



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Referenciais Não Inerciais e Forças Fictícias

Acadêmico: Artur Soriani Alves

Orientador: Dr. César Canesin Colucci

Maringá, 8 de fevereiro de 2016



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Referenciais Não Inerciais e Forças Fictícias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. César Canesin Colucci, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmico: Artur Soriani Alves

Orientador: Dr. César Canesin Colucci

Maringá, 8 de fevereiro de 2016

Sumário

Agradecimentos	2
Resumo	3
Introdução	4
1 Formalismo de forças fictícias	
1.1 Translação e rotação de referenciais	6
1.2 Lagrangeana das forças fictícias	10
2 Aplicações e exemplos	
2.1 Pêndulo acelerado	12
2.2 Marés	17
2.3 Queda livre	21
2.4 Pêndulo de Foucault	28
Apêndice: Exemplos resolvidos pelo método de Lagrange	
Pêndulo Acelerado	33
Queda Livre	33
Pêndulo de Foucault	34
Conclusões	36
Referências Bibliográficas	37

Agradecimentos

Agradeço ao professor doutor César Canesin Colucci pela sua paciência e colaboração com esse projeto, aos meus colegas de graduação pelo apoio e a minha família pela motivação.

Resumo

A descrição do movimento dentro da mecânica Newtoniana pressupõe o uso de referenciais inerciais. Entretanto, existem situações nas quais a utilização de referenciais não inerciais pode ser conveniente, preservando a formulação matemática da segunda lei de Newton através da introdução de “forças fictícias”. Este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo detalhado sobre referenciais acelerados de maneira sucinta e resolver problemas clássicos relacionados.

Palavras chave: mecânica Newtoniana, referenciais inerciais, referenciais não inerciais, segunda lei de Newton, forças fictícias.

Introdução

Isaac Newton, em sua obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, fundamentou a Mecânica Clássica com suas tão conhecidas leis. Leis estas que servem como postulados para todo o desenvolvimento da Mecânica Clássica, no sentido em que não é possível demonstrar tais leis: as assumimos como verdade e desenvolvemos tudo o que podemos com elas. Por muito tempo não houve experimento que conseguisse contrariar as leis de Newton, mas hoje sabemos que a Mecânica Newtoniana é apenas um caso limite de outras duas mecânicas: a Mecânica Relativística (que assume que existe um valor máximo de velocidade com o qual uma partícula pode viajar pelo espaço) e a Mecânica Quântica (que assume que ondas podem ser tratadas como partículas e vice-versa). Por sua vez, essas duas são casos limites do que é chamado de Teoria Quântica de Campos, ainda em desenvolvimento. Ou seja, a teoria de Newton é apenas uma aproximação boa para corpos macroscópicos com velocidade muito menor que a da luz, que são exatamente os corpos tratados neste trabalho, logo assumiremos que as leis de Newton são verdadeiras.

Antes de enunciar as leis de Newton, precisamos de algumas definições. Para caracterizar qualquer sistema, precisamos compará-lo a algo. Não há configuração absoluta, tudo depende do referencial. Neste trabalho, referenciais nada mais serão do que sistemas de coordenadas, que denotaremos por $\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, em que O é o ponto origem do referencial e os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são uma base. Todos os outros vetores do espaço podem ser escritos como combinação linear destes 3 vetores (naturalmente, trabalharemos com espaços de 3 dimensões). Usaremos somente bases ortonormais, em que os vetores da base são ortogonais entre si e têm módulo unitário ($\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$).

A mecânica Newtoniana obedece o princípio da relatividade (assim como as outras mecânicas citadas antes também o fazem): as leis da física têm a mesma forma para qualquer referencial. Parece um princípio simples, mas é poderosíssimo. Observe que não há restrição sobre o referencial, qualquer referencial serve. Isso é crucial para o objetivo deste trabalho.

Estamos prontos para enunciar as duas primeiras leis de Newton (a terceira lei não é importante neste trabalho, logo não a enunciaremos):

- 1. Um referencial inercial é um referencial no qual o movimento de uma partícula descrito por tal referencial tem aceleração nula se, e somente se, a somatória das forças na partícula é nula.**
- 2. A trajetória de um corpo descrita por um referencial inercial é definida pela equação $\sum_i \vec{F}_i = \dot{\vec{p}}$, em que \vec{F}_i é a i -ésima força atuando no corpo, \vec{p} é o momento linear do corpo e $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.**

Note que a formalização da primeira lei usada é diferente da usual (se a soma das forças num corpo for nula, o corpo se move com velocidade constante). Isso porque a forma usual parece ser apenas consequência da segunda lei (se $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$, então $\vec{p} = m\vec{v}$ é constante). De qualquer maneira, a ideia da primeira lei é definir onde a segunda lei funciona, ou seja, em referenciais inerciais. Se usássemos a forma usual da primeira lei, bastaria dizer que referenciais inerciais são aqueles em que a primeira lei é verdadeira.

Este trabalho tem como objetivo tratar de referenciais não inerciais, onde a segunda lei de Newton não toma a forma descrita pela segunda lei, mas deve ser ainda uma equação diferencial de segunda ordem. E é aqui que o princípio da relatividade é importante: deve haver alguma maneira de obter uma equação semelhante a segunda lei que valha

para referenciais não inerciais. Dado um referencial inercial (chamemos de referencial 1), é fácil descobrir se outro referencial (referencial 2) é ou não é inercial: basta ver se o referencial 2 é acelerado em relação ao referencial 1. Isso inclui tanto translação da origem do referencial 2 quanto rotação dos vetores do referencial 2. Se o referencial 2 não é acelerado em relação ao referencial 1, então o referencial 2 também é inercial. Caso contrário, o referencial 2 não é inercial e precisamos desenvolver uma técnica para usá-lo.

Este trabalho não pretende de maneira alguma fazer algo de inovador. Longe disso, este trabalho é uma coleção de resultados notáveis que serve como texto de acompanhamento para um aluno que estiver fazendo a disciplina de Mecânica Clássica e se deparar com a dificuldade de abandonar o ponto de vista inercial e adotar o ponto de vista não inercial. Não que não haja ótimos livros-texto com o assunto bem discorrido, mas pode-se oferecer uma visão mais profunda (ou seja, com mais cálculos) sobre o assunto. A segunda lei de Newton está tão enraizada em qualquer graduando de Física que, quando alguma situação que não a obedece se apresenta, tendemos a nos perder. Nas sábias palavras de meu orientador, “quando você acha que entendeu, é aí que você não entendeu mesmo”.

Capítulo 1

Formalismo de forças fictícias

1.1 Translação e rotação de referenciais

A segunda lei de Newton só é válida para referenciais inerciais. Nosso objetivo é obter uma equação que tenha a mesma forma que a segunda lei de Newton e que possa ser usada em referenciais não inerciais.

Seja $\{O_*, \hat{x}_*, \hat{y}_*, \hat{z}_*\}$ um referencial inercial e $\{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ um referencial não inercial. O esquema da figura 1.1 exibe os dois referenciais e uma massa m :

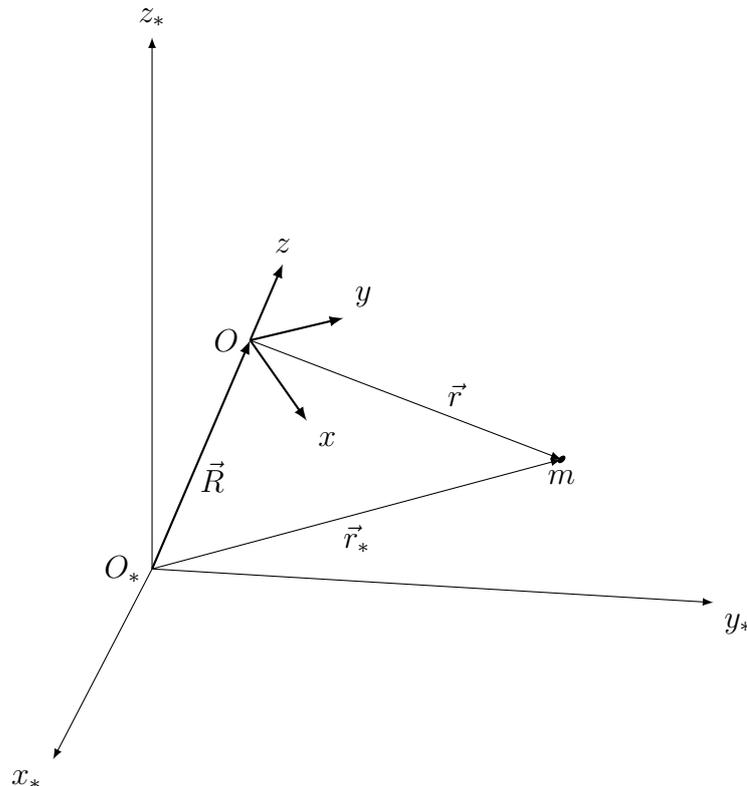


Figura 1.1: Localização da massa m nos dois referenciais. \vec{R} localiza o referencial não inercial a partir do inercial, \vec{r}_* localiza a massa m a partir do referencial inercial e \vec{r} localiza a massa m a partir do referencial não inercial.

Sendo \vec{r}_* e \vec{R} definidos a partir do referencial inercial, é apenas lógico escrevê-los como combinação linear dos vetores deste referencial e \vec{r} escreveremos como combinação linear

dos vetores do referencial não inercial¹

$$\begin{aligned}\vec{r}_* &= x_*\hat{x}_* + y_*\hat{y}_* + z_*\hat{z}_* \\ \vec{R} &= X\hat{x}_* + Y\hat{y}_* + Z\hat{z}_* \\ \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Da figura 1.1 é fácil ver que:

$$\vec{r}_* = \vec{R} + \vec{r}\tag{1.2}$$

Como \vec{r}_* é medido a partir do referencial inercial, a segunda lei de Newton vale na forma usual:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_*\tag{1.3}$$

em que \vec{F}_i representa a i ésima força de interação que a massa sofre.

Devemos agora tomar a segunda derivada de \vec{r}_* na equação (1.2) com auxílio das equações (1.1) e substituir a equação (1.3), obtendo assim algo parecido com a segunda lei de Newton.

As derivadas de \vec{r}_* e \vec{R} são triviais já que os versores do referencial inercial são fixos. O problema está na derivada de \vec{r} . Para generalizar, faremos o desenvolvimento para um vetor qualquer $\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{du_x}{dt}\hat{x} + \frac{du_y}{dt}\hat{y} + \frac{du_z}{dt}\hat{z} \right) + \left(u_x \frac{d\hat{x}}{dt} + u_y \frac{d\hat{y}}{dt} + u_z \frac{d\hat{z}}{dt} \right)\tag{1.4}$$

O primeiro parênteses mede como \vec{u} muda em relação ao referencial não inercial, enquanto o segundo par de parenteses está relacionado à variação do referencial não inercial em relação ao inercial. Para evitar confusão, chamemos o que está à esquerda da igualdade (1.4) de $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_I$ (derivada de \vec{u} no referencial inercial) e o primeiro par de parênteses à direita de $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{NI}$ (derivada de \vec{u} no referencial não inercial).

Resta agora determinar como os versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} variam no tempo. Ora, qualquer movimento infinitesimal pode ser descrito como uma translação infinitesimal mais uma rotação infinitesimal em relação a um eixo instantâneo.² Como a translação do referencial não inercial já estará inclusa na derivada de \vec{R} , basta ver como tal referencial rotaciona. A figura 1.2 ilustra um vetor de módulo constante girando:

¹Podemos escrever qualquer vetor em qualquer base. A escolha que fizemos é de maneira a obter resultados para referenciais não inerciais.

²Na verdade, isso é um teorema. Para a prova, veja o capítulo 9 do livro do Morin [1].

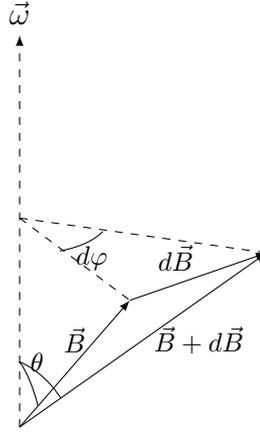


Figura 1.2: Vetor genérico \vec{B} de módulo constante girando com velocidade angular instantânea $\vec{\omega}$. O ângulo $d\varphi$ e o vetor $d\vec{B}$ estão exagerados.

Como o módulo de \vec{B} é constante ($B = |\vec{B} + d\vec{B}|$) (assim como acontece com nossos vetores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z}), temos, pela definição do ângulo medido em radianos ($d\vec{B}$ é infinitesimal, ou seja, é tão pequeno quanto quisermos):

$$dB = B d\varphi \sin \theta \quad (1.5)$$

na qual $B \sin \theta$ é o “raio” e dB é o “arco” descrito pelo ângulo $d\varphi$.

Se considerarmos a derivada temporal ao em vez da diferencial na equação (1.5), teremos (B e θ não variam):

$$\frac{dB}{dt} = B \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \quad (1.6)$$

Através da definição de velocidade angular, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, a equação (1.6) lembra o módulo de um produto vetorial:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B} \quad (1.7)$$

e, pela figura 1.2 e pela regra da mão direita, vemos que a equação (1.7) nos dá também a direção certa de $\frac{d\vec{B}}{dt}$.

Observe que a equação (1.7) é válida para qualquer vetor que gire com módulo constante. Munidos dela, estamos prontos para interpretar o segundo parênteses da equação (1.4):

$$u_x \frac{d\hat{x}}{dt} + u_y \frac{d\hat{y}}{dt} + u_z \frac{d\hat{z}}{dt} = u_x \vec{\omega} \times \hat{x} + u_y \vec{\omega} \times \hat{y} + u_z \vec{\omega} \times \hat{z} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

A equação (1.4) fica:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_I = \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (1.8)$$

A equação (1.8) é a relação de que precisamos para calcular a derivada de \vec{r} na equação (1.2). Mas antes de tudo, ela nos diz que a derivada de $\vec{\omega}$ é igual nos dois referenciais:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_I &= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \\ \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_I &= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{NI} \end{aligned}$$

Voltando para a equação (1.2) e lembrando que \vec{r}_* e \vec{R} estão escritos no referencial inercial, podemos avançar calculando a primeira e a segunda derivada, usando duas vezes a equação (1.8):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_* &= \dot{\vec{R}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \dot{\vec{R}} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}}_* &= \ddot{\vec{R}} + \left(\frac{d}{dt}\right)_I \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{NI} + \left(\frac{d}{dt}\right)_I (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \ddot{\vec{r}}_* &= \ddot{\vec{R}} + \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{NI} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{NI} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}\quad (1.9)$$

Todo este trabalho é justificado pelo fato de que precisamos calcular as derivadas em relação ao referencial inercial, pois sabemos que a segunda lei de Newton só funciona neste referencial. Multiplicando a equação (1.9) por m , podemos rearranjá-la, substituir $m\ddot{\vec{r}}_*$ usando a segunda lei (1.3) e, a partir de agora, denotar as derivadas em relação ao referencial não inercial apenas com pontos:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\quad (1.10)$$

Pode parecer estranho o fato de termos usados dois referenciais em uma equação só, afinal \vec{R} estava escrito no referencial inercial e \vec{r} estava escrito no referencial não inercial. Porém, a equação (1.10) não deixa de estar certa: os vetores existem independentemente da representação usada para descrevê-los. Entretanto, é importante escrever todos os vetores em relação a um único referencial ao usar a equação (1.10).

A equação (1.10) é a segunda lei de Newton “atualizada” para ser usada por qualquer referencial³. Fica claro que se estivermos trabalhando com um referencial inercial, tanto $\ddot{\vec{R}}$ quanto $\vec{\omega}$ são nulos e a equação volta a sua forma usual. Os últimos quatro termos que aparecem do lado direito da equação são chamados de forças fictícias, já que não são forças de interação como a gravitacional ou a eletromagnética, mas sim forças que devem ser consideradas por alguém que se encontra em um referencial inercial para obter a resposta certa ao tentar calcular sua trajetória. Muitos dizem que o nome “forças fictícias” não faz juz aos termos da equação (1.10) já que elas são muito reais para um observador não inercial, então preferem chamar de “pseudo-forças” ou até “forças inerciais”. Os nomes mais aceitos para as forças fictícias que aparecem na equação (1.10) são, da esquerda para a direita, respectivamente: força translacional ($-m\ddot{\vec{R}}$), força centrífuga ($-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$), força de Coriolis ($-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$) e força azimutal ($-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$).

Consideremos um exemplo simples: um referencial gira em relação a um referencial inercial com velocidade angular constante, porém com mesma origem ($\vec{R} = \vec{0}$). Se uma pessoa dista b da origem dos referenciais e rotaciona com mesma velocidade angular que o referencial não inercial, ela está em repouso em relação a esse referencial, logo $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$

³Gaspard Gustave de Coriolis foi o primeiro a chegar nesse resultado, publicado em 1835, e atualmente ele é homenageado através do nome (Força de Coriolis) que é dado ao termo $-2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$ da equação (1.10). Qualquer bom livro-texto de Mecânica Clássica (como os citados neste trabalho [1][2][3][4][5][6]) possui a dedução desse resultado, de uma forma ou de outra.

e $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$. Para o referencial inercial, existe apenas uma força centrípeta de interação de módulo $mb\omega^2$, que aponta radialmente para dentro. Essa força resulta num movimento circular uniforme. Porém, o referencial não inercial percebe, além da força centrípeta de interação, uma força fictícia $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, de módulo $mb\omega^2$ que aponta radialmente para fora. Assim, no referencial não inercial, a força resultante é zero, o que explica a pessoa afirmar que está em equilíbrio em seu referencial.

1.2 Lagrangeana das forças fictícias

Dada a equação obtida na última seção:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad (1.10)$$

podemos escrever uma langrangeana que resulta nessa equação ao usarmos as equações de Euler-Lagrange (supondo que $\vec{\omega}$ dependa apenas do tempo e que todas as forças de interação sejam conservativas, ou seja, que é possível escrever $\sum_i \vec{F}_i = -\vec{\nabla}V$):

$$\mathcal{L} = m\dot{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{2} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) - \frac{m}{2}\dot{\vec{r}} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] - V(\vec{r}) \quad (1.11)$$

Esta langrangeana é, de certa forma, inspirada na lagrangeana para a força de Lorentz no eletromagnetismo.⁴ Para ver que a equação (1.11) funciona, precisaremos escrever os vetores em coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.12)$$

$$\vec{R} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z} \quad (1.13)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z} \quad (1.14)$$

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \quad (1.15)$$

Como os vetores estão escritos em coordenadas cartesianas, suas derivadas são simplesmente as derivadas das componentes.

Cada uma das equações de Euler-Lagrange fornece uma componente da equação (1.10). Então, para verificarmos o resultado no final, calculemos a componente z de (1.10) usando as equações (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15):

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_y z - \omega_z y)\hat{x} + (\omega_z x - \omega_x z)\hat{y} + (\omega_x y - \omega_y x)\hat{z}$$

$$[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]_z = \omega_x(\omega_z x - \omega_x z) - \omega_y(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_z(\omega_x x + \omega_y y) - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial z} - \ddot{Z} - \omega_z(\omega_x x + \omega_y y) + (\omega_x^2 + \omega_y^2)z - 2\omega_x \dot{y} + 2\omega_y \dot{x} - \dot{\omega}_x y + \dot{\omega}_y x \quad (1.16)$$

⁴A força de Lorentz para um carga elétrica q com velocidade \vec{v} em campos elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ e magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ é $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ e pode ser obtida a partir da langrangiana $\mathcal{L}_L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - q(V - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$, como está mostrado no capítulo 1 do livro do Goldstein [2].

Precisaremos também escrever a lagrangeana detalhadamente, de maneira a ver as dependências dela em z e \dot{z} . Os dois primeiros termos do lado direito da equação (1.11) são:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{2} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) &= \left(\dot{x} + \dot{X} + \omega_y z - \omega_z y \right) \dot{x} \\ &+ \left(\dot{y} + \dot{Y} + \omega_z x - \omega_x z \right) \dot{y} + \left(\dot{z} + \dot{Z} + \omega_x y - \omega_y x \right) \dot{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot [\omega \times (\omega \times \vec{r})] &= \omega_x x (\omega_y y + \omega_z z) - (\omega_y^2 + \omega_z^2) x^2 \\ &+ \omega_y y (\omega_x x + \omega_z z) - (\omega_x^2 + \omega_z^2) y^2 + \omega_z z (\omega_x x + \omega_y y) - (\omega_x^2 + \omega_y^2) z^2 \end{aligned}$$

Assim, para simplificar, podemos escrever a lagrangeana na equação (1.11) como uma parte que dependa de z e \dot{z} e uma outra parte (uma função f) que não dependa de z e \dot{z} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= m(\omega_y \dot{x} - \omega_x \dot{y})z - m(\omega_x \omega_z x + \omega_y \omega_z y)z + \frac{m}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)z^2 \\ &+ \frac{m}{2}\dot{z}^2 + m(\dot{Z} + \omega_x y - \omega_y x)\dot{z} - V(\vec{r}) + f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad (1.17) \end{aligned}$$

A equação de Euler-Lagrange para z é:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \quad (1.18)$$

Usando a equação (1.17) para calcular as derivadas em (1.18):

$$m \frac{d}{dt} (\dot{z} + \dot{Z} + \omega_x y - \omega_y x) = m[\omega_y \dot{x} - \omega_x \dot{y} - \omega_x \omega_z x - \omega_y \omega_z y + (\omega_x^2 + \omega_y^2)z] - \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\ddot{z} + \ddot{Z} + \dot{\omega}_x y + \omega_x \dot{y} - \dot{\omega}_y x - \omega_y \dot{x} = \omega_y \dot{x} - \omega_x \dot{y} - \omega_z (\omega_x x + \omega_y y) + (\omega_x^2 + \omega_y^2)z - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial z} - \ddot{Z} - \omega_z (\omega_x x + \omega_y y) + (\omega_x^2 + \omega_y^2)z - 2\omega_x \dot{y} + 2\omega_y \dot{x} - \dot{\omega}_x y + \dot{\omega}_y x \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é igual a equação (1.16), como queríamos demonstrar. Alguns exemplos de como trabalhar com esta lagrangeana estão no apêndice.

Capítulo 2

Aplicações e exemplos

Nesse capítulo serão resolvidos alguns exemplos usando o formalismo introduzido no capítulo anterior para mostrar o quão poderoso é o artifício de forças fictícias.

2.1 Pêndulo acelerado

Um pêndulo simples (massa m e comprimento L) está montado dentro de um vagão de trem na superfície da Terra que está acelerando para a direita, com uma aceleração constante \vec{A} , como mostra a figura 2.1.

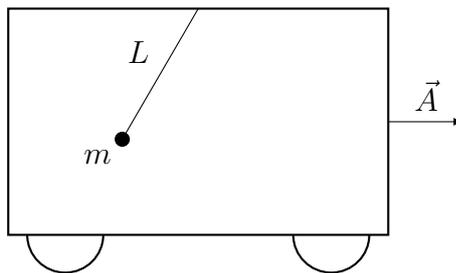


Figura 2.1: Pêndulo de massa m e comprimento L num vagão que tem aceleração \vec{A} em relação a superfície da Terra.

Nesse exemplo, não é difícil perceber que $\vec{\omega}$, da equação (1.10), é nula, ou seja, nosso referencial não inercial (o vagão) está apenas transladando em relação a um referencial inercial. Visto pelo referencial do vagão, que possui aceleração $\ddot{\vec{R}} = \vec{A}$, a massa m está sujeita a duas forças de interação: a força peso \vec{P} e a força de tração da corda \vec{T} , e sujeita a uma força fictícia: a força translacional para a esquerda $\vec{F} = -m\vec{A}$, como prevê a equação (1.10). Para facilitar, coloquemos a origem do referencial não inercial no ponto em que a corda está presa no teto do vagão e desenhemos as forças:

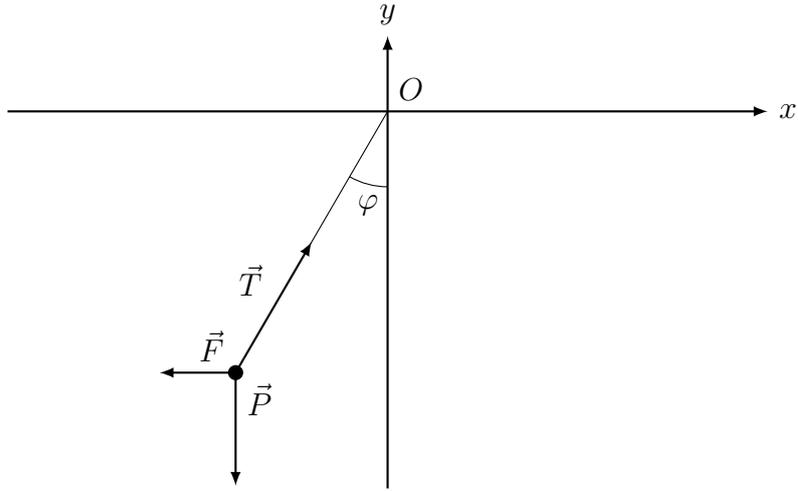


Figura 2.2: Esquema das forças sobre o pêndulo no referencial não inercial.

Usando os versores \hat{x} e \hat{y} para indicar as direções, podemos escrever as forças baseadas na figura 2.2:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\hat{y} \\ \vec{F} &= -mA\hat{x} \\ \vec{T} &= T(\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y})\end{aligned}\quad (2.1)$$

\vec{P} e \vec{F} são constantes e \vec{T} sempre aponta na direção da corda, dependendo de φ . Podemos introduzir um sistema de coordenadas polares da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\hat{r} &= -\sin \varphi \hat{x} - \cos \varphi \hat{y} \\ \hat{\varphi} &= -\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Note que essas não são as coordenadas polares convencionais, pois φ (que foi definido para poder representar o ângulo que a corda faz com a vertical - na figura 2.2) está definido a partir da parte negativa do eixo y . Os versores da base cartesiana na base polar são

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (\hat{r} \cdot \hat{x})\hat{r} + (\hat{\varphi} \cdot \hat{x})\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{r} - \cos \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{y} &= (\hat{r} \cdot \hat{y})\hat{r} + (\hat{\varphi} \cdot \hat{y})\hat{\varphi} = -\cos \varphi \hat{r} + \sin \varphi \hat{\varphi}\end{aligned}\quad (2.3)$$

onde os produtos escalares representam a projeção dos versores da base cartesiana nos versores da base polar. Podemos usar as equações (2.3) para reescrever as equações (2.1):

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\hat{y} = mg(\cos \varphi \hat{r} - \sin \varphi \hat{\varphi}) \\ \vec{F} &= -mA\hat{x} = mA(\sin \varphi \hat{r} + \cos \varphi \hat{\varphi}) \\ \vec{T} &= -T(-\sin \varphi \hat{x} - \cos \varphi \hat{y}) = -T\hat{r}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Agora só precisamos da segunda derivada do vetor posição (\vec{r}) para usar a equação (1.10), a segunda lei de Newton modificada. Lembrando que o módulo de \vec{r} é constante (L) e das equações (2.2) e (2.3), temos:

$$\vec{r} = L\hat{r} = L(-\sin \varphi \hat{x} - \cos \varphi \hat{y})$$

$$\dot{\vec{r}} = L \frac{d}{dt}(-\sin \varphi \hat{x} - \cos \varphi \hat{y}) = L \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi}(-\sin \varphi \hat{x} - \cos \varphi \hat{y}) = L\dot{\varphi}(-\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$$

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= L \frac{d}{dt} [\dot{\varphi}(-\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})] = L[\ddot{\varphi}(-\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) + \dot{\varphi}^2(\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y})] \\ \ddot{\vec{r}} &= L\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - L\dot{\varphi}^2\hat{r}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Substituindo as equações (2.4) e (2.38) na equação (1.10):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T}$$

$$mL\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - mL\dot{\varphi}^2\hat{r} = mg(\cos \varphi \hat{r} - \sin \varphi \hat{\varphi}) + mA(\sin \varphi \hat{r} + \cos \varphi \hat{\varphi}) - T\hat{r}\quad (2.6)$$

A equação (2.6) é uma equação vetorial e podemos separá-la em componentes:

$$\hat{r} : \quad -mL\dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi + mA \sin \varphi - T\quad (2.7)$$

$$\hat{\varphi} : \quad L\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi + A \cos \varphi\quad (2.8)$$

A equação (2.7) não é muito útil devido à presença de T . Entretanto, a equação (2.8)¹ é suficiente para achar $\varphi(t)$. Aliás, a mudança para coordenadas polares foi feita para que obtivéssemos uma equação independente de T . Também é possível resolver esse problema usando coordenadas cartesianas com um pouco mais de trabalho.

É nesse momento que, se estivéssemos resolvendo um pêndulo sem aceleração, faríamos a aproximação $\sin \varphi \approx \varphi$ e resolveríamos a equação diferencial (2.8). Porém, nesse caso, tal aproximação é ruim, pois o pêndulo não ficará oscilando perto de $\varphi = 0$. Ou seja, sua posição de equilíbrio será outra, como poderíamos esperar. Para calcular tal posição de equilíbrio φ_{eq} , basta lembrar que $\ddot{\varphi}_{eq} = 0$ e usar a equação (2.8):

$$0 = -g \sin \varphi_{eq} + A \cos \varphi_{eq}$$

$$\varphi_{eq} = \arctan\left(\frac{A}{g}\right)\quad (2.9)$$

Assim, precisamos fazer uma mudança de variável para um novo ângulo θ que represente a oscilação em torno de φ_{eq} ², em que a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ seja aceitável.

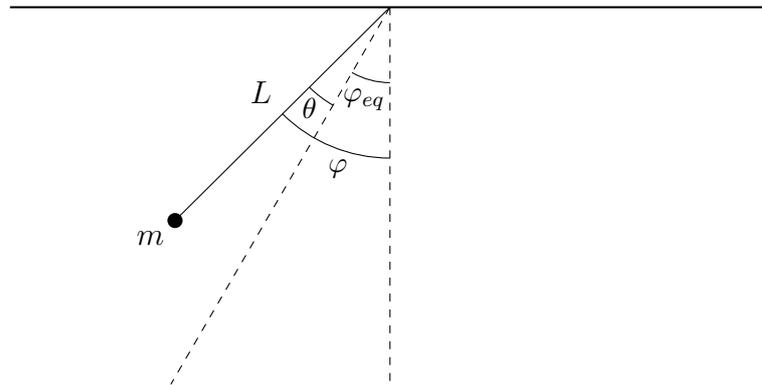


Figura 2.3: Definição do ângulo θ a partir de φ_{eq} .

Da figura 2.3, é fácil ver que:

$$\varphi(t) = \theta(t) + \varphi_{eq} = \theta(t) + \arctan\left(\frac{A}{g}\right)\quad (2.10)$$

¹Veja o apêndice para uma dedução alternativa, através de uma lagrangeana.

²Como diz o capítulo 12 do livro do French [3], desprezadas as oscilações, a equação (2.9) é a base para qualquer acelerômetro: dada a aceleração gravitacional e se for possível medir φ_{eq} , podemos obter a aceleração linear de qualquer referencial.

Como conclusão direta da equação (2.10) temos $\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}$. Substituindo na equação (2.8):

$$L\ddot{\theta} = -g \sin(\theta + \varphi_{eq}) + A \cos(\theta + \varphi_{eq})$$

$$L\ddot{\theta} = -g(\sin \theta \cos \varphi_{eq} + \cos \theta \sin \varphi_{eq}) + A(\cos \theta \cos \varphi_{eq} - \sin \theta \sin \varphi_{eq})$$

$$L\ddot{\theta} = -\sin \theta (g \cos \varphi_{eq} + A \sin \varphi_{eq}) + \cos \theta (A \cos \varphi_{eq} - g \sin \varphi_{eq}) \quad (2.11)$$

Foram usadas as relações trigonométricas de seno e cosseno de uma soma para se obter a equação (2.11). Para simplificá-la, precisamos calcular $\sin \varphi_{eq}$ e $\cos \varphi_{eq}$. A figura 2.4 nos ajudará:

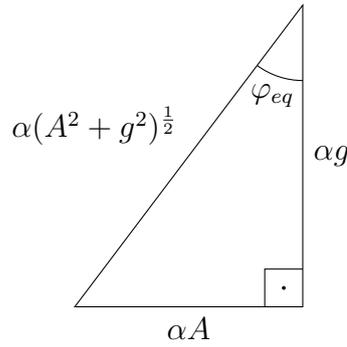


Figura 2.4: Triângulo retângulo que relaciona φ_{eq} a A e a g , para qualquer α real positivo.

Note que a figura 2.4 é consistente com a equação (2.9). Dela, temos:

$$\sin \varphi_{eq} = \frac{A}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \cos \varphi_{eq} = \frac{g}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.12)$$

Substituindo as equações (2.12) na equação (2.11):

$$L\ddot{\theta} = -\sin \theta \left(\frac{g^2}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{A^2}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \cos \theta \left(\frac{Ag}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{gA}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$L\ddot{\theta} = - \left(\frac{A^2 + g^2}{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \sin \theta = 0 \quad (2.13)$$

cuja solução é

$$\theta(t) = B \cos(\omega t + \delta) \quad (2.14)$$

A equação (2.36) é a equação diferencial que queríamos desde o início e a equação (2.14) é sua solução se supormos que $\sin \theta \approx \theta$ (B e δ são as constantes que naturalmente aparecem numa solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem). Ela é muito

semelhante à equação de um pêndulo desacelerado, porém com uma frequência angular ω diferente:

$$\omega = \left(\frac{(A^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{|\vec{g}_{ef}|}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

em que $\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{A}$ é a gravidade efetiva que o pêndulo sente. Ou seja, o pêndulo acelerado nada mais é que um pêndulo simples com aceleração da gravidade \vec{g}_{ef} , o que resulta em uma posição de equilíbrio dada por (2.9) e uma frequência de pequenas oscilações dada por (2.15).³ É interessante notar que, se alguém estiver dentro do vagão e supostamente não puder ver o lado de fora (o vagão não tem janelas), ele pode concluir que está na superfície da Terra com aceleração \vec{A} em relação a superfície (figura 2.5a), mas pode também concluir que o vagão está parado na superfície de um planeta com aceleração da gravidade \vec{g}_{ef} e inclinado em relação a superfície de tal planeta (figura 2.5b).

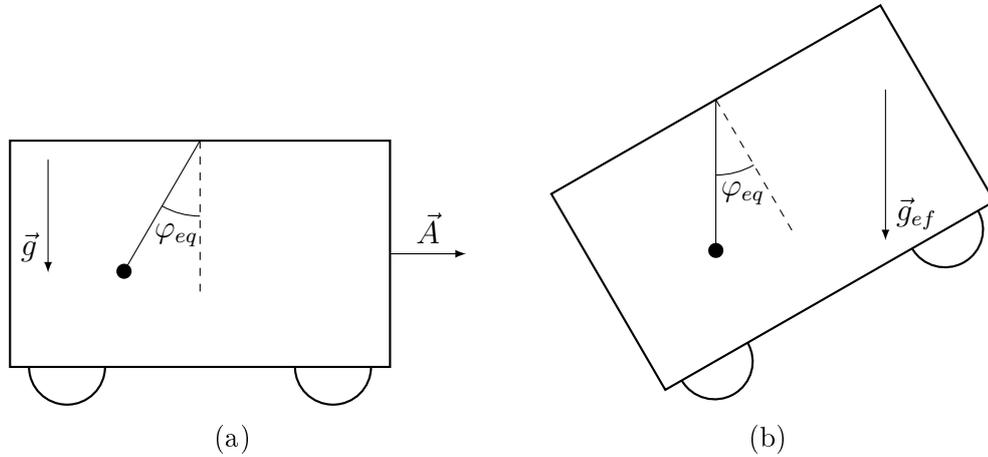


Figura 2.5: (a) Vagão de trem na superfície da Terra com aceleração \vec{A} em relação a superfície. (b) Vagão de trem inclinado na superfície de um planeta com aceleração da gravidade \vec{g}_{ef} e parado em relação à superfície.

Nenhum experimento local, que uma pessoa que estiver dentro vagão possa fazer, revela de qual dos casos realmente se trata (“local” no sentido de “sem interagir com o exterior do vagão”). Esse é um dos principais argumentos que Einstein usou para fundamentar a Relatividade Geral. Se não há como diferenciar uma força gravitacional de uma força fictícia, então por que tratá-la diferentemente? Assim, a gravidade pode ser apenas uma questão de geometria.⁴

Podemos ir um pouco além com a equação (2.14) e ver que, se $A \ll g$ (o que é de se esperar, já que a aceleração da gravidade é muito maior do que a aceleração que qualquer vagão possa alcançar, a não ser que o vagão desacelere por causa de alguma batida), φ_{eq} é próximo de 0. Assim, podemos supor que $\theta(0) = -\varphi_{eq}$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ (inicialmente a massa estava parada e o fio estava na vertical) para achar B e δ .

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= -B\omega \sin(\delta) = 0 \\ \delta &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

³Veja o capítulo 9 do livro do Taylor [4] para um tratamento mais direto.

⁴Veja o capítulo 9 do livro do D’Inverno [7] para uma leitura mais profunda sobre como Einstein desenvolveu a Relatividade Geral.

(já que B não pode ser zero, caso contrário a solução seria nula para qualquer tempo)

$$\theta(0) = B \cos(0) = -\arctan\left(\frac{A}{g}\right)$$

$$B = -\arctan\left(\frac{A}{g}\right) \quad (2.17)$$

Finalmente, substituindo (2.14), (2.16) e (2.17) em (2.10):

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{A}{g}\right) [1 - \cos(\omega t)], \quad \text{se } A \ll g$$

pelas condições iniciais impostas.

2.2 Marés

Devido à atração da Lua, podemos observar, duas vezes por dia, que o nível das marés no mundo todo possui máximos e mínimos. E a formalização de forças fictícias é perfeita para uma análise detalhada desse efeito.

Considerando a Terra esférica e toda coberta por água, a ideia principal está em usar a equação (1.10) para uma gota de massa m próxima à Terra, com um referencial inercial no centro da Lua e um referencial não inercial no centro da Terra. Considere o seguinte caso estático:

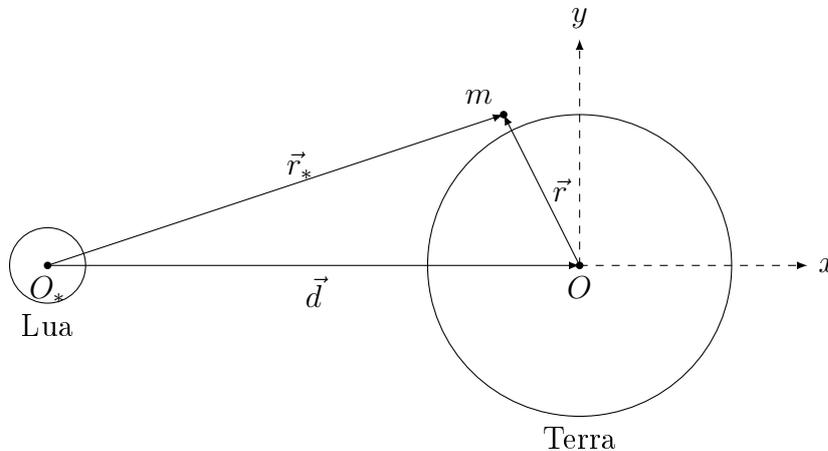


Figura 2.6: \vec{d} liga o centro da Lua O_* (a origem do referencial inercial) ao centro da Terra O (a origem do referencial não inercial) e \vec{r} localiza qualquer gota na superfície da Terra a partir de seu centro. As distâncias e os tamanhos estão exagerados.

Usaremos \vec{d} em vez de \vec{R} , nesse caso, para evitar confusão com o raio da Terra (R_T) que aparecerá mais a frente. Pode parecer estranho o fato de considerarmos o centro da Lua como um referencial inercial. Afinal, sabemos que é a Lua que translada em volta da Terra e, seguindo essa lógica, deveríamos considerar o centro da Terra como um referencial inercial. Contudo, ao considerarmos apenas os movimentos relativos da Terra e da Lua, podemos afirmar que a Lua translada em volta da Terra ou, com a mesma convicção, podemos afirmar que a Terra translada em volta da Lua. É tudo uma questão de ponto de vista e, no fim, o ponto de vista que adotaremos é o que fornece melhores resultados.

Seria natural pensar que, diferentemente do exemplo anterior, esse seria um caso em que teríamos rotação e $\vec{\omega}$ na equação (1.10) não seria nulo. De certa forma, isso está certo. Porém, trataremos aqui de um caso estático, ou seja, analisaremos o que acontece com as marés em um dado instante, sem considerar que o tempo passa. É como se tirássemos uma fotografia da Terra em um dado instante e a partir daí explicaremos o que causa as marés. Sendo assim, trataremos o problema fazendo com que os versores do referencial inercial não mudem no tempo e, como consequência, $\vec{\omega} = \vec{0}$. A força de atração na Terra pela Lua é dada pela lei de gravitação e, usando a figura 2.6, fica:

$$F_{L \rightarrow T} = -\frac{GM_L M_T}{d^3} \vec{d} = -\frac{GM_L M_T}{d^2} \hat{x} = M_T \vec{A}$$

onde

$$\vec{A} = -\frac{GM_L}{d^2} \hat{x} \quad (2.18)$$

sendo G a constante de gravitação, M_L a massa da Lua e M_T , a massa da Terra.

A aceleração \vec{A} da equação (2.18) é a aceleração centrípeta que a Terra sofre devido sua “translação ao redor da Lua” e que devemos considerar ao usarmos a equação (1.10). Assim, para o referencial acelerado, a massa m está sujeita à força de atração da Terra $\vec{F}_{T \rightarrow m}$ (que admitiremos ser constante, pois a distância de uma gota até o centro da Terra é aproximadamente igual o raio da Terra), à força de atração da Lua $\vec{F}_{L \rightarrow m}$, à força de empuxo \vec{F}_e do princípio de Arquimedes e à força fictícia $\vec{F}_f = -m\vec{A}$:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}_{T \rightarrow m} + \vec{F}_{L \rightarrow m} + \vec{F}_e + \vec{F}_f \\ m\ddot{\vec{r}} &= m\vec{g} - \frac{GmM_L}{r_*^2} \hat{r}_* + \vec{F}_e + \frac{GmM_L}{d^2} \hat{x} \\ m\ddot{\vec{r}} &= m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_{maré} \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que

$$\vec{F}_{maré} = -GmM_L \left(\frac{\hat{r}_*}{r_*^2} - \frac{\hat{x}}{d^2} \right) \quad (2.20)$$

A força dada pela equação (2.20) é a responsável pelas marés, já que é a única que aparece, especialmente, em nosso tratamento do problema, sendo que as outras duas estão sempre presentes em todos os tratamentos de gotas de água na superfície da Terra. No ponto da Terra mais próximo da Lua, \vec{r}_* e \vec{d} estão na mesma direção e $r_* < d$, logo a força aponta no sentido de $-\hat{x}$. No ponto mais distante, \vec{r}_* e \vec{d} ainda estão na mesma direção, porém $r_* > d$, assim a força aponta no sentido \hat{x} . Nos polos da Terra, se considerarmos que a distância entre a Terra e a Lua é bem maior que o raio da Terra ($d \gg R_T$), as componentes x de \vec{r}_* e \vec{d} se anulam e a força aponta para dentro da Terra. A seguinte figura ilustra como deve ser a maré com a Lua na posição dada pela figura 2.6:

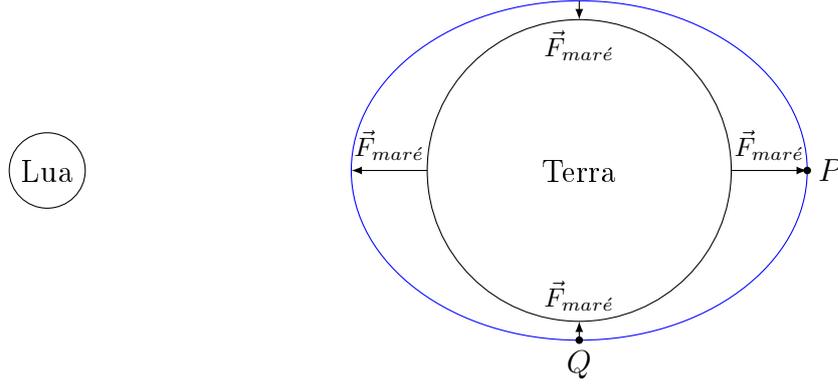


Figura 2.7: A curva azul representa a superfície do oceano e está exagerada. Os pontos P e Q representam, respectivamente, pontos de máximo e mínimo da maré.

Olhemos agora para a equação (2.19). Considerando que a gota de massa m está em equilíbrio em relação à Terra ($\vec{r} = \vec{0}$), podemos reescrever a equação:

$$-\vec{F}_e = \vec{F}_{T \rightarrow m} + \vec{F}_{maré} \quad (2.21)$$

Como a força de empuxo \vec{F}_e é sempre normal à superfície em fluido estático, temos pela equação (2.21) que $\vec{F}_{T \rightarrow m} + \vec{F}_{maré}$ também deve ser normal à superfície. Além disso, tanto $\vec{F}_{T \rightarrow m}$ quanto $\vec{F}_{maré}$ são conservativas, de maneira que podemos escrever:

$$\vec{F}_{T \rightarrow m} + \vec{F}_{maré} = -\vec{\nabla}V \quad (2.22)$$

$$V = V_g + V_{maré} \quad (2.23)$$

em que V_g é a energia potencial gravitacional terrestre e

$$V_{maré} = -GmM_L \left(\frac{1}{r_*} + \frac{x}{d^2} \right) \quad (2.24)$$

As equações (2.21) e (2.22) nos dizem que $-\vec{\nabla}V$ é sempre ortogonal à superfície do oceano. Isso implica que V é constante sobre a superfície do oceano (já que o gradiente de uma função é sempre ortogonal à direção em que não há acréscimo nem decréscimo da função). Assim, V , definida pela equação (2.23), deve ser a mesma em um ponto máximo da maré e em um ponto mínimo da maré (pontos P e Q da figura 2.7, respectivamente).

$$V(P) = V(Q)$$

$$V_g(P) + V_{maré}(P) = V_g(Q) + V_{maré}(Q)$$

$$V_g(P) - V_g(Q) = V_{maré}(Q) - V_{maré}(P) \quad (2.25)$$

Se a gota de água estiver próxima à Terra (como já supomos no começo), podemos aproximar a distância da gota até o centro da Terra ao raio da Terra ($r \approx R_T$) para os termos de energia da maré. Assim, podemos calcular os termos do lado direito da equação (2.25) um a um, usando a equação (2.24). No ponto P da figura 2.7, $r_* = d + R_T$ e $x = R_T$ e, no ponto Q , $r_* = \sqrt{d^2 + R_T^2}$ e $x = 0$.

$$V_{maré}(P) = -GmM_L \left(\frac{1}{d + R_T} + \frac{R_T}{d^2} \right) \quad (2.26)$$

$$V_{maré}(Q) = -GmM_L \frac{1}{\sqrt{d^2 + R_T^2}} \quad (2.27)$$

O lado esquerdo da equação (2.25) é simplesmente mgh , em que h é a diferença de altura da maré baixa e da maré alta. Substituindo isso, as equações (2.26) e (2.27) e o fato de que $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ na equação (2.25):

$$mgh = m \frac{GM_T}{R_T^2} h = -GmM_L \frac{1}{\sqrt{d^2 + R_T^2}} + GmM_L \left(\frac{1}{d + R_T} + \frac{R_T}{d^2} \right)$$

$$h = \frac{M_L R_T^2}{M_T} \left(\frac{R_T}{d^2} + \frac{1}{d + R_T} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + R_T^2}} \right) \quad (2.28)$$

Sendo a distância entre a Lua e a Terra muito maior do que o raio da Terra ($d \gg R_T$), podemos fazer algumas aproximações na equação (2.28) a fim de deixar h mais agradável. As séries de McLaurin para o segundo e o terceiro termo dentro dos parenteses na equação (2.28) são:

$$\frac{1}{d + R_T} = \frac{1}{d} - \frac{R_T}{d^2} + \frac{R_T^2}{d^3} + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{d^2 + R_T^2}} = \frac{1}{d} - 0 - \frac{R_T^2}{2d^3} + \dots$$

Se truncarmos as séries no segundo termo, obteremos $h = 0$, o que não é um bom resultado. Logo, indo até o terceiro termo das séries:

$$h \approx \frac{M_L R_T^2}{M_T} \left(\frac{R_T}{d^2} + \frac{1}{d} - \frac{R_T}{d^2} + \frac{R_T^2}{d^3} - \frac{1}{d} + \frac{R_T^2}{2d^3} \right) = \frac{3M_L R_T^4}{2M_T d^3} \quad (2.29)$$

Usando os valores aceitos para as constantes na equação (2.29) ($M_L = 7.36 \cdot 10^{22} Kg$, $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} Kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6 m$, $d = 3.84 \cdot 10^8 m$) obtemos $h \approx 0.54m$.⁵ Observe que este tratamento não é exclusivo para marés devido a Lua. A equação (2.29) seria a mesma para marés do Sol, com d sendo a distância entre a Terra e o Sol ($d = 1.5 \cdot 10^{11} m$) e trocando a massa da Lua pela massa do Sol ($M_S = 1.99 \cdot 10^{30} Kg$), o que resulta em $h \approx 0.25m$. Sendo assim, qualquer corpo poderia exercer um efeito de maré sobre a Terra, mas a Lua e o Sol fornecem resultados mais significativos. Ao considerar os efeitos da Lua e do Sol juntos, podemos ter várias configurações: se eles estiverem alinhados com a Terra, os efeitos se somam e temos $h_{máximo} \approx (0.54 + 0.25)m = 0.79m$; se eles e a Terra estiverem em vértices de um triângulo retângulo, os efeitos se subtraem e temos $h_{mínimo} \approx (0.54 - 0.25)m = 0.29m$; em qualquer outra configuração, o valor de h estará entre os dois últimos valores.

É importante notar que este tratamento não é exato. A Terra não é uma esfera e está longe de estar totalmente coberta por água. Essas e outras aproximações acarretam em marés de alguns metros de diferença⁶, porém as marés meso-oceânicas (marés observadas a uma grande distância dos continentes) são bem próximas ao resultado obtido.

⁵Para um tratamento alternativo das marés, veja o capítulo 5 do livro do Thornton e do Marion [5].

⁶Por exemplo, é possível observar diferenças de altura de mais de 2 metros no porto de Paranaguá - <http://www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas/60132Jan2016.htm>

2.3 Queda livre

Uma partícula de massa m é solta a uma altura h da superfície da Terra (h é muito menor que o raio da Terra R).

Embora saibamos que o centro da Terra não constitui um referencial inercial, para os propósitos deste exemplo, ele será considerado um referencial inercial. O nosso referencial não inercial gira junto com a Terra (com mesma velocidade angular da Terra) e está localizado na superfície. A figura 2.8 ilustra a situação:

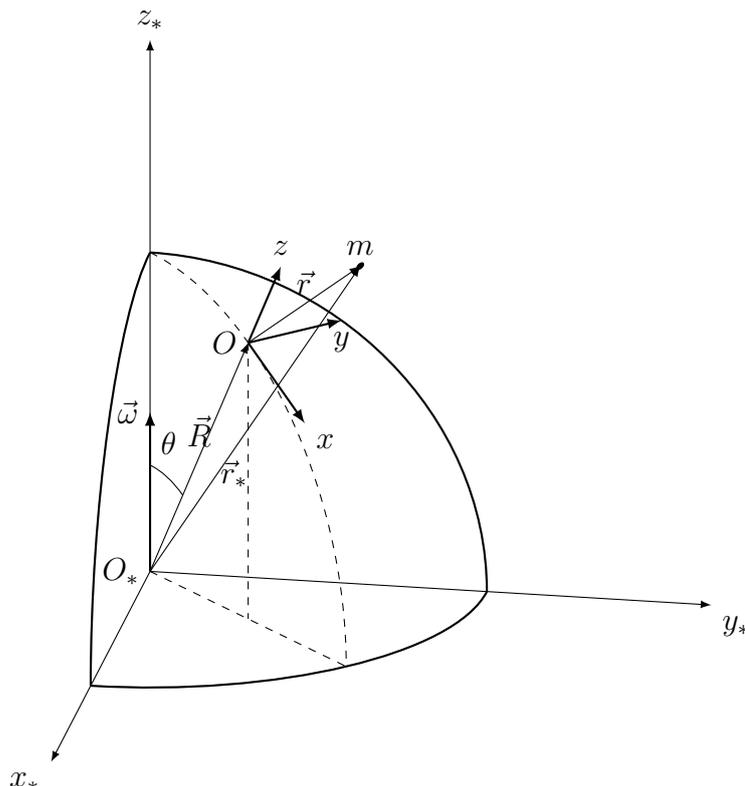


Figura 2.8: Representação de uma parte da Terra, com um referencial inercial $O_*x_*y_*z_*$ no centro da Terra e um referencial não-inercial $Oxyz$ na superfície da Terra com rotação $\vec{\omega} = \omega \hat{z}_*$ e colatitude θ . \vec{R} localiza o referencial não inercial a partir do inercial, \vec{r}_* localiza a massa m a partir do referencial inercial e \vec{r} localiza a massa m a partir do referencial não inercial. Tanto \vec{r} quanto \vec{r}_* estão exagerados.

Note que, como anteriormente, $\vec{r}_* = \vec{R} + \vec{r}$. A única força real (de interação) sofrida pela massa m é a força de atração gravitacional da Terra \vec{F}_g . Assim, a equação (1.10) fica:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_g}{m} - \ddot{\vec{R}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad (2.30)$$

em que $\vec{\omega} = \omega \hat{z}_*$ é a velocidade angular da Terra.

Vamos analisar termo a termo. Se a partícula estiver próxima à superfície da Terra ($r \ll R$), o primeiro termo do lado direito da equação (2.30) (a única força real dividida pela massa) é:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r_*^2} \hat{r}_* \approx -\frac{GM_T}{R^2} \hat{R} = \vec{g} \quad (2.31)$$

Para descobrirmos o segundo termo da equação (2.30) (a força devido a translação do referencial não inercial), notamos que tanto \vec{R} quanto $\vec{\omega}$ são constantes para o referencial

não inercial.

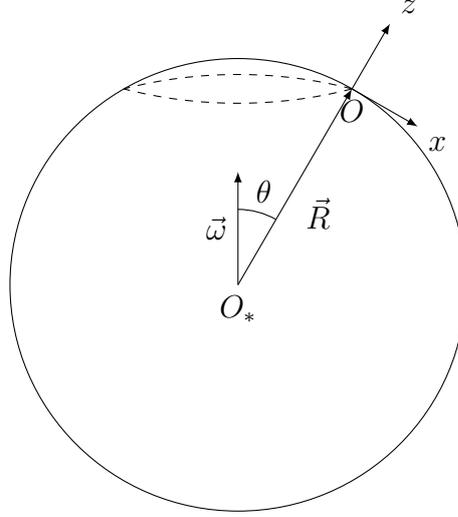


Figura 2.9: Representação da Terra cortada ao meio.

Da figura 2.9:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= R\hat{z} \\ \vec{\omega} &= \omega(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z})\end{aligned}\quad (2.32)$$

de modo que podemos usar a relação (1.8):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{R}} &= \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\omega} \times \vec{R} \\ \ddot{\vec{R}} &= \left(\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})\end{aligned}\quad (2.33)$$

Agrupando os três primeiros termos da equação (2.30) (os dois já citados e a força centrífuga) em um só e usando (2.31), (2.33) e o fato de que $R \gg r$:

$$\frac{\vec{F}_{T \rightarrow m}}{m} - \ddot{\vec{R}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})) \approx \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \equiv \vec{g}_{ef} \quad (2.34)$$

\vec{g}_{ef} definida na equação (2.34) é a “aceleração da gravidade” observada na superfície da Terra. Ou seja, quando medimos a aceleração da força de atração que a Terra exerce sobre qualquer corpo na superfície da Terra, na verdade o que medimos é a \vec{g}_{ef} . Ela é máxima nos polos da Terra, onde $\vec{\omega} \times \vec{R}$ é nulo, e mínima na linha no Equador, onde $\vec{\omega}$ e \vec{R} são ortogonais. Porém, a diferença entre \vec{g}_{ef} e \vec{g} é desprezível, já que ω é muito pequeno. Para se ter uma ideia desta diferença, basta calculá-la usando as equações (2.32):

$$\begin{aligned}\vec{g}_{ef} &= -g\hat{z} - \vec{\omega} \times [\omega(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}) \times R\hat{z}] = -g\hat{z} - \omega(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}) \times R\omega \sin\theta\hat{y} \\ \vec{g}_{ef} &= -g\hat{z} + R\omega^2 \sin\theta(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{z})\end{aligned}\quad (2.35)$$

Da equação (2.35) é fácil ver que \vec{g}_{ef} é exatamente \vec{g} nos polos da Terra ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$). Para o equador ($\theta = \pi/2$), podemos usar $R = 6.4 \cdot 10^6 m$, $\omega = 7.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ e $g = 9.8 m/s^2$ para obtermos $g_{ef} \approx 9.766 m/s^2$, que é 0.35% menor que g . Logo, mesmo

no ponto onde a diferença é máxima, ela é desprezível e podemos considerar a direção vertical \hat{z} como a direção de \vec{g}_{ef} .

Voltemos para a equação (2.30). Se considerarmos que $\vec{\omega}$ é constante, como já fizemos até agora, o último termo se anula e ficamos com:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}_{ef} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é uma equação diferencial de segunda ordem que precisamos resolver para percebermos o efeito da força de Coriolis (o segundo termo do lado direito, a menos de um fator de massa). Podemos escrever as derivadas do vetor posição \vec{r} em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} \quad (2.38)$$

e podemos calcular o produto vetorial usando $\vec{\omega}$ das equações (2.32) e a equação (2.37):

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} &= \omega(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}) \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}) \\ \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} &= -\omega \cos\theta\dot{y}\hat{x} + \omega(\sin\theta\dot{z} + \cos\theta\dot{x})\hat{y} - \omega \sin\theta\dot{y}\hat{z} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Usando as equações (2.36), (2.38) e (2.39) e lembrando do fato de que aproximamos a direção de \vec{g}_{ef} como a direção \hat{z} , temos:

$$\ddot{x} = 2\omega \cos\theta\dot{y} \quad (2.40)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\sin\theta\dot{z} + \cos\theta\dot{x}) \quad (2.41)$$

$$\ddot{z} = -g_{ef} + 2\omega \sin\theta\dot{y} \quad (2.42)$$

Como esperado, temos três equações diferenciais, uma para cada coordenada⁷, porém acopladas. Para resolvê-las, derivamos a equação (2.41) e substituímos as outras duas:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -2\omega \sin\theta\ddot{z} - 2\omega \cos\theta\ddot{x} \\ \ddot{y} &= -2\omega \sin\theta(-g_{ef} + 2\omega \sin\theta\dot{y}) - 2\omega \cos\theta(2\omega \cos\theta\dot{y}) \\ \ddot{y} &= 2g_{ef}\omega \sin\theta - 4\omega^2 \sin^2\theta\dot{y} - 4\omega^2 \cos^2\theta\dot{y} \\ \ddot{y} + 4\omega^2\dot{y} &= 2g_{ef}\omega \sin\theta \end{aligned} \quad (2.43)$$

Agora temos uma EDO desacoplada, porém de terceira ordem (entretanto, devemos obter apenas duas constantes na solução geral, pois a equação original (2.41) é de segunda ordem). Vamos resolver primeiro a parte homogênea, com solução $y_h(t)$:

$$\ddot{y}_h + 4\omega^2\dot{y}_h = 0 \quad (2.44)$$

Então a terceira derivada de y_h é múltipla da primeira derivada, o que deve resultar numa solução exponencial:

$$\left. \begin{aligned} y_h(t) &= e^{\beta t} \\ \dot{y}_h(t) &= \beta e^{\beta t} \\ \ddot{y}_h(t) &= \beta^3 e^{\beta t} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

⁷Para um dedução alternativa usando o método de Lagrange, veja o apêndice.

Substituindo (2.45) em (2.44):

$$\beta^3 e^{\beta t} + 4\omega^2 \beta e^{\beta t} = 0$$

$$\beta = \pm 2i\omega$$

Logo, a solução homogênea é uma exponencial imaginária ($\beta = 0$ também é solução, mas não seria exponencial, logo não nos interessa). Porém, como sabemos que y deve ser sempre real (pois trata-se de uma posição), podemos escrever a solução como um seno:

$$y_h(t) = A \sin(2\omega t + \delta) \quad (2.46)$$

onde A e δ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais. Precisamos agora da solução particular $y_p(t)$. Olhando para a equação (2.43), podemos ver que existe um fator constante do lado direito da equação. Assim, podemos supor uma solução linear:

$$\left. \begin{aligned} y_p(t) &= Ct \\ \dot{y}_p(t) &= C \\ \ddot{y}_p(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Para descobrir C , substituímos as equações (2.47) na equação (2.43):

$$4\omega^2 C = 2g_{ef}\omega \sin \theta$$

$$C = \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega}$$

Temos o necessário para montar a solução geral $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$:

$$y(t) = A \sin(2\omega t + \delta) + \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} t \quad (2.48)$$

Não é difícil ver que $y(t)$ dado pela equação (2.48) é solução da equação (2.43) por substituição direta. Para descobriremos as constantes A e δ , precisamos de condições iniciais apropriadas, como as que seguem:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 & \dot{x}(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 & \dot{y}(0) &= 0 \\ z(0) &= h & \dot{z}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

ou seja, a massa m está inicialmente em repouso a altura h em relação ao solo. Precisamos da derivada de y para aplicar tais condições:

$$\dot{y}(t) = 2\omega A \cos(2\omega t + \delta) + \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} \quad (2.50)$$

Calculando $y(0)$ e $\dot{y}(0)$ através de (2.48) e (2.50) e usando (2.49):

$$y(0) = A \sin \delta = 0 \quad (2.51)$$

$$\dot{y}(0) = 2\omega A \cos \delta + \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} = 0 \quad (2.52)$$

A equação (2.52) nos diz que A não pode ser zero, então pela equação (2.51) δ deve ser zero e a equação (2.52) nos dá:

$$2\omega A + \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} = 0$$

$$A = -\frac{g_{ef} \sin \theta}{4\omega^2} \quad (2.53)$$

Em posse da equação (2.53), podemos reescrever (2.48) e (2.50):

$$y(t) = \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right] \quad (2.54)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} [1 - \cos(2\omega t)] \quad (2.55)$$

A equação (2.55) é o que precisamos para encontrar as funções horárias de x e z , bastando substituí-la nas equações (2.40) e (2.42) e integrá-las duas vezes, lembrando das contantes de integração. Começando com x :

$$\ddot{x} = 2\omega \cos \theta \left(\frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} [1 - \cos(2\omega t)] \right)$$

$$\ddot{x} = g_{ef} \sin \theta \cos \theta [1 - \cos(2\omega t)]$$

$$\dot{x}(t) = g_{ef} \sin \theta \cos \theta \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right] + B \quad (2.56)$$

$$x(t) = g_{ef} \sin \theta \cos \theta \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega^2} \right] + Bt + D \quad (2.57)$$

Com as condições iniciais (2.49), temos:

$$\dot{x}(0) = B = 0 \quad (2.58)$$

$$x(0) = \frac{g_{ef} \sin \theta \cos \theta}{4\omega^2} + D = 0$$

$$D = -\frac{g_{ef} \sin \theta \cos \theta}{4\omega^2} \quad (2.59)$$

Para z :

$$\ddot{z} = -g_{ef} + 2\omega \sin \theta \left(\frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} [1 - \cos(2\omega t)] \right)$$

$$\ddot{z} = g_{ef} (\sin^2 \theta [1 - \cos(2\omega t)] - 1)$$

$$\dot{z}(t) = g_{ef} \left(\sin^2 \theta \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right] - t \right) + E \quad (2.60)$$

$$z(t) = g_{ef} \left(\sin^2 \theta \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega^2} \right] - \frac{t^2}{2} \right) + Et + H \quad (2.61)$$

Com as condições iniciais (2.49), temos:

$$\dot{z}(0) = E = 0 \quad (2.62)$$

$$z(0) = \frac{g_{ef} \sin^2 \theta}{4\omega^2} + H = h$$

$$H = h - \frac{g_{ef} \sin^2 \theta}{4\omega^2} \quad (2.63)$$

Finalmente, agrupando todas as funções horárias, com as constantes B , D , E e H dadas por (2.58), (2.59), (2.62) e (2.63):

$$x(t) = g_{ef} \sin \theta \cos \theta \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2} \right] \quad (2.64)$$

$$y(t) = \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right] \quad (2.54)$$

$$z(t) = h + g_{ef} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos(2\omega t) - 1}{4\omega^2} \right) - \frac{t^2}{2} \right] \quad (2.65)$$

Embora tais soluções sejam corretas (desde que aceitas as aproximações já comentadas), elas não permitem uma interpretação clara de como ocorre o movimento. Porém, sabendo que a velocidade angular da Terra é pequena, podemos fazer aproximações. As séries de MacLaurin para o seno e o cosseno ficam:

$$\sin(2\omega t) = \frac{1}{0!} \sin(0) + \frac{2\omega t}{1!} \frac{d}{dt} \sin(0) + \frac{(2\omega t)^2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \sin(0) + \frac{(2\omega t)^3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} \sin(0) + \dots$$

$$\sin(2\omega t) = 0 + 2\omega t + 0 - \frac{(2\omega t)^3}{6} + \dots$$

$$\cos(2\omega t) = \frac{1}{0!} \cos(0) + \frac{2\omega t}{1!} \frac{d}{dt} \cos(0) + \frac{(2\omega t)^2}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \cos(0) + \frac{(2\omega t)^3}{3!} \frac{d^3}{dt^3} \cos(0) + \dots$$

$$\cos(2\omega t) = 1 + 0 - \frac{(2\omega t)^2}{2} + 0 + \dots$$

Podemos truncar as séries onde acharmos mais sensato. Um resultado interessante aparece quando truncamos as séries no terceiro termo (sem excluir os termos nulos, até ordem quadrática de t), ou seja, fazemos $\sin(2\omega t) \approx 2\omega t$ e $\cos(2\omega t) \approx 1 - \frac{(2\omega t)^2}{2}$ nas equações (2.64), (2.54) e (2.65) (chamemos as soluções com aproximações no terceiro termo em seno e cosseno de x_3 , y_3 e z_3):

$$x_3(t) = g_{ef} \sin \theta \cos \theta \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} - 1}{4\omega^2} \right] = 0$$

$$y_3(t) = \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} \left[t - \frac{2\omega t}{2\omega} \right] = 0$$

$$z_3(t) = h + g_{ef} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} - 1}{4\omega^2} \right) - \frac{t^2}{2} \right] = h - g_{ef} \frac{t^2}{2}$$

Estas são as conhecidas soluções para um referencial fixo. São simples e ótimas como aproximação, mas não nos dizem nada sobre o efeito devido a rotação da Terra (ou seja, efeito da força de Coriolis). Por isso, precisamos considerar o quarto termo das expansões de seno e cosseno (até ordem cúbica de t), ou seja, $\sin(2\omega t) \approx 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{6}$ e

$\cos(2\omega t) \approx 1 - \frac{(2\omega t)^2}{2}$ (chamemos estas soluções de x_4 , y_4 e z_4):

$$x_4(t) = g_{ef} \sin \theta \cos \theta \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} - 1}{4\omega^2} \right] = 0 \quad (2.66)$$

$$y_4(t) = \frac{g_{ef} \sin \theta}{2\omega} \left[t - \frac{2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{6}}{2\omega} \right] = \frac{g_{ef}\omega \sin \theta}{3} t^3 \quad (2.67)$$

$$z_4(t) = h + g_{ef} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} - 1}{4\omega^2} \right) - \frac{t^2}{2} \right] = h - g_{ef} \frac{t^2}{2} \quad (2.68)$$

Como esperado, apenas y mudou em relação à aproximação anterior. Porém a maneira como ela mudou talvez não seja tão esperada⁸. A equação (2.67) nos diz que a massa avança na direção \hat{y} durante a queda, que, como é visível na figura 2.8, é a mesma direção em que o referencial se move. Este fato já era visível na equação (2.54), já que $y(t) \geq 0$ para qualquer t . Este resultado pode parecer contra-intuitivo, mas não é difícil entendê-lo: ao supormos as condições iniciais (2.49), supomos que a massa estava inicialmente em repouso, porém em repouso em relação ao referencial não inercial, o que significa que a massa estava em movimento em relação ao referencial inercial. Estando a massa a uma distância inicial do referencial inercial $R + h$ maior do que a distância do referencial não inercial ao inerte R e tendo a massa mesma velocidade angular inicial $\vec{\omega}$, concluímos que a massa possui maior velocidade linear ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$) que o referencial inercial. Assim, durante o tempo de queda, a massa avançará mais na direção \hat{y} do que o referencial inercial, como mostra a equação (2.67). Qualquer experimento realizado por alguém na Terra não consegue se livrar deste desvio, já que todos na Terra tem a mesma velocidade angular que a Terra. Seria necessário que algo ou alguém não estivesse girando junto com a Terra para que não houvesse este desvio, o que atualmente é impossível.

Para se ter uma ideia desse desvio para o leste, vamos calculá-lo para uma queda de $h = 100m$ no Equador, onde $\sin \theta$ é máximo, usando os valores de ω e g_{ef} já mencionados. Com a equação (2.68) podemos encontrar o tempo de queda t_q e substituí-lo na equação (2.67):

$$\begin{aligned} z_4(t_q) &= h - \frac{g_{ef}}{2} t_q^2 = 0 \\ t_q &= \left(\frac{2h}{g_{ef}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ y_4(t_q) &= \frac{g_{ef}\omega}{3} \left(\frac{2h}{g_{ef}} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 2.2cm \end{aligned}$$

Não é um grande desvio comparado com a distância de queda devido à pequena velocidade angular da Terra, mas é certamente observável. Tal experimento deve ser realizado em poços ou minas para evitar efeitos de ventania que podem comprometer os resultados.

As condições iniciais para que a massa esteja inicialmente em repouso em relação ao

⁸O resultado para y_4 obtido e a discussão sobre este desvio são muito comuns quando o assunto é referenciais não inerciais, devido ao seu grande poder de causar confusão. Para maneiras alternativas de chegar nesta aproximação, veja o capítulo 10 do Morin [1], ou o capítulo 12 do French [3], ou o capítulo 9 do Taylor [4], ou o capítulo 10 do Thornton e Marion [5] ou o capítulo 11 do Becker [6].

referencial inercial a um altura h da superfície terrestre devem ser:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 & \dot{x}(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 & \dot{y}(0) &= -R\omega \sin \theta \\ z(0) &= h & \dot{z}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

já que, se massa está em repouso em relação ao referencial inercial, ela deve estar em movimento em relação ao referencial não inercial, e a velocidade na direção \hat{y} é exatamente o negativo da velocidade linear que o referencial não inercial possui.

Depois de encontrar as constantes na equação original de $y(t)$ (2.48) com as condições iniciais (2.69) e fazermos a aproximação $\sin(2\omega t) \approx 2\omega t$, a solução fica:

$$y(t) = -\omega t R \sin \theta$$

Que é o resultado esperado, já que ωt é o ângulo que a Terra roda no tempo t e $R \sin \theta$ é o raio do movimento circular que o referencial não inercial faz, o que acarreta em $\omega t R \sin \theta$ ser o arco descrito por esse referencial no tempo t e o sinal negativo indica que massa fica a uma distância igual a esse arco para trás do referencial.

2.4 Pêndulo de Foucault

O Pêndulo de Foucault⁹ é um pêndulo simples de grande massa m e comprimento muito longo L ¹⁰ que se encontra na superfície da Terra, livre para oscilar e girar.

A figura 2.10 mostra um referencial não-inercial (com centro onde a corda está presa) que gira junto com o pêndulo ao redor da Terra.

⁹O pêndulo recebe este nome em homenagem a Jean Bernard Léon Foucault, físico francês que propôs o experimento em 1851 para provar que a Terra, de fato, gira.

¹⁰A grande massa é para que o pêndulo tenha inércia suficiente para não ser parado pela resistência do ar e o comprimento muito longo será explicado no texto.

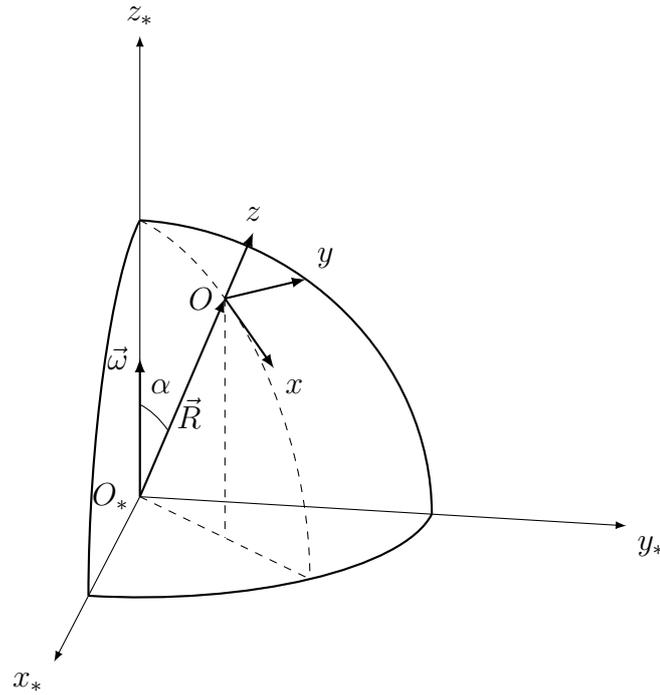


Figura 2.10: Representação de uma parte da Terra, com um referencial inercial $O_*x_*y_*z_*$ no centro da Terra e um referencial não-inercial $Oxyz$ na superfície da Terra, onde o pêndulo está preso, com rotação $\vec{\omega} = \omega \hat{z}_*$ e colatitude α .

Não por coincidência, a figura 2.10 é muito semelhante à figura 2.8, pois os referenciais não inerciais nos dois casos são o mesmo. A equação a se resolver é a equação (1.10):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \quad (2.70)$$

onde as forças de interação são \vec{F}_g , que é a força gravitacional da Terra, e \vec{T} , que é a força de tração no fio que prende a massa.

Assim como fizemos na equação (2.34), agrupemos os três primeiros termos da equação (2.70) em um só e descartemos o último (porque, para nossos fins, a velocidade angular da Terra não varia):

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}_{ef} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \quad (2.71)$$

Para calcular os termos da equação (2.71) vamos introduzir um sistema de coordenadas polares baseado na seguinte figura:

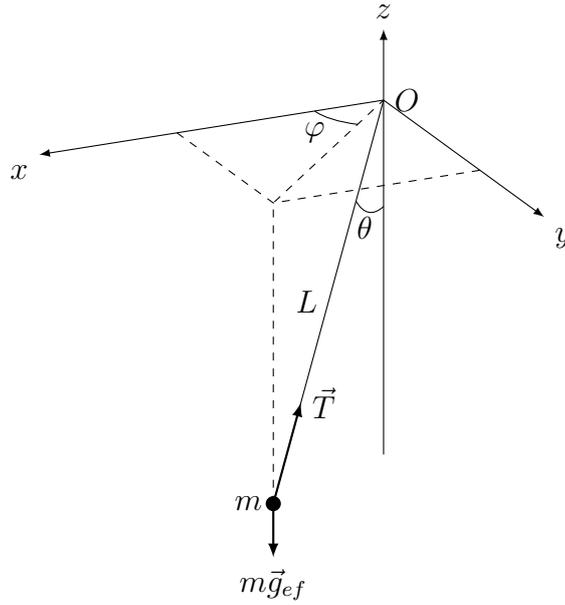


Figura 2.11: Representação do pêndulo no referencial não-inercial.

Podemos introduzir coordenadas esféricas da seguinte maneira (note que não são as coordenadas esféricas convencionais, pois θ está definido a partir da parte negativa de z , assim representando o ângulo que o fio do pêndulo faz com a vertical na figura 2.11):

$$\left. \begin{aligned} \hat{r} &= \cos \varphi \sin \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} - \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \\ \hat{\theta} &= \cos \varphi \cos \theta \hat{x} + \sin \varphi \cos \theta \hat{y} + \sin \theta \hat{z} \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Com essas definições de coordenadas polares, temos que tomar cuidado extra: observe que os produtos vetoriais entre estes versores não são os mesmos que em coordenadas polares usuais:

$$\hat{r} \times \hat{\varphi} = \hat{\theta} \quad \hat{\varphi} \times \hat{\theta} = \hat{r} \quad \hat{\theta} \times \hat{r} = \hat{\varphi}$$

Os versores da base cartesiana escritos em função dos versores da base esférica ficam:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{r} \cdot \hat{x})\hat{r} + (\hat{\theta} \cdot \hat{x})\hat{\theta} + (\hat{\varphi} \cdot \hat{x})\hat{\varphi} = \cos \varphi \sin \theta \hat{r} + \cos \varphi \cos \theta \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{y} &= (\hat{r} \cdot \hat{y})\hat{r} + (\hat{\theta} \cdot \hat{y})\hat{\theta} + (\hat{\varphi} \cdot \hat{y})\hat{\varphi} = \sin \varphi \sin \theta \hat{r} + \sin \varphi \cos \theta \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\varphi} \\ \hat{z} &= (\hat{r} \cdot \hat{z})\hat{r} + (\hat{\theta} \cdot \hat{z})\hat{\theta} + (\hat{\varphi} \cdot \hat{z})\hat{\varphi} = -\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

nos quais os produtos escalares representam as projeções dos versores da base cartesiana nos versores da base polar, calculados usando o trio de equações (2.72).

Para usar a equação (2.71), precisamos do vetor posição e suas derivadas, que envolverão as derivadas dos versores da base polar em relação a θ e φ (tais versores são independentes de r). Podemos calcular essas derivadas através do trio de equações (2.72) e escrevê-las em componentes polares:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r} & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} &= \sin \theta \hat{\varphi} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} &= \cos \theta \hat{\varphi} & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Sendo o fio do pêndulo inextensível, o módulo do vetor posição é constante e igual a L :

$$\vec{r} = L\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = L\frac{d\hat{r}}{dt} = L\left(\dot{\theta}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}\right) = L(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \quad (2.75)$$

$$\ddot{\vec{r}} = L\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$

$$\ddot{\vec{r}} = L\left[\ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}\left(\dot{\theta}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi}\right) + \cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + \sin\theta\dot{\varphi}\left(\dot{\theta}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$\ddot{\vec{r}} = L\left[\ddot{\theta}\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\hat{r} + \cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - \sin\theta\dot{\varphi}^2(\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta})\right]$$

$$\ddot{\vec{r}} = L\left[(-\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}^2)\hat{r} + (\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\hat{\theta} + (\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi})\hat{\varphi}\right] \quad (2.76)$$

A equação (2.70) também apresenta um termo de $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$. Ao olhar a figura 2.10, é fácil ver que podemos escrever $\vec{\omega}$ como escrevemos anteriormente na equação (2.32) (trocando θ por α , pois α é o ângulo de colatitude agora) e passá-lo para coordenadas polares usando o trio de equações (2.73):

$$\vec{\omega} = \omega(-\sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{z})$$

$$\vec{\omega} = \omega\left[(-\sin\alpha\cos\varphi\sin\theta - \cos\alpha\cos\theta)\hat{r} + (-\sin\alpha\cos\varphi\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\hat{\theta} + \sin\alpha\sin\varphi\hat{\varphi}\right] \quad (2.77)$$

Podemos agora calcular o produto vetorial usando as equações (2.75) e (2.77):

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \omega L\left[(-\sin\alpha\cos\varphi\sin^2\theta - \cos\alpha\sin\theta\cos\theta)\dot{\varphi}\hat{\theta} + (\sin\alpha\cos\varphi\sin\theta\cos\theta - \cos\alpha\sin^2\theta)\dot{\varphi}\hat{r} + (\sin\alpha\cos\varphi\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta)\dot{\theta}\hat{\varphi} + \sin\alpha\sin\varphi\dot{\theta}\hat{r}\right] \quad (2.78)$$

Faltam-nos apenas as forças reais, que pela figura 2.11 e pelo trio de equações (2.73) são:

$$\vec{F}_g = -m\vec{g}_{ef}\hat{z} = mg_{ef}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) \quad (2.79)$$

$$\vec{T} = -T\hat{r} \quad (2.80)$$

Finalmente, estamos em posse de tudo para escrever a equação do pêndulo. Substituindo as equações (2.76), (2.78), (2.79) e (2.80) na equação (2.71) e separando-a em componentes \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$, ficamos com:

$$\hat{r} : \quad \begin{aligned} -mL(\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) &= mg_{ef} \cos \theta - T - 2m\omega L \sin \alpha \sin \varphi \dot{\theta} \\ &\quad - 2m\omega L(\sin \alpha \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \cos \alpha \sin^2 \theta) \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\hat{\theta} : \quad \begin{aligned} mL(\ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) &= -mg_{ef} \sin \theta \\ &\quad + 2m\omega L(\sin \alpha \cos \varphi \sin^2 \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \theta) \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\hat{\varphi} : \quad mL(\sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}) = -2m\omega L(\sin \alpha \cos \varphi \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) \dot{\theta} \quad (2.83)$$

Estas são as três equações acopladas que descrevem o movimento do pêndulo¹¹. A equação (2.81) não é útil, devido a presença de T . Podemos esperar que o movimento relacionado à θ não difira muito de um pêndulo simples, afinal as velocidades de rotação da Terra e de rotação do pêndulo ($\dot{\varphi}$) são pequenas como veremos em breve. Assim, desprezando termos quadráticos em ω e $\dot{\varphi}$, a equação (2.82) se reduz a:

$$mL\ddot{\theta} = -mg_{ef} \sin \theta$$

que é a mesma equação diferencial de um pêndulo simples. Entretanto, não estamos interessados na oscilação, e sim na rotação do pêndulo. É aí que o fato do fio ser muito longo entra em cena: é razoável admitir que o movimento na direção \hat{z} é desprezível comparado aos movimentos em \hat{x} e \hat{y} .¹² Assim, $L \sin \theta \ll L \cos \theta$, pois L é grande. Todo termo que possui $L \sin \theta$ é insignificante comparado aos termos que possuem $L \cos \theta$ na equação (2.83), que se torna:

$$\begin{aligned} 2mL \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} &= -2m\omega L \cos \alpha \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} &= -\omega \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.84)$$

que é o resultado esperado. Consideremos o polo norte na figura 2.10 ($\alpha = 0$): um observador preso a Terra, gira junto a ela com velocidade angular $\vec{\omega}$ e o pêndulo não gira junto com a Terra. Logo, o observador veria o pêndulo precessionar em sentido contrário ao que ele gira, ou seja, $-\vec{\omega}$. A única maneira de se explicar este movimento de precessão é assumir que a Terra gira.

¹¹O apêndice contém uma dedução mais “direta” das equações (2.82) e (2.83), através das equações de Euler-Lagrange.

¹²Capítulo 11 do livro do Becker [6]. Ele oferece um tratamento menos rigoroso e, conseqüentemente, mais simples e menos informativo do Pêndulo de Foucault.

Apêndice: Exemplos resolvidos pelo método de Lagrange

Neste apêndice será aplicado o método de Lagrange desenvolvido na seção 1.1

$$\mathcal{L} = m\dot{\vec{r}} \cdot \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{2} + \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) - \frac{m}{2} \dot{\vec{r}} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] - V(\vec{r}) \quad (1.11)$$

para resolver três exemplos do capítulo 2: pêndulo acelerado, queda livre e pêndulo de Foucault. O exemplo das marés não será resolvido pois não se encaixa bem com o método de lagrange, ou seja, não consiste em chegar a uma equação diferencial e resolvê-la.

Pêndulo Acelerado

Sendo um caso de translação pura, nossa lagrangeana fica

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{R} - V \quad (A.1)$$

Usando as coordenadas polares introduzidas na seção 2.1, temos:

$$\dot{\vec{r}} = L\dot{\varphi}\hat{\varphi} \quad (A.2)$$

$$\dot{\vec{R}} = A\hat{x} = -A\sin\varphi\hat{r} + A\cos\varphi\hat{\varphi} \quad (A.3)$$

$$V = -mgL\cos\varphi \quad (A.4)$$

em que V é a energia potencial gravitacional e não é difícil ver que a derivada temporal de \vec{R} é $\dot{\vec{R}} = A\hat{x}$, como deve ser. Substituindo as equações (A.2), (A.3) e (A.4) na equação (A.1), ficamos com

$$\mathcal{L} = \frac{mL^2\dot{\varphi}^2}{2} - mA\dot{\varphi}\cos\varphi + mgL\cos\varphi \quad (A.5)$$

Colocando a lagrangeana da equação (A.5) na equação de Euler-Lagrange para φ nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \\ mA\dot{\varphi}\sin\varphi - mgL\sin\varphi &= \frac{d}{dt}(mL^2\dot{\varphi} - mA\cos\varphi) \\ \ddot{\varphi} &= -g\sin\varphi + A\cos\varphi \end{aligned} \quad (A.6)$$

Como esperado, a equação (A.6) é igual a equação (2.8).

Queda Livre

Neste caso, temos

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad \vec{\omega} = \omega(-\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{z}) \quad \vec{R} = R\hat{z}$$

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \omega R \sin\theta \hat{y}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega[-y \cos\theta \hat{x} + (z \sin\theta + x \cos\theta)\hat{y} - y \sin\theta \hat{z}]$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2[\cos\theta(z \sin\theta + x \cos\theta)\hat{x} + y\hat{y} + \sin\theta(z \sin\theta + x \cos\theta)\hat{z}]$$

$$\vec{r} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] = -\omega^2[x \cos\theta(z \sin\theta + x \cos\theta) + y^2 + z \sin\theta(z \sin\theta + x \cos\theta)]$$

$$V = mgz$$

em que, mais uma vez, V é a energia potencial gravitacional. Com tudo isso, a lagrangeana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega R\dot{y} \sin\theta + m\omega[-\dot{x}y \cos\theta + \dot{y}(z \cos\theta + x \sin\theta) - \dot{z}y \sin\theta] \\ + \frac{m\omega^2}{2}[(z \sin\theta + x \cos\theta)^2 + y^2] - mgz \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

A partir desta lagrangeana, as equações de Euler-Lagrange ficam:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} \cos\theta + \omega^2 \cos\theta(x \cos\theta + z \sin\theta) \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{x} \cos\theta + \dot{z} \sin\theta) + \omega^2 y \quad (\text{A.9})$$

$$\ddot{x} = -g + 2\omega\dot{y} \sin\theta + \omega^2 \sin\theta(x \cos\theta + z \sin\theta) \quad (\text{A.10})$$

Desprezar os termos quadráticos em ω das equações (A.8), (A.9) e (A.10) equivale a fazer a aproximação que fizemos na equação (2.34) para definir g_{ef} . Assim, obtemos as equações (2.40), (2.41) e (2.42).

Pêndulo de Foucault

Do caso anterior, vimos que os termos de força translacional e força centrífuga podem ser desprezados. Assim, nossa lagrangeana será:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + m\dot{r} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) - V \quad (\text{A.11})$$

$$\vec{r} = L\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = L(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}) \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \omega [& (-\sin\alpha\cos\varphi\sin\theta - \cos\alpha\cos\theta)\hat{r} \\ & + (-\sin\alpha\cos\varphi\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\hat{\theta} + \sin\alpha\sin\varphi\hat{\varphi}] \\ \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega [& (-\sin\alpha\cos\varphi\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)\hat{\varphi} - \sin\alpha\sin\varphi\hat{\theta}] \end{aligned} \quad (A.13)$$

$$V = -mg_{ef}L\cos\theta \quad (A.14)$$

em que, novamente, V é a energia potencial gravitacional, já considerada a gravidade efetiva. Substituindo as equações (2.75), (A.13) e (A.14) na lagrangeana da equação (A.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mL^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{2} - m\omega L^2\dot{\theta}\sin\alpha\sin\varphi \\ + m\omega L^2\dot{\varphi}(-\sin\alpha\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + \cos\alpha\sin^2\theta) + mgL\cos\theta \end{aligned} \quad (A.15)$$

E, finalmente, as equações de Euler-Lagrange para θ e φ a partir da lagrangeana da equação (A.15) nos fornecem

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}$$

$$L(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) = -g\sin\theta + 2\omega L(\sin\alpha\cos\varphi\sin^2\theta + \cos\alpha\sin\theta\cos\theta)\dot{\varphi} \quad (A.16)$$

$$\sin\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta = -2\omega(\sin\alpha\cos\varphi\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta)\dot{\theta} \quad (A.17)$$

As equações (A.16) e (A.17) são idênticas às equações (2.82) e (2.83), respectivamente.

Conclusões

A mecânica clássica, discutivelmente a vertente mais velha da Física, é elegante em vários níveis: desde sua simplicidade à sua convicção. Faz tempo que ela saiu dos holofotes, dando lugar a mecânicas mais complexas, então é natural ver a comunidade científica deixando-a de lado. Mas são assuntos como o tratado neste trabalho que mostram que a mecânica clássica nada tem de obsoleto, já que conseguimos explicar vários fenômenos facilmente observáveis.

Foram resolvidas quatro aplicações:

- Pêndulo acelerado;
- Marés;
- Queda livre;
- Pêndulo de Foucault;

Alguns outros que podem ser resolvidos usando o que foi desenvolvido neste trabalho:

- Mesa giratória;
- Circulação atmosférica;
- Gerador Compton;
- Variação do nível da água em lagos;
- Balde giratório;
- Precessão dos equinócios;
- Limite de Roche.

Concluimos que, em muitos casos, se esforçar um pouco para sair da zona de conforto e trabalhar de pontos de vista não comumente usados, mesmo que a dificuldade física seja elevada, vale a pena. Muitas vezes, mesmo com os conceitos aparentemente esclarecidos, um resultado inesperado como o da seção 2.3 pode fazer com que pensemos que o método não seja válido. Porém, basta um pouco de fé na matemática e uma mente aberta para se enxergar as grandes conquistas da mecânica Newtoniana.

Referências Bibliográficas

- [1] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2001.
- [3] A. P. French. *Newtonian Mechanics*. Norton, 1971.
- [4] John R. Taylor. *Mecânica Clássica*. Bookman, 2013.
- [5] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas*. Cengage Learning, 2011.
- [6] Robert A. Becker. *Introduction to Theoretical Mechanics*. McGraw-Hill Book Company, 1954.
- [7] Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, 1992.