planeta, sempre motivou cientistas do mundo todo a pesquisarem seus efeitos, e alguns fenômenos físicos são perceptíveis por causa dela. Em especial, a curvatura do espaço. Em 1905 Einstein já havia divulgado seu interesse na Relatividade Restrita, que propõe uma nova interpretação para o movimento de partículas. Mas somente seu trabalho de 1915 que havia incorporado a gravidade à teoria, chamando-se Relatividade Geral.

Com a nova formulação matemática foi possível prever que a luz sofreria desvios da sua trajetória original quando transitasse próximo a corpos com massa muito grande. Em 1919, a cidade de Sobral, no Ceará, foi palco de observações astronômicas que comprovaram que a luz sofre uma pequena deflexão quando passa próxima ao Sol.

Quando descobri que além de ver o passado olho para a posição errada das estrelas, fiquei ainda mais fascinado com o Universo. Por isso, escolhi a Relatividade Geral como

tema do meu Trabalho de Conclusão de Curso. Este texto não é somente um requerimento para a conclusão da minha graduação, mas uma necessidade interior de conhecer um pouco mais aquilo que me fascina.

Neste trabalho, portanto, apresentarei as ferramentas matemáticas fundamentais da Relatividade Geral. No primeiro capítulo, destacarei as divergências entre a mecânica de Newton e a Relatividade Restrita e Geral, além de descrever o princípio da equivalência. Devido à curvatura do espaço é necessário o uso de tensores, assunto que será abordado no segundo capítulo. No capítulo 3, as equações da Relatividade Geral serão demonstradas e discutidas, bem como a solução de Schwarzschild, que consiste em um corpo maciço esfericamente simétrico na ausência de campo, e a Lei de Newton para a Gravitação. No último capítulo, dois resultados teóricos que concordam com as observações experimentais serão apresentados: o avanço no periélio de Mercúrio e a curvatura da luz.

# Capítulo 1

## A Necessidade de uma Nova Teoria

Sem dúvida, o *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* é uma das maiores obras da ciência. Apesar de ter sido publicada entre os séculos XVII e XVIII, é uma teoria completa com diversas aplicações no cotidiano. Por exemplo, quando se deseja colocar satélites em órbita, deve-se utilizar a teoria newtoniana para calcular a velocidade de escape, os efeitos de rotação do planeta e mais outros parâmetros.

É uma teoria tão poderosa, que permitiu aos astrônomos desses séculos descrever a órbita dos planetas do sistema solar. Mais do que isso, ela reproduzia as leis planetárias de Johannes Kepler com precisão. No entanto, observações mostraram que os planetas não apresentavam órbitas fixas, ou seja, o eixo de suas órbitas era alterado a cada revolução dos planetas em relação ao Sol. O periélio da órbita de Mercúrio, por exemplo, avança 40 segundos de arco por século (algo próximo de  $0,1^\circ$  graus). Vênus também apresenta o mesmo fenômeno, mas seu periélio avança 9 segundos de arco, enquanto que o da Terra avança 5 segundos de arco a cada século [1]. É um fenômeno inexplicável pelas leis de Newton, mas explicado (e calculado) pela Relatividade Geral.

Situações do cotidiano são muito bem descritas pela mecânica de Newton. Entretanto, quando se deseja descrever movimentos com velocidades próximas à da luz, surgem fenômenos que não são explicáveis pela teoria do século XVII.

Tenha em mente que as leis de Newton são válidas. As condições em que deixam de funcionar são impossíveis para qualquer corpo que possua massa na superfície da Terra (velocidades próximas à da luz). A teoria da Relatividade Geral não substitui a de Newton, pelo contrário, fazendo-se aproximações corretas a teoria de Einstein reduz-se à newtoniana.

### 1.1 A Mecânica Newtoniana e a Relatividade Restrita

Um evento significa algum acontecimento em uma determinada região do espaço e do tempo. Matematicamente, é um ponto no espaço e um instante no tempo. Tudo o que acontece no Universo é uma série de eventos [2].

Considere dois ou mais observadores com relógios sincronizados que observam o movimento de um corpo, um carro por exemplo, que parte do repouso no semáforo. Se conhecessem todas as informações a respeito do movimento do automóvel, afirmariam que este chegou ao seu destino no mesmo horário para todos os observadores. Além disso, se um deles possuísse movimento relativo ao carro, ainda assim concordariam com



o horário marcado em seus relógios.

Na mecânica Newtoniana, o que relaciona um evento em um referencial com outro que pode estar se movimentando em relação ao primeiro são as *transformações de Galileu*, em que a coordenada  $x'$  refere-se ao referencial que está se movimentando -o carro.

$$x' = x - vt \tag{1.1}$$

$$y' = y \tag{1.2}$$

$$z' = z \tag{1.3}$$

$$t' = t . \tag{1.4}$$

Observadores sempre concordarão com o tempo de determinado evento se seus relógios estiverem sincronizados. Em outras palavras, o tempo é absoluto e vale para qualquer referencial.

No entanto, Einstein introduziu em 1905 a Relatividade Restrita que alterou o conceito de espaço e tempo, que agora são relativos aos referenciais. Estando um referencial em movimento relativo a outro, digamos a velocidade  $v$ , um evento poderá ser descrito pelos referenciais se respeitar a *transformação de Lorentz*:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.5}$$

$$y' = y \tag{1.6}$$

$$z' = z \tag{1.7}$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2}x \right) , \tag{1.8}$$

em que  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . O tempo não é mais igual para os referenciais; quanto maior a velocidade relativa  $v$ , mais diferente será a percepção do tempo e do espaço.

Além disso, a mecânica das partículas também foi alterada. Se fosse feita uma análise clássica do movimento do automóvel descrito anteriormente, o observador inerte na calçada perceberia a velocidade da luz emitida pelo carro como sendo  $c + v$ . A Relatividade Restrita possui de imediato dois postulados que alteram a descrição do movimento.

O primeiro postulado da Relatividade Restrita dita que as leis da física são as mesmas para todos os referenciais. O segundo diz que a velocidade da luz é constante para qualquer referencial e tem valor  $c$ . Por isso, o observador parado na calçada diz que a velocidade da luz é somente  $c$ , independente de quão rápido o carro esteja.

Mas o que comprova que tais postulados realmente funcionam? Quando partículas se movimentam com velocidades muito próximas à da luz, surgem dois fenômenos relativísticos: a *dilatação do tempo* e a *contração da distância*. Partículas elementares instáveis chamadas *múon* são formadas na atmosfera terrestre pela interação da radiação cósmica com os átomos dos gases. Tais partículas possuem tempo de decaimento de  $2,2\mu s$ , medido por um referencial inerte em relação à elas, e caem em direção à Terra com uma velocidade de  $0,998c$ . Classicamente, a distância percorrida por essas partículas antes de desintegrarem é de  $650m$ . No entanto, experimentos mostram que um grande número de múons são encontrados na Terra .

Quando caem com uma velocidade próxima à  $c$ , o tempo medido por nós é dilatado de acordo com a expressão:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{1.9}$$

No nosso referencial, o tempo de decaimento das partículas aumentará quase 8 vezes, permitindo que os múons percorram quase  $5km$  antes de decaírem em elétrons.

Em 1976, o Conselho Europeu para Pesquisa Nuclear (CERN) acelerou múons em um grande acelerador de partículas, de forma que atingiram velocidade de  $0,9994c$ . Os elétrons produzidos pelo decaimento dos múons foram detectados pelos equipamentos, permitindo aos cientistas determinarem que o tempo de vida dessas partículas elementares havia aumentado em quase 30 vezes [2].

## 1.2 O Princípio da Equivalência

Além da divergência nas noções de espaço e tempo, Einstein posteriormente incorporou a gravidade à teoria Restrita - que agora se chama Relatividade Geral, e modificou o conceito de gravitação estabelecido por Newton, conhecida como Lei da Gravitação:

$$\vec{F} = \frac{GM_g m_g}{r^2} \hat{r},$$

em que  $G$  é a constante da gravitação universal,  $M_g$  e  $m_g$  são as massas gravitacionais dos corpos separados por uma distância  $r$ .

De acordo com a lei de Newton, a aceleração gravitacional, e portanto a força de atração, surge diretamente da interação entre corpos que possuam massa gravitacional, isto é, a quantidade de matéria que está sujeita ao campo gravitacional. A teoria da Relatividade Geral de Einstein difere-se da teoria de Newton por não considerar a gravidade como uma força de atração entre corpos, mas sim a consequência da deformação espaço-temporal causada pela presença de um corpo [3].

Para compreender a teoria de Einstein, é necessário distinguir as massas gravitacional e inercial que existem na mecânica de Newton. No primeiro volume do *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de Isaac Newton, define-se massa como: *uma quantidade de matéria é a medida da mesma, oriunda conjuntamente da sua densidade e grandeza*<sup>1</sup> [4]. Ainda na mesma definição, Newton escreve que *é pela inércia da matéria que todo corpo dificilmente sai de seu estado de repouso ou de movimento*. Quando se deseja empurrar um objeto, é necessário imprimir uma força sobre ele; quanto maior a massa, maior a força necessária. Desta forma, diz-se que a massa desse corpo é inercial.

Se o mesmo objeto for posicionado a uma certa altura e então solto, de forma que cai em direção ao centro da Terra, a massa não impede ou dificulta o movimento. Se as dimensões do corpo forem alteradas, de modo que seu peso também o é, o tempo de queda continua igual. Diz-se que uma massa é gravitacional quando interage com um campo gravitacional, e desta interação surge uma força de atração.

Imagine um objeto dentro de um elevador sobre a superfície da Terra e que está sujeita ao campo gravitacional, como ilustra a Figura 1.1. Quando está parado, uma força de atração o puxa em direção ao centro do planeta - a força de atração dada por

$$\vec{F} = m_g \vec{g}, \tag{1.10}$$

onde  $\vec{g} = \frac{GM_g}{r^2} \hat{r}$ . Agora, considere uma situação hipotética de um elevador com outro corpo de características semelhantes que está em algum lugar do universo em que não há campo gravitacional. Inicialmente, estará flutuando, mas quando o elevador é acelerado

---

<sup>1</sup>O termo *grandeza* refere-se às dimensões do corpo.

verticalmente com  $\vec{a}$ , que é igual em módulo à  $\vec{g}$ , o corpo é empurrado contra o chão da cabine e experimenta uma força semelhante a daquele que estava sobre a Terra, isto é,

$$\vec{F} = m_i \vec{a} . \quad (1.11)$$

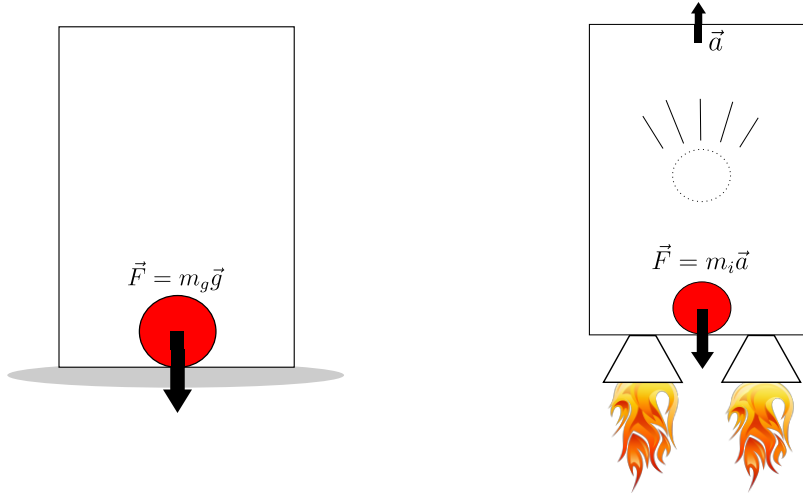


Figura 1.1: Figura esquemática ilustrando que objetos idênticos na presença de um campo gravitacional ou se movimentando aceleradamente experimentam a mesma força.

Como não há campo, a força é proporcional à massa inercial  $m_i$  do corpo. Este experimento mental é conhecido como Elevador de Einstein e leva à conclusão de que é impossível distinguir entre forças de atração gravitacional e forças que surgem com o movimento [2].

Uma vez que as forças experimentadas pelos corpos são idênticas,

$$\begin{aligned} m_g \vec{g} &= m_i \vec{a} \\ |\vec{g}| &= |\vec{a}| \\ m_g &= m_i . \end{aligned} \quad (1.12)$$

Einstein dizia que a ideia de que as massas gravitacionais e inerciais são iguais foi o pensamento mais feliz de sua vida. Assim, o Princípio da Equivalência diz que forças gravitacionais e inerciais são completamente equivalentes sob a perspectiva física, bem como suas respectivas massas, possuem a mesma natureza e são impossíveis de se distinguir realizando experimentos físicos.

Ao incidir um feixe de luz atravessando de uma parede à outra da cabine do elevador, como mostra a Figura 1.2, um observador dentro daquele que está parado sobre a superfície da Terra verá o feixe descrevendo uma trajetória retilínea. No entanto, quando este é acelerado verticalmente com  $-\vec{g}$ , o raio descreve uma trajetória curvilinear. De acordo com o princípio proposto por Einstein, a mesma alteração na trajetória deve acontecer no estado que está sob ação somente do campo gravitacional, uma vez que as acelerações são iguais. Assim, para que essa trajetória seja curvilinear, o espaço deve ser curvo.

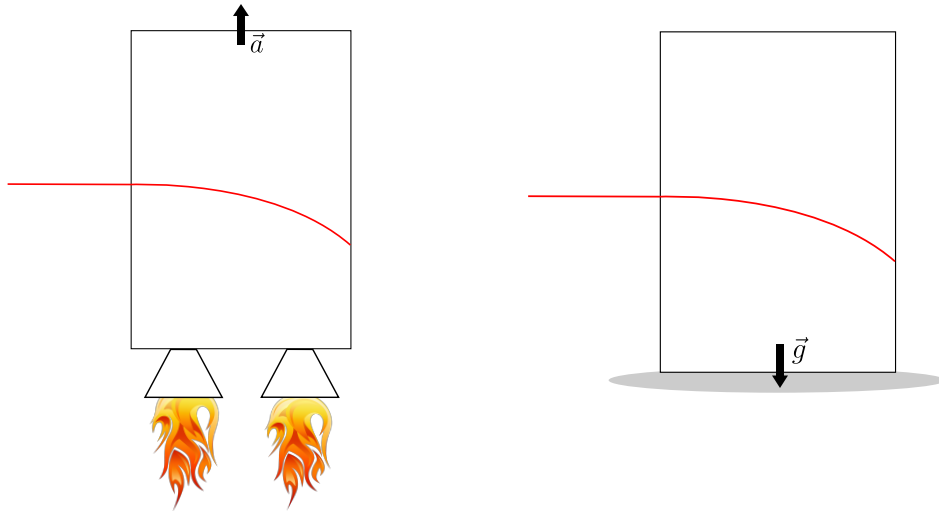


Figura 1.2: Segundo o princípio da equivalência, um feixe de luz deve apresentar a mesma trajetória quando sujeito à aceleração inercial  $|\vec{a}| = |\vec{g}|$  e ao campo gravitacional.

Finalmente, considere uma cama elástica. Ao se colocar uma melancia no centro, observa-se que devido à massa da fruta haverá deformação do plano espacial formado pelo tecido. Ao se arremessar sobre a superfície uma bola de tênis, esta não fará uma trajetória retilínea, mas será atraída para o centro devido à curvatura que a melancia causou. Através do Princípio da Equivalência, Einstein atribuiu tal fenômeno de atração à curvatura do plano. Em outras palavras, a gravitação não é uma força, mas uma questão de geometria do espaço curvo.

Devido à curvatura do espaço é necessário o uso de tensores, assunto que será abordado no próximo capítulo. Os tensores permitem o armazenamento de uma maior quantidade de informações ou coordenadas. Além disso, eles são invariantes diante uma transformação de Lorentz, respeitando, assim, o primeiro postulada da Relatividade Restrita. O cálculo tensorial necessário para a compreensão deste trabalho será desenvolvida no capítulo 2. No capítulo 3, as equações da Relatividade Geral serão demonstradas e discutidas, bem como a solução de Schwarzschild, que consiste em um corpo maciço esfericamente simétrico na ausência de campo, e a Lei de Newton para a Gravitação. No último capítulo, dois resultados teóricos que concordam com as observações experimentais serão apresentados: o avanço no periélio de Mercúrio e a curvatura da luz.

# Capítulo 2

## Cálculo Tensorial

A Relatividade Geral recebe este nome por englobar a gravidade e ser invariante ao sistema de coordenadas. Para expressar as leis físicas em qualquer sistema, usa-se equações tensoriais. Qualquer quantidade física, por exemplo a velocidade de uma partícula, é determinada por um conjunto de valores numéricos que dependem do sistema de coordenadas. Compreender a forma que esses valores mudam diante de uma transformação de coordenadas leva ao conceito de tensor, que será abordado neste capítulo.

### 2.1 Tensores Escalares e Vetoriais

Um escalar é uma quantidade física determinada somente por um valor que independe das coordenadas de um sistema. A massa de um corpo, por exemplo, é invariante à transformação de eixos, bem como a carga de uma partícula.

O exemplo mais simples de um vetor é o deslocamento entre dois pontos em um dado sistema de coordenadas, digamos de um ponto **A** para o ponto **B**. Para representar as componentes de um vetor, usa-se a notação  $x^i$ , em que  $i = 1, 2, 3$ . Assim,  $x^1$  corresponde à componente  $x$ ,  $x^2$  à  $y$  e  $x^3$  à componente correspondente à  $z$  do vetor, para um espaço Euclidiano [5].

Considere, por exemplo, um vetor  $\vec{V} = V^1\hat{e}_1 + V^2\hat{e}_2$  referenciado a um sistema de coordenadas oblíquo de vetores base  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  (isto é, não são normais), como mostrado na Figura 2.1. As componentes  $V^1$  e  $V^2$  são chamadas de *Contravariantes*, pois têm mesma direção que os vetores base  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ .

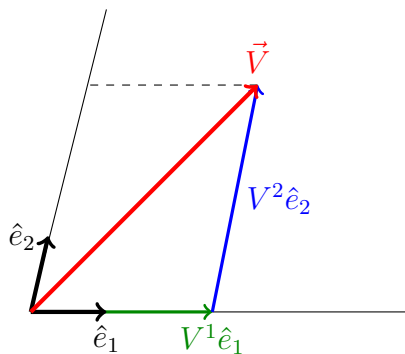


Figura 2.1: O vetor  $\vec{V}$  é formado pela soma das suas componentes  $V^1$  e  $V^2$ .

O vetor  $\vec{V}$  pode ser escrito, então, como

$$\vec{V} = V^i \hat{e}_i ,$$

onde o somatório sobre índices repetidos está implícito<sup>1</sup>. O vetor  $\vec{V}$  também pode ser formado pelas projeções sobre as direções dos vetores base, sendo estas componentes chamadas de *Covariantes*, como na Figura 2.2:

$$V_i = \vec{V} \cdot \hat{e}_i$$

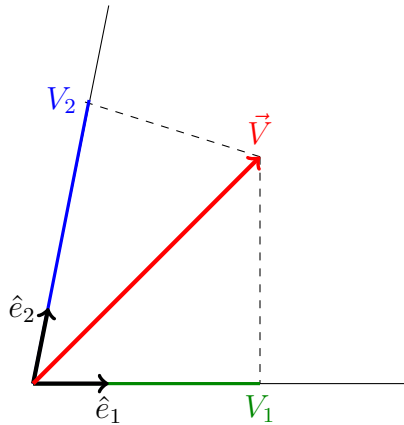


Figura 2.2: As componentes  $V_1$  e  $V_2$  do vetor  $\vec{V}$  são as projeções nas direções dos vetores base  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ . Note que a soma vetorial das componentes não resulta no próprio vetor.

Para compreender o que são tensores, imagine uma barra de secção transversal retangular que está apoiada nos seus extremos e submetida à uma força externa  $\vec{F}$ , como ilustrado na Figura 2.3.

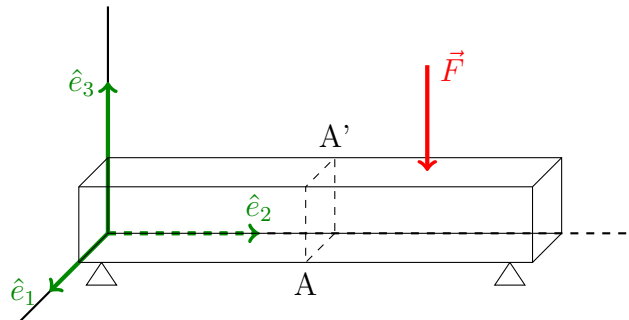


Figura 2.3: Uma força  $\vec{F}$  sobre uma barra tende a separá-la. A intensidade dessa força varia em todas as direções conforme as características físicas do material.

É possível perceber que a intensidade da força que tende a quebrar a barra será diferente para cada ponto. Seja o corte  $AA'$  perpendicular à direção  $\hat{e}_2$ . Cada elemento

<sup>1</sup>Para poupar a escrita, Einstein convencionou que quando há índices mudos repetidos (os índices que indicam a coordenada, isto é,  $i = 1, 2, 3$  correspondem às coordenadas  $x, y$  e  $z$  respectivamente, são chamados de mudos porque podem ser trocados por outra letra sem alterar o significado) o somatório sobre eles está implícito.

de área do corte estará sujeito à uma tensão diferente, que, no total, tenderá a separar as duas faces. Assim, a tensão  $\vec{T}_2$  em um ponto P da secção será um vetor de componentes  $T_{21}$ ,  $T_{22}$  e  $T_{23}$ , que variam conforme as propriedades físicas do material [3].

Se outros cortes fossem feitos, normais às direções  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_3$  que passam pelo mesmo ponto P, as tensões  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_3$  teriam também componentes  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  e  $T_{13}$  e  $T_{31}$ ,  $T_{32}$  e  $T_{33}$ .

As nove componentes podem ser arranjadas em uma matriz, em que cada elemento  $T_{ij}$  corresponde à componente  $ij$  do tensor de tensão T:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} .$$

A representação matricial permite trabalhar com algumas propriedades que simplificam a escrita do tensor. Uma delas é a diagonalização da matriz, em que todos os elementos fora da diagonal principal se tornam nulos. Pode-se representar matrizes em qualquer base que se deseje; escolhendo-se uma base específica, é possível representar uma matriz como uma combinação linear dos seus autovalores, desde que estes sejam linearmente independentes.

Enquanto um vetor pode apresentar três informações no ponto P (módulo, direção e sentido), algumas grandezas físicas precisam de mais informações para serem representadas, como no exemplo citado acima e na curvatura do espaço. Assim, o tensor é uma entidade matemática que consegue armazenar mais informações.

Escalares e vetores tratam-se, na verdade, de tensores de ordem zero e um, respectivamente.

## 2.2 Tensores de Primeira Ordem e Superiores

Como foi dito anteriormente, um vetor nada mais é que o deslocamento orientado entre dois pontos **A** e **B**. Digamos que estes pontos sejam muito próximos, de forma que o ponto **A** corresponda as coordenadas  $x^i$  e **B** às coordenadas  $x^i + dx^i$ . As componentes do vetor **AB** correspondem à  $dx^i$ . Essa definição é válida para qualquer sistema de coordenadas, sejam curvos ou não, com um número arbitrário de dimensões  $N$ .

Para construir um vetor finito  $v^i$ , considere uma curva suave que passa pelos pontos **A** e **B**. Essa curva será determinada por  $n$  funções de um parâmetro escalar  $\lambda$  [3]:

$$x^i = f^i(\lambda) . \quad (2.1)$$

Se os pontos **A** e **B** correspondem aos valores  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ , então o vetor tangente  $v^i$  à curva tem componentes

$$v^i = \frac{dx^i}{d\lambda} . \quad (2.2)$$

Se a análise fosse feita em outro sistema de coordenadas  $x^{i'}$ , as componentes do vetor seriam escritos nesse novo sistema segundo a equação

$$x^{i'} = f^{j'}(x^j) . \quad (2.3)$$

Diferenciando esta equação em relação à  $x$ , encontra-se

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j . \quad (2.4)$$

A equação (2.4) dá as componentes  $dx^{i'}$  em um sistema de coordenadas  $x^{i'}$  do deslocamento infinitesimal  $dx^j$  no outro sistema.

Derivando a equação (2.4) em relação ao mesmo parâmetro  $\lambda$  (o escalar é invariante em relação às coordenadas), obtêm-se

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} v^j . \quad (2.5)$$

Assim, um vetor *contravariante* é aquele em que suas  $N$  componentes  $a^i$  se transformam para outro sistema de coordenadas segundo

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} a^j . \quad (2.6)$$

De forma semelhante, um vetor *covariante* é aquele que tem suas componentes  $b_i$  transformadas de acordo com

$$b_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} b_j . \quad (2.7)$$

Note que as componentes contravariantes de um vetor possuem índices sobrescritos, enquanto que os covariantes possuem índices subscritos.

No caso mais geral, tem-se um tensor  $T_{l_1 l_2 l_3 \dots}^{k_1 k_2 k_3 \dots}$ . Sejam  $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots, a_{k_p}$   $p$  vetores covariantes e  $b^{l_1}, b^{l_2}, b^{l_3}, \dots, b^{l_q}$   $q$  vetores contravariantes, então

$$T_{l_1 l_2 l_3 \dots}^{k_1 k_2 k_3 \dots} \cdot a_{k_1} a_{k_2} \dots b^{l_1} b^{l_2} \dots = \text{escalar} , \quad (2.8)$$

de forma que tensores contravariantes se transformam segundo

$$T^{i' j' k' \dots N'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\mu} \dots \frac{\partial x^{N'}}{\partial x^N} T^{\alpha \mu \dots N} , \quad (2.9)$$

e tensores covariantes se transformam de acordo com

$$T_{i' j' k' \dots N'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{j'}} \dots \frac{\partial x^N}{\partial x^{N'}} T_{\alpha \mu \dots N} . \quad (2.10)$$

A transformação de tensores mistos é a junção das transformações descritas pelas equações (2.9) e (2.10).

## 2.3 Tensor Métrico

De acordo com a ilustração da Figura 2.4, o vetor  $d\vec{s}$  pode ser escrito como a soma das componentes  $dx^1$  e  $dx^2$ , de forma que para calcular o módulo  $ds$  pode-se aplicar o teoremas de Pitágoras:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 . \quad (2.11)$$

Em um caso tridimensional, é necessário a adição do quadrado do elemento de comprimento da terceira componente,  $(dx^3)^2$ . Assim, o elemento  $ds^2$  pode ser escrito na forma de componentes como

$$ds^2 = dx^i dx^i = \delta_{ij} dx^i dx^j , \quad (2.12)$$

em que o termo  $\delta_{ij}$  é chamado de Delta de Kronecker e tem valor 1 quando  $i = j$  e 0 quando  $i \neq j$ .



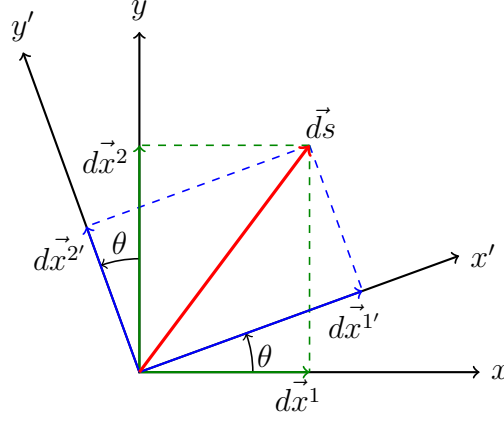


Figura 2.4: Rotação dos eixos de coordenadas por um ângulo  $\theta$  exige que o vetor  $d\vec{s}$  seja transformado para o novo sistema.

Caso o sistema de coordenadas seja alterado, as componentes dos vetores  $dx^i$  são transformadas de acordo com (2.6), e, portanto, a equação (2.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$ds^2 = \delta_j^i \frac{dx^i}{dx^{k'}} dx^{k'} \frac{dx^j}{dx^{l'}} dx^{l'} = g_{k'l'} dx^{k'} dx^{l'} , \quad (2.13)$$

em que o termo

$$g_{k'l'} = \delta_j^i \frac{dx^i}{dx^{k'}} \frac{dx^j}{dx^{l'}} \quad (2.14)$$

é o *tensor métrico*.

O tensor métrico é uma “ferramenta” que indica como calcular a distância entre dois pontos em algum espaço. No espaço euclidiano de coordenadas cartesianas, tal tensor vale 1 quando  $i = j$  e 0 quando  $i \neq j$ , e a equação (2.13) resulta na soma do quadrado das componentes  $dx^i$ . No entanto, o tensor assume um valor diferente quando é escrito em coordenadas esféricas, por exemplo [6]: para representar o mesmo espaço em coordenadas esféricas, as coordenadas  $x^1$ ,  $x^2$  e  $x^3$  do sistema cartesiano devem ser escritas em função de  $(r, \theta, \phi)$ , isto é,  $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ :

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin(\theta) \cos(\phi) = x^{1'} \sin(x^{2'}) \cos(x^{3'}) \\ x^2 &= r \sin(\theta) \sin(\phi) = x^{1'} \sin(x^{2'}) \sin(x^{3'}) \\ x^3 &= r \cos(\theta) = x^{1'} \cos(x^{2'}) , \end{aligned}$$

A Delta de Kronecker que aparece no tensor métrico limita o trabalho de calcular as derivadas somente para os casos  $i = j = 1, 2$  e  $3$ . Quaisquer outros valores, resulta em zero. Além disso, este tensor é simétrico, de forma que  $g_{kl} = g_{lk}$ . Assim,

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & g_{12} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} = 0 \\ g_{13} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} = 0 & g_{21} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} = 0 \\ g_{22} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & g_{23} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} = 0 \\ g_{31} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} = 0 & g_{32} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} = 0 \\ g_{33} &= \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{aligned}$$

Calculando as respectivas derivadas, têm-se:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \\ g_{22} &= (x^1)^2 = r^2, \\ g_{33} &= (x^1)^2 \text{sen}^2(x^2) = r^2 \text{sen}^2(\theta). \end{aligned}$$

E, portanto, os elementos do tensor métrico podem ser arranjados em uma matriz:

$$g_{kl} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, o elemento  $ds^2$  será

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 = dr^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta)(d\phi)^2.$$

No início da seção anterior foi definido a curva (2.1) entre dois pontos **A** e **B**. Para calcular o comprimento  $L$  desta curva, deve-se resolver a integral

$$L = \int_A^B (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (2.15)$$

em que os termos  $\dot{x}^i$  correspondem à  $\frac{dx^i}{d\lambda}$ .

A menor curva que liga os dois pontos é chamada de Geodésica, e será abordada nas próximas seções.

## 2.4 Derivada Covariante e Símbolos de Christoffel

Para escrever a equação (2.14) em um outro sistema de coordenadas  $x^{i'}$ , deve-se transformá-lo de acordo com a equação (2.10):

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl}. \quad (2.16)$$

Derivando esta expressão em relação às coordenadas  $x^{i'}$ , obtêm-se:

$$\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{m'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{m'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{m'}} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \quad (2.17)$$

Fazendo a mesma diferenciação para os tensores  $g_{m'l'}$  e  $g_{j'm'}$ , têm-se:

$$\frac{\partial g_{m'l'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial g_{j'm'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} g_{kl} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \quad (2.19)$$

Somando as equações (2.17) e (2.18) e subtraindo a equação (2.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{m'}} + \frac{\partial g_{m'l'}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial g_{j'm'}}{\partial x^{i'}} &= \left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{m'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \right) g_{kl} \\ &+ \left( \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{m'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} - \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \right) g_{kl} \\ &+ \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para simplificar a expressão, define-se o símbolo

$$\Gamma_{jmi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} \right), \quad (2.21)$$

sendo  $\Gamma_{jmi}$  conhecido como *Símbolo de Christoffel do primeiro tipo*<sup>2</sup>. Observe que os índices que acompanham o símbolo estão na mesma sequência que os da última derivada dentro do parênteses [5].

Com algumas manipulações e substituindo o Símbolo de Christoffel, a equação (2.20) resulta em

$$\Gamma_{j'm'i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \Gamma_{kln} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{m'} \partial x^{j'}} g_{kl}. \quad (2.22)$$

Derivando-se a equação acima, define-se o *Símbolo de Christoffel do segundo tipo* como

$$\Gamma_{jk}^i = g^{il} \Gamma_{jkl}, \quad (2.23)$$

e a expressão para a segunda derivada como sendo

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial x^{m'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial x^s}{\partial x^{p'}} \Gamma_{j'm'}^{p'} - \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \Gamma_{kl}^s. \quad (2.24)$$

O termo  $g^{il}$  é chamado de tensor recíproco do métrico, de tal forma que

$$g^{il} \cdot g_{lk} = \delta_k^i. \quad (2.25)$$

Além disso, a derivada de um vetor base covariante em relação às coordenadas é dado por [6]:

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \hat{e}_k. \quad (2.26)$$

Como exemplo, calcular-se-á os Símbolos de Christoffel do segundo tipo em coordenadas esféricas. Na seção 1.1, calculou-se o tensor métrico:

$$g_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e, de acordo com a definição (2.25), o tensor recíproco é

$$g^{pl} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2}(\theta) \end{bmatrix}.$$

Segundo a equação (2.23), os símbolos de Christoffel de segundo tipo são

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}), \quad (2.28)$$

e devido à dependência com o tensor métrico, o cálculo se restringe somente para  $i = l = 1, 2, 3$ , pois qualquer elemento fora da diagonal principal do tensor recíproco é nulo. Para o caso  $l = 1$ , os únicos coeficientes diferentes de zero são:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad (2.29)$$

---

<sup>2</sup>Por conveniência, as derivadas dos tensores métricos serão omitidas, mas para identificar sobre qual componente  $m, i$  ou  $j$  a derivada está sendo realizada, coloca-se uma vírgula antes da coordenada. Dessa forma, o primeiro termo do Símbolo de Christoffel do primeiro tipo é  $g_{mi,j}$

e

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\theta) .$$

Para  $l = 2$ , os coeficientes não nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} , \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta) \cos(\theta) . \end{aligned}$$

E, para  $l = 3$ :

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} , \quad (2.30)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot(\theta) . \quad (2.31)$$

Agora, considere um campo vetorial covariante  $\vec{V}$ , ou seja, para cada ponto  $x$  do espaço existe um vetor covariante  $\vec{V} = V^i \hat{e}_i$ . Assim, a variação de um ponto a outro do vetor pode ser definido como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \hat{e}_i + V^i \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} . \quad (2.32)$$

Ocorre que, mesmo um campo vetorial sendo constante, os vetores base geralmente não o são. Assim, deve-se somar à derivada parcial das componentes a derivada dos vetores base.

O último termo da equação (2.32) é reescrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} = \partial_j \hat{e}_i = \Gamma_{ij}^k \hat{e}_k , \quad (2.33)$$

e é interpretado como um fator de correção necessário devido à mudança dos vetores base.

Desta forma, a *derivada covariante das componentes covariantes do vetor*  $V_i$  assume a forma

$$\nabla_j V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^p V_p , \quad (2.34)$$

De forma semelhante, a *derivada covariante de um vetor contravariante*  $V^i$  é

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jp}^i V^p . \quad (2.35)$$

Note que em coordenadas cartesianas, o tensor métrico é constante e, portanto, o Símbolo de Christoffel é nulo por possuir dependência das derivadas desse tensor.

Como foi dito anteriormente, em um sistema de coordenadas oblíquas, isto é, em que os vetores base não são ortogonais entre si, é necessário levar em consideração a variação destes vetores em cada ponto do espaço. Considere o vetor posição em coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = x^i \hat{e}_i . \quad (2.36)$$

O tensor métrico nesse sistema é constante e vale 1. Pode-se estender o conceito de derivada covariante para o divergente, isto é, ao invés de se calcular as derivadas parciais de cada componente, calcula-se a derivada covariante. Em coordenadas cartesianas, tal mudança é indiferente, uma vez que os símbolos de Christoffel são nulos e a derivada

covariante é igual à derivada parcial. Assim, o divergente do vetor posição em coordenadas cartesianas é o número 3.

Considere agora o vetor posição em coordenadas esféricas

$$\vec{r} = r^i \hat{e}_i = r \delta_1^i \hat{e}_i . \quad (2.37)$$

(O vetor posição é a própria componente radial na direção  $\hat{r}$ ). Diferente do caso anterior, o divergente não é mais a derivada da componente radial em relação às demais componentes:

$$\nabla \cdot \vec{r} \neq \frac{\partial r^1}{\partial r^1} + \frac{\partial r^1}{\partial r^2} + \frac{\partial r^1}{\partial r^3} . \quad (2.38)$$

O resultado é o número 1. Entretanto, como escalares são invariantes na transformação de sistema de coordenadas, o divergente do vetor posição deveria ser 3, mesmo resultado calculado anteriormente. Portanto, deve-se levar em consideração as derivadas do tensor métrico, isto é, os símbolos de Christoffel.

$$\nabla \cdot \vec{r} = r^i_{;i} = \partial_i r^i + \Gamma^i_{ji} r^j = \partial_i (r \delta_1^i) + \Gamma^i_{ji} (r \delta_1^j) = \frac{\partial r}{\partial r} + r \Gamma^i_{1i} . \quad (2.39)$$

O símbolo de Christoffel  $\Gamma^1_{11} = 0$ , enquanto que  $\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$ . Desta forma, o divergente de  $\vec{r}$  em coordenadas esféricas é:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial r}{\partial r} + 2 \frac{r}{r} = 3 . \quad (2.40)$$

## 2.5 A Geodésica

A definição de geodésica está relacionada com o transporte paralelo de vetores ao longo de uma trajetória. Seja uma curva  $\gamma$  dada em função do parâmetro  $t$ , isto é,  $f^i(t)$ , e  $\vec{\lambda}_0$  um dado vetor em um ponto  $P_0$ . Assim, o vetor  $\vec{\lambda}$  será paralelo entre si ao longo de toda a curva se

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = 0 . \quad (2.41)$$

O vetor  $\vec{\lambda}$  pode ser escrito em função de vetores base covariantes:

$$\vec{\lambda} = \lambda^i \hat{e}_i , \quad (2.42)$$

e derivando-se em relação ao parâmetro  $t$ , resulta em

$$\frac{d\vec{\lambda}}{dt} = \frac{d(\lambda^i \hat{e}_i)}{dt} = \dot{\lambda}^i \hat{e}_i + \lambda^i \dot{\hat{e}}_i = 0 . \quad (2.43)$$

A derivada do vetor base pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{\hat{e}}_i = \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \partial_j \hat{e}_i \dot{x}^j .$$

Mas

$$\partial_j \hat{e}_i = \Gamma^k_{ij} \hat{e}_k$$

e, portanto, a equação (2.43) assume a forma

$$\left( \dot{\lambda}^i + \Gamma^i_{jk} \lambda^j \dot{x}^k \right) \hat{e}_i = 0 . \quad (2.44)$$

Note que os índices mudos foram alterados, mas sem alterar o procedimento matemático. As componentes  $\lambda^i$  do vetor transportado devem satisfazer a equação

$$\dot{\lambda}^i + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \dot{x}^k = 0 . \quad (2.45)$$

A geodésica no espaço Euclidiano é uma linha reta, caracterizada como a menor distância entre dois pontos. O que define uma linha reta é que todos os vetores tangentes sobre a curva permanecem paralelos. Assim, tais vetores devem respeitar a equação (2.45) [1].

Usando as mesmas ideias, define-se a *geodésica parametrizada* em um espaço Riemanniano  $N$ -dimensional a curva  $x^a(u)$  que satisfaz

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{du} \frac{dx^c}{du} = 0 . \quad (2.46)$$

No entanto, as equações diferenciais acima exigem  $2N$  condições para se determinar uma única solução. Um procedimento mais rápido é considerar a Lagrangeana  $L(\dot{x}^c, x^c)$  e resolver as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} = 0 . \quad (2.47)$$

Considerando a Lagrangeana

$$L(\dot{x}^c, x^c) = \frac{1}{2} g_{ab}(x^c) \dot{x}^a \dot{x}^b , \quad (2.48)$$

e derivando em relação aos termos  $\dot{x}^c$  e  $x^c$ , obtêm-se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} = \frac{1}{2} g_{ab} \delta_c^a \dot{x}^b + \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \delta_c^b = g_{cb} \dot{x}^b , \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^c} = \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b , \quad (2.50)$$

pois

$$\frac{\partial \dot{x}^a}{\partial \dot{x}^c} = \frac{\partial \frac{dx^a}{du}}{\partial \dot{x}^c} = \frac{\partial x^a}{\partial x^c} = \delta_c^a .$$

Portanto, as equações (2.47) são

$$g_{cb} \ddot{x}^b + \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{1}{2} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 . \quad (2.51)$$

Uma vez que  $\partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b = \frac{1}{2} \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b + \frac{1}{2} \partial_b g_{ca} \dot{x}^a \dot{x}^b$ , a equação (2.51) assume a forma

$$g_{cb} \ddot{x}^b + \Gamma_{cab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 . \quad (2.52)$$

Multiplicando pelo tensor recíproco  $g^{cb}$ , reescreve-se da seguinte forma:

$$\ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 . \quad (2.53)$$

Estas são as equações da curva que são solução das equações de Euler-Lagrange. Pode-se, ainda, introduzir uma quantidade  $K$  definida por [7]:

$$2K = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = \alpha , \quad (2.54)$$

em que  $\alpha$  é uma constante. Sendo  $u$  um parâmetro de afinidade, então a equação da geodésica se torna

$$\frac{\partial K}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0, \quad (2.55)$$

em que

$$2K = \alpha = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases}$$

dependendo se o vetor tangente é nulo, ou possui valor positivo ou negativo.

## 2.6 O Tensor de Curvatura

Considere uma superfície no espaço tridimensional. Para identificar qualquer ponto sobre a superfície, são necessárias duas coordenadas, digamos  $x^i$ , em que  $i = 1, 2$ , como mostrado na Figura 2.5:

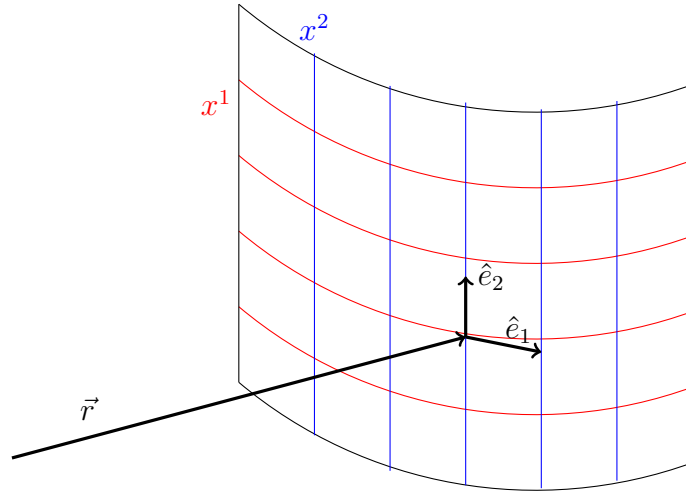


Figura 2.5: Considerando um espaço vetorial invariante, o vetor posição  $\vec{r}$  é função das coordenadas  $x^i$ , isto é,  $\vec{r}(x^1, x^2)$ .

Os vetores base covariantes são definidos como:

$$\hat{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}.$$

Note que tais vetores são tangentes às curvas e definem o plano tangente à superfície, além disso, são ortogonais entre si e entre o versor normal, de forma que:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{n} = 0. \quad (2.56)$$

Com os vetores base, o tensor métrico é dado por:

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j, \quad (2.57)$$

enquanto que o tensor recíproco é dado pela relação (2.25), o que permite escrever:

$$\hat{e}^i = g^{ij} \hat{e}_j. \quad (2.58)$$

É possível estudar a taxa de variação de um vetor base com relação às coordenadas, de acordo com a equação (2.26):

$$\partial_j \hat{e}_i = \Gamma_{ij}^k \hat{e}_k .$$

Observe, entretanto, que a variação do vetor  $\hat{e}_1$  em relação à coordenada  $x^1$  não está no plano tangente inicial formado pelo vetor base. Isso acontece devido à curvatura, que faz o vetor  $\hat{e}_1$  mudar de direção em cada ponto da superfície, como mostra a Figura 2.6. Por causa disso, não é possível decompor a taxa de variação em função da base covariante, e a definição acima (equação (2.26)) não se aplica.

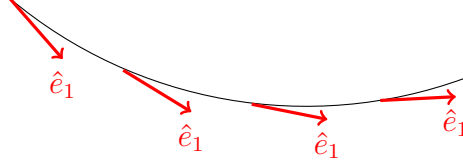


Figura 2.6: Visão superior da superfície da Figura 2.5; o vetor base  $\hat{e}_1$  muda de direção em cada ponto do espaço.

A derivada covariante de um vetor covariante é dada pela relação (2.34):

$$\nabla_j V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^p V_p . \quad (2.59)$$

Note que a derivada covariante dos vetores base covariantes no espaço Euclidiano é nula, pois o primeiro termo depois da igualdade é igual ao segundo termo, segundo a relação (2.26) [6].

Tratando-se, agora, de uma superfície curva, a derivada covariante não é nula, pois como descrito anteriormente, a taxa de variação dos vetores base não pode ser escrito em função dos vetores base covariantes, uma vez que estes mudam de ponto a ponto da superfície.

Multiplicando a equação (2.26) por um vetor base contravariante, obtêm-se:

$$\Gamma_{ij}^k \hat{e}^k = \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} , \quad (2.60)$$

e repetindo o procedimento para a equação (2.34):

$$\hat{e}^k \cdot \nabla_j \hat{e}_i = \hat{e}^k \cdot \frac{\partial \hat{e}_i}{\partial x^j} - \hat{e}^k \cdot \Gamma_{ij}^p \hat{e}_p . \quad (2.61)$$

Note que a relação acima é nula, pois

$$\hat{e}^k \cdot \hat{e}_p = \delta_p^k , \quad (2.62)$$

e o primeiro termo é igual ao segundo, devido a equação (2.60).

Para que o produto interno de dois vetores seja nulo, eles devem ser ortogonais entre si. Uma vez que os vetores  $\hat{e}^k$  descrevem o plano tangente à superfície, os vetores  $\nabla_j \hat{e}_i$  são proporcionais ao versor normal:

$$\nabla_j \hat{e}_i = R_{ji} \cdot \hat{n} \rightarrow R_{ji} = \hat{n} \cdot \nabla_j \hat{e}_i . \quad (2.63)$$

Observe que  $R_{ij}$  é um tensor, pois a derivada covariante é um tensor. O tensor  $R_{ij}$  é chamado de *tensor de Curvatura de Ricci*, ou somente *tensor de curvatura*. Tal



tensor é simétrico, e multiplicando pelo tensor métrico contravariante, o índice  $i$  sobe,  $R_j^i$ . Contraíndo os índices,  $R_i^i$  é chamado de *escalar de curvatura*.

O vetor normal é definido pelas seguintes relações:

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1 , \quad (2.64)$$

$$\hat{n} \cdot \hat{e}_j = 0 . \quad (2.65)$$

Aplicando a derivada covariante na primeira, obtêm-se:

$$\nabla_j \hat{n} \cdot \hat{n} = 0 , \quad (2.66)$$

o que significa que o vetor resultante da derivada covariante está no plano tangente à superfície, e portanto, deve ser proporcional aos vetores base.

Realizando a derivada covariante da segunda expressão:

$$\nabla_i \hat{n} \cdot \hat{e}_j + \hat{n} \cdot \nabla_i \hat{e}_j = 0 \rightarrow \nabla_i \hat{n} \cdot \hat{e}_j = -R_{ij} . \quad (2.67)$$

Suponha que ainda não se sabe que a derivada covariante do vetor normal é proporcional aos vetores base. Pode-se escrevê-lo como uma componente proporcional ao vetor normal e outra proporcional aos vetores base:

$$\nabla_i \hat{n} = A \hat{n} + B \hat{e}_j . \quad (2.68)$$

Multiplicando ambos os lados pelo vetor normal:

$$0 = A + B \hat{e}_j \cdot \hat{n} , \quad (2.69)$$

enquanto que ao multiplicar pelo vetor base contravariante:

$$\hat{e}^k \cdot \nabla_i \hat{n} = 0 + B \delta_j^k . \quad (2.70)$$

O coeficiente  $B$  deve ser um tensor para manter a igualdade, digamos  $y_i^j$ . Então,

$$y_i^k = \hat{e}^k \cdot \nabla_i \hat{n} = -R_i^k \rightarrow \nabla_i \hat{n} = -R_i^j \hat{e}_j . \quad (2.71)$$

Como exemplo, considere uma esfera de raio  $r$ , como na Figura 2.7. São necessárias três coordenadas para representá-la, mas um ponto em sua superfície necessita de somente duas. Assim, para o cálculo do tensor de curvatura, usar-se-á coordenadas polares, em que  $x^1 = \theta$  e  $x^2 = \phi$ , e o tensor métrico será representado por uma matriz  $2 \times 2$ .

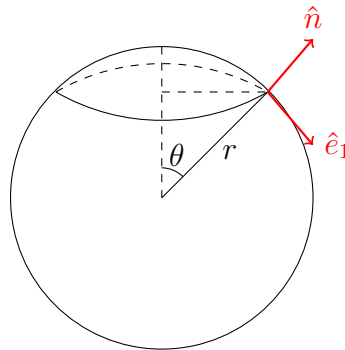


Figura 2.7: Superfície de uma esfera de raio  $r$ . O vetor  $\hat{e}_2$  está entrando no plano.

Os vetores  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  e  $\hat{n}$  são ortogonais entre si. O vetor  $\hat{n}$  é unitário, enquanto  $\hat{e}_1 = r\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2 = r \sin(\theta)\hat{e}_2$ .

O tensores métrico e recíproco em coordenadas esféricas foram calculados anteriormente, mas tratando-se de uma superfície, eles adquirem a forma:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & r^{-2} \sin^{-2}(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

O elemento de área é a raiz quadrada do determinante do tensor métrico, isto é:

$$\sqrt{g_{ij}} = r^2 \sin(\theta). \quad (2.74)$$

De acordo com a expressão (2.67), para encontrar o tensor de curvatura é necessário realizar a derivada covariante do vetor normal à superfície. Sendo este um vetor unitário, a derivada covariante torna-se a derivada parcial:

$$R_{ij} = -\hat{e}_i \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial x^j}. \quad (2.75)$$

A derivada de  $\hat{n}$  na em relação à  $x^1$  é um vetor unitário na direção de  $\hat{e}_1$ . Como  $\hat{n}$  tem um ângulo  $\theta$  em relação ao vetor  $\hat{e}_2$ , sua derivada resultará em uma componente  $\cos(\theta)$  ortogonal à  $\hat{e}_2$  e outra  $\sin(\theta)$  paralela. Assim, o tensor de curvatura escrito matricialmente tem a forma:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

O tensor  $R^i_j$  é:

$$R^i_j = g^{ij} R_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

O escalar de curvatura é invariante na superfície, isto é, em todos os pontos deve ter o mesmo valor. Ele é característica da superfície, e não do sistema de coordenadas. Assim, é o traço da matriz (2.77):

$$R = -\frac{2}{r}. \quad (2.78)$$

Além disso, o determinante da matriz (2.77) é invariante e conhecido como *curvatura de Gauss*.

Para uma situação mais geral, entretanto, o tensor de Ricci não é adequado porque depende do sistema de coordenadas e do vetor normal à superfície. Assim, deve-se construir um novo tensor que dependa do tensor métrico e suas derivadas de primeira e segunda ordem (não é possível construir um tensor que dependa do tensor métrico e somente das primeiras derivadas, pois é possível escolher um sistema de coordenadas que as derivadas são nulas).

Sabe-se do cálculo diferencial que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x},$$

em que é necessário que  $A$  seja uma função que possua derivadas segundas e seja contínua em ambas as variáveis. O correspondente para tensores, em termos da derivada covariante, não é válido:

$$\nabla_i(\nabla_j V_k) \neq \nabla_j(\nabla_i V_k).$$

A derivada covariante de um campo vetorial covariante  $V_i$  é dado pela equação (2.34). Realizando-se uma nova derivada covariante, obtêm-se:

$$\nabla_k(\nabla_j V_i) = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ik}^l \frac{\partial V_l}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^l \frac{\partial V_i}{\partial x^l}.$$

Realizando as respectivas derivadas, a equação é reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial V_i}{\partial x^j} = \partial_k \partial_j V_i - (\partial_k \Gamma_{ij}^p) V_p - \Gamma_{ij}^p \partial_k V_p - \Gamma_{ik}^l (\partial_j V_l - \Gamma_{lj}^p V_p) - \Gamma_{jk}^l (\partial_l V_i - \Gamma_{il}^p V_p),$$

e alterando a ordem dos índices  $j$  e  $k$ ,

$$V_{i;jk} - V_{i;kj} = R_{ijk}^p V_p, \quad (2.79)$$

em que o termo

$$R_{ijk}^p = \partial_j \Gamma_{ik}^p - \partial_k \Gamma_{ij}^p + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^p - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^p \quad (2.80)$$

é chamado de *tensor de curvatura de Riemann*, mais abreviadamente de *tensor de curvatura*.

Mas afinal, qual a relação entre calcular duas derivadas covariantes de um vetor em direções diferentes e a curvatura do espaço? A derivada informa qual a taxa de variação daquilo que se está derivando em relação a alguma coisa. Por exemplo, a derivada temporal de uma função  $f$  dá a taxa de variação dessa função em relação ao tempo. A derivada covariante fornece a taxa de variação de um vetor em uma determinada coordenada. Considere a Figura 2.8:

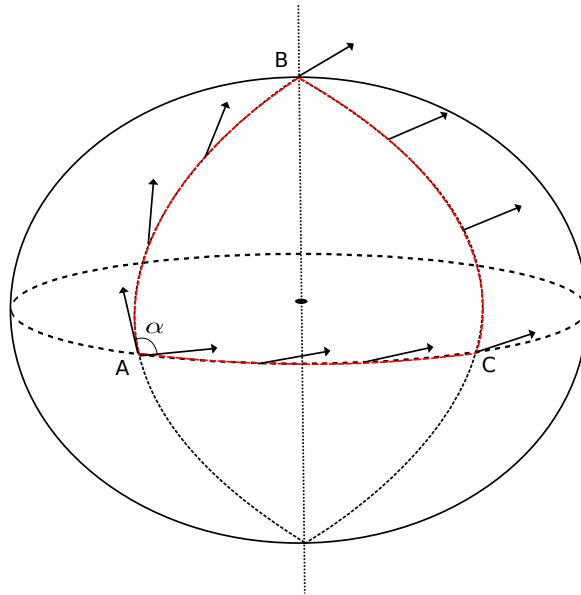


Figura 2.8: Transportar um vetor sobre uma superfície curva faz com que o vetor possua direções inicial e final diferentes.

Suponha que você se encontre no ponto **A** da superfície esférica e deseja transportar um vetor ao longo da trajetória **ABCA**. O vetor está logo a sua frente, ou seja, você o observa de cima de forma que não consegue dizer se ele possui algum ângulo de inclinação em relação à trajetória. Ao longo do percurso, você se esforça para mantê-lo sempre na mesma direção e sentido, de acordo com o seu ponto de vista; quando chega no ponto **B**, você se posiciona ao lado do vetor (não mais atrás) e começa a empurrá-lo até o ponto **C**. Lá, você se posiciona a frente dele e o traz até o local de origem. Devido à curvatura, o vetor não terá a mesma direção e sentido que possuía quando começou o deslocamento. A situação seria contrária caso você se encontrasse em um campo de futebol, que é plano<sup>3</sup>.

Se você estivesse no escanteio do campo e quisesse transportar o vetor até o escanteio oposto, teria duas opções: seguir pela lateral do campo e depois subir a linha do gol do time adversário, ou então seguir inicialmente a linha do gol do seu time e atravessar o campo pela outra lateral. A mesma condição é imposta: o vetor deve sempre possuir a mesma direção e sentido. A situação está representada na Figura 2.9:

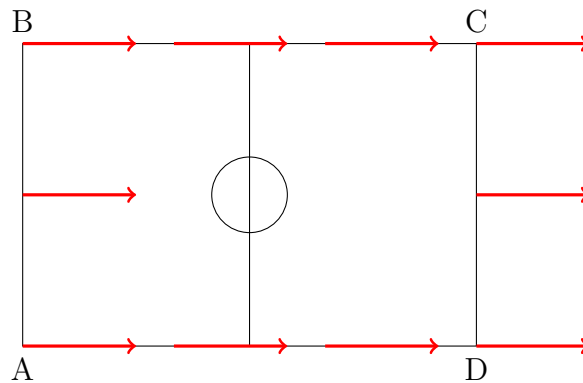


Figura 2.9: Em um espaço plano, o vetor possui a mesma direção e sentido após ser deslocado.

Você se encontra no ponto **A** e o vetor aponta para a direita. Você o empurra até o ponto **B**, quando então se coloca atrás do vetor e o leva até o ponto **C**. O resultado é o mesmo quando se faz o percurso **ADC**. Neste caso, em que não existe curvatura, trocar a ordem das derivadas covariantes fornece o mesmo resultado.

Portanto, se o espaço for curvo o vetor terá direção e sentido diferentes depois de deslocado, ou seja, possuirá uma variação. A operação que fornece essa variação é a Derivada Covariante, e o tensor de curvatura de Riemann relaciona a variação do vetor com a curvatura do espaço.

No espaço-tempo plano da relatividade espacial, o tensor métrico é  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e o símbolo de Christoffel  $\Gamma_{\nu\sigma}^\nu = 0$ , e portanto, o tensor de curvatura é nulo. Para coordenadas cartesianas do espaço Euclidiano, o tensor  $g_{ij}$  é constante, e os símbolos de Christoffel são nulos. Escolhendo um sistema arbitrário de coordenadas (oblíquas e curvilíneas ortogonais ou generalizadas), ter-se-á o tensor de Riemann igualmente nulo.

Para facilitar a visualização das propriedades do tensor, utiliza-se a notação  $R_{ijkl}$ , que corresponde a multiplicar o tensor  $g_{im}$  ao tensor  $R^m_{jkl}$ . Ele é simétrico em relação ao par

<sup>3</sup>Evidentemente, um campo de futebol na superfície da Terra não é plano. No entanto, as dimensões do gramado são muito menores do que o raio da Terra, de forma que temos a impressão de que é realmente plano.

de índices  $ij$  e  $kl$ , isto é:

$$R_{ijkl} = R_{klij} . \quad (2.81)$$

E antisimétrico em relação à permutação de  $i$  com  $j$  e  $k$  com  $l$ :

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} . \quad (2.82)$$

De acordo com essas propriedades, o número de componentes independentes é

$$C_N = \frac{1}{12}N^2(N^2 - 1) . \quad (2.83)$$

Em uma única dimensão, o tensor  $R_{1111}$  sempre some, e  $C_1 = 0$ . Em duas dimensões, há somente um componente independente,  $R_{1212}$ , pois todas as outras surgem pelas propriedades de simetria e antisimetria dos índices:

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} ,$$

e

$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0 .$$

Estas equações podem ser resumidas na seguinte expressão:

$$R_{ijkl} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \frac{R_{1212}}{g} \quad (2.84)$$

em que  $g$  é o determinante  $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$ . Contraindo  $i$  com  $k$  dá o tensor de Ricci:

$$R_{jl} = g_{jl} \frac{R_{1212}}{g} , \quad (2.85)$$

enquanto que ao contrair, na expressão acima,  $j$  e  $l$ , dá o escalar de curvatura:

$$R = \frac{2R_{1212}}{g} . \quad (2.86)$$

Portanto, o tensor de Riemman para um espaço bi-dimensional é:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) . \quad (2.87)$$

O tensor de curvatura obedece uma importante identidade diferencial, conhecida como *identidade de Bianchi*, e definida como [1]:

$$R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k} = 0 . \quad (2.88)$$

## Capítulo 3

# O Espaço-tempo da Relatividade Geral

No capítulo 1, os índices dos tensores foram escritos utilizando letras do alfabeto ( $i, j, k$ , etc) e podiam variar de 0 a  $N$  dimensões. No entanto, tratando-se da Relatividade, seja ela a Geral ou Restrita, os índices serão escritos utilizando letras gregas  $\mu$  e  $\nu$ , e que variam de 0 a 3, sendo zero a coordenada temporal e as demais espaciais<sup>1</sup>.

Algumas considerações devem ser feitas antes de se deduzir as equações propostas por Einstein. A primeira delas é que a Relatividade Geral deve se reduzir para a teoria newtoniana da gravitação quando utilizada a aproximação de campos gravitacionais fracos. Em segundo lugar, a teoria de Newton é uma teoria escalar, isto é, possui um potencial escalar e um escalar que gera o campo, sendo esta a densidade de massa da distribuição de matéria [1].

Distribuição contínua de massa é descrita na Relatividade Restrita pelo *tensor de energia-momento*  $T_{\mu\nu}$ . Este é simétrico:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} . \quad (3.1)$$

Para compreender seu significado físico, faz-se relação com o tensor de energia-momento do campo eletromagnético de Maxwell,  $\tau_{ij}$ . A componente  $\tau_{00}$  é chamada de densidade de energia eletromagnética. Consequentemente,  $T_{00}$  será a densidade de energia da matéria. As componentes  $\tau_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) podem ser as componentes da densidade de momento do campo eletromagnético na direção do eixo  $Ox^i$  multiplicado por  $c$ , ou o fluxo de energia eletromagnética na direção  $Ox^i$ . Semelhantemente,  $T_{0j}$  terá o mesmo significado para as distribuições de matéria. As componentes  $\tau_{ij}$  correspondem ao estresse eletromagnético, e portanto, as componentes  $T_{ij}$  correspondem ao estresse mecânico que atua sobre a distribuição de massa [8].

Na Relatividade Restrita, a massa se relaciona com a energia de acordo com a seguinte equação:

$$E = mc^2 . \quad (3.2)$$

Como  $T_{00}$  é a densidade de energia, a densidade de massa pode ser definida como:

$$\mu = \frac{1}{c^2} T_{00} . \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Alguns autores optam por variar o índice de 1 a 4, sendo as três primeiras espaciais e a quarta, temporal. É uma escolha pessoal.

No entanto, isto é somente a componente de um tensor, e não um escalar, e por isso não pode ser usado como fonte de um campo gravitacional na teoria escalar da gravidade. Para que um escalar seja construído a partir deste tensor, faz-se a contração multiplicando pelo tensor métrico, que nada mais é que o traço do tensor  $T_{\mu\nu}$ :

$$T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\nu_\nu, \quad (3.4)$$

em que  $\eta^{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço de Minkowski. O escalar  $T$  corresponde qualitativamente à densidade de massa própria.

Na Relatividade Geral, o tensor  $T_{\mu\nu}$  age como fonte do campo gravitacional, e o espaço não pode mais ser o de Minkowski. Assim, o tensor  $g_{\mu\nu}$  do espaço Riemanniano fará o papel do potencial gravitacional.

### 3.1 Espaço Pseudo-Riemanniano

Um requerimento para a formulação do espaço-tempo da Relatividade Geral é que ele seja, localmente, semelhante ao da Relatividade Restrita.

O primeiro postulado da Relatividade Restrita diz que a velocidade da luz,  $c$ , é constante e igual para todos os referenciais. Assim,

$$c = \frac{dr}{dt}. \quad (3.5)$$

Em coordenadas cartesianas, o elemento  $dr^2$  é igual a:

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.6)$$

e a equação (3.5) assume a forma

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.7)$$

Como apresentado na introdução deste trabalho, um evento é um acontecimento em determinada região do espaço e tempo. Assim, um intervalo  $ds$  entre eventos vizinhos é representado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

ou então, utilizando índices gregos,

$$ds^2 = \eta_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu. \quad (3.8)$$

O termo  $\eta_{\nu\mu}$  é o tensor métrico da Relatividade Restrita e tem a forma

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Diz-se que o espaço-tempo é um espaço *pseudo-Riemanniano quadri-dimensional*, também conhecido como espaço de Minkowski. O termo *pseudo* surge devido aos sinais negativos que aparecem nas coordenadas espaciais.

Antes de prosseguir, é interessante analisar uma propriedade do tensor métrico. O comprimento de um vetor  $\lambda^a$  é dado por:

$$|g_{ab}\lambda^a\lambda^b|^{1/2} = |\lambda_a\lambda^a|^{1/2} . \quad (3.10)$$

Usualmente, o tensor métrico é definido positivamente. No entanto, para gerar um modelo para a relatividade esta condição deve modificada, de forma que tal tensor seja somente não-singular, isto é, é possível escrever a matriz inversa. Um espaço que possua um tensor métrico positivo é chamado de *Riemanniano*; se este for indefinido, é chamado de *pseudo-Riemanniano*.

Como dito anteriormente, é necessário que o espaço-tempo da Relatividade Geral seja pseudo-Riemanniano quadri-dimensional, com a propriedade que em qualquer ponto exista um sistema de coordenadas cartesianas em que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  seja aproximadamente igual ao  $\eta_{\mu\nu}$ . Isso significa que se em um determinado ponto do espaço for adotado um determinado sistema de coordenadas que dá origem à uma matriz  $[g_{\mu\nu}]$  diagonal, um elemento será positivo e os demais negativos.

Qualquer vetor  $\lambda^\mu$  é descrito como *temporal*, *espacial* e *nulo* se  $g_{\mu\nu}\lambda^\mu\lambda^\nu$  for positivo, negativo ou nulo, respectivamente. Se um vetor tangente à curva ou trajetória descrita no diagrama do espaço-tempo for do tipo temporal, então a curva recebe a mesma caracterização, bem como para vetores espaciais ou nulos.

Normalmente, a construção de um gráfico de posição×tempo é feita com a posição no eixo vertical e o tempo na horizontal. Diagramas de espaço-tempo são construídos de forma inversa, isto é, a coordenada  $x^0 = ct$  é definida como o eixo vertical. Assim, uma partícula em repouso é representada por uma linha vertical; a luz é descrita por uma linha com  $45^\circ$  de inclinação, como ilustra a Figura 3.1:

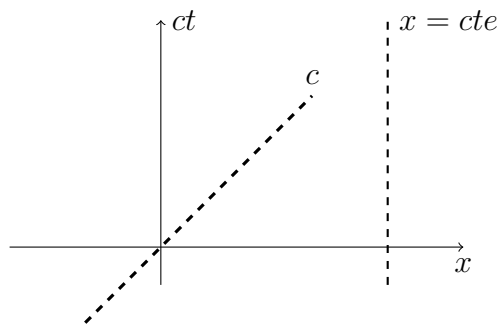


Figura 3.1: Um fóton é representado por uma reta com inclinação de  $45^\circ$ .

Diferente dos gráficos de posição×tempo, a inclinação da reta é o inverso da velocidade, isto é,  $\frac{c}{v}$ . Uma vez que nenhuma partícula com massa pode ser acelerada até a velocidade da luz, nenhuma representação da *linha de Universo* pode ter inclinação maior do que 1 em relação ao eixo  $x^0$ .

A representação mais comum do diagrama de espaço-tempo é a de um cone, como mostra a Figura 3.2.



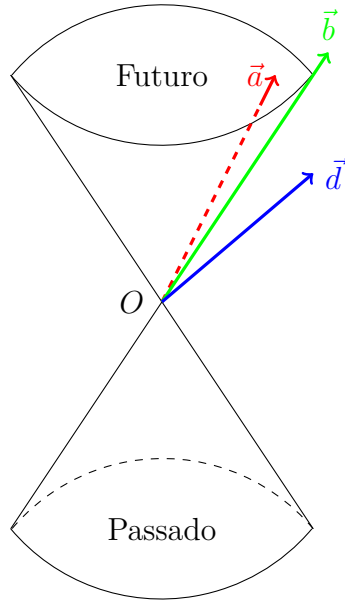


Figura 3.2: Cone do espaço-tempo para um evento  $O$ .

Considerando todas as trajetórias da luz que passam por um evento  $O$ , então o diagrama assume a forma de um cone. A região superior do cone corresponde ao futuro do evento, enquanto a região inferior ao passado. A parte externa corresponde aos eventos que poderão acontecer antes ou depois do evento original  $O$ .

Se existir um vetor em  $O$ , este será do tipo *temporal* se estiver dentro da região delimitada pelo cone. Assim, o vetor  $\vec{a}$  da figura acima é um vetor temporal que aponta para o futuro. Caso o vetor esteja sobre o cone, será do tipo *nulo* e é representado pelo vetor  $\vec{b}$ . Ou então do tipo *espacial*, representado pelo vetor  $\vec{d}$  e está fora do cone. Os vetores poderiam apontar também para o passado.

Partículas que possuem massa estão na região delimitada pelo cone, e portanto, possuem vetores tangentes à sua trajetória do tipo temporal. Já a luz descreve trajetória do tipo nula.

É importante fazer essa distinção porque a geodésica de uma partícula com massa deve ser tratada de forma diferente da geodésica da luz. A primeira envolverá diferenciações em relação ao *tempo próprio* da partícula, isto é:

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt . \quad (3.11)$$

De acordo com a equação (3.11), a luz não possui tempo próprio uma vez que sua velocidade é  $c$ . Por isso, as diferenciações da geodésica devem ser feitas em relação aos parâmetros de afinidade espaciais da curva.

## 3.2 Princípio da Equivalência

O Princípio da Equivalência foi brevemente tratado no capítulo 1 deste trabalho com o famoso experimento mental do *elevador de Einstein*. Como já discutido, o princípio pode ser resumidamente descrito como “a massa gravitacional de um corpo interagindo com o campo gravitacional experimenta uma força que é igual à força que uma massa inercial

tem quando em movimento acelerado”. Essa equivalência das forças trouxe importantes consequências [3]:

1. Forças gravitacionais devem ser descritas da mesma forma que forças inerciais. Em um referencial inercial no espaço de Minkowski, uma partícula livre se movimenta em linha reta segundo a equação

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 . \quad (3.12)$$

Esta é a equação da geodésica, simplificada pelo fato de que em um referencial inercial, as componentes do tensor métrico são constantes e os símbolos de Christoffel são nulos. No entanto, se a partícula estiver em um referencial não-inercial, a equação da geodésica é:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 , \quad (3.13)$$

em que o segundo termo corresponde à aceleração inercial da partícula. Segue-se do princípio de equivalência que a aceleração gravitacional deve ser descrita pelos símbolos de Christoffel. Uma vez que estes envolvem as derivadas do tensor métrico, conclui-se que tal tensor fará o papel do potencial gravitacional. Mais precisamente, os símbolos de Christoffel descreverão a soma das acelerações inercial e gravitacional.

2. Quando existem acelerações gravitacionais, o espaço não pode ser plano, como o de Minkowski. Neste espaço, os símbolos de Christoffel são nulos.
3. Não existem referenciais inerciais na Relatividade Geral. Por definição, um referencial inercial é aquele que não possui aceleração inercial, e conseqüentemente, a aceleração gravitacional teria que ser separada da inercial, o que contradiz com o princípio.

### 3.3 Potencial Gravitacional

Suponha um sistema de coordenadas em que o tensor métrico é descrito como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (3.14)$$

em que  $h_{\mu\nu}$  é pequeno, mas não a ponto de ser descartado. Trata-se de uma aproximação para campo fraco. O objetivo dessa aproximação é cobrir dois extremos: na ausência de massa, o espaço deve ser plano e, portanto, o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  deve reduzir-se ao tensor métrico da Relatividade Restrita  $\eta_{\mu\nu}$ ; na presença de massa existe curvatura e por isso o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  não pode depender somente do  $\eta_{\mu\nu}$ , caso contrário os símbolos de Christoffel seriam nulos e o tensor de curvatura de Riemann também o seria. Assuma que o campo gravitacional gerado pelo termo  $h$  é quase estático, de forma que  $\partial_0 h_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$  é negligenciável quando comparado com as derivadas temporais. Considere também que a velocidade da partícula,  $\frac{dx^i}{dt}$ , é muito menor que a velocidade da luz [1].

A equação da geodésica de uma partícula livre é dada por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0 . \quad (3.15)$$

Dividindo a equação (3.15) por  $c^2$ , obtêm-se:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i + 2\Gamma_{0j}^i \left( \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) + \Gamma_{jk}^i \left( \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) \left( \frac{1}{c} \frac{dx^k}{dt} \right) = 0 . \quad (3.16)$$

Lembre-se de que  $x^0 = ct$ , de forma que  $\frac{1}{c^2} \Gamma_{00}^i \frac{cdt}{dt} \frac{cdt}{dt} = \Gamma_{00}^i$ . De forma semelhante,  $\frac{1}{c^2} \Gamma_{0j}^i \frac{cdt}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \Gamma_{0j}^i \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt}$ .

Escolhendo  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} h_{\sigma\rho}$ , então:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} , \quad (3.17)$$

e

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\partial_\nu h_{\sigma\rho} + \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\sigma}) . \quad (3.18)$$

Assim,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{i\rho} (\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_{0\rho} - \partial_\rho h_{00}) = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} , \quad (3.19)$$

pois, de acordo com o que foi esclarecido anteriormente, a derivada temporal de  $h$  é negligenciável em relação às espaciais. De forma semelhante,

$$\Gamma_{0j}^i = -\frac{1}{2} \delta^{ik} (\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}) . \quad (3.20)$$

A equação (3.16) assume a forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} - \delta^{ik} (\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}) \left( \frac{1}{c} \frac{dx^j}{dt} \right) = 0 , \quad (3.21)$$

em que o último termo do lado esquerdo da equação (3.16) foi descartado, pois a velocidade da partícula é muito menor que a velocidade da luz.

Multiplicando todos os termos pela massa, então:

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -m \delta^{ij} \partial_j \left( \frac{1}{2} c^2 h_{00} \right) + m c \delta^{ik} (\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}) \frac{dx^j}{dt} . \quad (3.22)$$

O lado direito da equação (3.22) é massa multiplicada pela aceleração, a portanto, o lado direito deve corresponder à força gravitacional da partícula. Observe que o primeiro termo do lado direito nada mais é do que  $-m \nabla V$ , o gradiente de um potencial  $V$  dado por  $V = \frac{1}{2} c^2 h_{00}$ , enquanto que o segundo termo do lado direito corresponde a rotações. É interessante notar que o último termo corresponde à força de Coriolis dependente da velocidade e está no mesmo patamar que forças gravitacionais [1].

Seja o sistema de coordenadas quase inercial, de forma que o termo de rotação é negligenciado. Assim,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \partial_j V , \quad V = \frac{1}{2} c^2 h_{00} + \text{constante} \quad (3.23)$$

Finalmente,

$$g_{00} = \frac{2V}{c^2} + 1 . \quad (3.24)$$

A constante é escolhida como valendo 1 para que  $g_{00}$  reduza ao espaço plano quando  $V = 0$ .

### 3.4 Equação da Relatividade Geral

Na seção 2.3 encontrou-se a relação entre a componente temporal do tensor métrico e o potencial gravitacional gerado por uma densidade de carga não-relativística  $\rho$ , equação (3.24):

$$g_{00} \simeq 1 + \frac{2V}{c^2} \quad (3.25)$$

A equação de Poisson para o potencial gravitacional indica que:

$$\nabla^2 V = \frac{4\pi G}{c^4} \rho . \quad (3.26)$$

Além disso, a densidade de massa não-relativística  $\rho$  é igual a densidade de energia  $T_{00}$ . Combinando estas informações, obtêm-se:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} . \quad (3.27)$$

entretanto, essa equação é válida somente para campos fracos gerados por matéria não-relativística, e da forma como está escrita não é nem invariante diante uma transformação de Lorentz. Entretanto, é possível relacionar um distribuição geral do tensor momento-energia  $T_{\alpha\beta}$  com uma combinação linear do tensor métrico e suas derivadas, isto é:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} . \quad (3.28)$$

Segue-se do princípio de equivalência que as equações que governam os campos gravitacionais de intensidade arbitrária deve ter a forma [8]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (3.29)$$

em que  $G_{\mu\nu}$  reduz para  $G_{\alpha\beta}$  quando se tratando de campos fracos.

Para determinar  $G_{\mu\nu}$  deve-se levar em consideração as seguintes informações:

1.  $G_{\mu\nu}$  consiste somente de  $n = 2$  derivadas da métrica, isto é, contém termos que são segundas derivadas lineares ou primeiras derivadas quadráticas;
2. Como  $T_{\mu\nu}$  é simétrico, assim o é  $G_{\mu\nu}$ ;
3. Uma vez que  $T_{\mu\nu}$  é conservado ao realizar uma derivada covariante, assim deve ser o tensor  $G_{\mu\nu}$ :

$$G^\nu{}_{\mu;\nu} = 0 \quad (3.30)$$

4. Para campos fracos e estacionários,

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} . \quad (3.31)$$

A maneira mais geral de construir um tensor que satisfaça as duas primeiras condições é contrair o tensor de curvatura  $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$ . De acordo com as propriedades de antisimetria do tensor  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ , existem somente dois tensores que podem ser formados: o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Assim,

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R , \quad (3.32)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. A tensor acima é simétrico, e portanto a condição 2 é automaticamente satisfeita.

Utilizando a identidade de Bianchi (2.88) (note que para tal foram realizadas duas contrações dos índices), obtêm-se:

$$G^\nu{}_{\mu;\nu} = \left( \frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu} . \quad (3.33)$$

De acordo com a terceira condição,  $C_2$  deve ser igual a  $\frac{-C_1}{2}$ , caso contrário  $R_{;\nu}$  será nulo. Assim, a equação (3.32) toma a forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) . \quad (3.34)$$

Para que a quarta condição seja satisfeita, escolhe-se  $C_1 = 1$ . Assim, a equação final é:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (3.35)$$

que é conhecida como *equações de Einstein para a Relatividade Geral*.

### 3.5 Equação da Relatividade Geral para Campos Fracos: Equação de Poisson

Como já discutido, numa aproximação de campos fracos, a equação de Einstein deve originar a equação de Poisson. Obedecendo esta aproximação, a equação (3.35) resulta em:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (3.36)$$

ou ainda

$$R_{00} = \kappa \left( T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) , \quad (3.37)$$

em que  $\kappa = \frac{-8\pi G}{c^4}$ .

Anteriormente, consideramos um sistema de coordenadas cartesianos em que o tensor métrico era  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , sendo  $h_{\mu\nu}$  muito pequeno de forma que multiplicações deste termo podem ser negligenciadas [1]. Além disso, considere que este campo gravitacional fraco surge de um campo em que partículas se movimentam com velocidade  $v$  muito menor que a velocidade da luz. Nestas condições, o tensor de energia-momento assume a forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu , \quad (3.38)$$

em que  $\rho$  é a densidade da distribuição contínua de massa e  $u$  a velocidade própria da partícula, definida como:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} . \quad (3.39)$$

Como deve-se levar em consideração as componentes  $-00$ , o escalar  $T$  é

$$T = \rho c^2 , \quad (3.40)$$

e a componente  $g_{00} = 1$ . Assim, a equação (3.37) fica

$$R_{00} = \kappa \rho \left( u_0 u_0 - \frac{1}{2} c^2 g_{00} \right) \approx \frac{1}{2} \kappa \rho c^2 . \quad (3.41)$$

De acordo com a equação (2.80) (após contração dos índices),  $R_{00}$  é definido como:

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu + \Gamma_{0\mu}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\mu - \Gamma_{00}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\mu . \quad (3.42)$$

Como  $h_{\mu\nu}$  e suas derivadas são pequenas, os dois últimos termos da equação (3.42) podem ser descartados. Assim,

$$R_{00} = -\partial_i \Gamma_{00}^i , \quad (3.43)$$

enquanto que

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} , \quad (3.44)$$

como calculado na seção 2.5.

Com estes resultados, a equação (3.41) fica

$$-\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa \rho c^4 . \quad (3.45)$$

Observe, no entanto, que  $\delta^{ij} \partial_i \partial_j$  é o laplaciano,  $\nabla^2$ . Como encontrado anteriormente,  $h_{00} = \frac{2V}{c^2}$ . Portanto, a equação final é:

$$\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G \rho . \quad (3.46)$$

### 3.6 Solução de Schwarzschild

Devido ao alto grau de não-linearidade das equações de Einstein (para cada coordenada, existe uma equação), é muito difícil extrair uma solução. Dessa forma, é mais prudente analisar casos especiais, que possuem simetrias no espaço-tempo [1]. A primeira solução desse tipo foi proposta por K. Schwarzschild em 1916. Ele propôs uma métrica que representasse o campo gravitacional estático e esfericamente simétrico de um corpo maciço e esférico, como uma estrela, no espaço vazio. As condições por ele propostas são [1, 5]:

1. o campo é estático;
2. o campo é esfericamente simétrico;
3. o espaço-tempo é vazio;
4. o espaço-tempo é assintoticamente plano.

Considere que o espaço-tempo possui coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  e que o elemento de linha possui a forma:

$$c^2 d\tau^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (3.47)$$

sendo  $A(r)$  e  $B(r)$  funções de  $r$  ainda desconhecidas. O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  não depende do tempo  $t$ , e satisfaz a primeira condição. Para  $r$  e  $t$  constantes, o elemento  $ds$  é:

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (3.48)$$

portanto possui a geometria de uma esfera, respeitando a segunda condição.

A terceira condição implica que  $A$  e  $B$  serão determinados utilizando  $R_{\mu\nu}$  igual a zero, enquanto que a última implica em

$$A(r) \rightarrow c^2, \quad B(r) \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.49)$$

De acordo com a condição 3,  $R_{\mu\nu} = 0$ . A equação (2.80), após realizar a contração dos índices, indica que:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (3.50)$$

No primeiro capítulo calculou-se os símbolos de Christoffel de segunda ordem para o tensor métrico em coordenadas esféricas. Entretanto, aquele cálculo foi realizado considerando a inexistência das funções  $A(r)$  e  $B(r)$  e por isso os símbolos  $\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{11}^1 = 0$ . Utilizando os símbolos já calculados, equações (2.29) até (2.31), e considerando a adição das funções na métrica, os novos símbolos serão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{2A} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-r}{B} \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{-r \operatorname{sen}^2 \theta}{B} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \end{aligned}$$

em que os termos  $A'$  e  $B'$  correspondem à diferenciação em relação a coordenada  $r$ . Todos os outros coeficientes são nulos.

Portanto,

$$R_{00} = \frac{-A''}{2B} + \frac{A'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rB} = 0 \quad (3.51)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = 0 \quad (3.52)$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - \frac{r}{2B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (3.53)$$

$$R_{33} = R_{22} \operatorname{sen}^2 \theta, \quad (3.54)$$

e para todo  $\mu \neq \nu$ ,  $R_{\mu\nu} = 0$ .

Multiplicando  $R_{00}$  por  $\frac{B}{A}$  e somando com  $R_{11}$ :

$$\frac{-A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} + \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rB} = 0 \rightarrow A'B + AB' = 0, \quad (3.55)$$

o que significa que  $AB$  deve ser uma constante. De acordo com a terceira condição, equação (3.49), a constante é igual a  $c^2$ , e portanto,

$$B = \frac{c^2}{A}. \quad (3.56)$$

Substituindo este valor de  $B$  na expressão de  $R_{22}$ , obtêm-se:

$$A + rA' = c^2 \rightarrow \frac{d(rA)}{dr} = c^2 \rightarrow rA = c^2(r + k), \quad (3.57)$$

sendo  $k$  uma constante que aparece após a integração.

Portanto,

$$A(r) = c^2 \left(1 + \frac{k}{r}\right), \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}. \quad (3.58)$$

Desta maneira, o elemento de comprimento é:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 + \frac{k}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.59)$$

No limite assintótico, em que  $r \rightarrow \infty$ , o elemento  $ds$  difere muito pouco do elemento do espaço plano em coordenadas esféricas, de forma que podemos considerar  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , em que  $h_{00} = \frac{k}{r}$ . Neste limite, sabe-se que  $h_{00}$  é proporcional ao potencial Newtoniano, como foi deduzido no início do capítulo, de forma que pode-se escrever:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.60)$$

em que  $M$  é a massa do corpo esfericamente simétrica. A solução de Schwarzschild escrita na forma matricial tem a forma

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2MG}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Por conveniência, faz-se a seguinte substituição:

$$m = \frac{MG}{c^2}. \quad (3.62)$$

Essa solução é assintoticamente plana e não considera a contribuição de outros corpos no Universo. No entanto, é um bom modelo para estudar o campo gravitacional nas vizinhanças de um corpo esférico de muita massa, como uma estrela. Além disso, o campo gravitacional não é influenciado pela distribuição de massa dentro do corpo, uma característica que também está presente na gravitação de Newton, quando se leva em consideração uma simetria esférica [3].



# Capítulo 4

## Novas Possibilidades com a Solução de Schwarzschild

No capítulo três, fez-se algumas suposições para encontrar o elemento de linha

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 ,$$

obtida pelo físico Karl Schwarzschild, que é solução da equação de campo da Relatividade Geral gerado por um corpo esfericamente simétrico e maciço. Essa solução reproduz o espaço plano para distâncias muito grandes do corpo gerador de campo, bem como para massa nula.

Comum em qualquer teoria física, resultados experimentais devem coincidir, ou se aproximar, daqueles expressos pela teoria. Assim, o avanço do periélio do planeta Mercúrio e a curvatura da luz são exemplos que fazem uso da solução de Schwarzschild e reproduzem os resultados observados.

### 4.1 O Periélio de Mercúrio

Mesmo sem conhecer o famoso Principios Matemáticos da Filosofia Natural, Johannes Kepler colaborou grandemente para a ciência do movimento dos planetas e contribuiu para o desenvolvimento da obra mais famosa de Newton. As três leis de Kepler são [7, 9]:

- 1 Os planetas desenvolvem órbitas elípticas ao redor do Sol, estando esse em um dos seus focos;
- 2 O segmento que une o Sol a um planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempos iguais;
- 3 O quadrado do período é proporcional ao cubo do raio da trajetória.

Uma partícula se movendo sobre influência da força  $\vec{F}(r)$ , isto é

$$\vec{F}(r) = -m \frac{\mu}{r^2} \hat{r} , \quad (4.1)$$

possui, de acordo com a segunda lei de Newton, a seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{\vec{r}} = -m \frac{\mu}{r^2} \hat{r} , \quad (4.2)$$

em que  $\mu$  é uma constante e  $m$  a massa da partícula.

Observe que o momento angular  $\vec{L}$ , definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F}(r) \quad (4.3)$$

é conservado uma vez que a força é radial:

$$\vec{r} \times \vec{F}(r) = \vec{r} \times \frac{-m\mu}{r^2} \hat{r} = 0 . \quad (4.4)$$

Isso permite escrever o momento angular como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{constante} \rightarrow \vec{L} = m\vec{h} , \quad (4.5)$$

sendo  $\vec{h}$  um vetor constante. Como  $\vec{h}$  é sempre ortogonal à  $\vec{r}$  (o produto vetorial de  $\vec{r}$  e  $\vec{F}(r)$  dá origem a um vetor ortogonal a eles), a partícula está restrita a se mover em um plano.

Escrevendo a equação (4.2) em coordenadas polares  $(R, \phi)$ , esta assume a forma

$$(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{R} + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi})\hat{\phi} = -\frac{\mu}{R^2}\hat{R} . \quad (4.6)$$

O objetivo é encontrar a equação da órbita, isto é,  $R(\phi)$ . Assim, introduzindo uma nova variável  $u = \frac{1}{R}$  e usando a regra da cadeia para escrever  $u = u(\phi)$ , a equação diferencial se reduz à chamada equação de Binet:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} . \quad (4.7)$$

Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem. A solução consiste na soma das soluções homogênea e particular; uma vez que a equação de Binet envolve a segunda derivada de uma função e ela mesma, espera-se que a solução final seja semelhante ao seno ou cosseno. A solução homogênea é calculada da seguinte forma:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \quad (4.8)$$

cuja solução é  $Ce^{i\phi}$ . Para encontrar a solução particular, deve-se fazer

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{h^2} . \quad (4.9)$$

Se  $u = \frac{\mu}{h^2}$ , então a equação é satisfeita e, portanto, é uma solução particular. A solução completa para  $u(\phi)$  é

$$u = \frac{\mu}{h^2} + \frac{\mu}{h^2} e \cos(\phi - \phi_0) , \quad (4.10)$$

sendo  $e = \frac{Ch^2}{\mu}$ ,  $C$  e  $\phi_0$  constantes. O argumento extra do cosseno,  $\phi_0$ , determina a orientação, enquanto que  $e$  é chamado de excentricidade e determina a forma da trajetória, em especial, se  $0 < e < 1$  então trata-se de uma elipse. O ponto da trajetória mais próximo da origem é chamado de periélio.

Para fazer a análise usando os conceitos de relatividade considere que uma partícula, ao adentrar em um campo gravitacional gerado pelo corpo maciço e esférico, descreve

uma geodésica do tipo *tempo*, isto é, as diferenciações são em relação ao tempo próprio  $\tau$ . Fazendo uso da equação (2.54) e da métrica de Schwarzschild:

$$2K = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = 1 . \quad (4.11)$$

Usando a equação (2.55), encontra-se as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}) = 0 \quad (4.14)$$

Anteriormente, o movimento da partícula estava confinado ao plano devido ao momento angular ser perpendicular ao vetor  $\vec{r}$ , (4.5). Para que o mesmo aconteça na nova abordagem, seja  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , que representa um movimento no plano  $(x, y)$ . Dessa forma, da equação (4.14) conclui-se que o momento angular é igualmente conservado:

$$\frac{d(r^2 \dot{\phi})}{d\tau} = 0 \rightarrow r^2 \dot{\phi} = h , \quad (4.15)$$

sendo  $h$  constante. De acordo com a equação (4.12),

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k , \quad (4.16)$$

$k$  também é constante. Substituindo este resultado em (4.11) e fazendo a troca de variável  $u = R^{-1}$  obtêm-se

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 . \quad (4.17)$$

Note a semelhança desta equação com (4.7). O termo  $3mu^2$  é muito pequeno (no caso de Mercúrio, é da ordem de  $10^{-7}$ ) e por isso a equação será resolvida utilizando um método perturbativo. Seja  $\epsilon = 3m^2/h^2$ , a equação (4.17) assume a forma:

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + \epsilon \left( \frac{h^2 u^2}{m} \right) , \quad (4.18)$$

em que  $u''$  corresponde à derivada segunda de  $u$  em relação a coordenada  $\phi$ . Assuma que a solução seja da forma:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2) \quad (4.19)$$

Substituindo na equação (4.18), obtêm-se:

$$u_0'' + u_0 - \frac{m}{h^2} + \epsilon \left( u_1'' + u_1 - \frac{h^2 u_0^2}{m} \right) + O(\epsilon^2) = 0 . \quad (4.20)$$

Igualando os coeficientes que acompanham  $\epsilon$  a zero, então a solução para  $u_0$  é

$$u_0 = \frac{m}{h^2} (1 + e \cos(\phi)) . \quad (4.21)$$

Para encontrar  $u_1$ :

$$u_1'' + u_1' = \frac{h^2}{m} u_0^2 = \frac{m}{h^2} \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + \frac{2me}{h^2} \cos \phi + \frac{me^2}{2h^2} \cos 2\phi . \quad (4.22)$$

Supondo que  $u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi$ , então a solução geral é

$$u \approx u_0 + \frac{\epsilon m}{h^2} \left( 1 + e\phi \sin \phi + e^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right) . \quad (4.23)$$

A correção mais importante para  $u_0$  é a que envolve  $e\phi \sin \phi$ , pois a cada revolução se torna maior. Desprezando as demais correções, a solução aproximada é:

$$u \approx \frac{m}{h^2} \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \} , \quad (4.24)$$

sendo  $\epsilon = \frac{3m^2}{h^2}$ . A órbita é aproximadamente elíptica e continua periódica, mas com período  $2\pi(1 + \epsilon)$ ; o termo extra no cosseno faz com que o eixo da órbita seja rotacionado por  $2\pi\epsilon$  entre os pontos de maior aproximação, como ilustra a Figura 4.1:

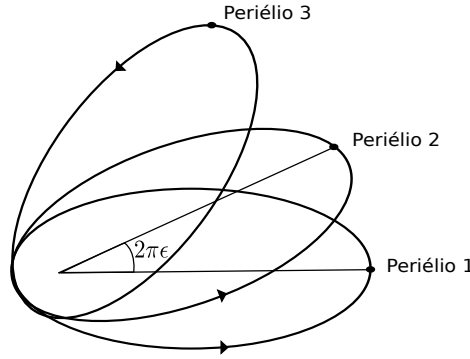


Figura 4.1: A cada volta, o eixo da órbita elíptica é rotacionado por um fato de  $2\pi\epsilon$ .

A falha da teoria newtoniana é desconhecida. Vários cientistas propuseram explicações, as mais conhecidas são a possível existência de outro planeta, que se chamaria Vulcano, na mesma órbita de Mercúrio ou a existência de algum satélite. A primeira hipótese foi proposta porque um fenômeno parecido na órbita de Urano levou à descoberta de Netuno. Richard P. Feynman apresenta uma solução numérica para a órbita de qualquer planeta ao redor do Sol levando em consideração a presença de muitos corpos, e o problema da precessão do periélio continua presente [10].

## 4.2 Curvatura da Luz

O desenvolvimento é semelhante ao da seção 4.1. Neste caso, entretanto, trata-se de uma geodésica *nula*, isto é, a diferenciação é feita em relação aos parâmetros de afinidade, e não mais sobre o tempo próprio [7]. Dessa forma, a equação (4.11) passa a ser nula. A equação diferencial para tal situação é semelhante à expressão (4.17), sem o termo  $\frac{m}{h^2}$ :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2 . \quad (4.25)$$

No limite da Relatividade Restrita,  $m$  desaparece e o lado direito da equação (4.25) torna-se nulo:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \rightarrow u_0 = \frac{1}{D} \text{sen}(\phi - \phi_0) , \quad (4.26)$$

sendo  $D$  o ponto de maior aproximação da luz da origem. Esta é a equação de uma reta.

Um feixe de luz que viaja próximo ao campo gravitacional de um corpo, isto é, no espaço-tempo de Schwarzschild, pode ser tratado como uma perturbação da equação clássica (4.26). Agora, é o termo  $mu$  que será tratado como perturbação. Suponha uma solução do tipo  $u = u_0 + 3mu_1$ , sendo  $u_0$  a solução da equação (4.26). Substituindo esses resultados na equação (4.25) e negligenciando termos  $(mu)^2$ , encontra-se:

$$u_1'' + u_1 = u_0^2 = \frac{\text{sen}^2 \phi}{D^2} , \quad (4.27)$$

em que  $\phi_0 = 0$ . Escrevendo  $\text{sen}^2 \phi = 1/2(1 - \cos 2\phi)$ , a equação diferencial resulta em:

$$u_1'' + u_1 = 1/2(1 - R\{e^{i2\phi}\}) . \quad (4.28)$$

A solução geral de  $u_1$  é, de novo, a soma da homogênea com a particular. Assim,

$$u_1 = m/D^2 + C \cos \phi/D^2 + \cos^2 \phi/D^2 . \quad (4.29)$$

E a solução geral é

$$u \approx \frac{\text{sen} \phi}{D} + \frac{m(1 + C \cos \phi + \cos^2 \phi)}{D^2} , \quad (4.30)$$

A uma distância muito grande do corpo gerador de campo, isto é,  $r \rightarrow \infty$  e  $u \rightarrow 0$ . Para tanto, existe um ângulo  $\phi$  que zera o lado direito da equação (4.30). Sejam  $-\alpha_2$  e  $\pi + \alpha_1$  os ângulos das assíntotas, como mostrado na Figura 4.2. O ângulo de deflexão, representado por  $\gamma$  corresponde à  $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ .

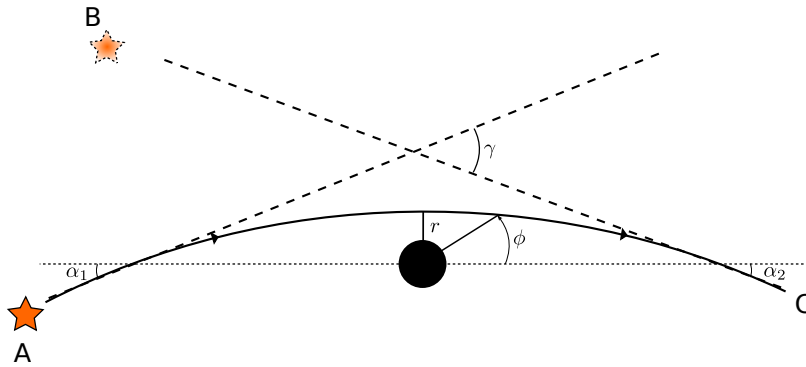


Figura 4.2: Um feixe de luz emitido por um corpo no ponto **A** é desviado ao longo da trajetória até chegar ao ponto **C**, dando a impressão de que sua origem é no ponto **B**.

Fazendo aproximação para ângulos pequenos, isto é,  $\text{sen} \phi \approx \phi$  e  $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$  encontra-se:

$$-\frac{\alpha_2}{D} + \frac{m}{D}(2 + C) = 0 \quad -\frac{\alpha_1}{D} + \frac{m}{D}(2 - C) = 0 . \quad (4.31)$$

Por isso, a deflexão é dada por:

$$\gamma = \frac{4GM}{c^2 D}, \quad (4.32)$$

em que  $D$  corresponde à menor distância do feixe de luz à origem do sistema.

Por exemplo, a luz que passa próxima ao Sol, e portanto interage com seu campo gravitacional, sofre uma deflexão de 1,75 segundos de um arco (esse valor é obtido considerando  $D$  o próprio raio da estrela).

Em 1919, o astrônomo Arthur Eddington liderou uma expedição para observar o eclipse total do Sol que seria visível em uma pequena faixa entre o Brasil e a África [7]. Uma equipe de pesquisadores se deslocou para a Ilha de Príncipe, na África, enquanto outra foi para a cidade de Sobral, no estado do Ceará.

Para a observação, é necessário que a Lua ofusque completamente a luz solar para poder fotografar as estrelas (ou melhor, a luz proveniente destas) posicionadas atrás do Sol. Esta fotografia é, então, comparada com outra tirada depois de alguns meses, quando o Sol não está mais entre a Terra e as estrelas, ou seja, a luz não sofre deflexão por causa da massa do Sol.

As observações de Sobral foram bem sucedidas, permitindo aos cientistas encontrarem o valor de 1,98'' de deflexão da luz. Já as observações no continente africano foram atrapalhadas por causa do mal tempo, mas o valor de 1,60'' foi calculado [11]. Com a criação de grandes telescópios, a deflexão pode ser medida utilizando técnicas de interferência. Valores mais recentes estão entre 1,57 e 1,82'' segundos de arco.

Na Figura 4.2, somente um feixe de luz foi representado. Mas se existirem vários feixes de luz propagando paralelos entre si, então a presença de um corpo com muita massa faz os raios convergirem e se interceptarem dando origem ao fenômeno chamado de Lente Gravitacional, como mostra a Figura 4.3:

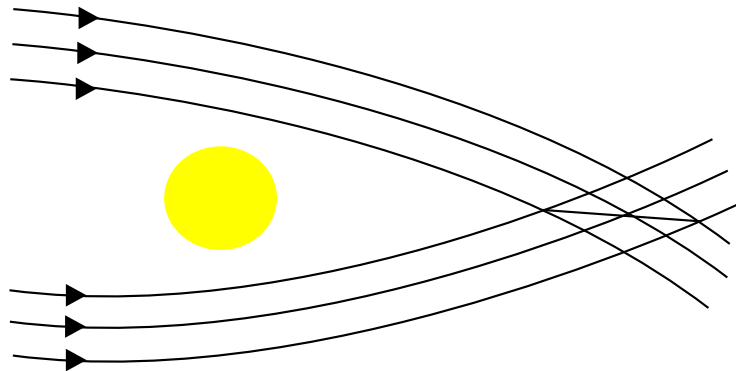


Figura 4.3: Vários feixes de luz são desviados e dão origem ao fenômeno de lente gravitacional.

# Conclusões

Neste trabalho foram abordados o cálculo tensorial e tópicos relacionados com a Relatividade Geral, sendo estes o Princípio da Equivalência, a Equação de Einstein para a Relatividade Geral, a Solução de Schwarzschild e o limite newtoniano.

Utilizar a notação tensorial para a elaboração da teoria da Relatividade é fundamental, pois sua invariância diante uma transformação de coordenadas favorece à compreensão do postulado da Relatividade Restrita, em que as leis físicas são iguais para todos os referenciais inerciais.

Apesar da mecânica Newtoniana descrever com excelência o cotidiano, falha em apresentar uma descrição detalhada do Universo. Até então, tempo era uma grandeza invariante, igual para referenciais em movimento ou não, e a curvatura do espaço era algo ainda inconcebível.

Einstein então propôs uma teoria geral, que descreve os já reconhecidos fenômenos relativísticos e incorpora a gravidade. Para isso, inovou em considerar a aceleração gravitacional como sendo, na verdade, uma aceleração inercial, de acordo com o seu Princípio de Equivalência, e como consequência demonstrou a curvatura do espaço.

Além disso, a teoria de Newton não é suficiente para explicar o avanço no periélio de Mercúrio. A solução de Schwarzschild, entretanto, fornece resultados teóricos condizentes com os experimentais e explica satisfatoriamente o avanço no periélio e a curvatura da luz. Em especial, o resultado experimental obtido pelas observações na cidade de Sobral, durante o eclipse de 1919, concorda com o resultado numérico extraído das equações de Einstein.

Apesar de muito diferir da mecânica newtoniana, a Relatividade Geral reproduz seus resultados quando utilizando certas aproximações para campos fracos e espaço plano. É, portanto, uma teoria completa para descrever a gravitação.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Forster, *A Short Course in General Relativity*. Springer Press, 2006.
- [2] R. Serway, C. Moses, and C. Moyer, *Modern Physics*. Thomson Books/Cole, third ed., 2005.
- [3] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [4] I. Newton, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Daniel Adee, New York, 1846.
- [5] R. A. Medrano, *Campos Vetoriais, Espaços Lineares e Tensores na Física*. Transtec Editorial, 1994.
- [6] E. Sánchez, *Cálculo Tensorial*. Editora Interciência, 2011.
- [7] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1992.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology - Principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley Sons, 1972.
- [9] J. Taylor, *Mecânica Clássica*. Bookman, 2013.
- [10] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *Lições de Física*, vol. I. Bookman, 2009.
- [11] A. C. de la Cherois Crommelin, *The Eclipse Expedition to Sobral*, vol. 42. The Observatory, 1919.