

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE FÍSICA

ARLETE MOREIRA DOS SANTOS

FISICA NOS JOGOS
DE
FUTEBOL

Orientador: Prof. Dr. Maurício Antônio Custodio de Melo
MARINGÁ – PR- 2012

Monografia apresentada como requisito de avaliação para obtenção do grau de
Licenciado em Física pela Universidade Estadual de Maringá

BANCA EXAMINADORA

Orientador:

Membro:

Membro:

DEDICATÓRIA

A todos que contribuíram para a minha graduação acadêmica e formação moral afim que eu pudesse chegar a reta final com o máximo de aprendizagem essencial para dar meus primeiros passos e construir um futuro digno fazendo o que mais me dá prazer, ou seja, ensinar física e buscar conhecimento para vida toda.

AGRADECIMENTO

Primeiramente devo agradecer a Deus, que sempre esteve ao meu lado, me deu forças quando me sentia fraca, levantou-me quando a vida me deu uma rasteira, e secou minhas lágrimas quando estava em prantos, lutou pela minha vida quando ninguém se importava, me mostrou o caminho quando estava perdida, e permitiu que eu estivesse aqui hoje para apresentação desse trabalho. Deus obrigada.

Ao Prof. Dr. Maurício, que gentilmente, apoiou-me em lutar pelos meus objetivos e me auxiliou nos conteúdos para compor esta monografia.

Aos meus pais que sempre me apoiaram, e sacrificaram-se para que eu tivesse uma infância feliz, uma juventude plena, e nunca desistiram ou se quer deixaram de me apoiar, nem mesmo depois de adulta sempre me aconselhando quando eu estava perdida, me corrigindo quando estava errada, continuaram a me dar forças na luta pela graduação e me ensinaram do jeitinho deles a valorizar cada dia da minha vida e cada oportunidade que surgia. Se hoje sou o que sou é por graças a eles.

Aos professores que diretamente e indiretamente muito me apoiaram moralmente, fazendo-me perceber que a esperança e a persistência nos bons objetivos da vida são sempre recompensados, e que colherei os frutos, semeados ao longo da graduação.

RESUMO

O dia a dia está repleto de exemplos de aplicações da Física que podem ser utilizados para ensinar seus conceitos aos estudantes do ensino médio de modo a torná-los mais interessante e menos distantes do cotidiano deles. Uma simples partida de futebol é um desses exemplos que será destacado neste trabalho. A riqueza de princípios e conceitos físicos observados em uma partida de futebol é enorme: Desde o conceito de posição, velocidade, aceleração, até força de arraste e efeito Magnus. Neste trabalho é desenvolvida uma análise física e matemática, com o propósito de ajudar no entendimento da trajetória da bola usando importantes conceitos físicos.

Palavras-chave: Futebol, Trajetória de projéteis, Força de arraste; força Magnus.

SUMÁRIO

1 Introdução	Página: 7
2 Força de arraste	Página: 8
2.1 Força de arraste $n=1$	Página: 8
2.2 Força de Arraste $n = 1$ (Comparativo Método de Euler)	Página: 11
2.3 Força de Arrasto $n = 2$ (caso específico da bola)	Página: 14
2.4 Número de Reynolds	Página: 20
2.5 Camada limite	Página: 22
3 Efeito Magnus	Página: 23
4 Força de arraste e força Magnus	Página: 26
5 Considerações finais	Página: 29
Apêndice A	Página: 30
Apêndice B	Página: 32
Referência	Página: 43

1. INTRODUÇÃO

Existem muitos estudos sobre a física, pois é uma ciência que sempre causou grande fascínio no homem, mas quando é estudada apenas nos livros e no contexto da sala de aula, ela se torna, para alguns estudantes, abstrata e distante. A aplicação prática das leis da Física é indispensável para que se entenda melhor o comportamento do mundo e a comprovação de suas fundamentações. Apesar de apresentarem contextos aparentemente complexos, as leis da Física compreendem um vasto campo de aplicações em situações de caráter corriqueiro. Um jogo de futebol é um exemplo de aplicação prática das leis físicas, que acrescenta emoção à compreensão da lógica das regras, posicionamento, bem como o toque na bola o chute aplicado pelo jogador, a inclinação na cobrança de um lançamento lateral e até mesmo um lance executado pelo goleiro e por outros jogadores. As medidas do campo de futebol e as marcações são imprescindíveis também para o funcionamento de uma partida. Tudo isso pode corroborar para o entendimento dos conceitos de Mecânica.

Por exemplo, no Brasil, há muitos clubes de futebol, bastante conhecidos, por inúmeras rivalidades, sejam clubes cariocas, paulistas, seleções e outros. Sempre haverá rivalidade em campo, mas neste jogo ganha quem melhor explorar tais conceitos da “Física básica”, mesmo que absorvidos inicialmente por analogias ou experimentação. Ou seja, conceitos que o indivíduo desenvolveu durante a sua vida. Um indivíduo sabe que a trajetória de uma bola é uma parábola, mesmo sem saber o que é uma parábola matematicamente. Para que haja um bom entendimento e um futuro desenvolvimento os conceitos deverão ser reconstruídos dentro do contexto científico usando os mais variados meios simbólicos de expressão usados pelo homem.

Neste trabalho vamos abordar a trajetória da bola, principalmente com relação à força de arraste e o efeito Magnus. Estes dois efeitos são de suma importância e são raramente vistos nos cursos de graduação. Os cursos se limitam a calcular a trajetória da bola sem atrito e com atrito para baixas velocidades. Ao tratar da força de arraste, usaremos um resultado numérico para calcular a trajetória, empregaremos um programa já instalado na maioria dos computadores conhecido como Excel.

No capítulo 2 vamos descrever a força de arraste e na seção 2.2 e 2.3 apresentaremos nossos cálculos via Excel. As demais seções abordam somente caracteres teóricos. No capítulo 3 faremos uma descrição teórica do efeito Magnus. No

capítulo 4 faremos algumas considerações sobre os dois efeitos (Arraste e Magnus) simultaneamente.

2. FORÇA DE ARRASTE

Na dinâmica dos fluídos, força de arraste é a força que faz resistência ao movimento de um objeto sólido através de um fluido (um líquido ou gás). A força de arraste é uma composição de forças de fricção (atrito) e força de pressão. As forças de fricção agem nas laterais do objeto que são paralelas à direção do movimento, já que as forças de fricção da frente e de trás do objeto se anulam. As forças de pressão atuam na direção perpendicular ao movimento (frente e atrás), já que as forças de pressão se cancelam nas laterais do objeto. Ao contrário de outras forças resistivas, como o atrito, as forças de arraste dependem da velocidade, na seguinte forma:

$$F_A(v) = \pm \frac{1}{2} C_A \rho A v^n \quad (1)$$

onde F_A representa a força de arraste, C_A coeficiente de arraste, ρ densidade do ar A é a área de secção transversal, v é a velocidade e n depende do regime de velocidade, sendo $n = 1$ para baixas velocidades $n = 2$ para altas velocidades. Devido as dificuldades de se determinar todas as constantes, geralmente $\frac{1}{2} C_A \rho A$ é representado simplesmente por b .

2.1 Força de Arraste $n = 1$

Nesta seção apresentaremos aspectos teóricos e a solução para $n = 1$.

Como já citamos, para baixas velocidades a equação (1) toma a seguinte forma ($n = 1$),

$$F_A(v) = \pm b v^1 \quad (2)$$

Usando a segunda Lei de Newton, obtém-se:

$$m \frac{dv}{dt} = F_A(v)$$

Rearranjando a equação acima, temos:

$$\frac{dv}{F_A(v)} = \frac{dt}{m}$$

Integrando os dois lados:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F_A(v)} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{m}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F_A(v)} = \frac{t - t_0}{m}$$

A integral a esquerda pode ser calculada conhecendo-se a função força $F_A(v)$. O resultado da velocidade v será:

$$v = \frac{dx}{dt} = \Phi\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right) \quad (3)$$

onde Φ é uma função de v_0 e $t - t_0/m$. O resultado do deslocamento x será:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \Phi\left(v_0, \frac{t - t_0}{m}\right) dt \quad (4)$$

Sendo a força de arraste dada na seguinte forma da equação 1, temos:

$$F_A(v) = \pm bv^n$$

Para um objeto com velocidade inicial $v_0 \neq 0$ sob a ação de uma força de arraste e tomando n igual a 1 e adotando-se o sinal negativo (sentido do vetor velocidade contrario ao vetor força de arrastre) para a equação acima, logo:

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (5)$$

Resolvendo a função força de arraste para $n = 1$ de forma análoga ao mostrado acima, temos:

$$\frac{1}{v} dv = \left(-\frac{b}{m}\right) dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = \left(-\frac{b}{m}\right) \int_{t_0}^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = \left(-\frac{b}{m}\right) t$$

$$v = v_0 e^{-bt/m} \quad (6)$$

Observa-se pela figura a seguir que para $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$. Esse resultado era esperado, temos uma única força atuando sobre o sistema, contrária ao movimento. A força depende da velocidade e quando a velocidade é baixa teremos uma força menor, por isso a velocidade nunca chega ao valor zero. A figura 1 mostra a velocidade em função do tempo para $v_0 = 1 \text{ m/s}$ e $\frac{b}{m} = 1 \text{ s}^{-1}$.

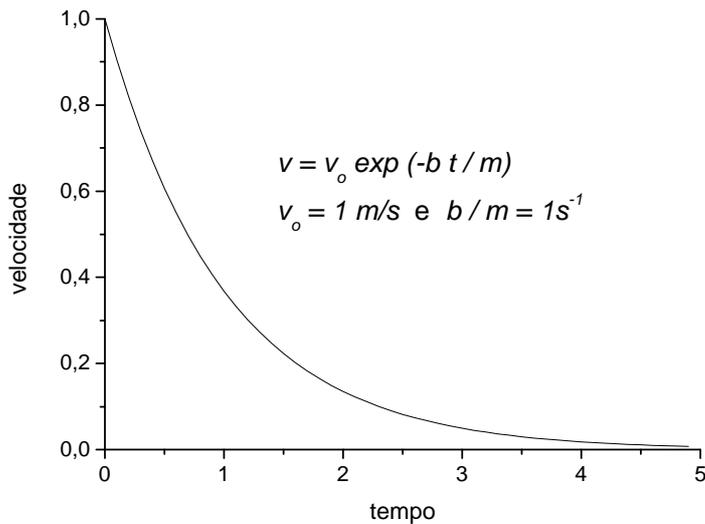


Figura 1: Velocidade em função de tempo

O deslocamento também pode ser calculado, como mostramos acima, portanto:

$$x = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-bt/m} dt$$

$$x = \frac{mv_0}{h} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \quad (7)$$

Fazendo o tempo t tendendo ao infinito, a equação do deslocamento x tende para:

$$x_{max} = \frac{mv_0}{h} \quad (8)$$

Mesmo a velocidade nunca obter o valor zero, acabamos de calcular o deslocamento x_{max} onde o objeto cessa o movimento. O que acontece é que a velocidade se torna tão pequena que realmente o objeto já está parado. Tomando uma velocidade $v_s \ll v_0$, temos,

$$v_s = v_0 e^{-\frac{bts}{m}} \quad (9)$$

logo o tempo para alcançar esta velocidade é dado por:

$$t_s = \frac{m}{b} \ln\left(\frac{v_0}{v_s}\right) \quad (10)$$

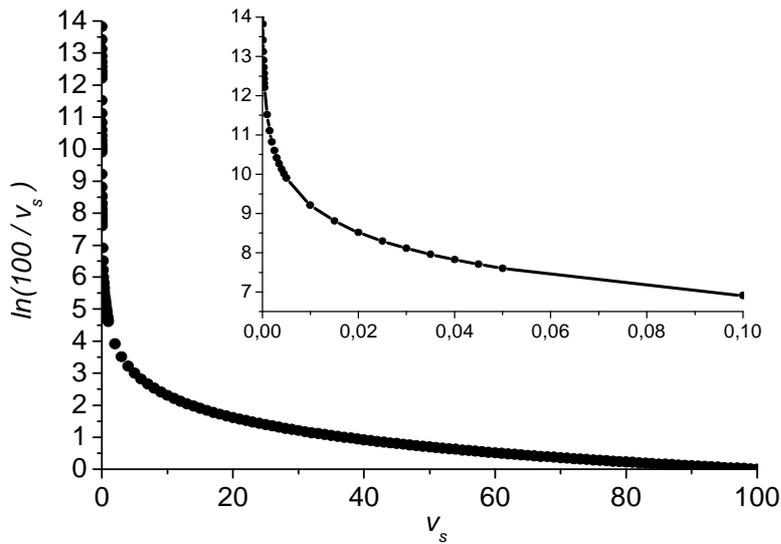


Figura 2: Dependência do tempo em relação a velocidade ($\ln(v_o/v_s)$),
onde $v_o = 100 \text{ m/s.}$

Como a função logaritmo continua a variar, mesmo para valores de v_s muito pequenos, conforme observado na figura 2, fica impossível identificar o tempo de parada.

2.2 Força de Arraste $n = 1$ (Comparativo Método de Euler)

Abordaremos nesta seção, aspectos teóricos para $n = 1$, faremos alguns cálculos via Excel e depois faremos uma comparação da teoria com os nossos cálculos.

Vamos admitir que a aceleração é constante em um certo intervalo de tempo Δt , a velocidade no instante $t_1 = t_0 + \Delta t$ pode ser escrita como:

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t \quad (11)$$

Da mesma forma, se desprezarmos a variação da velocidade no intervalo de tempo Δt , a posição será:

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t \quad (12)$$

Podemos aplicar os valores de v_1 e x_1 calculados para estimar os valores de v_2 e x_3 no intervalo de tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$ da seguinte forma:

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t \quad (13)$$

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t \quad (14)$$

Generalizando, podemos estimar os valores de um instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ assim:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \quad (15)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \quad (16)$$

Este método é chamado de método de Euler. Se o intervalo de tempo Δt for muito pequeno, o método é bastante satisfatório. Para implementá-lo basta conhecermos a_n

Utilizando as mesmas condições da sessão anterior (2.1 Força de Arrasto $n = 1$), temos:

$$\sum F_x = -bv_x = ma_x \quad (17)$$

Consequentemente a aceleração no eixo x é dado por:

$$a_x = -\frac{b}{m}v_x$$

Assim:

$$\begin{aligned} v_{x,n+1} &= v_{x,n} + [a_{x,n}] \Delta t \\ v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \left[-\frac{b}{m}v_{x,n} \right] \Delta t \quad (18) \end{aligned}$$

Usando os dados anteriores $v_{x,n} = 1 \text{ m/s}$ e $\frac{b}{m} = 1 \text{ s}^{-1}$ (figura 1), podemos calcular a velocidade e a posição em x usando o programa Excel, como é mostrado na tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Velocidade e posição no eixo x calculados pelo método de Euler.

($n = 1, v_{x,0} = 1 \text{ m/s}, \frac{b}{m} = 1 \text{ s}^{-1}, x_0 = 0 \text{ m}, \Delta t = 0,02 \text{ s}$)

	tempo	Velocidade v_x	Posição x
0	0	$v_{x,0} = 1 \text{ m/s}$	$x_0 = 0 \text{ m}$
1	0,02s	$v_{x,1} = v_{x,0} + \left[-\frac{b}{m}(v_{x,0}) \right] \Delta t$ $v_{x,1} = 1 \text{ m/s} +$ $[-1 \text{ s}^{-1}(1 \text{ m/s})]0,02 \text{ s}$ $v_{x,1} = 0,98 \text{ m/s}$	$x_1 = x_0 + v_{x,0} \Delta t$ $x_1 = 0 \text{ m} + 1 \text{ m/s}(0,02 \text{ s})$ $x_1 = 0,02 \text{ m}$
2	0,04s	$v_{x,2} = v_{x,1} + \left[-\frac{b}{m}v_{x,1} \right] \Delta t$ $v_{x,2} = 0,98 \text{ m/s} +$ $[-1 \text{ s}^{-1}(0,98 \text{ m/s})]0,02 \text{ s}$ $v_{x,2} = 0,96 \text{ m/s}$	$x_2 = x_1 + v_{x,1} \Delta t$ $x_2 = 0,02 \text{ m} + 0,98 \text{ m/s}(0,02 \text{ s})$ $x_2 = 0,03 \text{ m}$
3	0,06s	$v_{x,3} = v_{x,2} + \left[-\frac{b}{m}v_{x,2} \right] \Delta t$ $v_{x,3} = 0,96 \text{ m/s} +$ $[-1 \text{ s}^{-1}(1 \text{ m/s})]0,02 \text{ s}$ $v_{x,3} = 0,94 \text{ m/s}$	$x_3 = x_2 + v_{x,2} \Delta t$ $x_3 = 0,03 \text{ m} + 0,96 \text{ m/s}(0,02 \text{ s})$ $x_3 = 0,057 \text{ m}$
	$n\Delta t$	$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \left[-\frac{b}{m}v_{x,n} \right] \Delta t$	$x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t$

Os dados calculados a partir tabela 1 no intervalo de 0 até 5 segundos são apresentados na figura 3, juntamente com o resultado previsto na teoria, usando o resultado analítico (equação 2).

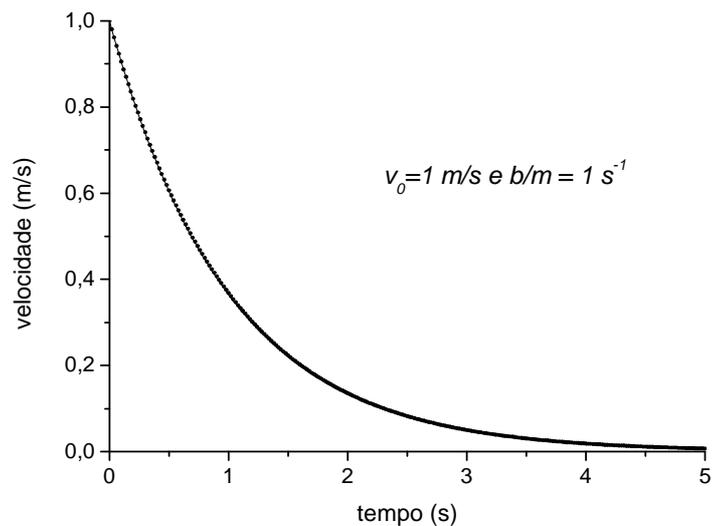


Figura 3: Resultado numérico usando o método de Euler e comparação com o resultado analítico (equação 2).

Podemos perceber na figura 3 que os resultados numéricos, usando o método de Euler e programados no Excel, estão de acordo com os resultados analíticos para $n = 1$.

2.3 Força de Arrasto $n = 2$ (caso específico da bola)

Nesta seção, faremos cálculos via Excel para $n=2$ para o caso específico da bola e algumas considerações teóricas.

O ar é um fluido, portanto exerce uma força de arraste sobre a bola em movimento, e a força de arraste é proporcional a v^2 . Usaremos aqui o método de Euler para determinar a solução do problema. Além disso, temos algumas outras complicações no caso específico da bola que discutiremos a seguir.

A 60 km/h (cerca de 16 m/s), a resistência do ar sob uma bola sofre uma queda e volta crescer acima de 80 km/h, conforme mostrado na figura 4 [ref. 1]. Essa redução da resistência do ar é chamada de crise do arraste. Quando falarmos sobre o número de Reynolds e Camada limite isto será melhor esclarecido (seção 2.4. e 2.5).

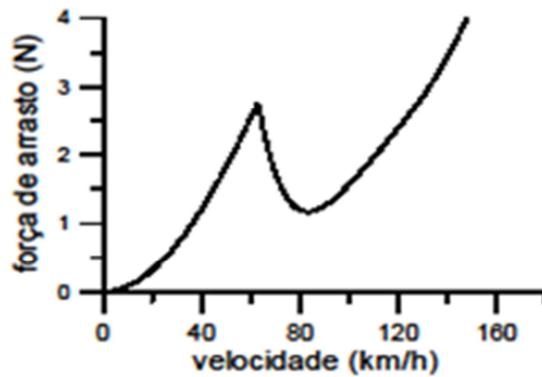


Figura 4: Resistência do ar sobre a bola de futebol em função da velocidade [ref. 1]

A velocidade máxima que um jogador profissional consegue aplicar na bola de futebol é da ordem de 30m/s ou 108 km/h. Com chutes mais fortes conseguem atingir algo como 35m/s ou 126 km/h[ref1]. Isso significa que durante um a partida de futebol a bola deve passar várias vezes pelo ponto de crise.

Para simplificar os cálculos da força de arraste em uma trajetória de uma bola usando o método de Euler, vamos escrever a força de arraste (equação 1) da seguinte forma:

$$F_{arraste} = bv^2 \quad (19)$$

onde $b = \frac{1}{2}C_A\rho A$. Introduzimos o método de Euler e agora vamos tentar incluir a força de arraste e a força gravitacional no nosso cálculo de trajetória de uma bola. A somatória das forças que atuam sobre a bola na primeira parte da trajetória, isto é, subindo, (figura 5) é:

$$\sum F_y = -mg - bv_y^2 = ma_y \quad (20)$$

A aceleração no eixo y então é dada por:

$$a_y = -g - \left(\frac{b}{m}\right)v_y^2 \quad (21)$$

Podemos escrever a razão b/m em termos da velocidade terminal v_t . A velocidade terminal é a velocidade máxima obtida em queda livre, quando a força de arraste se iguala a força de gravidade e o objeto não tem mais aceleração:

$$mg = bv_t^2 \quad (22)$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_t^2} \quad (23)$$

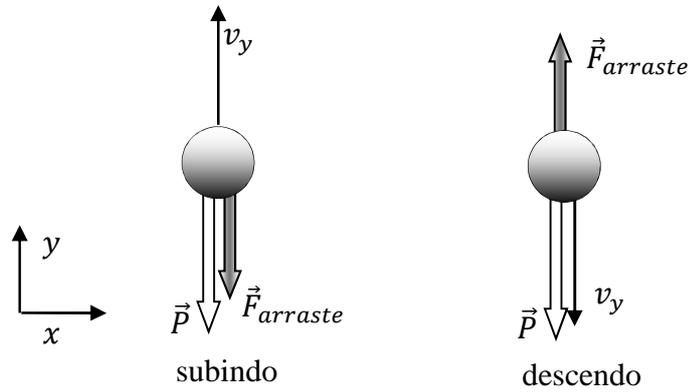


Figura 5

Assim a aceleração a_y é dada por:

$$a_y = -g \left(1 + \frac{v_y^2}{v_t^2} \right) \quad (\text{subindo}) \quad (24)$$

Quando o objeto está descendo a ação da força peso está num sentido e a força de arraste estará no outro sentido (figura 5), assim:

$$a_y = -g \left(1 - \frac{v_y^2}{v_t^2} \right) \quad (\text{descendo}) \quad (25)$$

Portanto, para um objeto subindo,

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} + [a_{y,n}] \Delta t \quad (26)$$

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} + \left[-g \left(1 + \frac{v_{y,n}^2}{v_t^2} \right) \right] \Delta t \quad (27)$$

e para o objeto descendo,

$$v_{y,n+1} = v_{y,n} + \left[-g \left(1 - \frac{v_{y,n}^2}{v_t^2} \right) \right] \Delta t \quad (28)$$

No movimento horizontal somente a força de arraste atua sobre o objeto (figura 6), assim:

$$\sum F_x = -bv_x^2 = ma_x \quad (29)$$

A aceleração no eixo x é dado por:

$$a_x = -\frac{b}{m} v_x^2 \quad (30)$$

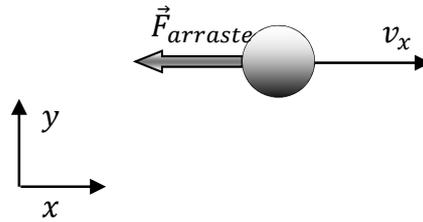


Figura 6

Da mesma forma podemos escrever a razão b/m em relação a velocidade terminal como:

$$a_x = -g \frac{v_x^2}{v_t^2} \quad (31)$$

Portanto o movimento em horizontal é dado por:

$$v_{x,n+1} = g \frac{v_x^2}{v_t^2} + [a_{x,n}] \Delta t \quad (32)$$

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \left[-g \frac{v_{x,n}^2}{v_t^2} \right] \Delta t \quad (33)$$

A velocidade terminal de uma bola de futebol é de cerca de 25m/s, e assumindo uma velocidade inicial como $v_{x,0} = 15 \text{ m/s}$ e $v_{y,0} = 15 \text{ m/s}$ (abaixo da crise do arraste) e um intervalo de tempo $\Delta t = 0,02 \text{ s}$, podemos calcular a velocidade e a posição em x e y usando o programa Excel, conforme tabela 2 e 3 (O apêndice C apresenta o cálculo completo). O resultado dos cálculos estão apresentados na figura 7 para um lançamento sem atrito e com atrito em diferentes velocidades terminais (24, 25 e 26 m/s).

Tabela 2: Velocidade e posição no eixo x calculados pelo método de Euler.

	tempo	Velocidade v_x	Posição x
0	0	$v_{x,0} = 15 \text{ m/s}$	$x_0 = 0 \text{ m}$
1	0,02s	$v_{x,1} = v_{x,0} + \left[-g \frac{v_{x,0}^2}{v_t^2} \right] \Delta t$ $v_{x,1} = 15 \text{ m/s} +$ $\left[-9,8 \text{ m/s}^2 \frac{(15 \text{ m/s})^2}{(25 \text{ m/s})^2} \right] 0,02 \text{ s}$ $v_{x,1} = 14,93 \text{ m/s}$	$x_1 = x_0 + v_{x,0} \Delta t$ $x_1 = 0 \text{ m} + 15 \text{ m/s} (0,02 \text{ s})$ $x_1 = 0,3 \text{ m}$
2	0,04s	$v_{x,2} = v_{x,1} + \left[-g \frac{v_{x,1}^2}{v_t^2} \right] \Delta t$ $v_{x,2} = 14,93 \text{ m/s} +$ $\left[-9,8 \text{ m/s}^2 \frac{(14,93 \text{ m/s})^2}{(25 \text{ m/s})^2} \right] 0,02 \text{ s}$ $v_{x,2} = 14,86 \text{ m/s}$	$x_2 = x_1 + v_{x,1} \Delta t$ $x_2 = 0,3 \text{ m} + 14,93 \text{ m/s} (0,02 \text{ s})$ $x_2 = 0,60 \text{ m}$
3	0,06s	$v_{x,3} = v_{x,2} + \left[-g \frac{v_{x,2}^2}{v_t^2} \right] \Delta t$ $v_{x,3} = 14,86 \text{ m/s} +$ $\left[-9,8 \text{ m/s}^2 \frac{(14,86 \text{ m/s})^2}{(25 \text{ m/s})^2} \right] 0,02 \text{ s}$ $v_{x,3} = 14,79 \text{ m/s}$	$x_3 = x_2 + v_{x,2} \Delta t$ $x_3 = 0,60 \text{ m} + 14,86 \text{ m/s} (0,02 \text{ s})$ $x_3 = 0,90 \text{ m}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$n \Delta t$	$v_{x,n+1} = v_{x,n} + \left[-g \frac{v_{x,n}^2}{v_t^2} \right] \Delta t$	$x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t$

Tabela 3: Velocidade e posição no eixo y calculado pelo método de Euler.

	tempo	Velocidade v_y	Posição y
0	0	$v_{y,0} = 15 \text{ m/s}$	$y_0 = 0 \text{ m}$
1	0,02s	$v_{y,1} = v_{y,0} + \left[-g \left(1 + \frac{v_{y,0}^2}{v_t^2} \right) \right] \Delta t$ $v_{y,1} = 15 \text{ m/s} +$ $\left[-9,8 \text{ m/s}^2 \left(1 + \frac{(15 \text{ m/s})^2}{(25 \text{ m/s})^2} \right) \right] 0,02 \text{ s}$ $v_{y,1} = 14,73 \text{ m/s}$	$y_1 = y_0 + v_{y,0} \Delta t$ $y_1 = 0 \text{ m} + 15 \text{ m/s} (0,02 \text{ s})$ $y_1 = 0,3 \text{ m}$
2	0,04s	$v_{y,2} = v_{y,1} + \left[-g \left(1 + \frac{v_{y,1}^2}{v_t^2} \right) \right] \Delta t$ $v_{y,2} = 14,73 \text{ m/s} +$ $\left[-9,8 \text{ m}$ $\text{/s}^2 \left(1 + \frac{(14,73 \text{ m/s})^2}{(25 \text{ m/s})^2} \right) \right] 0,02 \text{ s}$ $v_{y,2} = 14,46 \text{ m/s}$	$y_2 = y_1 + v_{y,1} \Delta t$ $y_2 = 0,3 \text{ m} + 14,73 \text{ m}$ $\text{/s} (0,02 \text{ s})$ $y_2 = 0,59 \text{ m}$
3	0,06s	$v_{y,3} = v_{y,2} + \left[-g \left(1 + \frac{v_{y,2}^2}{v_t^2} \right) \right] \Delta t$ $v_{y,3} = 14,46 \text{ m/s} +$ $\left[-9,8 \text{ m}$ $\text{/s}^2 \left(1 + \frac{(14,46 \text{ m/s})^2}{(25 \text{ m/s})^2} \right) \right] 0,02 \text{ s}$ $v_{y,2} = 14,20 \text{ m/s}$	$y_3 = y_2 + v_{y,2} \Delta t$ $y_3 = 0,59 \text{ m} + 14,46 \text{ m}$ $\text{/s} (0,02 \text{ s})$ $y_3 = 0,88 \text{ m}$
n	$n \Delta t$	$v_{y,n+1} = v_{y,n} + \left[-g \left(1 + \frac{v_{y,n}^2}{v_t^2} \right) \right] \Delta t$	$y_{n+1} = y_n + v_{y,n} \Delta t$

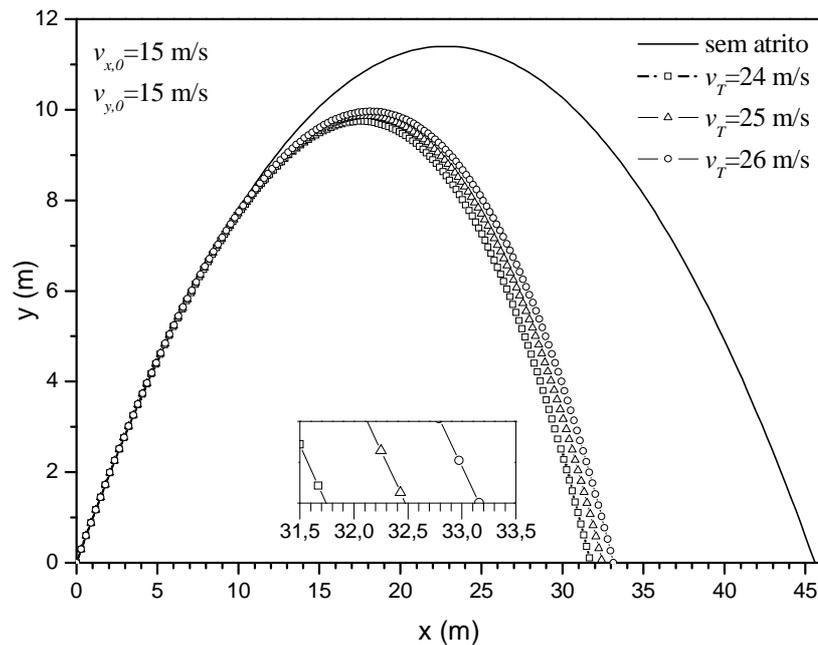


Figura 7 Trajetória de um projétil sem atrito do ar e com atrito do ar com velocidades terminais 24, 25 e 26 m/s (tabela 2, 3 e tabela 6-Apêndice B).

Na copa do mundo de futebol na África do Sul foi observado um problema com relação a bola de futebol. A bola Jabulani tinha uma rugosidade superficial diferente e também apresentava áreas assimétricas logo após o chute, além do que os jogos eram disputados em locais de diferentes altitudes. Todos estes fatores contribuíram para uma mudança na força de arraste, isto é uma diferente velocidade terminal da bola [2]. Como podemos ver no gráfico (figura 7) uma mudança na velocidade terminal (4%) pode mudar a trajetória da bola em cerca de 70 cm.

2.4 Número de Reynolds

Aqui apresentaremos uma introdução ao conceito do Número de Reynolds.

O número de Reynolds mede a razão entre as forças inerciais e viscosas que atuam na bola, e indica o tempo de escoamento do fluido. Como a bola possui uma velocidade muito menor que a do som, podemos representar o número de Reynolds (Re) por:

$$Re = \rho \frac{Dv}{\eta} \quad (34)$$

Sendo Re número de Reynolds, D refere-se ao diâmetro da bola, η a viscosidade do ar, ρ a densidade do ar e v é a velocidade.

Os valores de Re pequenos correspondem ao escoamento laminar (que é definida como aquele no qual o fluido se move em camadas ou laminas) e para valores de Re grandes associamos a formação de turbulência (é aquele no qual as partículas apresentam movimentos caóticos, isto é, a velocidade apresenta componentes transversais ao movimento).

Para pequenos números de Reynolds $Re \ll 1$ o coeficiente de arraste (equação 2) é dado pela forma de Stokes:

$$C_A = \frac{24}{Re} \quad (35)$$

Nesse caso a força de arraste é linear e proporcional a velocidade, para uma grande faixa de valores de Re entre 10^3 e 3×10^5 , o coeficiente de arraste é constante, mantendo-se em torno de $C_A = 0,5$, nesta região a força de arraste é proporcional ao quadrado da velocidade. Observe na figura 8, a queda abrupta de C_A em torno de $Re = 3 \times 10^5$, essa redução drástica da resistência do ar, é chamada de crise de arraste.

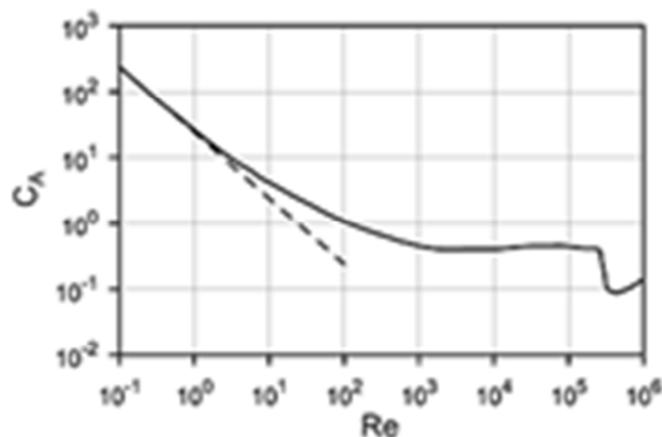


Figura 8: Coeficiente de arraste C_A de uma esfera lisa, em função do número de Reynolds Re . A linha cheia é o resultado de medidas realizadas em túneis de vento. A linha tracejada corresponde à fórmula de Stocks (força de arraste é proporcional à velocidade v). [ref. 1].

2.5 Camada limite

Nesta seção, apresentaremos alguns aspectos do conceito de camada limite.

A crise de arraste esta diretamente associada ao comportamento da camada limite de ar que forma em torno da bola, conforme podemos observar na figura 9.

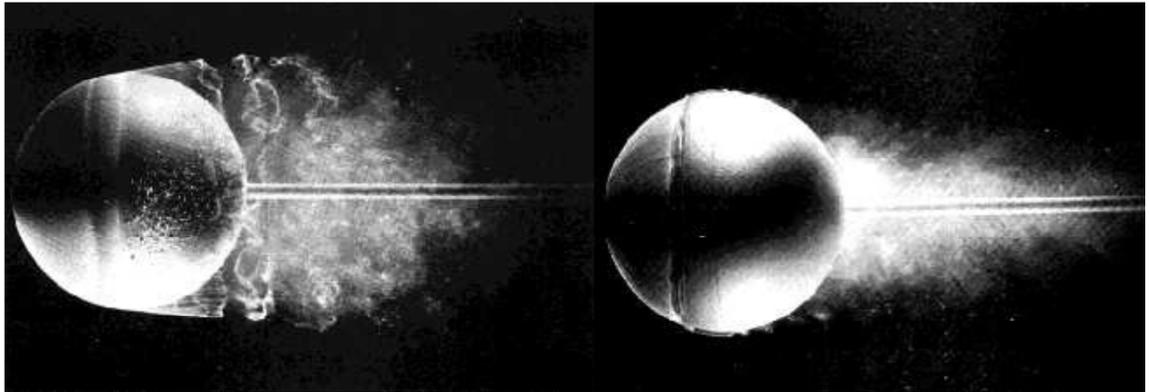


Figura 9 Separação da camada limite em uma esfera. Esquerda: camada laminar. Direita: camada turbulenta. [ref. 4]

A camada limite não envolve toda a bola conforme aumenta à velocidade, a camada limite separa da parte posterior da bola. Essa separação causa uma diminuição significativa da pressão na parte de trás da bola, ou seja, tem origem na aderência das moléculas do ar à superfície da bola, pois a viscosidade transmite parcialmente esta aderência às moléculas mais distante, formando uma região que tende a mover-se com a bola.

A força de arraste é explicada pela diferença entre a alta pressão na parte dianteira da bola e baixa pressão na parte de trás. A turbulência permite que a camada resista melhor a tendência de separação, e com isso o ponto de deslocamento move-se mais para trás da esfera diminuindo a área da esteira, a contração da esteira reduz a área da esfera submetida a baixas pressões, e causa uma diminuição da resistência do ar.

3. EFEITO MAGNUS

Neste capítulo, apresentaremos aspectos teóricos do efeito Magnus.

Quando a bola de futebol gira em torno de seu centro de sustentação perpendicular a velocidade e ao eixo de rotação é chamada de força Magnus. Na figura 10, a bola gira no sentido horário e joga o ar para baixo, a força de Magnus é a reação do ar, que empurra a bola para cima.

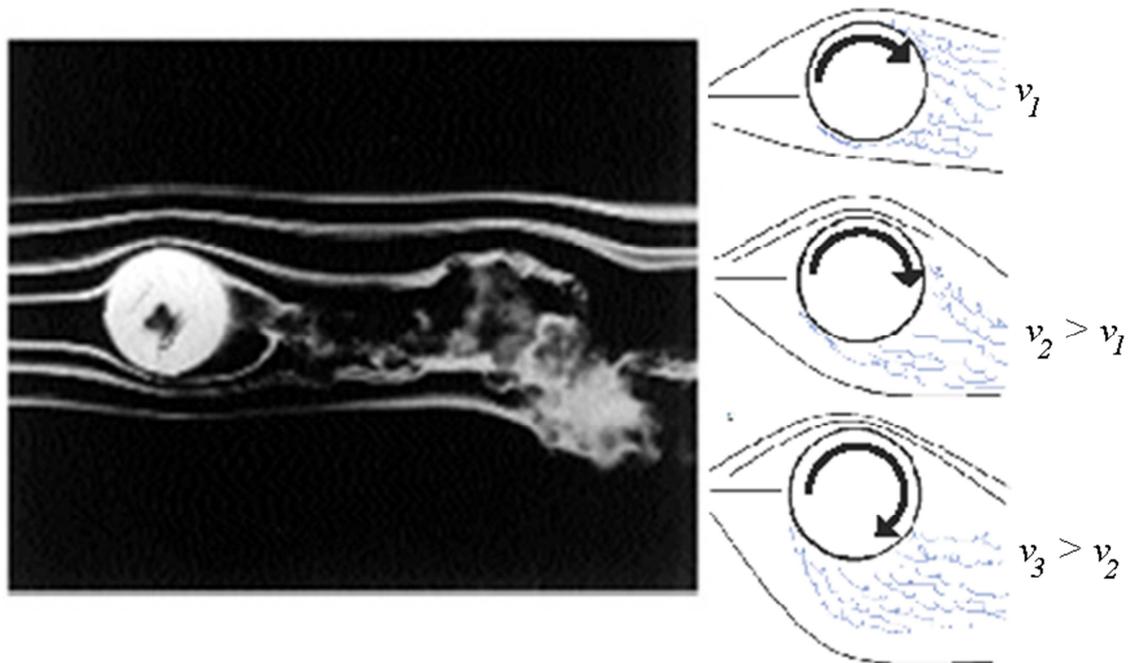


Figura:10 Separação da camada limite em uma bola girando no sentido horário.[ref. 4], e diferentes velocidades.

Observe que a separação da camada limite é antecipada na parte de baixo da bola, em que a rotação se opõe ao fluxo de ar, e adiada no lado superior em que a rotação acompanha a passagem do ar. A simetria da separação da camada limite empurra o ar atrás da bola para baixo. Pela 3^o lei de Newton, (ação e reação), a bola sofre uma força em sentido contrário, para cima. Esta força dá origem ao efeito Magnus. Para melhor entender esse efeito, observe que quando a bola gira em torno de seu centro uma força de sustentação passa a agir sobre ela, a força Magnus pode ser escrita pela equação a seguir:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} C_s \rho A v^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|} \quad (36)$$

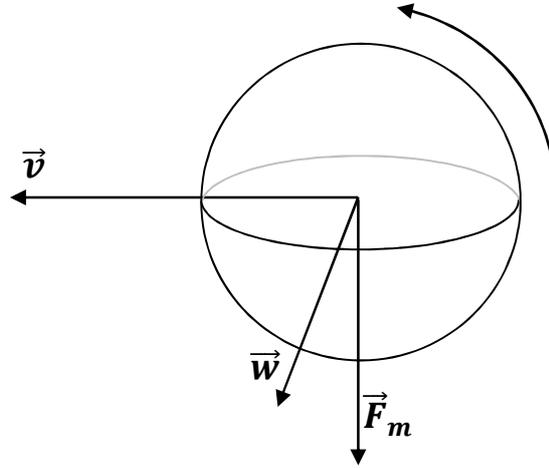


Figura 11

Sendo que F_m é a força Magnus, C_s é o coeficiente de sustentação e ω é a velocidade angular (figura 11). Podemos definir o coeficiente de Magnus C_m como:

$$\text{coeficiente de Magnus } C_m = \frac{C_s}{S(\text{sen}^2 \theta)} \quad (37)$$

Sendo θ o ângulo entre a velocidade e o eixo de rotação:

$$S = \frac{\omega r}{v} \quad (38)$$

E logo:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} C_m \rho A r (\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (39)$$

Portanto, dado o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ e a velocidade do objeto \vec{v} , a força resultante pode simplificada pela seguinte equação:

$$\vec{F}_{magnus} = S' (\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (40)$$

onde S' é dependente C_m, ρ, A, r . A literatura refere-se ao valor de $C_m = 1$ [5] para bola de futebol e normalmente com $\vec{\omega}$ perpendicular a \vec{v} ($\theta = 90^\circ$ portanto $\text{sen} \theta = 1$). Se a força de Magnus for constante, ela poderia ser acrescentada ao nosso modelo com

força de Arraste e calcular a trajetória via Excel. Abaixo mostraremos algumas figuras da literatura do efeito Magnus (figuras 12 e 13)

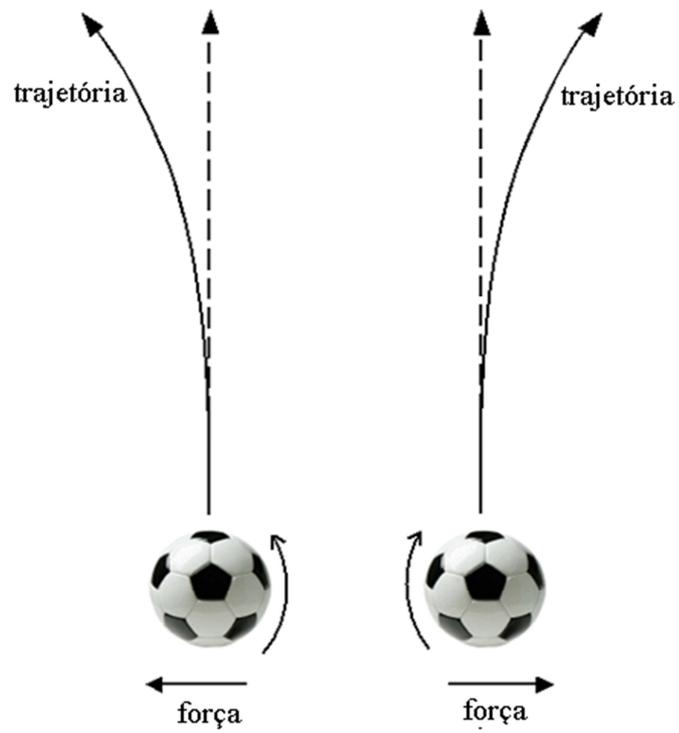


Figura 12 [ref. 5]

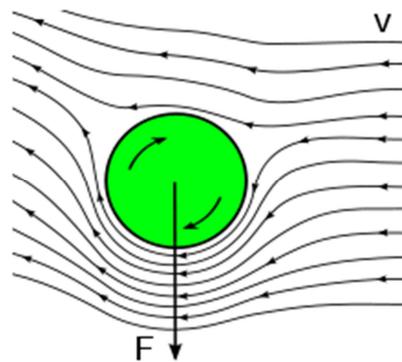


Figura 13 [5]

4. FORÇA DE ARRASTE E FORÇA MAGNUS

A bola da FIFA2010 World Cop foi muito criticada por apresentar o efeito Magnus diferente das bolas anteriores. A atual bola é descrita como tendo menos efeito Magnus e como resultado: Voa mais longe, mas com menos controle. Além disso, alguns dizem que o efeito Magnus da bola varia de acordo com o eixo sobre o qual ela gira.

Uma série de artigos recentes mostra que as forças de Magnus e de Arraste são um tema atual e ainda há muito a ser feito. Isso se deve principalmente a mudança nos materiais de fabricação das bolas oficiais, como podemos observar na figura 14. Por exemplo, para a bola Jabulani (utilizada na copa de 2010) a transição entre o regime estacionário e o regime turbulento ocorre em $Re = 1.97 \times 10^5$. O coeficiente de arrasto passa de 0,43 a 0,12 e neste valor acontece a transição. O coeficiente de arrasto nas regiões turbulentas aumenta para um valor de 0,19 quando $Re = 4.00 \times 10^5$. Esta transição do regime estacionário para o turbulento ocorre entre 9,5 e 14 m/s (33-50,4 km / h). Como podemos observar este comportamento da bola Jabulani é bem diferente de uma esfera de referência [Ref.10].

Boa parte dos novos trabalhos foi feitos em túneis de vento e/ou usando gravação com vídeo. Com uso destas tecnologias é possível obter os valores da força de arraste e a força de Magnus. Por exemplo, em um desses trabalhos foi determinado uma força de arraste de 1,4 N e uma força de Magnus de 1 N [Ref. 9].

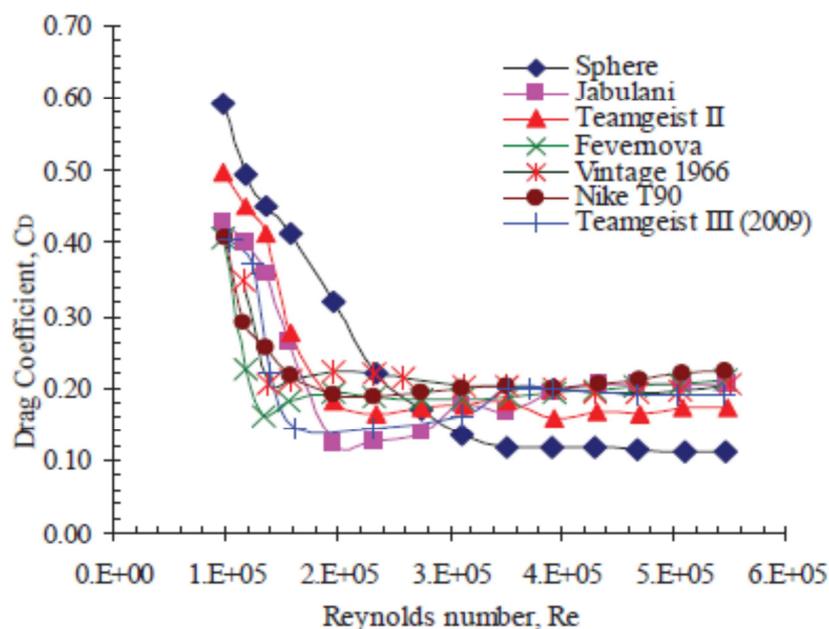


Figura 14 Coeficiente da força de Arraste em dependência do número de Reynolds [Ref.10].

Para entender melhor o efeito da força de Arraste e a força Magnus que atua na bola veremos algumas simulações do chute do jogador Pelé na partida Brasil x Techcoslováquia pela Copa do Mundo de 1970 em Guadalajara da [ref.1] a seguir:

Observe a figura 15, o ponto marcado no meio da trajetória aponta onde ocorreu a crise do arraste (mudança do comportamento laminar para turbulento, figura 4). A bola partiu a 105 km/h, girando a 7 rotações por segundo. A crise do Arraste ocorreu no ponto marcado sobre a trajetória. A partir daí, a resistência do ar ficou muito maior.

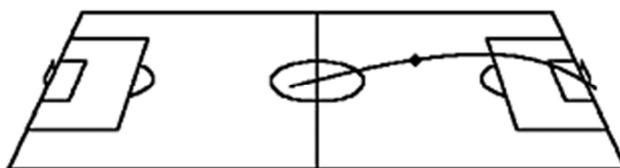


Figura 15: Simulação do chute (dados obtidos dos vídeos). A crise do arraste ocorre no ponto marcado sobre a trajetória.[ref. 1]

Podemos observar a importância da crise do arraste para uma jogada tirando-a de ação, ou seja, fazendo $C_a = 0,5$ para todas as velocidades (figura 16). O que aconteceria com a bola caso a crise não reduzisse a resistência do ar? Ela não chegaria nem mesmo à grande área.

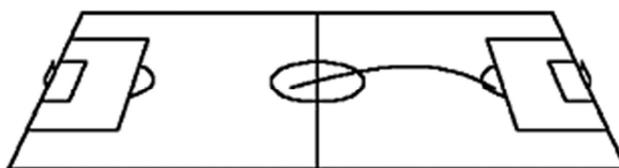


Figura 16: O que aconteceria com a bola chutada se não houvesse a crise do arraste.[ref. 1]

A importância do efeito Magnus pode ser avaliada da mesma forma. Se a bola chutada não tivesse nenhuma rotação, sua trajetória seria a mostrada na Figura 17. Ela mal chega à grande área, desta vez pela ausência da força de sustentação criada pelo efeito Magnus.



Figura 17: O que aconteceria com a bola chutada sem o efeito Magnus.[ref. 1]

Mas talvez o mais surpreendente é o que ocorreria se não existissem nem o arraste nem a força de Magnus (ou seja, se a bola tivesse sido chutada no vácuo). A parábola prevista por Galileu mostrada na Figura 18. Vemos que ela cairia bem antes do gol, apesar de não haver resistência do ar. Isso nos mostra, mais uma vez, quão importante é a sustentação aerodinâmica criada pelo efeito Magnus.



Figura 18: O que aconteceria com a bola se ela estivesse no vácuo[ref. 1]

Os chutes com "efeito", por exemplo, revelam algumas das conseqüências mais espetaculares da força de Magnus. Na Figura 19, vemos a trajetória de bolas chutadas do mesmo ponto, com a mesma velocidade, e com diferentes rotações em torno do eixo vertical (0,5 e 10 Hz). A bola sem rotação (0 Hz) passa bem longe da trave - já as bolas de efeito vão na direção do gol.

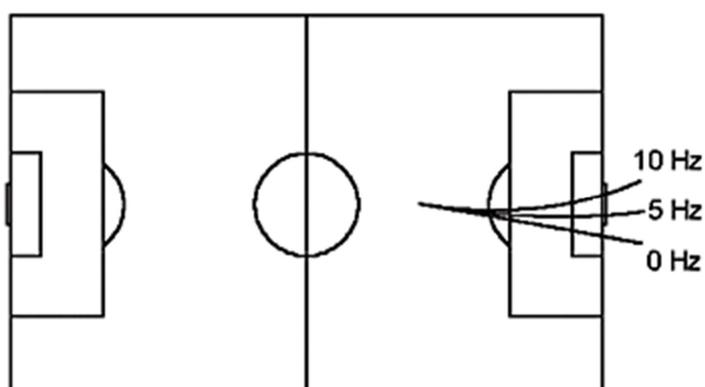


Figura 19-: Trajetória de bolas com rotação em torno do eixo vertical [ref. 1].

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados numéricos aqui apresentados, usando o método de Euler e programados em Excel, estão de acordo com os resultados analíticos para $n=1$, isto é para baixas velocidades. A mesma metodologia foi usada para altas velocidades ($n = 2$). O uso de planilhas eletrônicas, no nosso caso Excel, na solução de problemas físicos é promissor. As planilhas eletrônicas são bastante conhecidas e instaladas em quase todos os computadores pessoais.

Mostramos através dos cálculos numéricos que o valor da velocidade terminal da bola é um parâmetro importante na trajetória da bola. Este parâmetro pode ser facilmente medido. Uma mudança na velocidade terminal (4%) pode mudar a trajetória da bola em cerca de 70 cm.

Observamos que o efeito Magnus é de suma importância na trajetória da bola. Este efeito é conhecido por observação e realizado por experimentação, sem que haja uma explicação física para o efeito. A explicação física é simples, mas o tratamento matemático ainda é complicado. Falta um tratamento matemático simples para que isto possa ser melhor aplicado. O efeito Magnus pode ser um ótimo exemplo do produto vetorial nos cursos de física básica.

Houve em torno deste trabalho um estudo para mostrar um pouco sobre a existência dos conceitos físicos envolvido nos jogos de futebol visto que esses conceitos estão presentes em muitos outros tipos de esportes.

Vale a pena destacar que neste esporte não está envolvido somente os conceitos citados, mas também muitos outros relacionados aos conceitos físicos que não aqui foram abordados.

Apêndice A

A1. Dimensões do Campo de Futebol

Antes de iniciar uma partida de futebol os jogadores devem saber os princípios básicos como, conhecer as dimensões das laterais do campo, assim como a localização das áreas de penalidade, círculo de meio de campo, ou seja todas as marcações necessárias, como é mostrado a figura 16 e tabela 4. A tabela 5 mostra as medidas oficiais da bola de futebol.

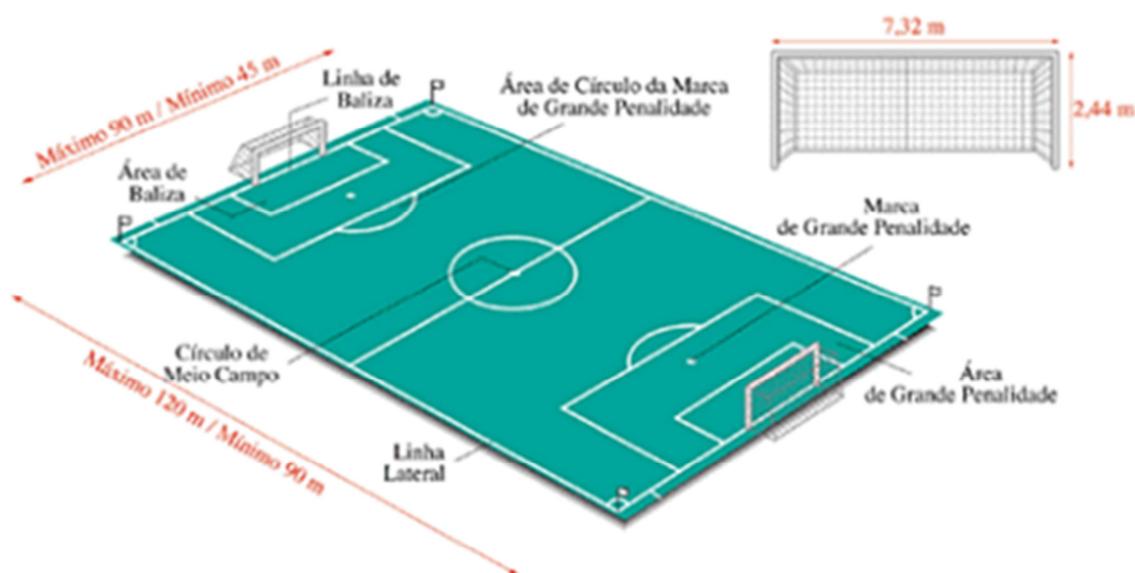


Figura 22: Campo de futebol [7]

Tabela 3 Campo de Futebol segundo normas do Inmetro[8]

DESCRIÇÃO	VALOR EXIGIDO
Marca Penal - distância (m)	11
Marca Penal - diâmetro da marca (cm)	22
Baliza - distância entre as balizas verticais (medida interna) (m)	7,32
Baliza - distância da borda inferior, da baliza horizontal ao solo. (m)	2,44
Baliza - largura da baliza vertical (cm)	12
Baliza - largura da baliza horizontal (cm)	12
Comprimento da Grande Área em relação as marcas externas das linhas (m)	40,32
Largura da Grande Área - em relação as marcas externas das linhas (m)	16,5
Comprimento da Pequena Área em relação as marcas externas das linhas (m)	18,32
Largura da Pequena Área - em relação as marcas externas das linhas(m)	5,5
Raio da Meia Lua - valor em relação ao centro da marca penal e a marca externa da linha da meia lua (m)	9,15
Comprimento do Campo (m)	Máx.= 120

	Mín. = 90
Largura do Campo (m)	Máx.= 90
	Mín. = 45
Círculo Central (m)	9,15

Tabela 4: Medidas das Bolas segundo Inmetro [8].

DESCRIÇÃO	VALOR EXIGIDO
Circunferência (cm)	Máx. = 70 Mín. = 68
Peso (g)	Máx. = 450 Mín. = 410
Pressão (kgf/cm ²)	Máx. = 1,1 Mín. = 0,6

Apêndice B

Tabela 5: Cálculo das velocidades e das posições usando o programa Excel n=1

(ver figura 3)

tempo	vx	vx(teoria)	x
0	1	1	0
0,02	0,98	0,980199	0,02
0,04	0,9604	0,960789	0,0396
0,06	0,941192	0,941765	0,058808
0,08	0,922368	0,923116	0,077632
0,1	0,903921	0,904837	0,096079
0,12	0,885842	0,88692	0,114158
0,14	0,868126	0,869358	0,131874
0,16	0,850763	0,852144	0,149237
0,18	0,833748	0,83527	0,166252
0,2	0,817073	0,818731	0,182927
0,22	0,800731	0,802519	0,199269
0,24	0,784717	0,786628	0,215283
0,26	0,769022	0,771052	0,230978
0,28	0,753642	0,755784	0,246358
0,3	0,738569	0,740818	0,261431
0,32	0,723798	0,726149	0,276202
0,34	0,709322	0,71177	0,290678
0,36	0,695135	0,697676	0,304865
0,38	0,681233	0,683861	0,318767
0,4	0,667608	0,67032	0,332392
0,42	0,654256	0,657047	0,345744
0,44	0,641171	0,644036	0,358829
0,46	0,628347	0,631284	0,371653
0,48	0,61578	0,618783	0,38422
0,5	0,603465	0,606531	0,396535
0,52	0,591395	0,594521	0,408605
0,54	0,579568	0,582748	0,420432
0,56	0,567976	0,571209	0,432024
0,58	0,556617	0,559898	0,443383
0,6	0,545484	0,548812	0,454516
0,62	0,534575	0,537944	0,465425
0,64	0,523883	0,527292	0,476117
0,66	0,513405	0,516851	0,486595
0,68	0,503137	0,506617	0,496863
0,7	0,493075	0,496585	0,506925
0,72	0,483213	0,486752	0,516787
0,74	0,473549	0,477114	0,526451
0,76	0,464078	0,467666	0,535922
0,78	0,454796	0,458406	0,545204

0,8	0,4457	0,449329	0,5543
0,82	0,436786	0,440432	0,563214
0,84	0,428051	0,431711	0,571949
0,86	0,41949	0,423162	0,58051
0,88	0,4111	0,414783	0,5889
0,9	0,402878	0,40657	0,597122
0,92	0,39482	0,398519	0,60518
0,94	0,386924	0,390628	0,613076
0,96	0,379185	0,382893	0,620815
0,98	0,371602	0,375311	0,628398
1	0,36417	0,367879	0,63583
1,02	0,356886	0,360595	0,643114
1,04	0,349749	0,353455	0,650251
1,06	0,342754	0,346456	0,657246
1,08	0,335899	0,339596	0,664101
1,1	0,329181	0,332871	0,670819
1,12	0,322597	0,32628	0,677403
1,14	0,316145	0,319819	0,683855
1,16	0,309822	0,313486	0,690178
1,18	0,303626	0,307279	0,696374
1,2	0,297553	0,301194	0,702447
1,22	0,291602	0,29523	0,708398
1,24	0,28577	0,289384	0,71423
1,26	0,280055	0,283654	0,719945
1,28	0,274454	0,278037	0,725546
1,3	0,268964	0,272532	0,731036
1,32	0,263585	0,267135	0,736415
1,34	0,258313	0,261846	0,741687
1,36	0,253147	0,256661	0,746853
1,38	0,248084	0,251579	0,751916
1,4	0,243123	0,246597	0,756877
1,42	0,23826	0,241714	0,76174
1,44	0,233495	0,236928	0,766505
1,46	0,228825	0,232236	0,771175
1,48	0,224249	0,227638	0,775751
1,5	0,219764	0,22313	0,780236
1,52	0,215368	0,218712	0,784632
1,54	0,211061	0,214381	0,788939
1,56	0,20684	0,210136	0,79316
1,58	0,202703	0,205975	0,797297
1,6	0,198649	0,201897	0,801351
1,62	0,194676	0,197899	0,805324
1,64	0,190782	0,19398	0,809218
1,66	0,186967	0,190139	0,813033
1,68	0,183227	0,186374	0,816773

1,7	0,179563	0,182684	0,820437
1,72	0,175972	0,179066	0,824028
1,74	0,172452	0,17552	0,827548
1,76	0,169003	0,172045	0,830997
1,78	0,165623	0,168638	0,834377
1,8	0,162311	0,165299	0,837689
1,82	0,159064	0,162026	0,840936
1,84	0,155883	0,158817	0,844117
1,86	0,152765	0,155673	0,847235
1,88	0,14971	0,15259	0,85029
1,9	0,146716	0,149569	0,853284
1,92	0,143782	0,146607	0,856218
1,94	0,140906	0,143704	0,859094
1,96	0,138088	0,140858	0,861912
1,98	0,135326	0,138069	0,864674
2	0,13262	0,135335	0,86738
2,02	0,129967	0,132655	0,870033
2,04	0,127368	0,130029	0,872632
2,06	0,12482	0,127454	0,87518
2,08	0,122324	0,12493	0,877676
2,1	0,119878	0,122456	0,880122
2,12	0,11748	0,120032	0,88252
2,14	0,11513	0,117655	0,88487
2,16	0,112828	0,115325	0,887172
2,18	0,110571	0,113042	0,889429
2,2	0,10836	0,110803	0,89164
2,22	0,106193	0,108609	0,893807
2,24	0,104069	0,106459	0,895931
2,26	0,101987	0,10435	0,898013
2,28	0,099948	0,102284	0,900052
2,3	0,097949	0,100259	0,902051
2,32	0,09599	0,098274	0,90401
2,34	0,09407	0,096328	0,90593
2,36	0,092189	0,09442	0,907811
2,38	0,090345	0,092551	0,909655
2,4	0,088538	0,090718	0,911462
2,42	0,086767	0,088922	0,913233
2,44	0,085032	0,087161	0,914968
2,46	0,083331	0,085435	0,916669
2,48	0,081665	0,083743	0,918335
2,5	0,080031	0,082085	0,919969
2,52	0,078431	0,08046	0,921569
2,54	0,076862	0,078866	0,923138
2,56	0,075325	0,077305	0,924675
2,58	0,073818	0,075774	0,926182

2,6	0,072342	0,074274	0,927658
2,62	0,070895	0,072803	0,929105
2,64	0,069477	0,071361	0,930523
2,66	0,068088	0,069948	0,931912
2,68	0,066726	0,068563	0,933274
2,7	0,065391	0,067206	0,934609
2,72	0,064084	0,065875	0,935916
2,74	0,062802	0,06457	0,937198
2,76	0,061546	0,063292	0,938454
2,78	0,060315	0,062039	0,939685
2,8	0,059109	0,06081	0,940891
2,82	0,057926	0,059606	0,942074
2,84	0,056768	0,058426	0,943232
2,86	0,055633	0,057269	0,944367
2,88	0,05452	0,056135	0,94548
2,9	0,053429	0,055023	0,946571
2,92	0,052361	0,053934	0,947639
2,94	0,051314	0,052866	0,948686
2,96	0,050287	0,051819	0,949713
2,98	0,049282	0,050793	0,950718
3	0,048296	0,049787	0,951704
3,02	0,04733	0,048801	0,95267
3,04	0,046383	0,047835	0,953617
3,06	0,045456	0,046888	0,954544
3,08	0,044547	0,045959	0,955453
3,1	0,043656	0,045049	0,956344
3,12	0,042783	0,044157	0,957217
3,14	0,041927	0,043283	0,958073
3,16	0,041088	0,042426	0,958912
3,18	0,040267	0,041586	0,959733
3,2	0,039461	0,040762	0,960539
3,22	0,038672	0,039955	0,961328
3,24	0,037899	0,039164	0,962101
3,26	0,037141	0,038388	0,962859
3,28	0,036398	0,037628	0,963602
3,3	0,03567	0,036883	0,96433
3,32	0,034957	0,036153	0,965043
3,34	0,034257	0,035437	0,965743
3,36	0,033572	0,034735	0,966428
3,38	0,032901	0,034047	0,967099
3,4	0,032243	0,033373	0,967757
3,42	0,031598	0,032712	0,968402
3,44	0,030966	0,032065	0,969034
3,46	0,030347	0,03143	0,969653
3,48	0,02974	0,030807	0,97026

3,5	0,029145	0,030197	0,970855
3,52	0,028562	0,029599	0,971438
3,54	0,027991	0,029013	0,972009
3,56	0,027431	0,028439	0,972569
3,58	0,026882	0,027876	0,973118
3,6	0,026345	0,027324	0,973655
3,62	0,025818	0,026783	0,974182
3,64	0,025301	0,026252	0,974699
3,66	0,024795	0,025733	0,975205
3,68	0,0243	0,025223	0,9757
3,7	0,023814	0,024724	0,976186
3,72	0,023337	0,024234	0,976663
3,74	0,022871	0,023754	0,977129
3,76	0,022413	0,023284	0,977587
3,78	0,021965	0,022823	0,978035
3,8	0,021526	0,022371	0,978474
3,82	0,021095	0,021928	0,978905
3,84	0,020673	0,021494	0,979327
3,86	0,02026	0,021068	0,97974
3,88	0,019854	0,020651	0,980146
3,9	0,019457	0,020242	0,980543
3,92	0,019068	0,019841	0,980932
3,94	0,018687	0,019448	0,981313
3,96	0,018313	0,019063	0,981687
3,98	0,017947	0,018686	0,982053
4	0,017588	0,018316	0,982412
4,02	0,017236	0,017953	0,982764
4,04	0,016891	0,017597	0,983109
4,06	0,016554	0,017249	0,983446
4,08	0,016223	0,016907	0,983777
4,1	0,015898	0,016573	0,984102
4,12	0,01558	0,016245	0,98442
4,14	0,015269	0,015923	0,984731
4,16	0,014963	0,015608	0,985037
4,18	0,014664	0,015299	0,985336
4,2	0,014371	0,014996	0,985629
4,22	0,014083	0,014699	0,985917
4,24	0,013802	0,014408	0,986198
4,26	0,013526	0,014122	0,986474
4,28	0,013255	0,013843	0,986745
4,3	0,01299	0,013569	0,98701
4,32	0,01273	0,0133	0,98727
4,34	0,012476	0,013037	0,987524
4,36	0,012226	0,012778	0,987774
4,38	0,011981	0,012525	0,988019

4,4	0,011742	0,012277	0,988258
4,42	0,011507	0,012034	0,988493
4,44	0,011277	0,011796	0,988723
4,46	0,011051	0,011562	0,988949
4,48	0,01083	0,011333	0,98917
4,5	0,010614	0,011109	0,989386
4,52	0,010401	0,010889	0,989599
4,54	0,010193	0,010673	0,989807
4,56	0,00999	0,010462	0,99001
4,58	0,00979	0,010255	0,99021
4,6	0,009594	0,010052	0,990406
4,62	0,009402	0,009853	0,990598
4,64	0,009214	0,009658	0,990786
4,66	0,00903	0,009466	0,99097
4,68	0,008849	0,009279	0,991151
4,7	0,008672	0,009095	0,991328
4,72	0,008499	0,008915	0,991501
4,74	0,008329	0,008739	0,991671
4,76	0,008162	0,008566	0,991838
4,78	0,007999	0,008396	0,992001
4,8	0,007839	0,00823	0,992161
4,82	0,007682	0,008067	0,992318
4,84	0,007529	0,007907	0,992471
4,86	0,007378	0,00775	0,992622
4,88	0,00723	0,007597	0,99277
4,9	0,007086	0,007447	0,992914
4,92	0,006944	0,007299	0,993056
4,94	0,006805	0,007155	0,993195
4,96	0,006669	0,007013	0,993331
4,98	0,006536	0,006874	0,993464
5	0,006405	0,006738	0,993595

Tabela 6: Cálculo das velocidades e das posições usando o programa Excel n=2
(ver figura 7).

	velocidade terminal =25m/s								
	vy	vy (sem atrito)	y	y(sem atrito)		vx	vx(sem atrito)	x	x(sem atrito)
0	15	15	0	0		15	15	0	0
0,02	14,731536	14,8026	0,3	0,298026		14,928936	15	0,3	0,3
0,04	14,465593	14,6052	0,59463072	0,592104		14,8585438	16	0,59857872	0,6
0,06	14,2021024	14,4078	0,88394258	0,882234		14,7888138	17	0,8957496	0,9
0,08	13,9409976	14,2104	1,16798463	1,168416		14,7197367	18	1,19152587	1,2
0,1	13,6822136	14,013	1,44680458	1,45065		14,6513034	19	1,4859206	1,5
0,12	13,4256874	13,8156	1,72044885	1,728936		14,583505	20	1,77894667	1,8
0,14	13,1713576	13,6182	1,9889626	2,003274		14,5163326	21	2,07061677	2,1
0,16	12,9191642	13,4208	2,25238975	2,273664		14,4497776	22	2,36094343	2,4
0,18	12,6690489	13,2234	2,51077303	2,540106		14,3838314	23	2,64993898	2,7
0,2	12,4209551	13,026	2,76415401	2,8026		14,3184858	24	2,9376156	3
0,22	12,1748273	12,8286	3,01257312	3,061146		14,2537326	25	3,22398532	3,3
0,24	11,9306114	12,6312	3,25606966	3,315744		14,1895637	26	3,50905997	3,6
0,26	11,6882549	12,4338	3,49468189	3,566394		14,1259713	27	3,79285125	3,9
0,28	11,4477064	12,2364	3,72844699	3,813096		14,0629477	28	4,07537067	4,2
0,3	11,2089155	12,039	3,95740112	4,05585		14,0004851	29	4,35662963	4,5
0,32	10,9718335	11,8416	4,18157943	4,294656		13,9385762	30	4,63663933	4,8
0,34	10,7364123	11,6442	4,4010161	4,529514		13,8772135	31	4,91541085	5,1
0,36	10,5026052	11,4468	4,61574434	4,760424		13,81639	32	5,19295512	5,4
0,38	10,2703666	11,2494	4,82579645	4,987386		13,7560985	33	5,46928292	5,7
0,4	10,0396517	11,052	5,03120378	5,2104		13,696332	34	5,74440489	6
0,42	9,81041669	10,8546	5,23199681	5,429466		13,6370837	35	6,01833153	6,3
0,44	9,5826189	10,6572	5,42820515	5,644584		13,5783469	36	6,29107321	6,6
0,46	9,35621639	10,4598	5,61985752	5,855754		13,520115	37	6,56264014	6,9
0,48	9,13116814	10,2624	5,80698185	6,062976		13,4623815	38	6,83304244	7,2
0,5	8,90743396	10,065	5,98960521	6,26625		13,40514	39	7,10229008	7,5
0,52	8,68497446	9,8676	6,16775389	6,465576		13,3483843	40	7,37039288	7,8
0,54	8,46375104	9,6702	6,34145338	6,660954		13,2921081	41	7,63736056	8,1
0,56	8,24372581	9,4728	6,5107284	6,852384		13,2363055	42	7,90320272	8,4
0,58	8,02486164	9,2754	6,67560292	7,039866		13,1809704	43	8,16792883	8,7
0,6	7,80712204	9,078	6,83610015	7,2234		13,126097	44	8,43154824	9
0,62	7,59047123	8,8806	6,99224259	7,402986		13,0716795	45	8,69407018	9,3
0,64	7,37487403	8,6832	7,14405202	7,578624		13,0177123	46	8,9550377	9,6
0,66	7,16029588	8,4858	7,2915495	7,750314		12,9641898	47	9,21585802	9,9
0,68	6,94670282	8,2884	7,43475542	7,918056		12,9111065	48	9,47514181	10,2
0,7	6,73406143	8,091	7,57368947	8,08185		12,858457	49	9,73336394	10,5
0,72	6,52233885	7,8936	7,7083707	8,241696		12,806236	50	9,99053308	10,8
0,74	6,31150273	7,6962	7,83881748	8,397594		12,7544384	51	10,2466578	11,1
0,76	6,10152122	7,4988	7,96504753	8,549544		12,7030589	52	10,5017466	11,4
0,78	5,89236295	7,3014	8,08707796	8,697546		12,6520925	53	10,7558077	11,7
0,8	5,683997	7,104	8,20492522	8,8416		12,6015343	54	11,0088496	12
0,82	5,4763929	6,9066	8,31860516	8,981706		12,5513793	55	11,2608803	12,3

0,84	5,26952058	6,7092	8,42813301	9,117864		12,5016228	56	11,5119079	12,6
0,86	5,06335039	6,5118	8,53352343	9,250074		12,45226	57	11,7619403	12,9
0,88	4,85785303	6,3144	8,63479043	9,378336		12,4032862	58	12,0109855	13,2
0,9	4,65299961	6,117	8,73194749	9,50265		12,3546969	59	12,2590513	13,5
0,92	4,44876154	5,9196	8,82500749	9,623016		12,3064876	60	12,5061452	13,8
0,94	4,2451106	5,7222	8,91398272	9,739434		12,2586537	61	12,7522749	14,1
0,96	4,04201886	5,5248	8,99888493	9,851904		12,211191	62	12,997448	14,4
0,98	3,83945869	5,3274	9,07972531	9,960426		12,1640951	63	13,2416718	14,7
1	3,63740276	5,13	9,15651448	10,065		12,1173617	64	13,4849537	15
1,02	3,43582397	4,9326	9,22926253	10,165626		12,0709868	65	13,727301	15,3
1,04	3,23469552	4,7352	9,29797901	10,262304		12,0249662	66	13,9687207	15,6
1,06	3,0339908	4,5378	9,36267292	10,355034		11,9792958	67	14,20922	15,9
1,08	2,83368346	4,3404	9,42335274	10,443816		11,9339716	68	14,4488059	16,2
1,1	2,63374734	4,143	9,48002641	10,52865		11,8889898	69	14,6874854	16,5
1,12	2,43415648	3,9456	9,53270136	10,609536		11,8443464	70	14,9252652	16,8
1,14	2,23488509	3,7482	9,58138449	10,686474		11,8000377	71	15,1621521	17,1
1,16	2,03590756	3,5508	9,62608219	10,759464		11,7560598	72	15,3981529	17,4
1,18	1,83719843	3,3534	9,66680034	10,828506		11,7124092	73	15,6332741	17,7
1,2	1,63873238	3,156	9,70354431	10,8936		11,6690821	74	15,8675222	18
1,22	1,44048421	2,9586	9,73631896	10,954746		11,6260749	75	16,1009039	18,3
1,24	1,24242884	2,7612	9,76512864	11,011944		11,5833842	76	16,3334254	18,6
1,26	1,0445413	2,5638	9,78997722	11,065194		11,5410065	77	16,5650931	18,9
1,28	0,8467967	2,3664	9,81086804	11,114496		11,4989382	78	16,7959132	19,2
1,3	0,64917022	2,169	9,82780398	11,15985		11,4571761	79	17,025892	19,5
1,32	0,45163712	1,9716	9,84078738	11,201256		11,4157168	80	17,2550355	19,8
1,34	0,25417269	1,7742	9,84982012	11,238714		11,3745569	81	17,4833498	20,1
1,36	0,05675229	1,5768	9,85490358	11,272224		11,3336934	82	17,7108409	20,4
1,38	-	1,3794	9,85603862	11,301786		11,2931229	83	17,9375148	20,7
1,4	-	1,182	9,85322569	11,3274		11,2528424	84	18,1633773	21
1,42	-	0,9846	9,84646488	11,349066		11,2128487	85	18,3884341	21,3
1,44	-	0,7872	9,83575679	11,366784		11,1731387	86	18,6126911	21,6
1,46	-	0,5898	9,82110252	11,380554		11,1337096	87	18,8361539	21,9
1,48	-	0,3924	9,80250363	11,390376		11,0945582	88	19,0588281	22,2
1,5	-	0,195	9,77996221	11,39625		11,0556817	89	19,2807192	22,5
1,52	-	-0,0024	9,75348081	11,398176		11,0170772	90	19,5018329	22,8
1,54	-	-0,1998	9,72306249	11,396154		10,9787418	91	19,7221744	23,1
1,56	-	-0,3972	9,68871078	11,390184		10,9406727	92	19,9417492	23,4
1,58	-	-0,5946	9,6504297	11,380266		10,9028672	93	20,1605627	23,7
1,6	-	-0,792	9,60822376	11,3664		10,8653225	94	20,37862	24
1,62	-	-0,9894	9,56209796	11,348586		10,828036	95	20,5959265	24,3
1,64	-	-1,1868	9,51205776	11,326824		10,7910049	96	20,8124872	24,6
1,66	-	-1,3842	9,4581091	11,301114		10,7542266	97	21,0283073	24,9

	2,89253495								
1,68	-3,0872924	-1,5816	9,4002584	11,271456		10,7176987	98	21,2433918	25,2
1,7	-	-1,779	9,33851255	11,23785		10,6814184	99	21,4577458	25,5
1,72	3,47568059	-1,9764	9,27287891	11,200296		10,6453834	100	21,6713742	25,8
1,74	-	-2,1738	9,2033653	11,158794		10,6095911	101	21,8842818	26,1
1,76	3,86241282	-2,3712	9,12997999	11,113344		10,574039	102	22,0964737	26,4
1,78	-	-2,5686	9,05273174	11,063946		10,5387249	103	22,3079545	26,7
1,8	4,24730742	-2,766	8,97162972	11,0106		10,5036462	104	22,5187289	27
1,82	-	-2,9634	8,88668357	10,953306		10,4688006	105	22,7288019	27,3
1,84	4,63018622	-3,1608	8,79790337	10,892064		10,4341859	106	22,9381779	27,6
1,86	-	-3,3582	8,70529965	10,826874		10,3997997	107	23,1468616	27,9
1,88	4,82081504	-3,5556	8,60888335	10,757736		10,3656398	108	23,3548576	28,2
1,9	-	-3,753	8,50866585	10,68465		10,3317039	109	23,5621704	28,5
1,92	5,20034445	-3,9504	8,40465896	10,607616		10,2979898	110	23,7688045	28,8
1,94	-	-4,1478	8,2968749	10,526634		10,2644954	111	23,9747643	29,1
1,96	5,57742991	-4,3452	8,1853263	10,441704		10,2312186	112	24,1800542	29,4
1,98	-	-4,5426	8,07002621	10,352826		10,1981571	113	24,3846785	29,7
2	5,95190781	-4,74	7,95098805	10,26		10,165309	114	24,5886417	30
2,02	-	-4,9374	7,82822567	10,163226		10,1326721	115	24,7919479	30,3
2,04	6,32361937	-5,1348	7,70175328	10,062504		10,1002445	116	24,9946013	30,6
2,06	-	-5,3322	7,57158549	9,957834		10,0680241	117	25,1966062	30,9
2,08	6,50838951	-5,5296	7,43773727	9,849216		10,036009	118	25,3979667	31,2
2,1	-	-5,727	7,30022398	9,73665		10,0041971	119	25,5986869	31,5
2,12	7,05813358	-5,9244	7,15906131	9,620136		9,97258657	120	25,7987708	31,8
2,14	-	-6,1218	7,01426532	9,499674		9,9411755	121	25,9982225	32,1
2,16	7,42064464	-6,3192	6,86585243	9,375264		9,90996199	122	26,197046	32,4
2,18	-	-6,5166	6,71383937	9,246906		9,87894418	123	26,3952453	32,7
2,2	7,77980656	-6,714	6,55824324	9,1146		9,84812024	124	26,5928242	33
2,22	-	-6,9114	6,39908144	8,978346		9,81748834	125	26,7897866	33,3
2,24	8,13548769	-7,1088	6,23637169	8,838144		9,78704671	126	26,9861363	33,6
2,26	-	-7,3062	6,07013202	8,693994		9,75679357	127	27,1818773	33,9

2,28	8,66220965	-7,5036	5,90038077	8,545896	9,72672718	128	27,3770131	34,2
2,3	8,83591095	-7,701	5,72713658	8,39385	9,6968458	129	27,5715477	34,5
2,32	9,00865228	-7,8984	5,55041836	8,237856	9,66714774	130	27,7654846	34,8
2,34	9,18042002	-8,0958	5,37024531	8,077914	9,63763131	131	27,9588276	35,1
2,36	9,35120099	-8,2932	5,18663691	7,914024	9,60829485	132	28,1515802	35,4
2,38	9,52098238	-8,4906	4,99961289	7,746186	9,57913671	133	28,3437461	35,7
2,4	9,68975176	-8,688	4,80919324	7,5744	9,55015527	134	28,5353288	36
2,42	9,85749714	-8,8854	4,61539821	7,398666	9,52134894	135	28,7263319	36,3
2,44	10,0242069	-9,0828	4,41824827	7,218984	9,49271612	136	28,9167589	36,6
2,46	10,1898698	-9,2802	4,21776413	7,035354	9,46425526	137	29,1066132	36,9
2,48	-10,354475	-9,4776	4,01396673	6,847776	9,43596479	138	29,2958983	37,2
2,5	10,5180122	-9,675	3,80687723	6,65625	9,40784321	139	29,4846176	37,5
2,52	10,6804713	-9,8724	3,59651699	6,460776	9,379889	140	29,6727745	37,8
2,54	10,8418426	-10,0698	3,38290756	6,261354	9,35210066	141	29,8603723	38,1
2,56	-11,002117	-10,2672	3,16607071	6,057984	9,32447673	142	30,0474143	38,4
2,58	11,1612857	-10,4646	2,94602837	5,850666	9,29701575	143	30,2339038	38,7
2,6	11,3193401	-10,662	2,72280265	5,6394	9,26971628	144	30,4198441	39
2,62	11,4762724	-10,8594	2,49641585	5,424186	9,24257689	145	30,6052385	39,3
2,64	11,6320747	-11,0568	2,2668904	5,205024	9,21559619	146	30,79009	39,6
2,66	11,7867399	-11,2542	2,03424891	4,981914	9,18877278	147	30,9744019	39,9
2,68	11,9402611	-11,4516	1,79851411	4,754856	9,16210529	148	31,1581774	40,2
2,7	12,0926319	-11,649	1,55970889	4,52385	9,13559236	149	31,3414195	40,5
2,72	12,2438461	-11,8464	1,31785625	4,288896	9,10923265	150	31,5241313	40,8
2,74	12,3938979	-12,0438	1,07297933	4,049994	9,08302484	151	31,706316	41,1
2,76	12,5427821	-12,2412	0,82510137	3,807144	9,05696762	152	31,8879765	41,4
2,78	12,6904938	-12,4386	0,57424573	3,560346	9,03105969	153	32,0691158	41,7
2,8	12,8370282	-12,636	0,32043585	3,3096	9,00529976	154	32,249737	42
2,82		-12,8334		3,054906		155		42,3
2,84		-13,0308		2,796264		156		42,6
2,86		-13,2282		2,533674		157		42,9
2,88		-13,4256		2,267136		158		43,2
2,9		-13,623		1,99665		159		43,5
2,92		-13,8204		1,722216		160		43,8

2,94		-14,0178		1,443834			161		44,1
2,96		-14,2152		1,161504			162		44,4
2,98		-14,4126		0,875226			163		44,7
3		-14,61		0,585			164		45
3,02		-14,8074		0,290826			165		45,3
3,04		-15,0048		-0,007296			166		45,6

Referências

- [1] C.E. Aguiar e G. Rubini, *Aerodinâmica da bola de futebol*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 26, no. 4, (2004) pg. 297.
- [2]. J. E. Goff, M. J. Carré, *Soccer Ball Lift Coefficients via Trajectory Analysis*, Eur. J. Phys. 31, 775 (2010)].
- [3]*Física do Futebol*, <http://www.if.ufrj.br/~carlos/futebol.html>
- [4] omnis.if.ufrj.br/~carlos/futebol/textoCatalogoExpo.pdf.
- [5].SBS 2010 FIFA World Cup Show interview 22 June 2010 10:30pm by Craig Johnston
- [6]. <http://www.mathpages.com/home/kmath258/kmath258.htm>]
- [7]. http://buzicosnodesporto.no.sapo.pt/campo_futebol.htm
- [8] <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/produtos/futebol.asp>
- [9]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 79 (1999) 169-182
Aerodynamics of a cricket Ball A.T. Sayers, A. Hill
- [10] Firoz Alam, Harun Chowdhury, Mark Stemmer, Zilong Wang, Jie Yang, Effects of surface structure on soccer ball aerodynamics, 9th Conference of the International Sports Engineering Association (ISEA), Procedia Engineering 34 (2012) pg. 146-151