



**Universidade Estadual de Maringá**  
**Centro de Ciências Exatas**  
**Departamento de Física**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

*Análise Teórica, Computacional e Experimental  
do Movimento do Sistema Pêndulo-Elástico*

Acadêmico: Vitor Hugo Ferrari Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. André Marino Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Mauricio Antônio Custódio de Melo

Maringá – PR

2023



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

*Análise Teórica, Computacional e Experimental  
do Movimento do Sistema Pêndulo-Elástico*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação da Prof. Dr. André Marino Gonçalves, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmico: Vitor Hugo Ferrari Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. André Marino Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. Mauricio Antônio Custódio de Melo

Maringá – PR

2023

Vitor Hugo Ferrari Ribeiro

*Análise Teórica, Computacional e Experimental  
do Movimento do Sistema Pêndulo-Elástico*

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Departamento de Física da  
Universidade Estadual de Maringá, sob  
orientação do Prof. Dr. André Marino  
Gonçalves, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de bacharel em Física.

**Banca Examinadora**

---

Orientador - Prof. Dr. André Marino Gonçalves

Departamento de Física - Universidade Estadual de Maringá

---

Prof. Dr. Sergio de Picoli Junior

Departamento de Física - Universidade Estadual de Maringá

---

Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Departamento de Física - Universidade Estadual de Maringá

Maringá-PR

2023

*“Da menor partícula a maior galáxia, para tudo existe uma resposta calculável”.*

*Albert Einstein*

## **Agradecimentos**

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me permitido conquistar essa nova etapa, concedendo-me força, coragem e persistência para vencer todas as dificuldades durante o curso.

Ao professor André Marino, por ter aceitado me orientar e ao professor Mauricio por ter assumido o papel de coorientador durante a produção deste trabalho, obrigado pela paciência de ler e reler esses capítulos inúmeras vezes, por todas as sugestões e correções feitas ao mesmo e pelas nossas divertidas conversas e tempo de qualidade juntos.

Aos professores Sérgio de Picoli Junior e Breno Ferraz de Oliveira, por terem aceitado gentilmente o convite para participar da banca examinadora deste trabalho.

Aos meus pais e familiares, por todo incentivo e suporte essenciais durante todos os anos dessa graduação. Muito obrigado a todos vocês.

# Sumário

Lista de Figuras.....	pg. viii
Lista de Tabelas.....	pg. xiii
Lista de Símbolos.....	pg. xiv
Resumo.....	pg. xv
Abstract.....	pg. xvi
<b>Capítulo 1 – Introdução</b>	
1.1 – Introdução.....	pg. 17
<b>Capítulo 2 – Mecânica Clássica</b>	
2.1 – Revisão Sobre Mecânica Newtoniana.....	pg. 21
2.2 – Revisão Sobre Mecânica Lagrangiana.....	pg. 44
<b>Capítulo 3 – Pêndulo Elástico</b>	
3.1 – Dedução das Equações de Movimento.....	pg. 55
3.2 – Parâmetros de Controle do Sistema.....	pg. 67
<b>Capítulo 4 – Simulações Computacional</b>	
4.1 – Transição Ordem-Caos-Ordem.....	pg. 71
4.2 – Ressonância Autoparamétrica.....	pg. 109
4.3 – Movimento Com Dissipação de Energia.....	pg. 109
4.4 – Análise Experimental da Ressonância Auto-paramétrica.....	pg. 134
4.5 – Conclusão.....	pg. 147
Referências.....	pg. 153
<b>Apêndices</b>	
A. Revisão Sobre Mecânica Hamiltoniana.....	pg. 154
B. Dedução das Equações de Movimento pela Formulação Hamiltoniana sem Dissipação de Energia.....	pg. 163

C. Dedução das Equações de Movimento com Dissipação Anisotrópica .....	pg. 168
D. Código <i>Mathematica</i> – Pendulo Elástico em Coordenadas Cartesianas .....	pg. 170

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do Movimento em 1 Dimensão.....	pg. 23
Figura 2 - Representação do Movimento em 3 Dimensões.....	pg. 24
Figura 3 - Partícula Sob Ação de Uma Força.....	pg. 26
Figura 4 - Sistema Massa-Mola.....	pg. 34
Figura 5 – Amortecimento: (a) Supercrítico. (b) Crítico. (c) Subcrítico.....	pg. 41
Figura 6 – Oscilador Harmônico Forçado - Comportamento de $x(t)$ .....	pg. 43
Figura 7 - Pêndulo Elástico Plano.....	pg. 55
Figura 8 - Coordenadas polares no plano.....	pg. 55
Figura 9 - Acréscimos nos vetores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ .....	pg. 56
Figura 10 - Diagrama de Forças do Pêndulo Elástico.....	pg. 58
Figura 11 - Pêndulo Elástico.....	pg. 67
Figura 12 - Plano de Parâmetros.....	pg. 75
Figura 13 - Seção de Poincaré $\mu = 1,5$ e $R = 2,08$ .....	pg. 76
Figura 14 - Seção de Poincaré $\mu = 6$ e $R = -0,95$ .....	pg. 76
Figura 15 - Seção de Poincaré $\mu = 6$ e $R = 0,38$ .....	pg. 76
Figura 16 - Seção de Poincaré $\mu = 6$ e $R = 0,95$ .....	pg. 76
Figura 17 - Seção de Poincaré $\mu = 6$ e $R = 1,89$ .....	pg. 76
Figura 18 - Seção de Poincaré $\mu = 100$ e $R = 0,021$ .....	pg. 76
Figura 19 - Oscilação do Tipo Colina.....	pg. 74
Figura 20 - Oscilação do Tipo Vale.....	pg. 74
Figura 21 - Oscilação do Tipo Ferradura.....	pg. 74
Figura 22 - Oscilação do Tipo Rotação.....	pg. 74
Figura 23 - Oscilação Periódica.....	pg. 79
Figura 24 - Oscilação Caótica.....	pg. 79
Figura 25 - Seções de Poincaré das Fig. 13 a 18.....	pg. 79

Figura 26 - Seção de Poincaré $\mu = 6$ e $R = 3,79$ .....	pg. 80
Figura 27 - Trajetória do Tipo Estrela-do-Mar.....	pg. 80
Figura 28 - Órbita Circular.....	pg. 81
Figura 29 - Condições Iniciais que satisfazem $R = -0,9$ .....	pg. 83
Figura 30 - Trajetórias em $R = -0,9$ .....	pg. 83
Figura 31 - Seções de Poincaré em $R = -0,9$ .....	pg. 84
Figura 32 - Sobreposição das Seções em $R = -0,9$ .....	pg. 84
Figura 33 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 0$ .....	pg. 86
Figura 34 - Trajetórias em $R = 0$ .....	pg. 86
Figura 35 - Seções de Poincaré em $R = 0$ .....	pg. 87
Figura 36 - Sobreposição das Seções em $R = 0$ .....	pg. 87
Figura 37 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 1$ .....	pg. 88
Figura 38 - Trajetórias em $R = 1$ .....	pg. 89
Figura 39 - Seções de Poincaré em $R = 1$ .....	pg. 89
Figura 40 - Sobreposição das Seções em $R = 1$ .....	pg. 90
Figura 41 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 2$ .....	pg. 91
Figura 42 - Trajetórias em $R = 2$ .....	pg. 91
Figura 43 - Seções de Poincaré em $R = 2$ .....	pg. 92
Figura 44 - Sobreposição das Seções em $R = 2$ .....	pg. 93
Figura 45 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 3$ .....	pg. 93
Figura 46 - Trajetórias em $R = 3$ .....	pg. 94
Figura 47 - Seções de Poincaré em $R = 3$ .....	pg. 94
Figura 48 - Sobreposição das Seções em $R = 3$ .....	pg. 94
Figura 49 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 4$ .....	pg. 96
Figura 50 - Trajetórias em $R = 4$ .....	pg. 96
Figura 51 - Seções de Poincaré em $R = 4$ .....	pg. 97
Figura 52 - Sobreposição das Seções em $R = 4$ .....	pg. 97

Figura 53 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 5$ .....	pg. 98
Figura 54 - Trajetórias em $R = 5$ .....	pg. 99
Figura 55 - Seções de Poincaré em $R = 5$ .....	pg. 100
Figura 56 - Sobreposição das Seções em $R = 5$ .....	pg. 100
Figura 57 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 10$ .....	pg. 102
Figura 58 - Trajetórias em $R = 10$ .....	pg. 102
Figura 59 - Seções de Poincaré em $R = 10$ .....	pg. 103
Figura 60 - Sobreposição das Seções em $R = 10$ .....	pg. 103
Figura 61 - Condições Iniciais que satisfazem $R = 25$ .....	pg. 104
Figura 62 - Trajetórias em $R = 25$ .....	pg. 105
Figura 63 - Seções de Poincaré em $R = 25$ .....	pg. 105
Figura 64 - Sobreposição das Seções em $R = 25$ .....	pg. 106
Figura 65 - Compilação de todas as sobreposições das seções de Poincaré para todos os casos analisados.....	pg. 107
Figura 66 - Trajetória para $\mu = 2$ e $R = -0,9$ .....	pg. 112
Figura 67 - Trajetória para $\mu = 2$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 112
Figura 68 - Trajetória para $\mu = 3$ e $R = -0,9$ .....	pg. 113
Figura 69 - Trajetória para $\mu = 3$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 113
Figura 70 - Trajetória para $\mu = 3,2$ e $R = -0,9$ .....	pg. 114
Figura 71 - Trajetória para $\mu = 3,2$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 114
Figura 72 - Trajetória para $\mu = 4$ e $R = -0,9$ .....	pg. 115
Figura 73 - Trajetória para $\mu = 4$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 115
Figura 74 - Trajetória para $\mu = 4$ e $R = -0,9$ em 3 s.....	pg. 115
Figura 75 - Evolução do movimento nos eixos $x$ e $y$ em 10 s.....	pg. 116
Figura 76 - Evolução do movimento nos eixos $x$ e $y$ em 20 s.....	pg. 116
Figura 77 - Trajetória para $\mu = 4,5$ e $R = -0,9$ .....	pg. 118
Figura 78 - Trajetória para $\mu = 4,5$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 118

Figura 79 - Trajetória $\mu = 5$ e $R = -0,9$ .....	pg. 118
Figura 80 - Trajetória $\mu = 5$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 118
Figura 81 - Trajetória para $\mu = 6$ e $R = -0,9$ .....	pg. 119
Figura 82 - Trajetória para $\mu = 6$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 119
Figura 83 - Trajetória para $\mu = 8$ e $R = -0,9$ .....	pg. 120
Figura 84 - Trajetória para $\mu = 8$ e $R = -0,9$ em 2 s.....	pg. 120
Figura 85 - Compilação de todas as trajetórias analisadas.....	pg. 121
Figura 86 - Trajetórias para o amortecimento supercrítico.....	pg. 125
Figura 87 - Evolução temporal da coordenada $x$ em regime de amortecimento supercrítico.....	pg. 126
Figura 88 - Evolução temporal da coordenada $y$ em regime de amortecimento supercrítico.....	pg. 126
Figura 89 - Trajetórias para o amortecimento crítico.....	pg. 127
Figura 90 - Evolução temporal da coordenada $x$ em regime de amortecimento crítico.....	pg. 127
Figura 91 - Evolução temporal da coordenada $y$ em regime de amortecimento crítico.....	pg. 128
Figura 92 - Trajetórias para o amortecimento subcrítico.....	pg. 129
Figura 93 - Trajetória do primeiro regime de oscilação para o regime de amortecimento subcrítico.....	pg. 129
Figura 94 - Evolução temporal da coordenada $x$ em regime de amortecimento subcrítico.....	pg. 130
Figura 95 - Evolução temporal da coordenada $y$ em regime de amortecimento subcrítico.....	pg. 130
Figura 96 - Trajetórias para o regime de amortecimento subcrítico com $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$ .....	pg. 131
Figura 97 - Trajetória do primeiro regime de oscilação para o regime de amortecimento subcrítico com $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$ .....	pg. 132
Figura 98 - Evolução do eixo $x$ em regime de amortecimento subcrítico com $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$ .....	pg. 132

Figura 99 - Evolução do eixo y em regime de amortecimento subcrítico com $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$ .....	pg. 133
Figura 100 - Evolução do eixo x e y simultaneamente em regime de amortecimento subcrítico com $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$ .....	pg. 133
Figura 101 - Análise do movimento na vertical através do software Tracker.....	pg. 136
Figura 102 - Ln da evolução da coordenada y do sistema massa-mola vertical em função do tempo.....	pg. 139
Figura 103 - Ajuste exponencial das curvas obtidas experimentalmente.....	pg. 140
Figura 104 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo x com dissipação isotrópica.....	pg. 142
Figura 105 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo y com dissipação isotrópica.....	pg. 142
Figura 106 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo x com dissipação anisotrópica.....	pg. 143
Figura 107 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo y com dissipação anisotrópica.....	pg. 143
Figura 108 - Trajetória obtida computacionalmente.....	pg. 144
Figura 109 - Trajetória obtida experimentalmente.....	pg. 144
Figura 110 - Evolução do eixo x computacional.....	pg. 145
Figura 111 - Evolução do eixo x experimental.....	pg. 145
Figura 112 - Evolução do eixo y computacional.....	pg. 145
Figura 113 - Evolução do eixo y experimental.....	pg. 145

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados obtidos experimentalmente pelo *software tracker*.....pg. 136

Tabela 2 - Tratamento dos dados.....pg. 137

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{v}$  – Velocidade Linear.

$t$  – Tempo.

$m$  – Massa.

$g$  – Aceleração Gravitacional.

$\vec{p}$  – Momento Linear.

$\vec{a}$  – Aceleração Linear.

$\vec{r}$  – Posição.

$\vec{F}$  – Força

$\vec{f}_i$  – Força de Vínculo.

$T$  – Energia Cinética.

$V$  – Energia Potencial.

$E$  – Energia Mecânica.

$k$  – Constante Elástica.

$\omega$  – Velocidade Angular.

$A$  – Amplitude do Movimento.

$\gamma$  – Fator de Dissipação.

$W$  – Trabalho Mecânico.

$q_k$  – Coordenadas Generalizadas.

$Q_k$  – Forças Generalizadas.

$L$  – Lagrangiana.

$U$  – Potencial Generalizado.

$\mathcal{F}$  – Função de Dissipação.

$H$  – Hamiltoniana.

$l_0$  – Tamanho da mola em repouso

$l_{max}$  – Tamanho da mola em repouso com uma massa suspensa.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar o comportamento do pêndulo elástico plano, por meio de uma abordagem teórica, computacional e experimental. O pêndulo elástico é um sistema físico, composto por uma massa suspensa por uma mola que pode oscilar livremente e que apresenta uma série de efeitos e características bem interessantes, como por exemplo, transição ordem-caos-ordem com o aumento da energia, e o efeito da ressonância autoparamétrica, dependendo somente das condições iniciais do sistema e da energia. As equações de movimento são bem complexas e acopladas o que torna uma solução analítica inviável, sendo assim, será utilizado múltiplas abordagens combinando análises teóricas, simulações numéricas e experimental, sob o ponto de vista das três formulações da mecânica clássica (Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana). Ao final do trabalho, espera-se apresentar uma compreensão satisfatória do problema do pêndulo elástico, bem como suas principais características e comportamentos sob diferentes condições.

**Palavras-chave:** Dinâmica Não Linear, Análise Computacional, Ressonância Autoparamétrica, Transição Ordem-Caos-Ordem.

## **ABSTRACT**

This work goal to investigate the behavior of the flat elastic pendulum, through a theoretical, computational and experimental approach. The elastic pendulum is a physical system, composed of a mass suspended by a spring that can oscillate freely and which presents a series of very interesting effects and characteristics, such as, for example, order-chaos-order transition with increasing energy, and the effect of self-parametric resonance, depending only on the initial conditions of the system and energy. The equations of motion are very complex and coupled, which makes an analytical solution unfeasible, therefore, multiple approaches will be used combining theoretical analyses, numerical and experimental simulations, from the point of view of the three formulations of classical mechanics (Newtonian, Lagrangian and Hamiltonian). At the end of the work, it is expected to present a satisfactory understanding of the elastic pendulum problem, as well as its main characteristics and behaviors under different conditions.

**Keywords:** Nonlinear Dynamics, Computational Analysis, Autoparametric Resonance, Order-Chaos-Order Transition.

# Capítulo 1 – Introdução

## 1.1 – Introdução

O estudo do pêndulo elástico revela-se um desafio intrigante e recompensador para compreendermos a complexidade da dinâmica não linear em sistemas mecânicos. Este sistema físico, composto por uma massa presa a uma haste flexível, encontra suas raízes na análise de sistemas mecânicos simples, porém suas equações de movimento tornam-se intrincadas e desafiadoras de resolver devido ao acoplamento complexo entre as variáveis.

As referências acadêmicas, como "Dinâmica Não Linear e Caos" de Steven H. Strogatz ou "Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas" de Stephen T. Thornton e Jerry B. Marion, contextualizam essa complexidade. Para resolver o problema do pêndulo elástico plano, utilizaremos as três formulações fundamentais da mecânica clássica: a Mecânica Newtoniana, a Mecânica Lagrangiana e a Mecânica Hamiltoniana. Demonstraremos que todas convergem para os mesmos resultados, porém cada uma revela particularidades que contribuem para uma compreensão mais profunda do comportamento do pêndulo elástico.

A resolução analítica das equações do pêndulo elástico é um desafio notável, pois as equações resultantes são acopladas e transcendem a solução direta. Esse impasse impulsionou a adoção de métodos computacionais avançados, como simulações numéricas, para explorar o comportamento do sistema.

Por meio dessas simulações, é possível obter uma compreensão mais profunda da dinâmica não linear do pêndulo elástico e analisar seus comportamentos complexos. Dois fenômenos notáveis emergem desse estudo: a ressonância autoparamétrica e o efeito de transição ordem-caos-ordem. A

ressonância autoparamétrica revela a capacidade do sistema de mudar de regime de oscilação e amplitude quando submetido a condições específicas com frequência próxima à sua frequência natural.

Por outro lado, o efeito de ordem-caos-ordem descreve a transição complexa do comportamento regular para o caótico e, posteriormente, de volta à ordem, conforme certos parâmetros do sistema são variados, em específico a energia do sistema. A combinação entre a teoria sólida e as simulações computacionais oferece uma visão abrangente do pêndulo elástico, destacando sua intrincada dinâmica e os fenômenos cativantes que surgem em sua interação.

Este estudo não apenas contribui para o nosso entendimento fundamental da Física de sistemas não lineares, mas também abre portas para aplicações práticas e inovações futuras. A abordagem computacional oferece um caminho promissor para explorar e compreender esses sistemas, permitindo avanços na compreensão de fenômenos dinâmicos desafiadores.

Em síntese, a complexidade subjacente ao pêndulo elástico oferece um convite intrigante para mergulhar em um universo repleto de fenômenos fascinantes e desafios instigantes. Esta pesquisa não busca somente iluminar a dinâmica intrincada do pêndulo elástico, mas também revelar as múltiplas facetas de sua complexidade e os fenômenos cativantes que emergem de sua interação.

## **Mecânica Clássica**

A Mecânica Clássica é uma das várias áreas da Física e que foi desenvolvida principalmente entre os séculos XVII e XVIII, tem como objetivo analisar e descrever o movimento a partir das forças, as forças e as variações de energia que atuam sobre um corpo, bem como sua evolução temporal e as equações que as descrevem.

Atualmente, pode ser estudada sob três formulações diferentes, porém totalmente equivalentes, são elas, a Mecânica Newtoniana, a Mecânica

Lagrangiana e a Mecânica Hamiltoniana. Ela é chamada de "clássica" para se distinguir das teorias mais recentes, como a Mecânica Quântica, Mecânica Estatística e a Teoria da Relatividade, desenvolvidas no século XX.

A mecânica Newtoniana descreve como os objetos se movem em resposta a forças que atuam sobre eles, ela estabelece as leis fundamentais que explicam o movimento e a dinâmica desses movimentos, desde partículas individuais até sistemas complexos. Já a mecânica lagrangiana e hamiltoniana são duas formulações alternativas da mecânica clássica que descrevem o movimento em função não mais das forças, mas sim das energias que envolvem o sistema.

A mecânica lagrangiana foi desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange no final do século XVIII. Essa formulação é baseada no princípio de ação mínima, também conhecido como da mínima ação. Esse princípio afirma que o caminho seguido por um sistema físico entre dois pontos no espaço e no tempo é tal que a integral de uma grandeza chamada "ação" seja mínima.

Ao aplicar o princípio da mínima ação, podemos derivar as equações de movimento do sistema, conhecidas como equações de Lagrange, que são equivalentes às equações de Newton, mas com uma abordagem mais geral e simétrica. A principal vantagem da mecânica lagrangiana é a sua capacidade de lidar com sistemas mais complexos e coordenadas generalizadas, o que a torna especialmente útil em problemas com simetrias e restrições.

Já a mecânica hamiltoniana foi desenvolvida por William Rowan Hamilton no século XIX como uma extensão da mecânica lagrangiana. Nessa formulação, em vez de trabalhar com posições e velocidades como nas equações de Lagrange, utiliza-se um conjunto diferente de variáveis: as coordenadas generalizadas ( $q$ ) e os momentos conjugados ( $p$ ).

Em resumo, a mecânica lagrangiana e a mecânica hamiltoniana oferecem duas formulações matematicamente poderosas e equivalentes para descrever o

movimento de sistemas mecânicos. A escolha entre essas formulações geralmente depende da complexidade do problema em questão e da conveniência das variáveis utilizadas para representar o sistema. É importante notar que, apesar das diferenças nas abordagens matemáticas, as três formulações são equivalentes e produzem as mesmas equações de movimento para sistemas mecânicos.

Apesar da Mecânica Clássica ser altamente precisa para a descrição de muitos fenômenos observados no cotidiano e até mesmo na astronomia, ela não é suficiente para descrever o comportamento de partículas subatômicas, para objetos em altas velocidades próximas à velocidade da luz ou para objetos com massa muito grande. Nessas situações, teorias mais avançadas, como a mecânica quântica e a teoria da relatividade, são necessárias para uma descrição mais completa do universo físico.

## Capítulo 2 – Mecânica Clássica

### 2.1 - Revisão Sobre Mecânica Newtoniana

A Mecânica pode ser dividida em cinco grandes áreas de estudo, são elas: Cinemática, Dinâmica, Estática, Meios Contínuos e Mecânica Celeste.

- **Mecânica Cinemática:** É o estudo e a descrição dos possíveis movimentos de corpos materiais, sem se preocupar com a análise de suas causas.
- **Mecânica Dinâmica:** É o estudo das causas dos movimentos e seus possíveis efeitos, como por exemplo, Forças, Energia, Momento, Trabalho e etc.
- **Mecânica Estática:** É o estudo de forças e sistemas de forças, com referência particular aos que atuam sobre os corpos em equilíbrio ou em repouso.
- **Mecânica de Meios Contínuos:** É um estudo que propõe um modelo unificado para sólidos deformáveis, sólidos rígidos e fluidos. A mecânica de meios contínuos se divide em duas partes:
  - **Mecânica de Sólidos Rígidos e Deformáveis:** É o ramo da Mecânica de Meios Contínuos que estuda comportamento deformável dos sólidos. Neste contexto a matéria é constituída por um meio contínuo de posições bem definidas, de modo que deformações, translações e rotações possam ser bem descritas e dissociadas para análise, assim, é possível descrever as tensões, deformações e as relações entre estas quantidades. Este ramo inclui a Resistência dos Materiais na Mecânica dos Sólidos.
  - **Mecânica dos Fluidos:** É o estudo do comportamento dos fluidos (líquidos e gases) em repouso ou em movimento. Ela abrange o estudo das propriedades dos fluidos, como densidade, pressão,

viscosidade e velocidade, bem como as leis que regem o movimento e o equilíbrio desses fluidos.

- **Mecânica Celeste:** Também conhecida como Gravitação, é o estudo do movimento dos corpos celestes e as interações gravitacionais entre os mesmos, como planetas, luas, estrelas e outros objetos astronômicos no espaço. Seu objetivo principal é descrever e prever os movimentos desses corpos ao longo do tempo.

## Descrevendo um Movimento

Inicialmente, para descrever o movimento de corpos e sistemas físicos, iremos abstrair o objeto que será estudado para uma partícula, ou seja, um objeto cujo tamanho (dimensões) e estrutura interna (forma geométrica – comprimento, largura e altura) sejam desprezíveis para a análise do problema; também pode ser chamado de ponto material.

Um dos objetivos da mecânica clássica, é encontrar equações ou expressões genéricas, capazes de especificar a posição de objetos em função do tempo, ou seja, buscar uma equação que seja capaz de descrever o movimento como um todo, levando em conta a aceleração, as forças, as energias, a posição e o tempo decorrido. Para isso, faz-se necessário definir algumas propriedades para então poder matematizar a teoria.

- **Referencial** – É o ponto que adotamos para analisar se um corpo está em movimento ou em repouso e também é utilizado para indicar a posição do mesmo.
- **Movimento** – Refere-se à mudança de posição de um objeto em relação a um ponto de referência ao longo do tempo. Pode ser descrito em termos de velocidade, direção e aceleração. Um objeto está em movimento quando sua posição está mudando em relação a um referencial fixo.

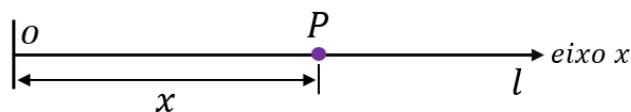
- **Repouso** – Indica a condição de um objeto que não está se deslocando em relação a um referencial específico. Quando um objeto permanece na mesma posição em relação a um ponto de referência ao longo do tempo, ele está em repouso.

Ambos os conceitos são relativos ao referencial adotado para observar o movimento ou a ausência dele, de modo que um objeto pode estar em movimento em relação a um referencial, enquanto está em repouso em relação a outro referencial.

**Trajectoria** – É o conjunto de sucessivas posições ocupadas por um corpo em movimento. A trajetória depende do referencial.

**Posição** – Refere-se ao local específico ocupado por um objeto em um determinado momento no espaço. É descrita em termos de coordenadas em um sistema de referência, que pode ser um sistema de coordenadas cartesianas (com eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) ou outro sistema que permite a localização precisa do objeto. Se um ponto material  $P$  se move ao longo de uma reta  $l$ , seu movimento é retilíneo. Se  $l$  é uma reta ordenada com coordenada  $x$ , e se a coordenada de  $P$  no instante  $t$  é  $x(t)$ , então  $x$  é a função posição de  $P$ .

Figura 1 – Representação do Movimento em 1 Dimensão



Fonte - Autor

**Deslocamento** – É a variação da posição da partícula em movimento, ou seja, a distância percorrida com relação a um ponto fixo, um referencial.

$$\Delta x = x - x_0 \quad (1.1.1)$$

Onde  $x$  é a posição em  $t$  e  $x_0$  a posição em  $t_0$ .

**Velocidade** – Define-se velocidade de uma partícula, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , como sendo a razão entre o deslocamento  $\Delta x$  realizado e o intervalo de tempo  $\Delta t$  decorrido, isto é:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.1.2)$$

Pode-se descrever a posição de uma partícula especificando um ponto no espaço, desde que se conheçam três coordenadas (usualmente utilizam-se retangulares), mas no caso de partículas que se movem ao longo de uma linha reta, apenas uma coordenada é necessária. Para descrever o movimento de uma partícula, especificam-se as coordenadas como função do tempo (Mecânica, Symon):

- Uma dimensão:  $x(t)$ .
- Três dimensões:  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ .

Logo, para cada uma dessas coordenadas, podemos escrever:

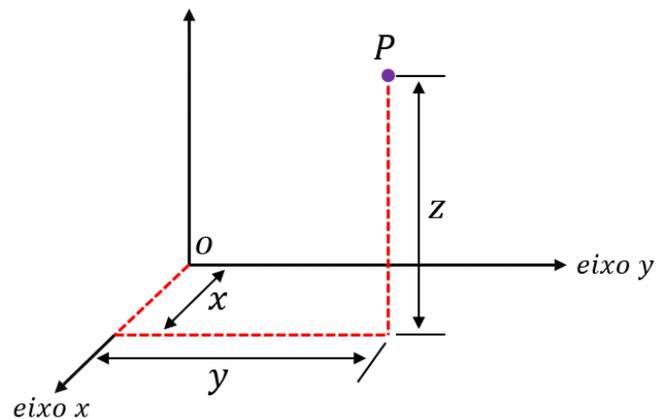
$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} ; v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} ; v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \quad (1.1.3)$$

**Aceleração** – A aceleração é uma grandeza física que representa a taxa de variação da velocidade de um objeto em relação ao tempo. Em outras palavras, a aceleração é a medida de quão rápido a velocidade de um objeto está mudando em um determinado intervalo de tempo. Matematicamente, temos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.1.4)$$

Para definir as componentes da aceleração  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$ , podemos fazer de duas formas equivalentes.

Figura 2 - Representação do Movimento em 3 Dimensões



Fonte - Autor

$$\begin{aligned}
 a_x &= \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \\
 a_y &= \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \\
 a_z &= \dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.1.5}$$

## As Leis do Movimento, de Newton

Sir Isaac Newton (1642-1727) foi um cientista, matemático e físico inglês cujas contribuições revolucionaram a física e a matemática. Ele formulou as três leis do movimento, contribuiu para os avanços da Óptica, contribuiu para o estudo das séries de potência, em que, generalizou o teorema binomial para expoentes não inteiros e formulou teoria da gravitação universal, explicando o comportamento dos corpos em movimento e as interações gravitacionais no universo. Além disso, juntamente com o matemático alemão Gottfried Leibniz, desenvolveu o cálculo diferencial e integral.

As leis do movimento de Newton, também conhecidas como leis de Newton, são três princípios fundamentais formulados pelo mesmo em sua obra "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicada em 1687 e podem ser enunciadas da seguinte forma:

- **1º Lei de Newton (Lei da Inércia)** – Todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha reta, a menos que seja obrigado a muda-lo por forças aplicadas sobre ele.
- **2º - Lei de Newton (Princípio Fundamenta da Dinâmica)** – A taxa de variação de momento linear é proporcional à força aplicada, e na direção em que a força age.
- **3º Lei de Newton (Lei da Ação e Reação)** – Para cada ação existe sempre reação igual e oposta.

Na segunda lei, momento linear é definido como produto da massa pela velocidade da partícula. Momento linear, para o qual usaremos o símbolo  $p$ , tem três componentes, definidos ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  pelas seguintes equações (Mecânica, Symon):

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (1.1.6)$$

$$p_x = m v_x ; p_y = m v_y ; p_z = m v_z \quad (1.1.7)$$

Logo, podemos definir força, como sendo:

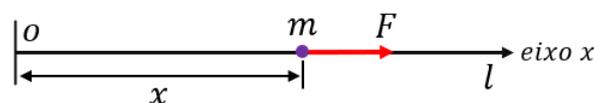
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} \rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} \therefore \vec{F} = m \vec{a} \quad (1.1.8)$$

A dedução da equação (1.1.25) só é válida considerando um cenário em que a massa do sistema permanece constante. Esta premissa é fundamental para a validade da equação resultante. Juntas, as leis do movimento de Newton fornecem os fundamentos para a descrição do movimento de corpos materiais sob a influência de forças.

## Teorema do Momento e da Energia

O Teorema do Momento Linear e da Energia é um princípio da mecânica clássica que estabelece uma relação entre o momento linear (ou quantidade de movimento) e a energia cinética de um sistema físico em movimento sob a influência de forças externas. Esse teorema é uma combinação dos princípios de conservação do momento linear e da energia mecânica. Considerando o movimento de uma partícula de massa  $m$  ao longo de uma linha reta, considerada o eixo  $x$ , sob ação de uma força  $F$  dirigida também ao longo do eixo dos  $x$ , como na figura 3.

Figura 3 - Partícula Sob Ação de Uma Força



Sabe-se que o movimento de uma partícula em uma dimensão pode ser descrito pela segunda Lei de Newton, dessa forma, podemos escrever a equação do momento linear na forma diferencial 1.1.8, para obter a equação na forma integral basta reorganizar a equação da seguinte forma 1.1.9 e integrar 1.1.10:

$$dp = F dt \quad (1.1.9)$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (1.1.10)$$

Lembrando que  $p_1 \rightarrow$  É o momento linear da partícula no tempo  $t_1$  e  $p_2 \rightarrow$  É o momento linear da partícula no tempo  $t_2$ .

Resolvendo a integral, temos:

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (1.1.11)$$

Em que a equação acima (1.1.11) leva o nome de teorema do momento linear na forma integral. E também, o termo:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (1.1.12)$$

É o impulso da força  $F$  sob a partícula, entre o instante  $t_1$  e  $t_2$ , que acaba interferindo no momento da partícula.

Outra grandeza de considerável importância é a energia cinética, definida pela equação:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.1.13)$$

Agora, mostraremos que a equação acima se relaciona com a segunda Lei de Newton. Para isso, utilizaremos a equação (1.1.8):

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (1.1.14)$$

Multiplicado ambos os lados por  $v$  (velocidade), temos:

$$m v \frac{dv}{dt} = v F \quad (1.1.15)$$

Sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v \frac{dv}{dt} \quad (1.1.16)$$

Logo, temos o teorema da energia na forma diferencial, expressa pela equação abaixo (1.1.17):

$$\frac{dT}{dt} = v F \quad (1.1.17)$$

Para obter a equação na forma integral, basta reorganizar a equação acima e integrar:

$$dT = v F dt \quad (1.1.18)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{t_1}^{t_2} v F dt \quad (1.1.19)$$

A equação (1.1.19) leva o nome de teorema da energia na forma integral e o termo  $v F$  representa a potência fornecida pela força  $F$ . Resolvendo a parte da direita da equação, vamos fazer as seguintes considerações:

$$v F dt = \frac{dx}{dt} F dt = F dx \quad (1.1.20)$$

Logo, podemos escrever o teorema da energia na forma integral da seguinte forma:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (1.1.21)$$

O termo  $F dx$  representa o trabalho realizado pela força.

### **Força Dependente do Tempo $F = F(t)$**

Forças dependentes do tempo, também conhecidas como forças não conservativas, são aquelas cuja magnitude e direção variam ao longo do tempo.

Diferentemente das forças conservativas, que possuem energia potencial associada e não realizam trabalho líquido em trajetórias fechadas, as forças dependentes do tempo realizam trabalho líquido em trajetórias fechadas, causando mudanças na energia mecânica total do sistema.

Essas forças não conservativas podem surgir de vários mecanismos, como atrito, arrasto aerodinâmico, forças de resistência, forças magnéticas ou forças elétricas não conservativas. Elas desempenham um papel importante em muitos fenômenos físicos e são fundamentais para explicar o movimento de objetos em situações não ideais, onde a energia mecânica do sistema não é completamente preservada.

Para estudar esse problema, vamos partir da 2ª Lei de Newton e reorganizar os termos:

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (1.1.22)$$

$$dv = \frac{F}{m} dt \quad (1.1.23)$$

Agora, podemos integrar essa equação:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t \frac{F}{m} dt \quad (1.1.24)$$

Resolvendo, temos:

$$v - v_0 = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F dt \quad (1.1.25)$$

Sabemos também, que:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \quad (1.1.26)$$

Integrando essa expressão (1.1.26), temos:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt \quad (1.1.27)$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v dt \Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt \quad (1.1.28)$$

Substituindo a equação (1.1.25) em (1.1.28), chegamos a (1.1.29):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t F dt \quad (1.1.29)$$

Ao trabalhar com forças dependentes do tempo, é necessário considerar o trabalho realizado por essas forças ao longo das trajetórias percorridas pelo sistema. A energia mecânica do sistema pode ser convertida entre energia cinética e energia potencial, e a soma do trabalho realizado pelas forças não conservativas é igual à variação da energia mecânica total do sistema.

### **Força Dependente da Velocidade $F = F(v)$**

Forças dependentes da velocidade, também conhecidas como forças não lineares ou forças viscosas, são aquelas cuja magnitude e direção estão relacionadas à velocidade de um objeto em movimento. Essas forças surgem em sistemas onde há resistência ou atrito viscoso, causando uma desaceleração proporcional à velocidade do objeto.

Um exemplo comum de força dependente da velocidade é a força de arrasto em fluidos, como o ar. Quando um objeto se move através do ar, a força de arrasto atua na direção oposta ao movimento, e sua magnitude aumenta com o aumento da velocidade do objeto.

As forças dependentes da velocidade não seguem a relação linear entre força e deslocamento típica das forças elásticas, como a força de uma mola. Em vez disso, elas seguem a relação com a velocidade, o que significa que o trabalho realizado por essas forças é proporcional à velocidade do objeto.

Em sistemas sujeitos a forças dependentes da velocidade, a energia mecânica total do objeto não é conservada, pois parte da energia cinética é convertida em outras formas de energia, como energia térmica.

Partindo da segunda Lei de Newton equação 1.1.8 ou 1.1.15 e isolando os termos de  $v$ , temos:

$$\frac{dv}{F} = \frac{dt}{m} \quad (1.1.30)$$

Integrando, temos:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F} = \int_{t_0}^t \frac{dt}{m} \quad (1.1.31)$$

Resolvendo a integral:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt \quad (1.1.32)$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F} = \frac{t - t_0}{m} \quad (1.1.33)$$

Em que a equação 1.1.33 está descrita na dependência da velocidade.

### **Força Dependente da Posição $F = F(x)$**

Forças dependentes da posição, também podem ser forças conservativa, são aquelas cuja magnitude e direção variam em função da posição do objeto no espaço. Em outras palavras, a força que atua sobre um corpo é determinada pela sua posição em relação a um determinado ponto ou referencial.

Essas forças não seguem uma relação simples entre força e deslocamento, como as forças elásticas que obedecem à Lei de Hooke. Em vez disso, a força dependente da posição pode variar de maneira não-linear e não seguir uma regra fixa.

Um exemplo é a força gravitacional, que depende da posição do objeto em relação a outro corpo com massa. A força gravitacional diminui com o aumento da distância entre os corpos, seguindo a Lei da Gravitação Universal de Newton. Mais uma vez, partindo da segunda Lei de Newton, equação 1.1.8 e o teorema da energia cinética na forma integral, equação 1.1.21, temos:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (1.1.34)$$

A integral da direita, já obtida anteriormente, equação 1.1.21, é o trabalho realizado pela força quando a partícula parte de  $x_1$  para  $x_2$ . Portanto, definimos como energia potencial  $V(x)$ , como o trabalho realizado pela força quando a partícula se desloca de  $x$  para um ponto de referência escolhido  $x_s$ , dessa forma, temos:

$$V(x) = \int_x^{x_s} F dx = - \int_{x_s}^x F dx \quad (1.1.35)$$

Reorganizando a expressão acima, obtemos:

$$\int_{x_0}^x F dx = \int_x^{x_s} F dx + \int_{x_s}^x F dx \quad (1.1.36)$$

$$\int_{x_0}^x F dx = V(x_0) - V(x) \quad (1.1.37)$$

Reorganizando, temos:

$$\int_{x_0}^x F dx = -V(x) + V(x_0) \quad (1.1.38)$$

Agora, substituindo a equação 1.1.38 , na equação 1.1.34 (teorema da energia na forma integral), temos:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_0}^x F dx = -V(x) + V(x_0) \quad (1.1.39)$$

$$\therefore T_2 - T_1 = -V(x) + V(x_0) \quad (1.1.40)$$

Reorganizando, temos:

$$T + V(x) = T_0 + V(x_0) \quad (1.1.41)$$

Sabendo que:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.1.42)$$

Substituindo na equação (1.1.41), temos:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = \frac{1}{2} m v_0^2 + V(x_0) = E \quad (1.1.43)$$

Note que do lado direito, a equação só depende das condições iniciais, então:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = T + V = E \quad (1.1.44)$$

Em que, essa equação representa a Lei da Conservação de Energia (Cinética e Potencial). Resolvendo a equação em função da velocidade, vamos isolar  $v$ , logo:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = E \quad (1.1.45)$$

$$v^2 = \frac{2}{m} [E - V(x)] \quad (1.1.46)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.1.47)$$

Na equação acima, obtemos a velocidade em termos da energia total (cinética e potencial), porém, sabemos que:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \quad (1.1.48)$$

Escrevendo a equação (1.1.47) na forma diferencial, temos:

$$v dt = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]^{\frac{1}{2}}} dt \quad (1.1.49)$$

$$dx = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]^{\frac{1}{2}}} dt \quad (1.1.50)$$

Isolando  $dt$ :

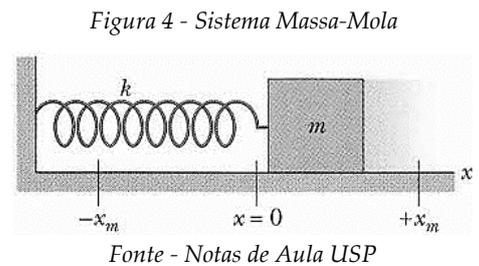
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]^{\frac{1}{2}}}} \quad (1.1.51)$$

Integrando:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{[E - V(x)]^{\frac{1}{2}}} = t - t_0 \quad (1.1.52)$$

## Força Elástica e Lei de Hooke

A força elástica é uma força restauradora que surge quando um objeto é deformado (comprimido ou distendido) em relação à sua posição de equilíbrio. Essa força é típica de materiais elásticos, como molas e borrachas, e atua na direção oposta à deformação, buscando restaurar o objeto à sua posição original.



Quando um material elástico é deformado, as suas moléculas se rearranjam e exercem forças de interação que tentam trazer o objeto de volta ao seu estado de equilíbrio. A força elástica é proporcional à magnitude da deformação e é regida pela Lei de Hooke.

A Lei de Hooke descreve o comportamento elástico de materiais sólidos quando são deformados. Essa lei foi formulada pelo físico inglês Robert Hooke em 1676.

De acordo com a Lei de Hooke, a força elástica ( $\vec{F}$ ) aplicada em um material elástico é diretamente proporcional à deformação ( $x$ ) sofrida pelo material, ou seja, é um exemplo de força dependente da posição, como visto anteriormente. Matematicamente, a relação entre a força elástica e a deformação é expressa pela seguinte equação:

$$F = -k x \quad (1.1.53)$$

Para resolvermos esse problema, vamos analisar a energia potencial do sistema, logo:

$$V(x) = - \int_{x_s}^x F dx = - \int_{x_s}^x -k x dx \quad (1.1.54)$$

Resolvendo a integral, temos:

$$V(x) = k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_s}^x = \frac{k}{2} (x^2 - x_s^2) \quad (1.1.55)$$

Fazendo  $x_s = 0$ , então:

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \quad (1.1.56)$$

Voltando para a equação 1.1.52, e tomando a condição inicial  $t_0 = 0$ , e substituindo 1.1.56 temos:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\left[E - \frac{1}{2} k x^2\right]^{\frac{1}{2}}} = t \quad (1.1.57)$$

Aqui, faremos uma substituição de variáveis, logo:

$$E - \frac{1}{2} k x^2 = E \cos^2 \theta \quad (1.1.58)$$

$$\frac{1}{2} k x^2 = E(1 - \cos^2 \theta) \quad (1.1.59)$$

Isolando  $x$ :

$$x^2 = \frac{2 E}{k} \sin^2 \theta \quad (1.1.60)$$

$$x = \sqrt{\frac{2 E}{k}} \sin \theta \quad (1.1.61)$$

Derivando  $x$  em relação a  $\theta$ , temos:

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{\frac{2 E}{k}} \cos \theta \quad (1.1.62)$$

E por fim:

$$dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta \, d\theta \quad (1.1.63)$$

Quando  $x = x_0$ , teremos  $\theta = \theta_0$ , assim, resolvendo a integral, temos:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\left[E - \frac{1}{2}kx^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{\sqrt{2E}}{k} \cos \theta}{\sqrt{E} \cos \theta} d\theta \quad (1.1.64)$$

Assim, simplificando:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{2}{k}} d\theta = \sqrt{\frac{2}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \quad (1.1.65)$$

Agora, aplicando essa solução na equação (1.1.52) para a força elástica, temos:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left[E - \frac{1}{2}kx^2\right]^{\frac{1}{2}}} = t \quad (1.1.66)$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{2}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = t \quad (1.1.67)$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} (\theta - \theta_0) = t \quad (1.1.68)$$

Podemos ainda chamar de:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.1.69)$$

Substituindo a equação (1.1.68) na equação (1.1.69), temos:

$$\frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0) = t \quad (1.1.70)$$

Logo:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad (1.1.71)$$

Substituindo a equação 1.1.71 em 1.1.61, temos:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\theta_0 + \omega t) \quad (1.1.72)$$

Chamando de  $A$  a amplitude de oscilação, temos:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (1.1.73)$$

Então podemos reescrever a equação (1.1.72) da seguinte forma:

$$x = A \sin(\theta_0 + \omega t) \quad (1.1.74)$$

Chegamos então na equação que descreve o movimento de um oscilador harmônico simples.

## Oscilador Harmônico Simples

Um oscilador harmônico simples é um sistema físico no qual a força restauradora que atua sobre o objeto é diretamente proporcional ao seu deslocamento da posição de equilíbrio e atua na direção oposta a esse deslocamento.

Um exemplo comum de um oscilador harmônico simples é o pêndulo simples. Enquanto o pêndulo real pode apresentar algumas complexidades adicionais, o pêndulo simples é um modelo idealizado. Ele consiste em uma massa pontual presa a uma haste rígida e sem massa, pendurada a partir de um ponto fixo.

O movimento do pêndulo simples pode ser aproximado como um oscilador harmônico, desde que as amplitudes de oscilação sejam pequenas. Nesse caso, a força restauradora é proporcionada pelo componente da gravidade na direção tangente ao longo do arco descrito pelo pêndulo.

Outro exemplo clássico de um oscilador harmônico simples é o sistema massa-mola. Nesse sistema, uma massa está ligada a uma mola ideal (considerada linear e sem perda de energia) e se move ao longo de um eixo.

Quando a mola é esticada ou comprimida, ela exerce uma força proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio, criando um movimento oscilatório.

Tanto o pêndulo simples quanto o sistema massa-mola podem ser descritos por equações diferenciais que demonstram o comportamento harmônico de seus movimentos, assumindo que as condições ideais são mantidas e que as amplitudes de oscilação são pequenas o suficiente para aplicar a linearidade do sistema.

Os problemas envolvendo osciladores harmônicos simples é um dos objetos de estudo de grande importância em mecânica clássica, pegando como exemplo o sistema massa-mola já citado anteriormente e como é mostrado na figura 4, se  $x$  for a medida a partir da sua posição de equilíbrio, a força de restauração da mola é  $-k x$ , logo, a equação de movimento pode ser escrita como:

$$m \ddot{x} = -k x \text{ ou } m \ddot{x} + k x = 0 \quad (1.1.75)$$

A solução é um movimento de oscilação senoidal simples em torno da posição de equilíbrio. Se houver uma força externa aplicada dependente do tempo, essa equação torna-se:

$$m \ddot{x} + k x = F(t) \quad (1.1.76)$$

O que constitui o chamado oscilador harmônico forçado. Numa situação real, sempre existe uma força resistiva. Em muitos casos, uma boa aproximação é supor que essa força resistiva é proporcional à velocidade. Uma vez que ela é a única que permite resolver a equação diferencial com relativa simplicidade, somente essa força será discutida. Assim, a equação:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0 \quad (1.1.77)$$

Descreve o movimento do assim chamado oscilador harmônico amortecido. Esse tipo de oscilador também pode ser forçado e, nesse caso, a equação diferencial torna-se:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F(t) \quad (1.1.78)$$

Todas essas equações são lineares de segunda ordem. Na equação acima, se  $F(t)$  for senoidal, é possível ter o fenômeno de ressonância, onde a amplitude de oscilação torna-se muito grande quando a frequência da força aplicada iguala à de ressonância (MECÂNICA CLÁSSICA, Kazunori).

## Oscilador Harmônico Amortecido

Um oscilador harmônico amortecido é um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio, porém, ao contrário do oscilador harmônico simples idealizado, esse sistema é sujeito a uma força de amortecimento que diminui sua amplitude ao longo do tempo.

O amortecimento é uma resistência ou dissipação de energia que age sobre o sistema oscilatório. Isso pode ser causado por diversos fatores, como atrito, resistência do ar ou dissipação de energia em algum meio.

Nesse tipo de oscilador, à medida que o objeto se afasta da posição de equilíbrio, além da força restauradora que busca trazê-lo de volta, há uma força de amortecimento que é proporcional à velocidade do objeto, atuando na direção oposta ao movimento. Essa força de amortecimento reduz gradualmente a amplitude das oscilações.

A equação diferencial que descreve um oscilador harmônico amortecido geralmente inclui termos que representam essa força de amortecimento, resultando em soluções que mostram a amplitude das oscilações diminuindo exponencialmente ao longo do tempo.

Considere um oscilador harmônico amortecido, livre de forças externas, cuja equação diferencial que rege seu movimento é dada por 1.1.77. A equação característica para este caso é:

$$m r^2 + b r + k = 0 \quad (1.1.79)$$

Cujas raízes são:

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (1.1.80)$$

Sendo  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  a frequência natural do oscilador sem amortecimento e  $\gamma = b/2m$  o parâmetro de amortecimento. Então, as soluções correspondem aos três casos possíveis e são dadas por:

a) Supercrítico:  $\omega_0^2 < \gamma^2 \Rightarrow x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (1.1.81)$

Em que  $\gamma_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  e  $\gamma_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

b) Crítico:  $\omega_0^2 = \gamma^2 \Rightarrow x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \quad (1.1.82)$

c) Subcrítico:  $\omega_0^2 > \gamma^2 \Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (1.1.83)$

Em que  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

A última expressão pode ainda ser escrita como  $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$ . Em particular, se as condições iniciais forem  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , têm-se:

$$\omega_0^2 < \gamma^2 \Rightarrow x(t) = x_0 \left( \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \gamma_1} e^{-\gamma_1 t} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} e^{-\gamma_2 t} \right) \quad (1.1.84)$$

$$\omega_0^2 = \gamma^2 \Rightarrow x(t) = x_0(1 + \gamma t) e^{-\gamma t} \quad (1.1.85)$$

$$\omega_0^2 > \gamma^2 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (1.1.86)$$

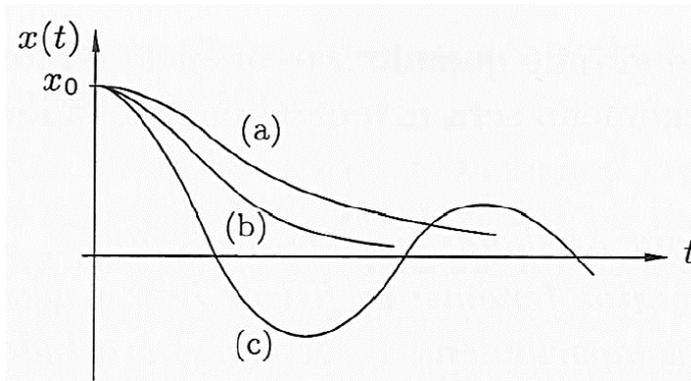
respectivamente.

Na figura 5 logo abaixo, a curva (a) corresponde à equação (1.1.84) e é o caso denominado amortecimento supercrítico. Nesta situação, o amortecimento é bastante forte, de maneira que a partícula começa o seu movimento em  $x_0$  e retorna lentamente para a posição de equilíbrio sem oscilar.

A equação (1.1.85) está representada na curva (b) da mesma figura e corresponde ao caso denominado amortecimento crítico. Também, neste caso, a partícula inicia o seu movimento em  $x_0$  e retorna para a posição de equilíbrio rapidamente, mas sem oscilar.

Já curva (c) corresponde a equação (1.1.86). É o caso onde o amortecimento é fraco e possibilita a oscilação, mas a sua amplitude diminui com o tempo. Este caso é denominado amortecimento subcrítico.

Figura 5 – Amortecimento: (a) Supercrítico. (b) Crítico. (c) Subcrítico.



Fonte: Kazunori Watari pg. 56

Um caso particular quando  $b = 0$  é um oscilador harmônico simples. A solução geral pode ser escrita como  $x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \theta)$ . Para as condições  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , chega-se a  $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$ , que é uma oscilação cossenoidal.

## Oscilador Harmônico Forçado

Um oscilador harmônico forçado é um sistema físico que oscila em torno de uma posição de equilíbrio sob a influência de uma força externa periódica ou não periódica, também conhecida como força de excitação.

Ao contrário do oscilador harmônico simples ou do oscilador harmônico amortecido, onde o movimento é resultado apenas da interação entre a massa e uma força restauradora (como a força da mola), no oscilador harmônico forçado, há uma força externa que está constantemente atuando sobre o sistema, impondo uma oscilação específica.

Essa força externa pode ser aplicada de várias maneiras, como por exemplo, através de uma vibração mecânica em um sistema massa-mola, ou por

meio de uma força externa periódica aplicada a um circuito elétrico, entre outras aplicações.

A equação diferencial que descreve um oscilador harmônico forçado incorpora tanto a força de restauração característica do oscilador harmônico simples quanto a força de excitação externa. Dependendo da frequência e amplitude dessa força externa em relação à frequência natural do sistema, podem ocorrer fenômenos interessantes, como ressonância, amplificação ou atenuação das oscilações.

Um oscilador harmônico, amortecido ou não, com uma força externa aplicada,  $F(t)$ , é denominado oscilador forçado. A equação diferencial de um oscilador harmônico amortecido e forçado é:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F(t) \quad (1.1.87)$$

Sem perda de generalidades, considere o caso:

$$\frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \quad (1.1.88)$$

Para se obter uma solução com condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ . As duas soluções fundamentais da equação complementar,  $m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0$ , são:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t$$

Em que:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{e} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (1.1.89)$$

Usando o método das funções de Green e após algumas manipulações algébricas, chegamos a:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + \int_0^t \frac{F(t')}{m \omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] dt' \quad (1.1.90)$$

Em particular, se  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ , esta solução torna-se:

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(t')}{m \omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] dt' \quad (1.1.91)$$

Esta solução representa a resposta do sistema à força externa aplicada nos instantes anterior a  $t$ . Se a força aplicada for uma constante, isto é,  $F(t) = F_0$ , com condições iniciais  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ , temos:

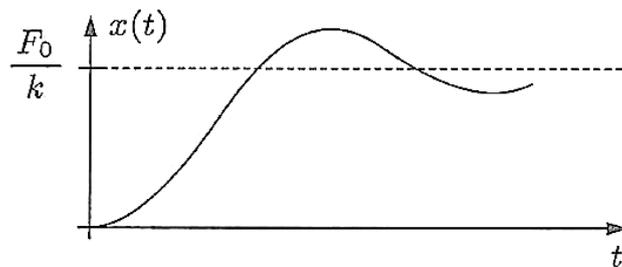
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m \omega_1} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')] dt' \\ &= -\frac{F_0}{m \omega_1} \frac{1}{\gamma^2 + \omega_1^2} [e^{-\gamma t} (-\gamma \sin \omega_1 t - \omega_1 \cos \omega_1 t) + \omega_1] \quad (1.1.92) \end{aligned}$$

Finalmente, lembrando que  $\gamma^2 + \omega_1^2 = k/m$ , chega-se a:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k} e^{-\gamma t} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (1.1.93)$$

Observe que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow F_0/k$ , isto é,  $-k x(\infty) + F_0 = 0$ . Significa que a posição final é tal que a força de restituição equilibra a força aplicada (Mecânica Clássica, Kazunori).

Figura 6 – Oscilador Harmônico Forçado - Comportamento de  $x(t)$



Fonte: Kazunori Watari pg. 60

## 2.2 - Revisão Sobre Mecânica Lagrangiana

A Mecânica Lagrangiana, como já foi mencionado anteriormente, é uma formulação avançada da mecânica clássica, desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange. Essa abordagem tem como objetivo descrever o movimento de sistemas físicos em termos de coordenadas generalizadas e suas derivadas, em vez de usar as forças como nas leis de Newton.

A principal vantagem da mecânica lagrangiana é sua abordagem mais geral e simétrica em relação às equações de Newton. Ela pode ser facilmente adaptada para sistemas com simetrias, restrições ou coordenadas generalizadas. Além disso, essa formulação é útil para descrever sistemas complexos e multidimensionais, como partículas interagindo sob forças não conservativas ou corpos rígidos em rotação. Essa formulação é especialmente útil para lidar com sistemas com graus de liberdade generalizados, como sistemas com coordenadas curvilíneas ou restrições não triviais.

### Vínculos Holônomos

“Vínculos são limitações às possíveis posições e velocidade das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento. É importante sublinhar que vínculos são limitações de ordem cinemática impostas ao sistema mecânico. Tais restrições, portanto, antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema. Restrições de natureza dinâmica – decorrentes, portanto, das equações de movimento – não são vínculos” (Mecânica Analítica, Nivaldo).

Vínculos holônomos são restrições geométricas ou cinemáticas que limitam o movimento de um sistema físico, e são expressos por equações que relacionam as coordenadas generalizadas do sistema. Esses vínculos não dependem explicitamente do tempo e são independentes do movimento do sistema. Vínculos que não podem ser assim representados, ou seja, quando dependem da velocidade, são ditos não-holônomos.

## Deslocamento Virtual

O deslocamento virtual  $\delta r$  é o deslocamento infinitesimal de cada partícula que leva de uma configuração possível a outra configuração possível infinitesimalmente próxima no mesmo instante  $t$ . Em suma, as características que definem um deslocamento virtual são: (Mecânica Analítica, Nivaldo).

- i) São infinitesimais;
- ii) Ocorrem num instante  $t$  fixo;
- iii) Não violam os vínculos.

A utilização do termo "virtual" denota que não se trata obrigatoriamente do movimento efetivo ocorrido com o transcorrer do tempo. O deslocamento real, representado por  $dr$ , de uma partícula, refere-se ao deslocamento efetuado por uma partícula do sistema durante um intervalo de tempo  $dt$ , conforme determinado pelas equações de movimento do sistema.

## Trabalho Virtual

Denomina-se trabalho virtual o trabalho executado por um deslocamento virtual. Quando a superfície à qual o movimento da partícula está confinado é idealmente lisa, a força de contato entre a partícula e a superfície não apresenta componente tangencial, limitando-se exclusivamente à direção normal à superfície. Dessa maneira, o trabalho realizado pela força de vínculo durante um deslocamento virtual da partícula é anulado, mesmo na eventualidade de a superfície estar em movimento.

$$W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad (1.2.1)$$

Diferentemente do trabalho realizado durante um deslocamento real, que não é necessariamente zero; na maioria dos casos fisicamente interessantes o trabalho virtual total das forças de vínculo se anula.

## Caso Estático

Em um sistema de partículas em equilíbrio, a força resultante em cada partícula  $i$  é nula. Para facilitar a análise, divide-se a força resultante em duas componentes: a Força Aplicada, também conhecida como Força Ativa, e a Força de Vínculo, representadas, respectivamente, por:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i \quad (1.2.2)$$

Em que  $\vec{F}_i^{(a)}$  é a Força Aplicada e  $\vec{f}_i$  é a Força de Vínculo.

Considerando a idealidade dos vínculos, ou seja, a condição em que o trabalho realizado por essas forças durante deslocamentos virtuais das partículas é nulo, resulta em:

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (1.2.3)$$

Para um sistema em equilíbrio sabemos que:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (1.2.4)$$

Logo, substituindo essas informações na equação 1.2.2, temos:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (1.2.5)$$

Da equação (1.2.3), temos:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (1.2.6)$$

A qual é condição que só envolve forças aplicadas de equilíbrio estático.

## Caso Dinâmico

Partindo da segunda lei de Newton (equação 1.1.8), podemos reescrever da seguinte forma:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i \quad (1.2.7)$$

Através da equação (1.2.2), obtemos:

$$\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)} = \vec{f}_i \quad (1.2.8)$$

Aplicando os deslocamentos virtuais, chegamos a:

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.2.9)$$

A última equação mencionada é designada como Princípio de D'Alembert, apresentando vantagens sobre a formulação newtoniana em sistemas mecânicos em movimento ao eliminar as forças de vínculo.

Conforme a segunda lei de Newton, a força resultante deve atuar sobre cada partícula. Portanto, ao formular as equações de movimento para um sistema de partículas, é imperativo expressar o vetor posição de cada partícula. Caso o sistema esteja sujeito a vínculos, esses serão devidamente considerados.

## Coordenadas Generalizadas

Em sistemas holonômicos, é viável introduzir um determinado número  $n$  de variáveis independentes, genericamente indicadas por  $q_1, \dots, q_n$ , e designadas como coordenadas generalizadas. Isso ocorre de maneira que o vetor posição de cada partícula seja singularmente determinado a cada instante pelos valores das coordenadas generalizadas  $q_s$ . Coordenadas generalizadas podem ser introduzidas em um sistema sempre que todos os vínculos atuantes são holônomos.

## Equação de Euler-Lagrange

Ao introduzir coordenadas generalizadas de maneira a determinar completamente a posição das partículas nos sistemas com vínculos holonômicos, é possível, pelo princípio de *D'Alembert*, expressar os deslocamentos virtuais  $\delta \vec{r}_i$  em termos dos deslocamentos das coordenadas generalizadas  $\delta q_i$ . Vale ressaltar

que essas coordenadas generalizadas são todas independentes entre si, enquanto os deslocamentos virtuais não são independentes uns dos outros.

Partindo da equação (1.2.9) que é o princípio de *D'Alembert*:

$$\sum_i^N (m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (1.2.10)$$

E tomando os deslocamentos virtuais em termos de coordenadas generalizadas:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1.2.11)$$

Chegamos a:

$$\sum_i (m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i) \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (1.2.12)$$

Fazendo a distributiva, temos:

$$\sum_i (m_i \dot{\vec{v}}_i) \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k - \sum_i (\vec{F}_i) \cdot \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (1.2.13)$$

Nesse ponto, define-se  $Q_k$  como a  $k$ -ésima componente da força generalizada dada por:

$$Q_k \equiv \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.2.14)$$

Assim, por meio das duas últimas equações (1.2.13) e (1.2.14), chegamos a:

$$\sum_i \sum_k m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k Q_k \delta q_k \quad (1.2.15)$$

Agora, note que:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.2.16)$$

E tendo também:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{v}_i \quad (1.2.17)$$

Portanto:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.2.18)$$

E segue que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.2.19)$$

$$= \sum_l \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \quad (1.2.20)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_l \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \quad (1.2.21)$$

Assim, por meio da equação (1.2.17) podemos encontrar:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \quad (1.2.22)$$

Substituindo (1.2.18) e (1.2.22) em (1.2.16), temos:

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \quad (1.2.23)$$

Logo, pela regra do produto podemos escrever que:

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \quad (1.2.24)$$

Quando aplicamos a equação anterior (1.2.24) na equação (1.2.15) resulta em:

$$\sum_k Q_k \delta q_k = \sum_k \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right] \delta q_k \quad (1.2.25)$$

Agora, voltando para a equação (1.2.13) obtemos as seguintes equações:

$$\sum_k \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) \right] \delta q_k - \sum_k Q_k \delta q_k = 0 \quad (1.2.26)$$

$$\sum_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) - Q_k \right] \delta q_k = 0 \quad (1.2.27)$$

Seja  $T$  a energia cinética do sistema, isto é:

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 = T(q, \dot{q}, t) \quad (1.2.28)$$

Então:

$$\sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \quad (1.2.29)$$

Como os  $\delta q_k$  são arbitrários, concluímos que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (1.2.30)$$

Com  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de grau de liberdade do sistema.

Quando as forças aplicadas são conservativas, temos  $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ , onde:

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \quad (1.2.31)$$

E, em consequência, temos:

$$-\nabla_i V = - \left( \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y_i} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) \quad (1.2.32)$$

Da equação (1.2.14), temos:

$$Q_k = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_i \left( \vec{F}_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \vec{F}_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \vec{F}_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.2.33)$$

$$Q_k = - \sum_i \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (1.2.34)$$

Disso, é claro que:

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (1.2.35)$$

Substituindo essa equação na equação (1.3.16), temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (1.2.36)$$

Ou podemos reescrever de outra forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (1.2.37)$$

O qual implica que:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0 \quad (1.2.38)$$

Fazendo  $L = T - V$ , onde  $L$  é chamada de função de Lagrange ou lagrangiana, obtemos a equação:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (1.2.39)$$

Onde, enfim, obtemos a famosa equação de Lagrange.

A utilização da abordagem Lagrangiana simplifica a dedução das equações de movimento de sistemas mecânicos. Entretanto, a resolução dessas equações apresenta complexidade devido à sua natureza não linear, bem como à incorporação das coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  e suas respectivas derivadas. Em geral, essas equações não podem ser solucionadas por meio dos métodos analíticos tradicionais empregados para resolver equações diferenciais, tornando assim a aplicação de métodos numéricos de resolução uma necessidade.

## Potenciais Generalizados

Potenciais generalizados expandem as equações de Lagrange para situações em que as forças que atuam no sistema também possuam uma relação com a velocidade, desde que essa interdependência siga um padrão específico. Nas equações derivadas a partir de  $L = T - V$ , com o objetivo de deduzir a equação de Lagrange (1.2.39), partiu-se do pressuposto de que as forças exercidas

sobre cada partícula originavam-se de uma forma de energia potencial e apenas se relacionavam com as posições das partículas.

Entretanto, existem forças importantes da natureza que dependem da velocidade como, por exemplo, a força eletromagnética onde o movimento de uma partícula carregada em um campo magnético tem a força resultante que age sobre ela dependente da velocidade. Logo, podemos definir potenciais generalizados da seguinte forma:

*Um potencial generalizado é uma função  $U(q_1, \dots, q_n, t)$  tal que as forças generalizadas podem ser escritas na forma.*

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1.2.40)$$

A partir da equação (1.2.30), se  $Q_k$  for uma força generalizada como a equação (1.2.40), então:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1.2.41)$$

Logo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad (1.2.42)$$

Portanto conseguimos reescrever as equações de Lagrange da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0 \quad (1.2.43)$$

## **Função de Dissipação de Rayleigh**

A Função de Dissipação de Rayleigh, também conhecida como Função de Dissipação de Rayleigh-Ritz, é um conceito fundamental na análise de sistemas vibratórios e estruturais. Ela foi nomeada em homenagem a Lord Rayleigh, um influente físico do final do século XIX e início do século XX que contribuiu significativamente para as áreas de vibrações e acústica.

Em situações de dissipação, como o atrito viscoso em um líquido ou o movimento de um objeto pelo ar em baixas velocidades, a resistência pode ser aproximadamente proporcional à velocidade das partículas envolvidas. Esse tipo de força dissipativa não se encaixa facilmente na formulação lagrangiana tradicional, pois, para isso, essas forças precisariam ser conservativas ou admitir um potencial generalizado que dependesse das coordenadas, velocidades e possivelmente do tempo. Apesar dessa complexidade, é possível formular equações de Lagrange que incluam forças dissipativas, resultando em equações expressas em termos de coordenadas generalizadas arbitrárias.

A Função de Dissipação de Rayleigh desempenha um papel importante na modelagem de sistemas onde a dissipação de energia é significativa. Ela permite considerar esses efeitos não conservativos ao buscar soluções aproximadas para as equações de movimento, facilitando a análise de sistemas mecânicos sujeitos a forças dissipativas como o atrito e a resistência do ar.

Se as forças generalizadas são da seguinte forma:

$$Q_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q'_k \quad (1.2.44)$$

Em que  $Q'_k$  representa a parte das forças generalizadas que não provém de potencial generalizado, as equações de movimento tornam-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \quad (1.2.45)$$

Com  $L = T - U$ .

Um caso em que  $Q'_k$  representa uma força dissipativa, como o atrito viscoso proporcional a velocidade, é dada em componentes cartesianas por:  $\vec{F}'_{ix} = -k_{ix} V_{ix}$ ,  $\vec{F}'_{iy} = -k_{iy} V_{iy}$ ,  $\vec{F}'_{iz} = -k_{iz} V_{iz}$ , em que  $\vec{F}'_i$  é a força dissipativa sobre a  $i$ -ésima partícula e  $k_{ix}$ ,  $k_{iy}$ ,  $k_{iz}$  são constantes positivas.

Rayleigh introduziu uma função que facilita o tratamento desta situação definida por:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_{ix} v_{ix}^2 + k_{iy} v_{iy}^2 + k_{iz} v_{iz}^2) \quad (1.2.46)$$

De modo que:

$$\vec{F}'_{ix} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \quad ; \quad \vec{F}'_{iy} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}} \quad ; \quad \vec{F}'_{iz} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}} \quad (1.2.47)$$

A parte dissipativa das forças generalizadas pode ser então escrita como:

$$Q'_k = \sum_i \vec{F}'_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_i \vec{F}'_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = - \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{ix}} \frac{\partial v_{ix}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iy}} \frac{\partial v_{iy}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{iz}} \frac{\partial v_{iz}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.2.48)$$

Onde foi utilizada a equação (1.2.18). Desse resultado as equações de movimento (1.2.45) resulta em:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (1.2.49)$$

A função de dissipação de Rayleigh permite escrever as equações de movimento do sistema da mesma forma que (1.2.49) em qualquer sistema de coordenadas generalizadas.

## Capítulo 3 – Pêndulo Elástico

O pêndulo elástico é um sistema mecânico que consiste em uma massa suspensa em uma mola (ou um conjunto de molas) e que oscila em torno de uma posição de equilíbrio sob a influência da gravidade. Esse sistema é usado para estudar as propriedades oscilatórias de sistemas mecânicos sujeitos a forças restauradoras proporcionais ao deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio.

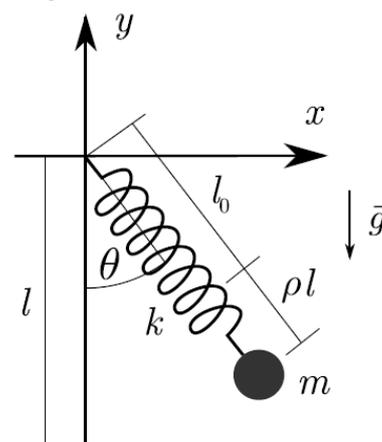
A característica distintiva do pêndulo elástico é a presença de uma mola ou molas que fornecem uma força restauradora, que é diretamente proporcional ao deslocamento da massa em relação à sua posição de equilíbrio na direção radial. Essa força restauradora age na direção oposta ao deslocamento da massa, fazendo com que o sistema oscile de um lado para o outro.

O estudo do pêndulo elástico na mecânica clássica envolve a análise das equações de movimento, que descrevem como a posição da massa varia com o tempo, levando em consideração a massa da partícula, a constante elástica da mola e a aceleração devido à gravidade.

### 3.1 – Dedução das Equações de Movimento

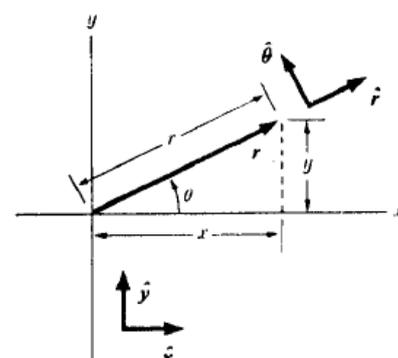
Como estamos trabalhando com o pêndulo elástico que pode oscilar livremente em todas as direções do plano cartesiano, vamos analisar seu movimento em apenas duas dimensões, logo, restringiremos o seu movimento ao plano  $xy$  e obteremos as equações de movimento em termos das coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . Para isso, demonstraremos a segunda lei de newton na forma polar.

Figura 7 - Pêndulo Elástico Plano



Fonte: M. C. de Sousa, F.A. Marcus, I. L. Caldas, R. L. Viana

Figura 8 - Coordenadas polares no plano



Fonte: Symon

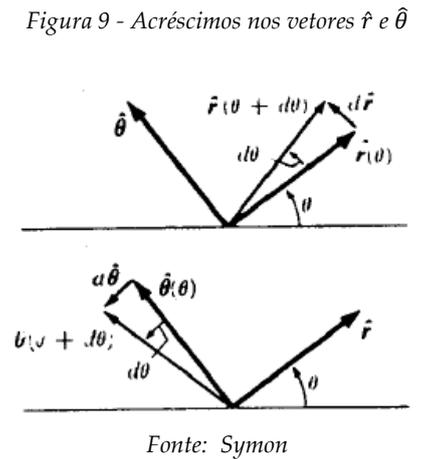
Olhando para a figura 8, vemos que as coordenadas  $r$  e  $\theta$  relacionam-se com  $x, y$  pelas seguintes equações:

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

e

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \cos^{-1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$



Os vetores unitários  $\hat{r}, \hat{\theta}$ , na direção de  $r$  e  $\theta$  crescentes, respectivamente, são definidos como se vê na figura 8. Os vetores  $\hat{r}, \hat{\theta}$  são funções do ângulo  $\theta$ , estando relacionados a  $\hat{x}, \hat{y}$  por:

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (2.1.1)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (2.1.2)$$

As equações acima, podem ser obtidas por observação da figura 9. Derivando, obtêm-se as importantes expressões:

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad , \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad (2.1.3)$$

As equações acima podem também ser obtidas pela análise da figura 8 (lembrando-se que  $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$ ). O vetor posição  $\vec{r}$  é expressado muito simplificada em termos de coordenadas polares:

$$\vec{r} = r \hat{r}(\theta) \quad (2.1.4)$$

Pode-se descrever o movimento da partícula em coordenadas polares especificando-se  $r(t), \theta(t)$  e determinando o vetor posição  $r(t)$ . O vetor velocidade será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (2.1.5)$$

Logo, obtêm-se os componentes da velocidade nas direções  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ :

$$v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad (2.1.6)$$

O vetor aceleração será:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.1.7)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta} \quad (2.1.8)$$

As componentes da aceleração são:

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad , \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \quad (2.1.9)$$

O termo  $r \dot{\theta}^2 = v_\theta^2/r$  é denominado aceleração centrípeta e origina-se no movimento na direção  $\theta$ . Se  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ , a trajetória será uma circunferência, e  $a_r = -v_\theta^2/r$ . O termo  $2 \dot{r} \dot{\theta}$  é muitas vezes chamado aceleração de Coriolis (Mecânica, Symon).

## Equações de Movimento

Para deduzir as equações de movimento para o pêndulo elástico, optamos por uma abordagem mais abrangente, considerando desde o início os fatores dissipativos presentes no movimento real. Dado que o movimento na vida real incorpora elementos dissipativos, reconhecemos a necessidade de considerá-los desde o início da análise.

Dada a incerteza sobre o comportamento específico desses fatores dissipativos, inicialmente supomos a presença de uma anisotropia na dissipação. Em outras palavras, consideramos fatores dissipativos distintos ao longo dos eixos  $r$  e  $\theta$ , pois no eixo  $r$  temos a presença marcante do movimento da mola e é sabido que a dissipação de energia por conta da mola vai ser maior pois parte dessa energia é transformada em calor e em som, por exemplo, já no eixo  $\theta$ , temos somente o movimento do tipo pendular e a única força dissipativa que atua nessa componente é a própria resistência do ar, vale ressaltar desde já, que a resistência ocasionada pelo ar é muito menor do que a resistência oferecida pela mola.

Por exemplo, ao esticar ou comprimir a mola, reconhecemos a existência de um fator de dissipação específico para a mola, induzindo-a a aquecer ou emitir algum tipo de som. Por outro lado, durante as oscilações do pêndulo elástico, levamos em consideração a resistência do ar como um fator dissipativo atuante no sistema. Essa abordagem visa incorporar a complexidade dos fatores dissipativos no movimento do pêndulo elástico.

## Formulação Newtoniana em Coordenadas Polares

Analisando as forças que atuam no sistema, como demonstrado na figura ao lado, podemos dividir em duas partes, a parte radial e a parte tangencial, logo, a somatória das forças deve respeitar a seguinte equação:

$$\begin{cases} \sum F_r = m a_r \\ \sum F_\theta = m a_\theta \end{cases} \quad (2.1.10)$$

$$F_{dissipativa_r} = -\rho v_r \quad (2.1.11)$$

$$F_{dissipativa_\theta} = -\rho v_\theta \quad (2.1.12)$$

Logo, para a parte radial, temos a seguinte equação de movimento:

$$-\rho v_r - k (r - l_0) + m g \cos \theta = m a_r \quad (2.1.13)$$

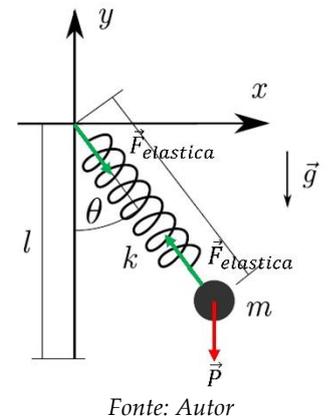
Em que  $k$  é a constante elástica da mola,  $r$  é distensão da mola,  $m$  é a massa suspensa,  $g$  é a aceleração da gravidade local,  $\gamma_r$  é o fator dissipativo associado ao eixo  $r$  e  $a_r$  a aceleração radial obtida anteriormente; fazendo as devidas substituições, temos:

$$-\rho \dot{r} - k (r - l_0) + m g \cos \theta = m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 \quad (2.1.14)$$

Para isolar  $\ddot{r}$ , vamos dividir por  $m$  e então isolar:

$$g \cos \theta - \gamma \dot{r} - \frac{k}{m}(r - l_0) = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (2.1.15)$$

Figura 10 - Diagrama de Forças do Pêndulo Elástico



Com  $\gamma = \rho/m$ :

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \gamma \dot{r} - \frac{k}{m}(r - l_0)} \quad (2.1.16)$$

Para a parte tangencial temos a seguinte equação de movimento:

$$-\rho v_\theta - m g \sin \theta = m a_\theta \quad (2.1.17)$$

Em que  $a_\theta$  é a aceleração tangencial obtida anteriormente, fazendo as devidas substituições, temos:

$$-\rho r \dot{\theta} - m g \sin \theta = m r \ddot{\theta} + 2 m \dot{r} \dot{\theta} \quad (2.1.18)$$

Fazendo a mesma substituição  $\gamma = \rho/m$  e dividindo o restante pela massa, temos:

$$-\gamma r \dot{\theta} - g \sin \theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \quad (2.1.19)$$

Para isolar  $\ddot{\theta}$  vamos dividir a equação por  $r$  e então isolar:

$$-\gamma \dot{\theta} - \frac{g}{r} \sin \theta = \ddot{\theta} + \frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} \quad (2.1.20)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\gamma \dot{\theta} - \frac{g}{r} \sin \theta - \frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r}} \quad (2.1.21)$$

Para o caso em que não se tem fatores dissipativos, teríamos um movimento perpétuo ao longo do tempo, fazendo  $\gamma = 0$ , obtemos as seguintes equações de movimento.

$$\Rightarrow \ddot{r} = r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - l_0) \quad (2.1.22)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta - \frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} \quad (2.1.23)$$

- **Casos Limites**

Ao fazer a consideração que  $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ , temos:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta \quad (2.1.24)$$

Temos a equação característica do movimento de um pêndulo simples.

Ao fazer a consideração que  $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = \theta = 0$ , temos:

$$\ddot{r} = -\frac{k}{m}(r - l_0) \quad (2.1.25)$$

Temos a equação característica do movimento de um sistema massa-mola.

Como essas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e não homogêneas são acopladas, inviabiliza uma solução analítica. Para isso, usaremos o software *mathematica*.

## Formulação Newtoniana em Coordenadas Cartesianas

Mais uma vez, vamos deduzir as equações de movimento para um caso genérico onde temos a presença do fator dissipativo; podemos obter as equações da seguinte forma: analisando as forças que atuam no sistema, como demonstrado pela figura 10, podemos ainda, dividir em duas partes, a parte que atua no eixo  $x$  e a parte que atua no eixo  $y$ , logo, a somatória das forças deve respeitar a seguinte equação:

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = m a_y \end{cases} \quad (2.1.26)$$

Devemos lembrar também de decompor a força elástica e força dissipativa nas duas componentes, uma vez que elas atuam simultaneamente interferindo no movimento que acontece no plano.

$$\begin{cases} F_{elastica_x} = F_{elastica} \sin \theta \\ F_{elastica_y} = F_{elastica} \cos \theta \end{cases} \quad (2.1.27)$$

$$\begin{cases} F_{dissipativa_x} = -\rho_x \dot{x} \\ F_{dissipativa_y} = -\rho_y \dot{y} \end{cases} \quad (2.1.28)$$

Lembrando também das relações trigonométricas necessárias para converter um ângulo em coordenadas cartesianas, temos:

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.1.29)$$

Logo, analisando as forças que atuam em  $x$ , observamos que as únicas forças que influenciam no movimento é a força elástica e a força resistiva, logo, temos a seguinte equação de movimento:

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow -k \left[ \sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right] \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \rho \dot{x} = m a_x \quad (2.1.30)$$

Fazendo a substituição  $\gamma = \rho/m$  e dividindo o restante da equação por  $m$  e isolando  $a_x$ , temos:

$$a_x = -\frac{k x}{m} \left[ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] - \gamma \dot{x} \Rightarrow \boxed{a_x = -\frac{k x}{m} \left[ 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] - \gamma \dot{x}} \quad (2.1.31)$$

Agora, analisando as forças que atuam em  $y$ , vemos que as forças peso, força elástica e a força dissipativa são as três forças que influenciam no movimento, logo, temos a seguinte equação de movimento:

$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow -m g - k \left[ \sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \right] \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \rho \dot{y} = m a_y \quad (2.1.32)$$

Fazendo a substituição  $\gamma = \rho/m$  e dividindo o restante da equação por  $m$  e isolando  $a_y$ , temos:

$$a_y = -g - \frac{k y}{m} \left[ \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] - \gamma \dot{y} \Rightarrow \boxed{a_y = -g - \frac{k y}{m} \left[ 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] - \gamma \dot{y}} \quad (2.1.33)$$

## Formulação Lagrangiana em Coordenadas Polares

Para deduzir as equações de movimento levando em conta a presença de fatores dissipativos, devemos em primeiro lugar, obter a função de dissipação de Rayleigh-Ritz, como só temos uma partícula no sistema, a função de dissipação terá a seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \rho (v_x^2 + v_y^2) \quad (2.1.34)$$

Fazendo as devidas substituições, vamos escrever a função de dissipação em coordenadas polares:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \rho (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (2.1.35)$$

Para encontrar a força dissipativa que atua nas duas componentes, devemos calcular:

$$\vec{F}_r' = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{r}} \hat{r} \Rightarrow \vec{F}_r' = -\rho \dot{r} \hat{r} \quad (2.1.36)$$

$$\vec{F}_\theta' = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} \hat{\theta} \Rightarrow \vec{F}_\theta' = -\rho r^2 \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (2.1.37)$$

Adiante, temos que encontrar a energia cinética e energia potencial do sistema:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (2.1.38)$$

$$V = -m g r \cos \theta + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 \quad (2.1.39)$$

Em que  $m$  é a massa da partícula suspensa,  $g$  é a aceleração da gravidade local,  $r$  é a distensão ou compressão da mola,  $l_0$  é o tamanho inicial da mola e  $k$  é a constante elástica da mola.

Sabemos que a lagrangiana é  $L = T - V$ , logo:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos \theta + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 \quad (2.1.40)$$

Agora, temos que resolver a equação de Euler-Lagrange para as duas coordenadas generalizadas  $q_1 = r$  e  $q_2 = \theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (2.1.41)$$

Para  $q_1 = r$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m \dot{r}) - (m r \dot{\theta}^2 + m g \cos \theta - k(r - l_0)) - \rho \dot{r} = 0 \quad (2.1.42)$$

Calculando a derivada total e reorganizando os termos, obtemos:

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta + k(r - l_0) - \rho \dot{r} = 0 \quad (2.1.43)$$

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = m g \cos \theta - k(r - l_0) - \rho \dot{r} \quad (2.1.44)$$

Fazendo a mesma substituição  $\gamma = \rho/m$  e dividindo por  $m$ , temos:

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - l_0) - \gamma \dot{r} \quad (2.1.45)$$

Isolando  $\ddot{r}$ , temos então a equação de movimento:

$$\boxed{\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - l_0) - \gamma \dot{r}} \quad (2.1.46)$$

Para  $q_2 = \theta$ , temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) - (-m g r \sin \theta) - \rho r^2 \dot{\theta} = 0 \quad (2.1.47)$$

Calculando a derivada total e reorganizando os termos, temos:

$$m r^2 \ddot{\theta} + m \dot{\theta} \dot{r} 2 r + m g r \sin \theta - \rho r^2 \dot{\theta} = 0 \quad (2.1.48)$$

Fazendo a substituição  $\gamma = \rho/m$ , dividindo a equação por  $m r$ , temos:

$$r \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \dot{r} + g \sin \theta - \gamma \dot{\theta} = 0 \quad (2.1.49)$$

Para isolar  $\ddot{\theta}$  vamos dividir a equação por  $r$  e então isolar:

$$\ddot{\theta} + \frac{2 \dot{\theta} \dot{r}}{r} + \frac{g}{r} \sin \theta - \gamma \dot{\theta} = 0 \quad (2.1.50)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{2 \dot{\theta} \dot{r}}{r} - \frac{g}{r} \sin \theta + \gamma \dot{\theta}} \quad (2.1.51)$$

## Formulação Lagrangiana em Coordenadas Cartesianas

Partindo da mesma função de dissipação e fazendo as devidas substituições, podemos escreve-la da seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \rho (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.1.52)$$

Para encontrar a força dissipativa que atua nas duas componentes, devemos calcular:

$$\vec{F}_x' = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \vec{F}_x' = -\rho \dot{x} \quad (2.1.53)$$

$$\vec{F}_y' = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \Rightarrow \vec{F}_y' = -\rho \dot{y} \quad (2.1.54)$$

Adiante, temos que encontrar a energia cinética e energia potencial do sistema:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.1.55)$$

$$V = -m g y - \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_o)^2 \quad (2.1.56)$$

Sabemos que a lagrangiana é  $L = T - V$ , logo:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y - \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_o)^2 \quad (2.1.57)$$

Agora, temos que resolver a equação de Euler-Lagrange para as duas coordenadas generalizadas  $q_1 = x$  e  $q_2 = y$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (2.1.58)$$

Para  $q_1 = x$ , teremos que usar a regra de derivação implícita como demonstrado a equação abaixo:

$$\frac{du^n}{dx} = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Logo, obtemos:

$$\frac{d}{dt} m \dot{x} + k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0) \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \rho \dot{x} = 0 \quad (2.1.59)$$

Calculando a derivada total, temos:

$$m \ddot{x} + k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0) \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \rho \dot{x} = 0 \quad (2.1.60)$$

Fazendo a substituição  $\gamma = \rho/m$  e isolando  $\ddot{x}$ , temos:

$$\ddot{x} = -\frac{k x}{m} \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \gamma \dot{x} \quad (2.1.61)$$

Simplificando, temos:

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k x}{m} \left[ 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] - \gamma \dot{x}} \quad (2.1.62)$$

Para  $q_2 = y$ , teremos que usar mais uma vez a regra de derivação implícita, logo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.1.63)$$

Logo, temos:

$$\frac{d}{dt} (m \dot{y}) + m g + k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0) y (x^2 + y^2)^{-1/2} + \rho \dot{y} = 0 \quad (2.1.64)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{y}) + m g + k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0) y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \rho \dot{y} = 0 \quad (2.1.65)$$

Calculando a derivada total, temos:

$$m \ddot{y} + m g + k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_0) y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \rho \dot{y} = 0 \quad (2.1.66)$$

Simplificando, temos:

$$m \ddot{y} + m g + k y \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \rho \dot{y} = 0 \quad (2.1.67)$$

Fazendo a substituição  $\gamma = \rho/m$  e isolando  $\ddot{y}$ , temos:

$$\ddot{y} = -g - \frac{k y}{m} \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \gamma \dot{y} \quad (2.1.68)$$

Em resumo, ao analisarmos a dedução das equações de movimento por meio das formulações newtoniana e lagrangiana em coordenadas polares, constatamos de maneira clara a equivalência entre ambas, tanto no contexto do movimento com dissipação quanto no isento desse fenômeno. Essa concordância estende-se à formulação hamiltoniana, conforme apresentado no anexo B, com destaque para o fato de que a hamiltoniana foi desenvolvida exclusivamente para o caso sem dissipação.

Adicionalmente, observamos que a dedução em coordenadas cartesianas, realizada pelas três formulações para o caso sem dissipação, resulta em uma coerência de resultados. Ao considerar fatores dissipativos, tanto pela formulação newtoniana quanto pela lagrangiana, também observamos uma correspondência nos resultados obtidos. Esses achados reforçam a consistência e aplicabilidade das abordagens analíticas consideradas, proporcionando uma compreensão sólida do comportamento dinâmico dos sistemas em estudo.

## 3.2 – Parâmetros de Controle do Sistema

Para observar a ressonância auto-paramétrica e a transição ordem-caos-ordem, é necessário definir alguns coeficientes que nos auxiliarão, como por exemplo, a relação entre as frequências de oscilação do sistema  $\mu$  e a relação entre as energias envolvidas  $R$ , faremos isso logo adiante.

O pêndulo elástico, representado na Figura 11, consiste em uma mola sem massa, de comprimento de repouso  $l$  e rigidez elástica  $k$ , com uma massa  $m$  fixada a ela. Na sua posição de equilíbrio a mola será esticada, devido ao peso  $m g$  da massa suspensa, até um comprimento  $l_{max}$ , logo:

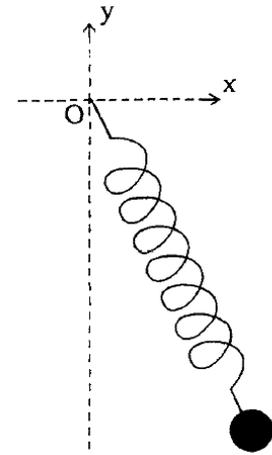
$$l_{max} = l_0 + \frac{m g}{k} \quad (2.2.1)$$

A suposição de que a mola é desprovida de massa, adotada com o propósito de preservar a simplicidade do nosso modelo ao máximo, constitui uma idealização que suscita preocupações quanto à possibilidade de representar uma simplificação excessiva. Por um lado, atribuir massa à mola resulta em uma notável diminuição na frequência da vibração predominante. Por outro lado, a incorporação de uma massa considerável à mola introduz uma quantidade infinita de graus adicionais de liberdade ao problema, exigindo, de fato, a abordagem de um espectro completo de vibrações no interior da mola (J.P van der Weele).

Nosso pêndulo elástico (idealizado) tem-se dois graus de liberdade, que combina o comportamento de oscilação de uma mola e a oscilação de um pêndulo, para a frequência de oscilação da mola, temos:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2.2)$$

Figura 11 - Pêndulo Elástico



Fonte: Van der Weele

Em que  $\omega_m$  é a frequência de oscilação da mola, já demonstrado anteriormente (equação 1.1.103). E para o movimento pendular, temos a seguinte frequência angular para o caso de pequenas amplitudes:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l_{max}}} \quad (2.2.3)$$

Substituindo  $l_{max}$  pela equação abaixo, temos:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l_0 + \frac{m g}{k}}} \quad (2.2.4)$$

O pêndulo elástico (sem dissipação) tem uma constante de movimento, em que para obtê-la, devemos primeiro saber a energia total:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m g y + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)^2 \quad (2.2.5)$$

Para o caso em que a energia mínima é alcançada, ocorre quando o pêndulo elástico está completamente estático em sua posição de equilíbrio, ou seja, quando suas velocidades são zero  $\dot{x}$  e  $\dot{y} = 0$ ,  $x = 0$  e  $y = -(l_0 + m g/k)$ , logo a equação se torna:

$$E_{min} = -m g \left( l_0 + \frac{m g}{k} \right) + \frac{1}{2} k \left( \frac{m g}{k} \right)^2 = -m g \left( l_0 + \frac{1}{2} \frac{m g}{k} \right) \quad (2.2.6)$$

Portanto, sabe-se agora que a energia não pode assumir valores menores do que a imposta pela equação acima, por outro lado, não existe uma restrição para o valor máximo de energia, podemos variar a energia de  $E_{min}$  até o infinito tomando diferentes condições iniciais. Então, podemos definir a seguinte constante adimensional.

$$R = -\frac{E}{E_{min}} \quad (2.2.7)$$

A faixa deste parâmetro, a chamada relação de energia, é de  $-1$  ao infinito. Além da energia (ou proporção de energia), o pêndulo elástico tem uma segunda função importante, o parâmetro  $\mu$ , definido como:

$$\mu = 1 + \frac{k l_0}{m g} \quad (2.2.8)$$

Que, para pequenas amplitudes do pêndulo elástico, é igual ao quadrado da razão de as frequências da mola e do pêndulo:

$$\mu \equiv \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \quad (2.2.9)$$

Outras relações uteis são:

$$l_{max} = \frac{\mu l_0}{(1 - \mu)} \quad \text{ou} \quad \mu = \left(1 - \frac{l_0}{l_{max}}\right)^{-1} \quad (2.2.10)$$

Quando o parâmetro  $\mu$  assume valores muito pequenos, essa condição assemelha-se à situação em que a massa do sistema é substancialmente maior do que a capacidade de suporte da mola. Esse cenário levaria a uma máxima elongação da mola, podendo eventualmente resultar em uma transição para um regime plástico. Nesse contexto, a mola perderia suas propriedades elásticas, não retornando mais à sua posição de equilíbrio inicial, configurando, na prática, uma nova posição de equilíbrio.

Em contrapartida, quando  $\mu$  adquire valores consideravelmente grandes, isso indica que a constante elástica da mola é altamente rígida. Nessa situação, a mola não distenderia significativamente, comportando-se mais como uma haste rígida do que como um elemento elástico.

Assim como o  $R$ , o parâmetro  $\mu$  é adimensional e pode assumir qualquer valor entre 1 e infinito. Um valor de interesse especial é  $\mu = 4$  ou  $\omega_m = 2 \omega_p$ , nesse caso a mola e os modos de oscilação do pêndulo estão em ressonância auto-paramétrica, o que resulta em uma troca de energia entre o movimento da mola e o movimento do pêndulo. Na prática, o comportamento do pêndulo elástico

com  $\mu = 4$  é tão notável que praticamente todos os autores se restringem a este valor para observar o fenômeno da ressonância auto-paramétrica. Portanto, podemos concluir, que a relação de energia  $R$  e a relação entre as frequências de oscilação  $\mu$  são os dois principais parâmetros de controle do sistema.

## Capítulo 4 – Simulação Computacional

### 4.1 – Transição Ordem-Caos-Ordem

A transição ordem-caos-ordem é um conceito que descreve um padrão de comportamento complexo observado em sistemas dinâmicos não lineares. Essa transição envolve a mudança de um estado de ordem para um estado caótico e, posteriormente, de volta para um estado de ordem. Ou seja, o sistema passa de uma situação em que a maior parte do espaço de fase é ocupada por órbitas regulares para uma situação em que a maior parte do espaço de fase é preenchida com caos, e então passa para órbitas regulares.

Deve-se enfatizar desde o início que esses resultados transitórios não dizem respeito a uma órbita específica, mas sim ao efeito líquido de todas as órbitas juntas.

- **Ordem:** Inicialmente, um sistema dinâmico não linear pode estar em um estado de ordem, onde suas oscilações ou comportamento são previsíveis e seguindo padrões regulares. Nesse estado, as interações entre as partes do sistema seguem relações relativamente simples.
- **Caos:** À medida que os parâmetros do sistema são gradualmente alterados ou quando a energia é aumentada, o sistema pode entrar em um estado de caos. No caos, o comportamento do sistema se torna altamente imprevisível e aparentemente aleatório. Pequenas variações nas condições iniciais ou nos parâmetros do sistema podem levar a grandes variações no comportamento futuro. O caos é caracterizado por uma sensibilidade extrema às condições iniciais.
- **Retorno à Ordem:** À medida que as mudanças nos parâmetros ou na energia continuam, o sistema pode eventualmente sair do estado caótico e retornar a um estado de ordem. No entanto, este estado de ordem pode

não ser o mesmo que o estado inicial de ordem. Pode haver múltiplos estados de ordem possíveis, dependendo das condições do sistema.

Esta transição entre ordem, caos e ordem novamente, é muitas vezes referida como "bifurcação", um termo usado na teoria do caos para descrever a mudança qualitativa no comportamento de um sistema à medida que os parâmetros são variados. Existem diferentes tipos de bifurcações que podem levar a diferentes padrões de transição entre ordem e caos.

## **Seções de Poincaré**

As seções de Poincaré são representações gráficas que ajudam a visualizar o comportamento de sistemas dinâmicos, especialmente em sistemas com movimentos periódicos ou caóticos. Essas seções são construídas ao plotar as interseções repetitivas de uma trajetória em um espaço de fase com um plano ou uma superfície específica, geralmente de dimensão reduzida em relação ao espaço de fase completo.

Essencialmente, ao escolher uma superfície (como um plano, por exemplo) dentro do espaço de fase de um sistema dinâmico, as seções de Poincaré mostram os pontos onde a trajetória do sistema cruza essa superfície escolhida em momentos específicos do tempo ou em intervalos regulares de tempo.

A análise das seções de Poincaré permite identificar padrões, estruturas periódicas ou comportamento caótico no sistema dinâmico. Pode revelar informações sobre a estabilidade, regularidade ou complexidade do movimento do sistema, fornecendo uma visão detalhada de como o sistema evolui ao longo do tempo em relação a uma condição específica no espaço de fase.

Ao escolher uma superfície de corte adequada no espaço de fase do sistema, é possível capturar padrões específicos de comportamento, como órbitas periódicas, estruturas fractais ou regiões de transição entre diferentes estados dinâmicos. Isso torna as seções de Poincaré uma ferramenta valiosa para

identificar a natureza do movimento em sistemas físicos complexos, sendo aplicáveis em diversas áreas, desde física e engenharia até biologia e economia, para compreender e prever o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares.

Nas seções de Poincaré, o eixo  $x$  e o eixo  $y$  representam as variáveis ou coordenadas relevantes do sistema dinâmico em um espaço de fase reduzido. Essas coordenadas são escolhidas estrategicamente para capturar aspectos específicos do comportamento do sistema.

Interpretar uma seção de Poincaré envolve analisar os padrões visuais, estruturas e informações que surgem dos pontos plotados nesse gráfico. Aqui estão algumas etapas para interpretar uma seção de Poincaré:

#### **Identificação de Padrões Visuais:**

- **Padrões Regulares:** Regiões onde pontos se agrupam ou formam estruturas repetitivas. Isso pode indicar órbitas periódicas ou comportamento estável do sistema.
- **Regiões Densas:** Áreas com alta densidade de pontos podem apontar para áreas de maior probabilidade de o sistema ser encontrado, revelando regiões com comportamento mais frequente.

#### **Análise da Distribuição dos Pontos:**

- **Espalhamento dos Pontos:** Pontos espalhados de maneira uniforme ou caótica podem indicar um comportamento menos regular ou até mesmo caótico do sistema.
- **Vazios e Lacunas:** Locais sem pontos podem sugerir áreas onde o sistema não está presente ou regiões que são menos prováveis de serem alcançadas.

### Transições e Bifurcações:

- **Mudanças Súbitas:** Transições abruptas ou bifurcações no padrão dos pontos podem indicar mudanças de regime dinâmico ou alterações significativas no comportamento do sistema.

A interpretação de uma seção de Poincaré envolve uma análise minuciosa dos padrões visuais e distribuição dos pontos plotados no gráfico.

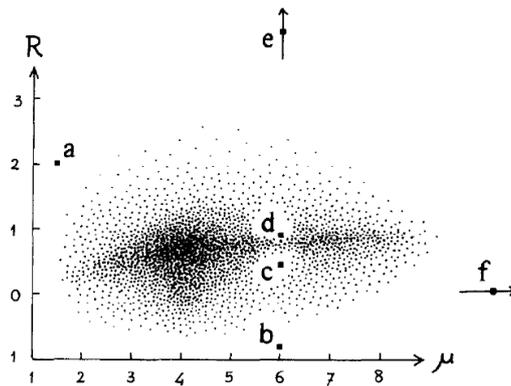
Para analisar a natureza caótica ou não do sistema, utilizaremos as seções de Poincaré. Para calcular essas seções, é necessário determinar o maior número possível de condições iniciais dentro de um mesmo nível de energia, estabelecido por nós. Isso nos permite visualizar as diversas trajetórias que o pêndulo elástico pode assumir com diferentes condições iniciais, possibilitando o estudo da evolução do sistema para inferir se o movimento é caótico ou não.

### Revisão do Artigo – *The order-chaos-order sequence in the spring pendulum* de J.P. van der Weele e E. de Kleine

De acordo com Weele e Kleine (1996), na Figura 12, podemos observar a presença ou não do caos para várias condições diferentes, o plano de parâmetros é apresentado da seguinte forma, o parâmetro  $\mu$  se estende ao longo do eixo horizontal e parâmetro  $R$  ao longo do eixo vertical.

A região central deste plano é sombreada, indicando uma presença abundante de caos, enquanto a ausência de sombreamento na área externa denota a inexistência desse fenômeno. Ao analisarmos os pontos marcados de  $a$  a  $f$ , observamos um espaço de fase notavelmente regular em  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $f$ , contrastando com a presença significativa de caos em  $c$  e  $d$ .

Figura 12 - Plano de Parâmetros



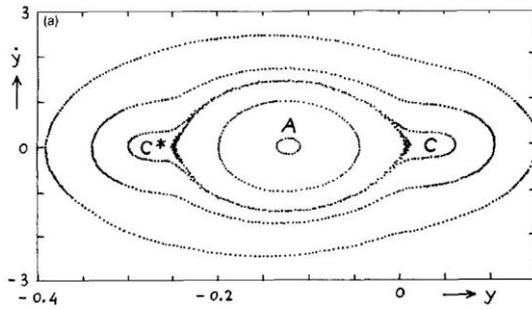
Fonte: Van Der Weele

Nas Figuras abaixo 13 até 18, apresentamos uma representação por meio de uma série de seções de Poincaré em seis pontos específicos. Essas seções delineiam o plano  $(y, \dot{y})$  nos momentos em que o pêndulo da mola atravessa a linha  $x = 0$  com uma velocidade horizontal positiva ( $\dot{x} \geq 0$ ). A presença marcante de comportamento caótico nas figuras 15 e 16 é evidenciada, ao passo que a regularidade das outras quatro seções de Poincaré também se destaca.

Portanto, ao atravessarmos a região sombreada, indo de valores pequenos para grandes parâmetros (ou vice-versa), observamos geralmente uma sequência de ordem-caos-ordem. Como já mencionado na introdução, essa sequência é o resultado global de inúmeras alterações e bifurcações mínimas no nível das órbitas individuais.

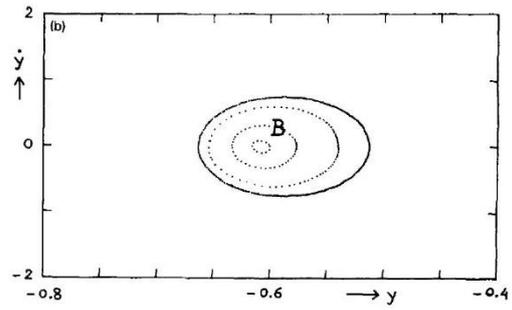
Vale ressaltar que algumas órbitas possuem maior relevância do que outras. Nas seções de Poincaré, as órbitas principais podem ser identificadas como pontos centrais marcantes, designados por letras como A, R, etc., que perduram ao longo de uma extensa faixa de valores de parâmetros e constituem a espinha dorsal da dinâmica, no sentido de que as demais órbitas se organizam.

Figura 13 - Seção de Poincaré  $\mu = 1,5$  e  $R = 2,08$



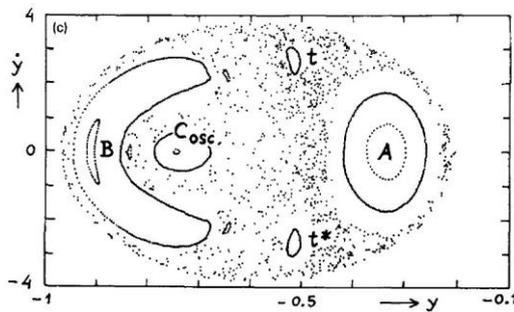
Fonte: Van der Weele

Figura 14 - Seção de Poincaré  $\mu = 6$  e  $R = -0,95$



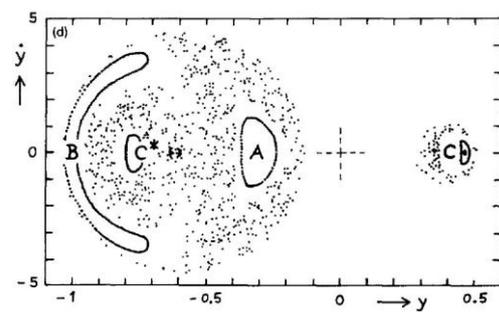
Fonte: Van der Weele

Figura 15 - Seção de Poincaré  $\mu = 6$  e  $R = 0,38$



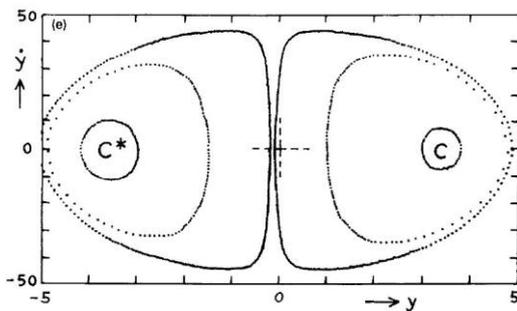
Fonte: Van der Weele

Figura 16 - Seção de Poincaré  $\mu = 6$  e  $R = 0,95$



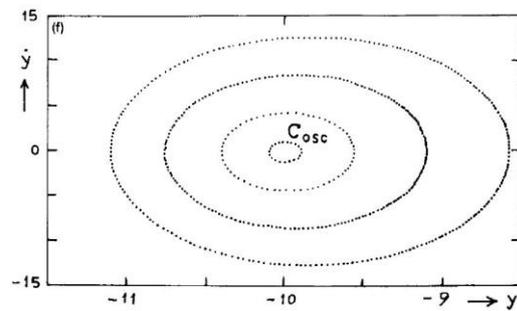
Fonte: Van der Weele

Figura 17 - Seção de Poincaré  $\mu = 6$  e  $R = 1,89$



Fonte: Van der Weele

Figura 18 - Seção de Poincaré  $\mu = 100$  e  $R = 0,021$



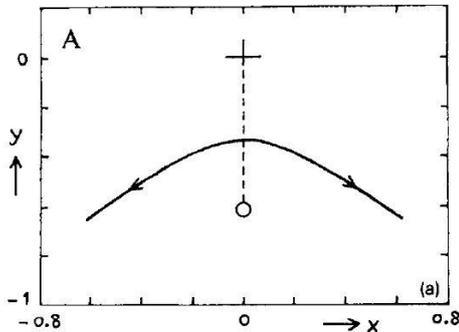
Fonte: Van der Weele

As seções de Poincaré para o pêndulo elástico, são mostradas no espaço de fase  $(\dot{y}, y)$  e foram obtidas nos momentos em que  $x = 0$  e  $\dot{x} > 0$ . Os valores dos parâmetros de controle  $(\mu, R)$  são respectivamente  $[\{a\} (1.5, 2.08)]$ ,  $[\{b\} (6, -0.95)]$ ,  $[\{c\} (6, 0.38)]$ ,  $[\{d\} (6, 0.95)]$ ,  $[\{e\} (6, 1.89)]$  e  $[\{f\} (100, 0.021)]$ ; fique atento a escala entre as diferentes imagens.

Nas Figuras abaixo 19 até 22, delineamos a forma dos principais movimentos no plano cartesiano  $(x, y)$ . Observe que esses movimentos

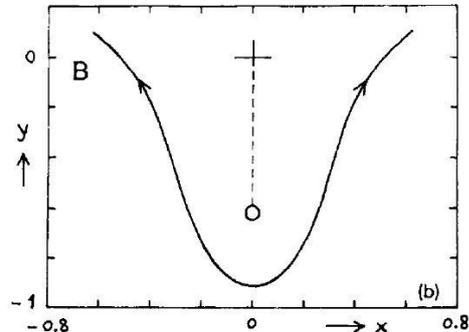
incorporam tanto oscilações quanto rotações, conforme esperado para um sistema dinâmico como é o caso do pêndulo elástico.

Figura 19 - Oscilação do Tipo Colina



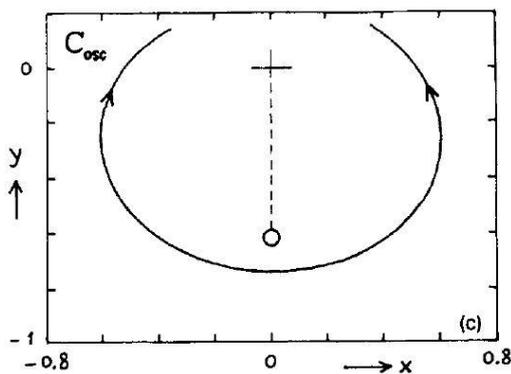
Fonte: Van der Weele

Figura 20 - Oscilação do Tipo Vale



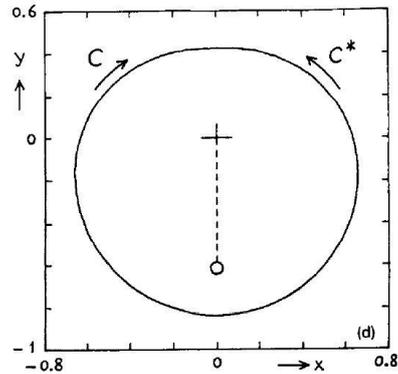
Fonte: Van der Weele

Figura 21 - Oscilação do Tipo Ferradura



Fonte: Van der Weele

Figura 22 - Oscilação do Tipo Rotação



Fonte: Van der Weele

Quando se trata de valores pequenos para o parâmetro  $R$ , o movimento predominante é do tipo oscilatório, enquanto para valores grandes de  $R$ , vemos predominantemente as rotações.

- Oscilação do tipo (A) Colina – Assume uma configuração de colina, visto que as variáveis do sistema experimentam um aumento inicial antes de decrescer, assemelhando-se à ascensão de uma elevação, semelhante a subir uma colina.
- Oscilação do tipo (B) Vale – Assume uma configuração de vale, pois as variáveis do sistema decrescem inicialmente antes de aumentar, assemelhando-se a descer um vale.

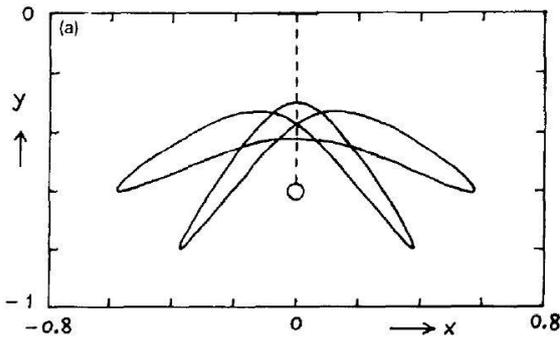
- Oscilação do tipo ( $C$ ) Rotação – Estreitamente associada a oscilação do tipo ( $B$ ), encontramos outros dois possíveis modos de oscilação
  - Oscilação do tipo ( $C_{osc}$ ) Ferradura – Caracterizado por um movimento oscilatório com trajetória semelhante a figura de uma ferradura. Por sua vez,  $C_{osc}$  prepara o terreno para as rotações  $C$  e  $C^*$ .
  - Oscilação do tipo ( $C$  ou  $C^*$ ) Rotação em sentido horário e anti-horário, respectivamente – Com o aumento da energia  $C_{osc}$  adquire energia suficiente para formar um laço fechado, simplesmente se transformando em  $C$  ou  $C^*$ .

Ao redor dos principais movimentos, o pêndulo elástico tem a capacidade de executar uma multiplicidade de movimentos satélites. Esses movimentos podem manifestar-se como oscilações periódicas, quase periódicas ou caóticas, revelando a verdadeira complexidade da dinâmica não linear.

- Oscilações Periódicas – Refere-se a padrões regulares e repetitivos que ocorrem em intervalos constantes de tempo.
- Oscilações Quase-Periódicas – Caracteriza-se por um comportamento oscilatório que não segue estritamente um padrão periódico, mas ainda exibe alguma regularidade em múltiplos períodos.
- Oscilações Caóticas – Representa um comportamento complexo e imprevisível, muitas vezes associado à sensibilidade extrema às condições iniciais do sistema.

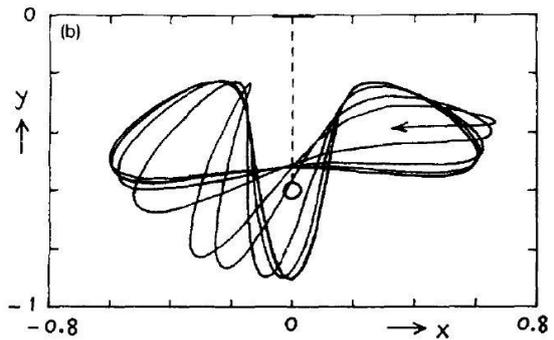
A representação fiel desse fenômeno ultrapassa a possibilidade de ser capturada em imagens isoladas, no entanto, para uma apresentação simplificada, as figuras abaixo 23 e 24 ilustram dois tipos de movimentos satélites, um periódico e outro caótico respectivamente.

Figura 23 - Oscilação Periódica



Fonte: Van de Weele

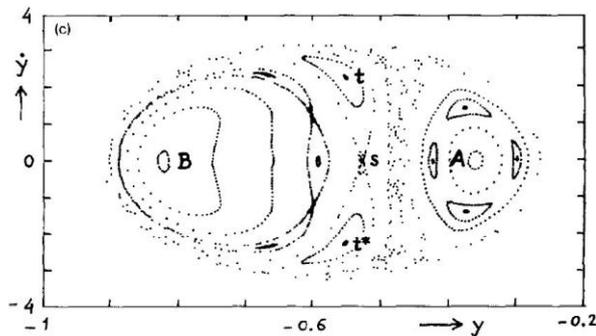
Figura 24 - Oscilação Caótica



Fonte: Van de Weele

No intuito de examinar exemplificações das "milhares de alterações e bifurcações" responsáveis pela sequência de ordem-caos-ordem, concentramo-nos agora em duas órbitas específicas. Na figura 25, selecionamos uma oscilação assimétrica denominada  $t$ , um satélite de  $B$ , que se desintegra por meio de bifurcações de duplicação de período ao adentrar a região sombreada no plano de parâmetros  $(\mu, R)$ . A trajetória é apresentada, juntamente com sua oscilação espelhada  $t^*$ .

Figura 25 - Seções de Poincaré das Fig. 13 a 18



Fonte: Van der Weele

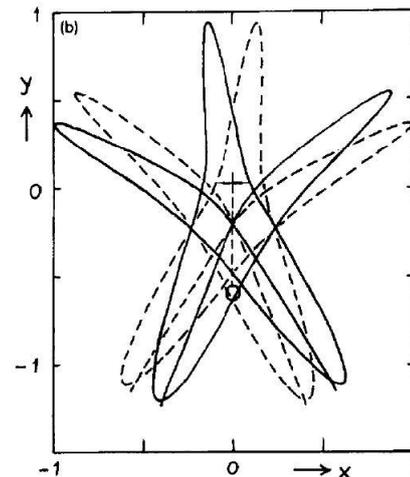
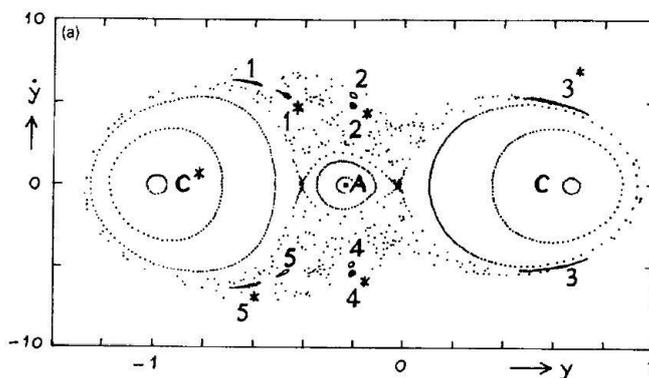
Na figura 23, é apresentado um satélite regular associado ao movimento do tipo colina (A), o qual se refere às quatro pequenas ilhas circundantes ao ponto A na seção de Poincaré representada na figura 25. Na figura 24, visualiza-se um satélite caótico pertencente ao movimento do tipo vale (B). As condições iniciais foram selecionadas nas proximidades do ponto  $s$ , indicado na figura 25, o qual representa uma oscilação simétrica instável. Já na figura 25, é exibida a seção de

Poincaré correspondente a  $\mu = 6$ ,  $R = 0$ . As letras  $t$  e  $t^*$  são utilizadas para denotar as duas oscilações não simétricas que estão detalhadas na figura subsequente.

No caso abaixo, ilustrado pela figura 26, exploramos o destino de um movimento em forma de estrela-do-mar inclinado para a esquerda e seu equivalente (inclinado para a direita) ao sair da região sombreada. Esses movimentos inicialmente se recombina, resultando em uma órbita simétrica, conforme evidenciado nas figuras 27 e 28. Eventualmente, a órbita simétrica é deslocada para a periferia do retrato de fase pelas rotações  $C$  e  $C^*$ , que ganham proeminência à medida que a energia aumenta.

Figura 26 - Seção de Poincaré  $\mu = 6$  e  $R = 3,79$

Figura 27 - Trajetória do Tipo Estrela-do-Mar



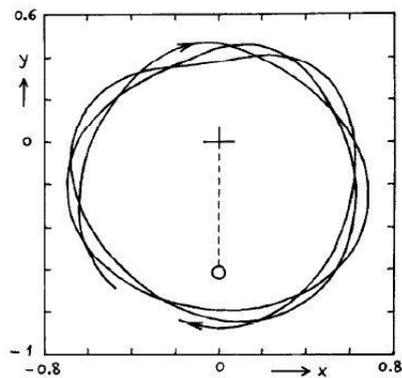
Fonte: Van de Weele

Fonte: Van de Weele

Na figura (a) temos a seção de Poincaré em  $\mu = 6$ ,  $R = 3.79$ , mostrando as posições no espaço de fase de dois movimentos assimétricos em forma de estrela-do-mar, que rastreiam os pontos 1, 5 e  $1^*$ ,  $5^*$ , respectivamente. Na figura (b) temos a forma dos mesmos movimentos no plano  $(x, y)$ .

Outro possível movimento satélite para o pêndulo elástico é quando submetido a um regime de altas energias, a órbita pode tomar o formato de uma circunferência completa, representado pela figura 28, característico do tipo (C) de movimento.

Figura 28 - Órbita Circular



Fonte: Van der Weele

## Metodologia Computacional

Com o intuito de observar este efeito na simulação computacional, utilizaremos as seções de Poincaré. Para isso, manteremos  $\mu$  constante, estabelecendo-o arbitrariamente como igual a 5. Modificaremos o parâmetro  $R$  da energia, percorrendo vários níveis pré-definidos, mantendo as mesmas condições iniciais. O propósito é avaliar as trajetórias do pêndulo elástico e as seções de Poincaré para as mesmas condições iniciais em diferentes níveis de energia, permitindo visualizar a transição entre ordem-caos-ordem.

Em cada simulação, procuramos explorar o maior número possível de condições iniciais que se adequassem ao nível de energia especificado. A variável  $x$  sempre foi iniciada em  $x = 0.01$  (1 cm) para todos os casos (níveis de energia), variando para diferentes valores dentro do limite imposto pelo valor energético definido. Dessa maneira, determinamos o máximo de condições iniciais que satisfizessem aquele nível de energia, viabilizando o cálculo das seções de Poincaré.

É fundamental destacar que, em cada nível de energia, são consideradas diversas condições iniciais, o que demanda uma atenção minuciosa aos valores numéricos apresentados nos eixos dos gráficos. Essa análise requer cuidado especial devido à notável discrepância entre esses valores, mesmo que as

imagens possuam o mesmo tamanho aparente, criando a ilusão de que o movimento sempre ocorre na mesma proporção, o que não é verdade.

No decorrer deste estudo, as seções de Poincaré foram calculadas com base no eixo de movimento vertical ( $y$ ) do pêndulo, visto que esta variável possuía menor controle de manipulação. No que diz respeito ao eixo horizontal ( $x$ ) do movimento do pêndulo, a simulação computacional sempre se iniciava a partir de um valor específico de  $x$ . Conseqüentemente, a cada vez que o pêndulo atravessava o eixo vertical ( $y$ ) da esquerda para a direita, era registrado um ponto na seção de Poincaré.

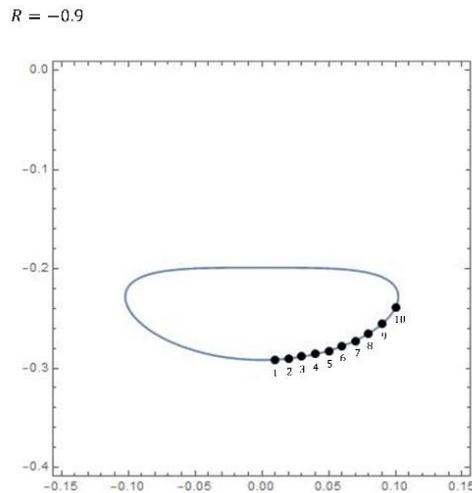
Nos gráficos das seções de Poincaré, o eixo  $x$  representa a posição no eixo vertical ( $y$ ) do movimento do pêndulo, enquanto o eixo  $y$  indica a velocidade do pêndulo no momento em que cruzava o eixo vertical ( $y$ ) do movimento da esquerda para a direita. Esses pontos eram registrados até que o intervalo de tempo predefinido por nós fosse concluído, proporcionando, assim, uma diversidade de pontos durante esse intervalo temporal e permitindo a análise da evolução da dinâmica do sistema.

### **1° Simulação $R = -0.9$**

Foram escolhidas 10 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = -0.9$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.1$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $10\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.29143, -0.290364, -0.288558, -0.285965, -0.282508, -0.278061, -0.272416, -0.265184, -0.255464, -0.239251\}$ . Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas

anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

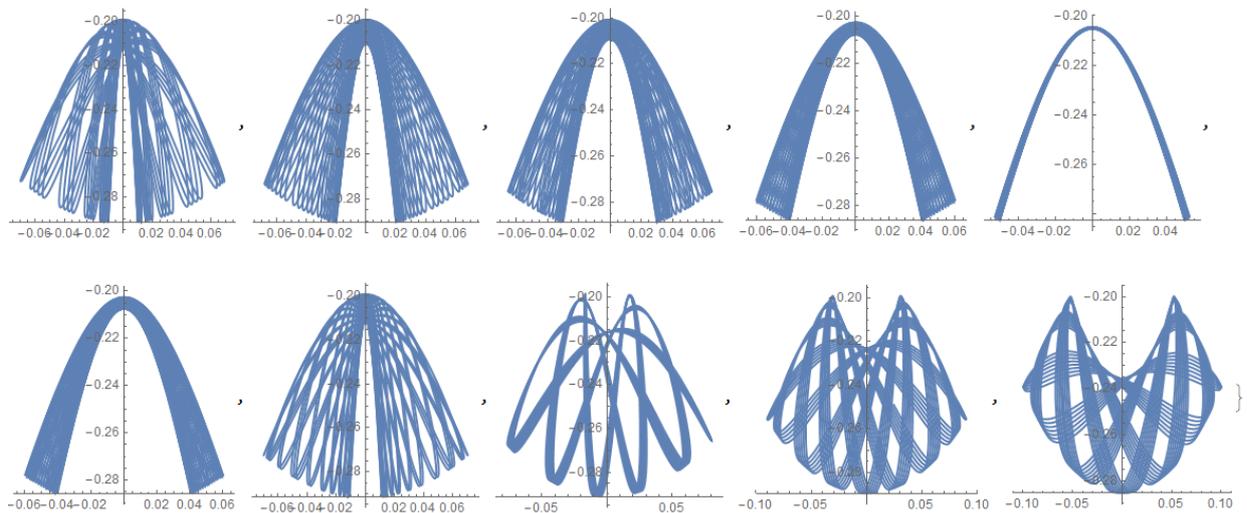
Figura 29 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

Figura 30 - Trajetórias em  $R = -0,9$

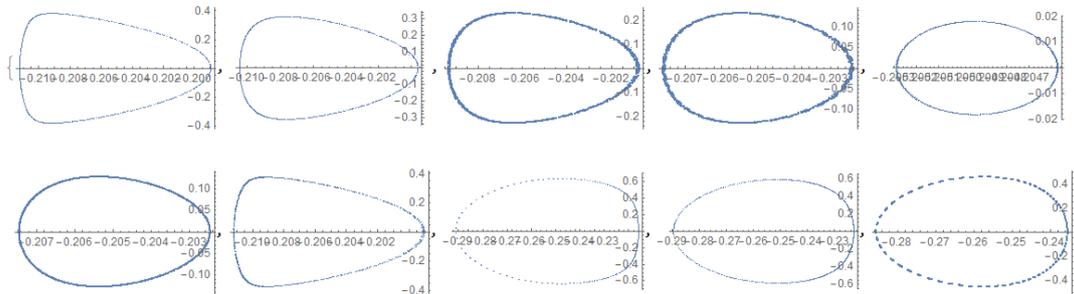


Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a

fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

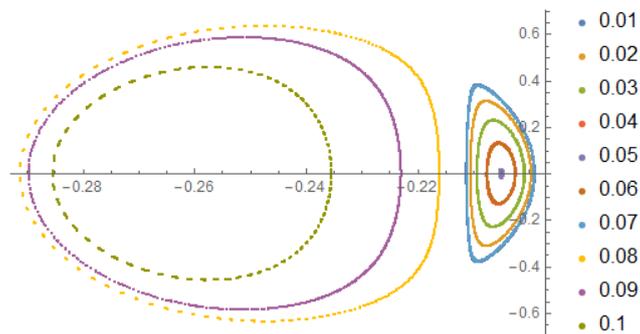
Figura 31 - Seções de Poincaré em  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 32 - Sobreposição das Seções em  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Considerando as condições iniciais e o nível de energia estabelecido, observa-se a ausência de comportamento caótico, uma vez que todas as seções de Poincaré manifestaram-se de maneira ordenada, sem a identificação de bifurcações ou a presença de pontos distintos e aleatórios. Assim, pode-se afirmar que, para níveis baixos de energia, o movimento se demonstra completamente ordenado.

Ao analisar as trajetórias obtidas para o nível de energia especificado, é possível observar que as sete primeiras trajetórias formam um padrão característico de movimento denominado colina (A), conforme demonstrado

anteriormente. Por outro lado, as três últimas trajetórias, embora exibam certa complexidade, remetem ao padrão de movimento conhecido como vale (B).

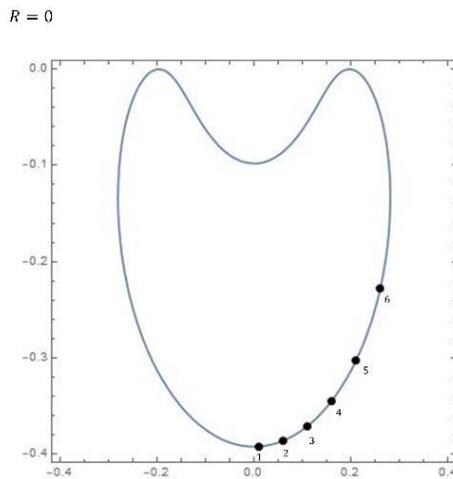
Uma observação relevante é que, ao consolidar todas as seções de Poincaré em uma única figura, torna-se evidente que as sete primeiras trajetórias encontram-se praticamente concêntricas. Além disso, nota-se um aumento na amplitude à medida que o valor do lançamento  $x$  aumenta, e, por conseguinte, a velocidade correspondente também cresce. Essa relação torna-se clara ao examinar essas seções em conjunto.

Outro ponto a destacar é que as três últimas trajetórias ocupam um espaço distinto em relação às sete primeiras, apresentando dimensões significativamente maiores. Ao observar as trajetórias, percebe-se que estas cruzam o eixo  $y$  em alturas diversas, refletindo-se claramente no aumento dessas figuras na seção de Poincaré.

## **2º Simulação $R = 0$**

Foram escolhidas 6 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 0$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.26$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $26\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.39223, -0.386215, -0.371016, -0.344801, -0.302905, -0.227837\}$ . Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

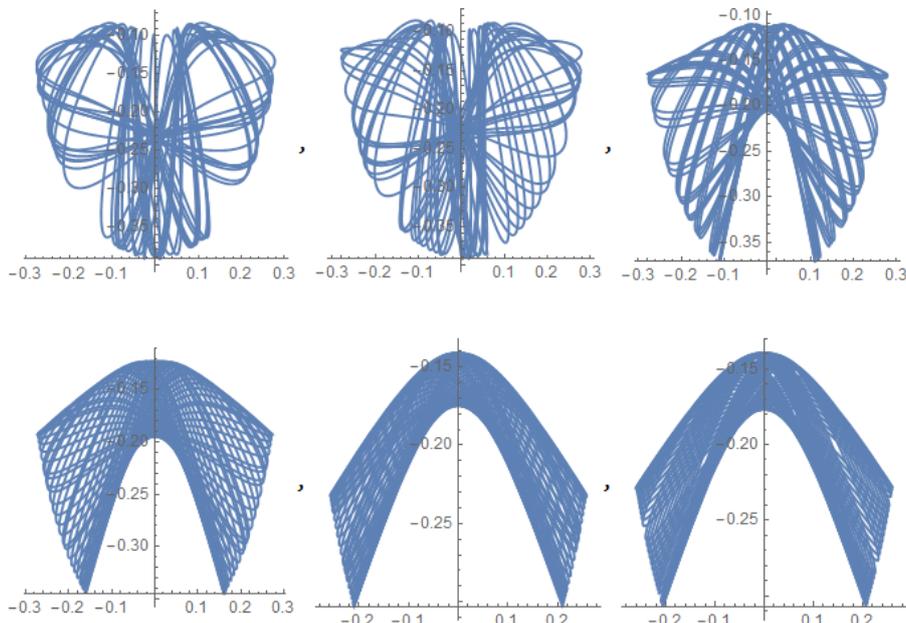
Figura 33 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 0$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

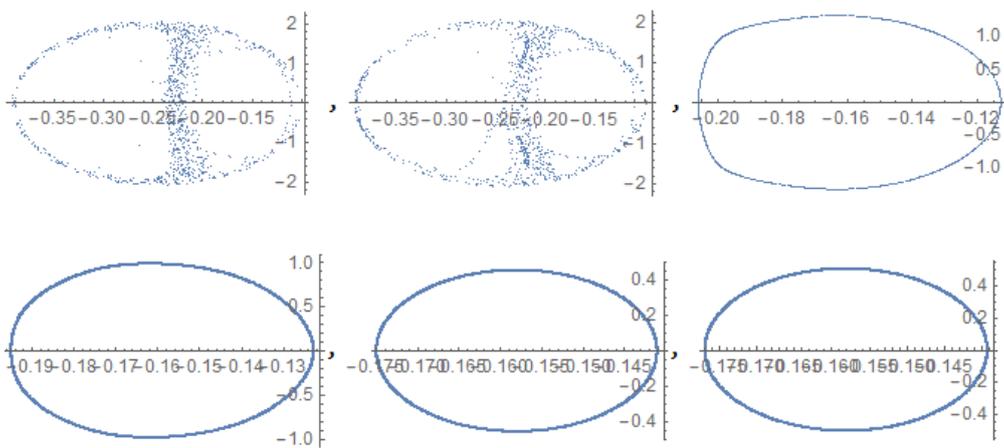
Figura 34 - Trajetórias em  $R = 0$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

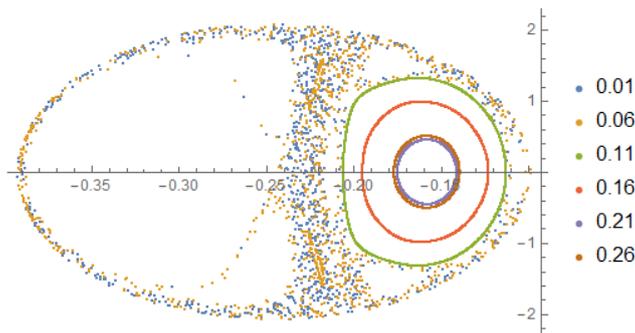
Figura 35 - Seções de Poincaré em  $R = 0$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 36 - sobreposição das Seções em  $R = 0$



Fonte: Autor

Para este nível de energia específico, é possível constatar que, para as duas primeiras condições iniciais, o movimento exibiu características de desordem e uma leve tendência ao caos. Esta observação é evidenciada tanto na representação da trajetória quanto na seção de Poincaré, onde os pontos demonstram uma distribuição mais dispersa e menos organizada em comparação ao primeiro caso apresentado.

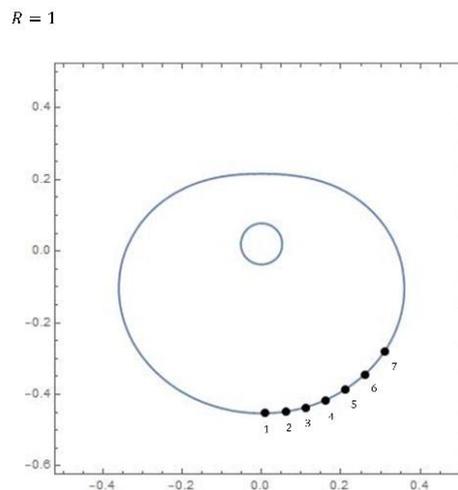
No caso, observando as quatro últimas trajetórias vemos que elas resultaram em um movimento ordenado caracterizado como do tipo colina (A), embora apresentem trajetórias aparentemente complexas. Uma análise mais

detalhada dessas trajetórias permite concluir que, mesmo diante da complexidade aparente, o padrão geral do movimento se assemelha ao comportamento ordenado típico de uma colina (A).

### 3º Simulação $R = 1$

Foram escolhidas 7 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 1$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.31$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $31\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26, 0.31\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.453215, -0.448411, -0.436461, -0.416566, -0.387091, -0.344624, -0.280225\}$ . Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

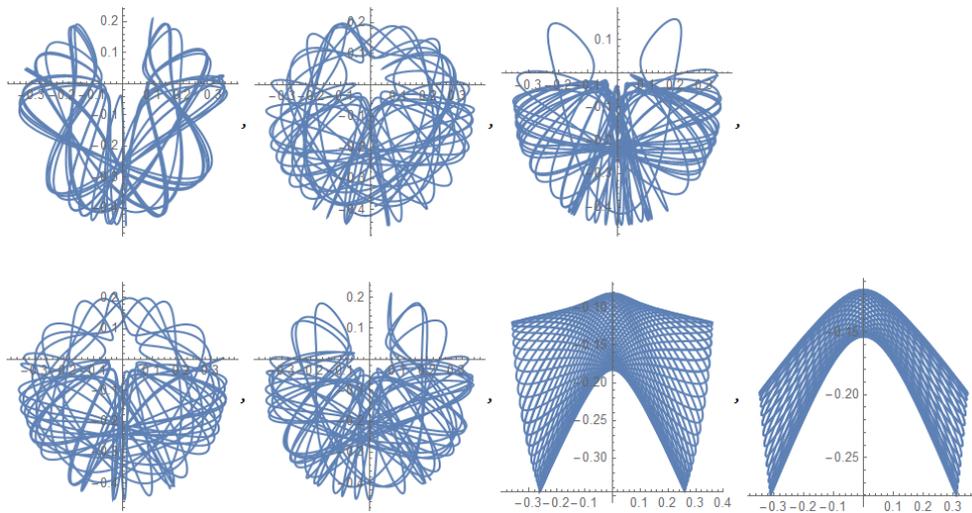
Figura 37 – Condições Iniciais que satisfazem  $R = 1$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

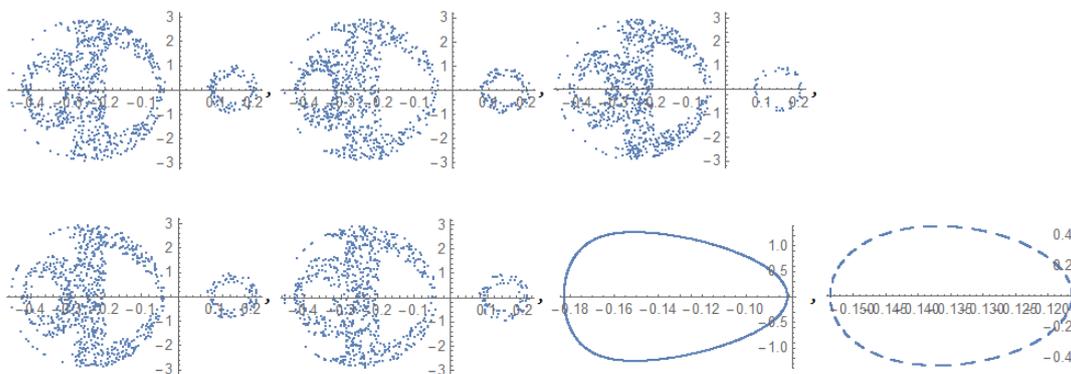
Figura 38 - Trajetórias em  $R=1$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

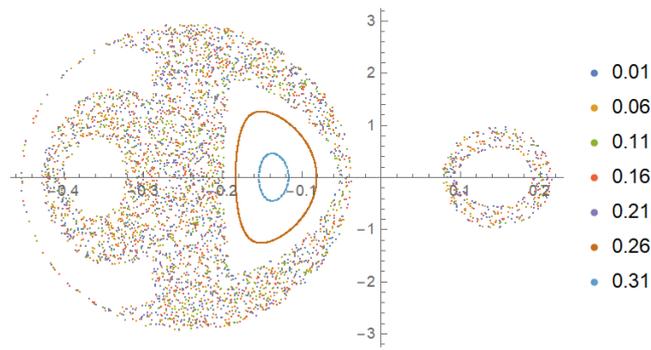
Figura 39 - Seções de Poincaré em  $R = 1$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 40 - Sobreposição das Seções em  $R = 1$



Fonte: Autor

Neste nível de energia específico, a observação revela que as cinco primeiras condições iniciais culminaram em movimentos caóticos e desordenados, enquanto apenas as duas últimas conduziram a movimentos completamente ordenados. Predominantemente, o movimento pode ser categorizado como caótico, conforme evidenciado tanto nas representações das trajetórias quanto nas seções de Poincaré.

Na análise das cinco primeiras trajetórias sob a perspectiva das seções de Poincaré, além da distribuição dos pontos que evidencia um movimento caótico, observa-se um fenômeno notável. Pela primeira vez, surgiram pontos em uma nova região da seção de Poincaré, correspondente à parte superior do pêndulo. A energia envolvida foi tão significativa que, além de transformar o pêndulo em um sistema caótico, também deslocou parte do seu movimento para outro quadrante do plano cartesiano. Já as duas últimas trajetórias resultaram em movimentos ordenados, caracterizando-se como colina (A).

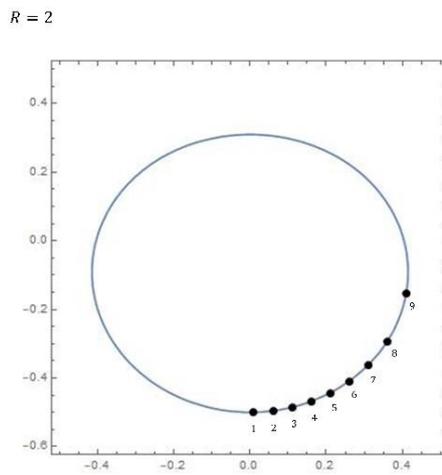
#### 4º Simulação $R = 2$

Foram escolhidas 9 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 2$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.41$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $41\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26, 0.31, 0.36, 0.41\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um

valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.500002, -0.495807, -0.485435, -0.46838, -0.443684, -0.409587, -0.362598, -0.294014, -0.153467\}$ .

Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

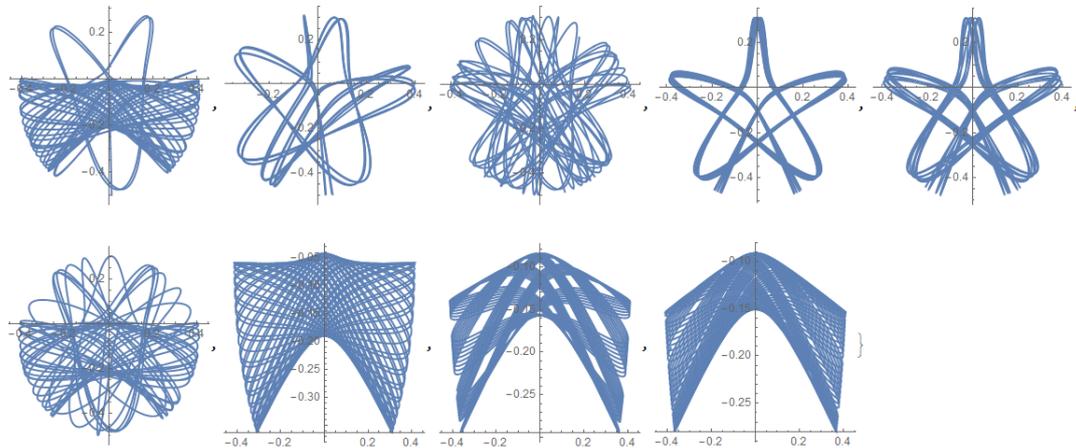
Figura 41 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 2$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

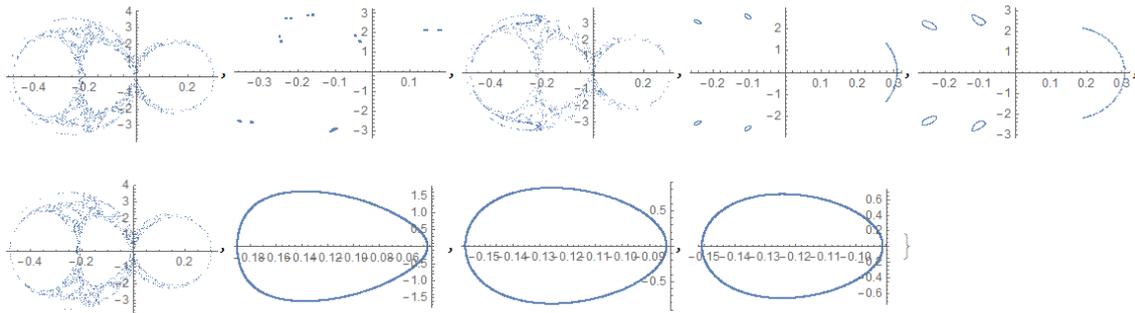
Figura 42 - Trajetórias em  $R=2$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

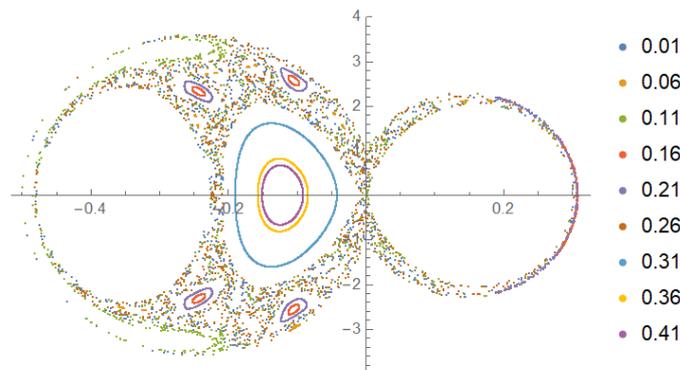
Figura 43 - Seções de Poincaré em  $R = 2$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 44 - Sobreposição das Seções em  $R = 2$



Fonte: Autor

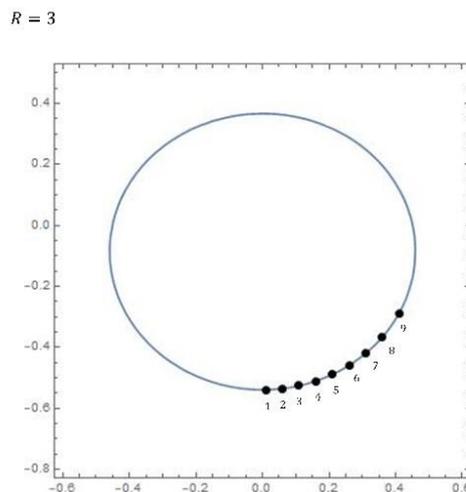
Ao examinar as trajetórias obtidas juntamente com as seções de Poincaré, é possível concluir que as trajetórias 1, 3 e 6 originaram um movimento caótico. Essa conclusão é respaldada pela distribuição dos pontos nas seções, refletindo uma característica caótica evidente também nas trajetórias. Por outro lado, as trajetórias 2, 4 e 5 resultaram em um movimento do tipo estrela, revelando-se como movimentos ordenados. Ao observar as seções, nota-se que o pêndulo atravessa consistentemente pontos específicos, formando pequenas ilhas

distribuídas nas seções, indicando organização no movimento, conforme mencionado anteriormente. Finalmente, as trajetórias 7, 8 e 9 culminaram em um movimento ordenado do tipo colina.

### 5° Simulação $R = 3$

Foram escolhidas 9 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 3$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.41$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $41\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26, 0.31, 0.36, 0.41\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.539442, -0.535641, -0.526275, -0.51098, -0.489085, -0.459443, -0.420013, -0.36674, -0.289118\}$ . Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

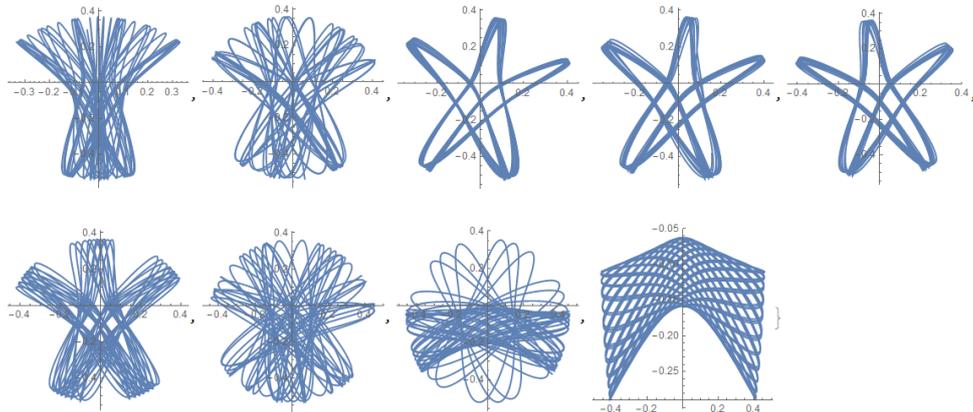
Figura 45 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 3$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

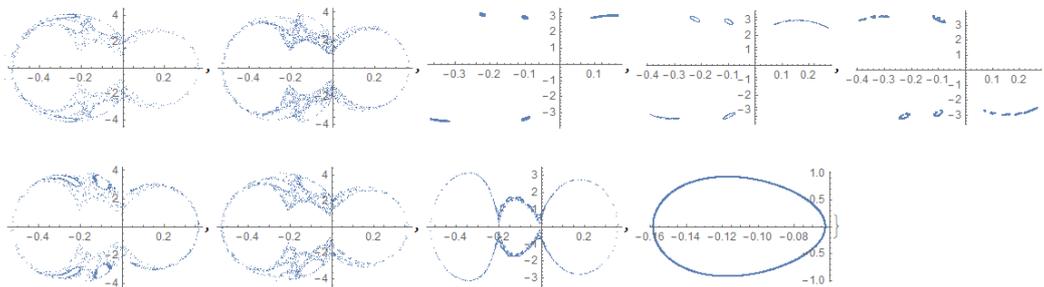
Figura 46 - Trajetórias em  $R = 3$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

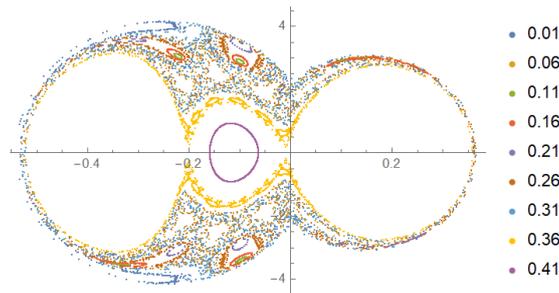
Figura 47 - Seções de Poincaré em  $R = 3$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 48 - Sobreposição das Seções em  $R = 3$



Fonte: Autor

Nesse nível de energia específico, é perceptível uma combinação de movimentos caóticos e ordenados. As condições iniciais de  $x$  {0.01, 0.06, 0.11 e 0.26} resultaram em um movimento caótico, enquanto as condições iniciais de  $x$  {0.16, 0.21, 0.31, 0.36 e 0.41} conduziram a movimentos ordenados. Ao analisar as seções de Poincaré, fica evidente que as três últimas condições iniciais apresentaram-se bem ordenadas, de forma semelhante ao observado no primeiro caso. Quanto às condições iniciais de  $x$  {0.16, 0.21}, é possível inferir sua ordenação, pois não se identifica distribuição aleatória de pontos no gráfico. Ao contrário, observam-se figuras ordenadas que indicam que o pêndulo elástico passa por essas posições com suas respectivas velocidades várias vezes ao longo do tempo.

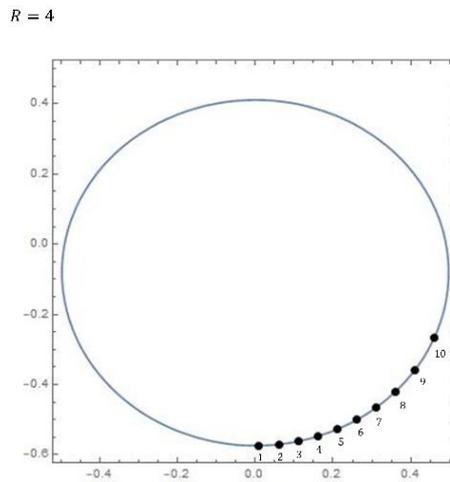
Cabe ressaltar que as trajetórias 3, 4 e 5 são ordenadas e apresentam um padrão do tipo estrela-do-mar. A penúltima trajetória, embora possa parecer caótica ao analisar sua trajetória, revela, na verdade, ser um movimento ordenado quando observada a seção de Poincaré. Nessa perspectiva, é possível notar que o pêndulo passa consistentemente pelos mesmos pontos no eixo  $y$ . Quanto à última trajetória, sua semelhança com um movimento do tipo colina (A) é evidente.

#### **6° Simulação $R = 4$**

Foram escolhidas 10 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 4$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.46$  (equivalentes a 1 cm e 46 cm, respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são {0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26, 0.31, 0.36, 0.41, 0.46}, e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por {-0.574187, -0.570673, -0.562031, -0.547978, -0.528006, -0.501278, -0.466394, -0.420866, -0.359545, -0.267538}. Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os

pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

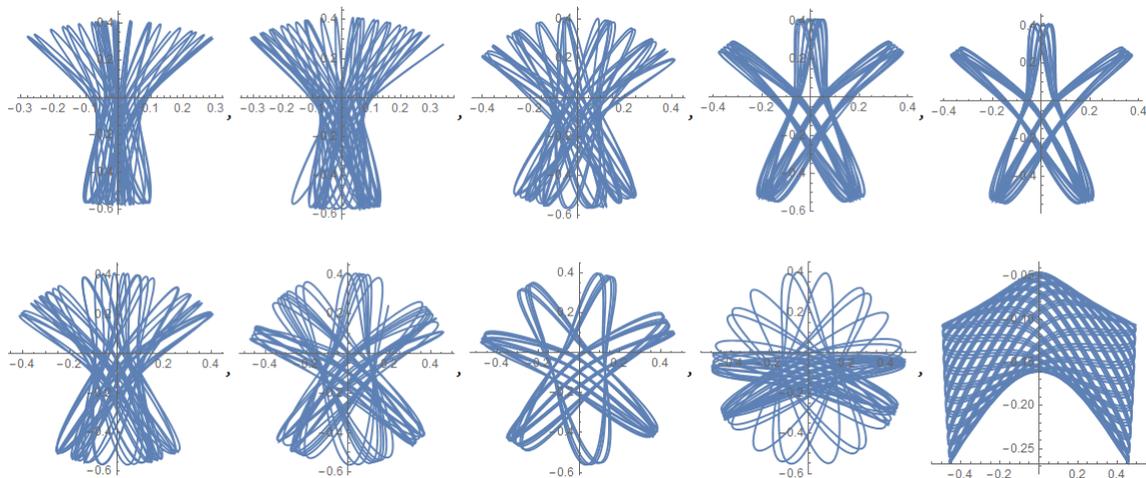
Figura 49 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 4$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

Figura 50 - Trajetórias em  $R = 4$

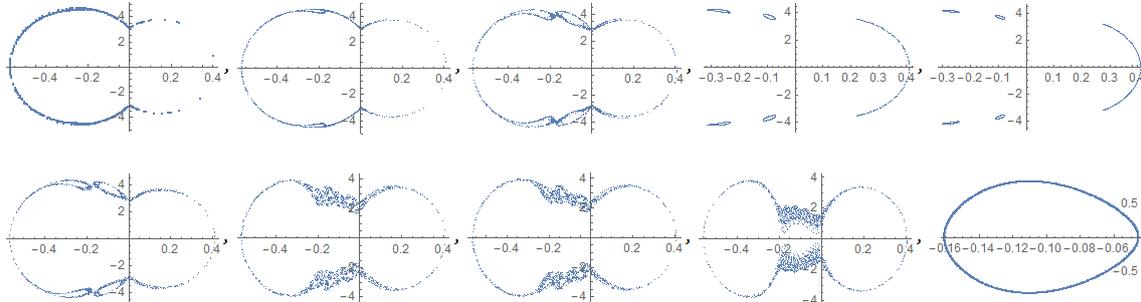


Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a

fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

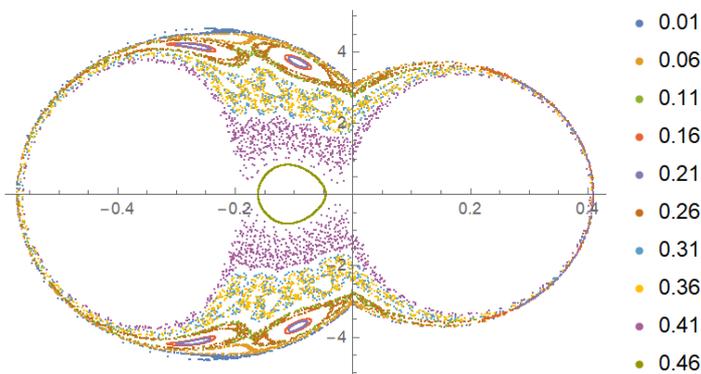
Figura 51 - Seções de Poincaré em  $R = 4$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 52 - Sobreposição das Seções em  $R = 4$



Fonte: Autor

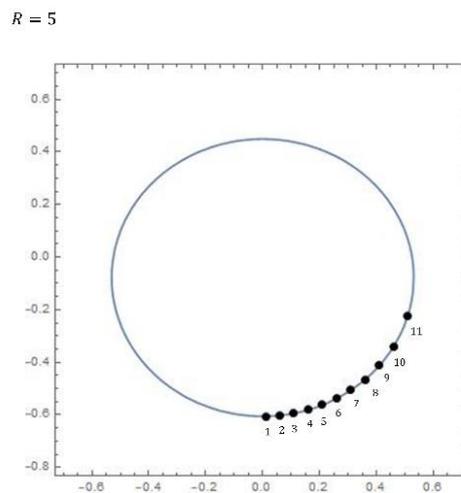
Nesse nível de energia, também se observa uma mescla de movimentos aleatórios e ordenados. Os seis primeiros movimentos e o último, para as condições de  $x$  {0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26 e 0.46}, demonstraram uma leve ordenação, especialmente a última condição inicial, que exibiu um comportamento semelhante ao primeiro caso previamente apresentado. Já para as condições intermediárias de  $x$  {0.31, 0.36 e 0.41}, houve uma leve presença de comportamento caótico, como evidenciado nas seções de Poincaré.

Vale ressaltar que as trajetórias 3 e 4 são ordenadas e apresentam um padrão do tipo estrela-do-mar, enquanto a última trajetória se enquadra em um movimento do tipo colina e é ordenada. Nas trajetórias 2, 3 e 6, tornam-se evidentes algumas pequenas bifurcações nas seções de Poincaré.

### 7º Simulação $R = 5$

Foram escolhidas 11 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 5$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.51$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $51\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.06, 0.11, 0.16, 0.21, 0.26, 0.31, 0.36, 0.41, 0.46, 0.51\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.605599, -0.602305, -0.59422, -0.581113, -0.562578, -0.537962, -0.506221, -0.465615, -0.412946, -0.341097, -0.224239\}$ . Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

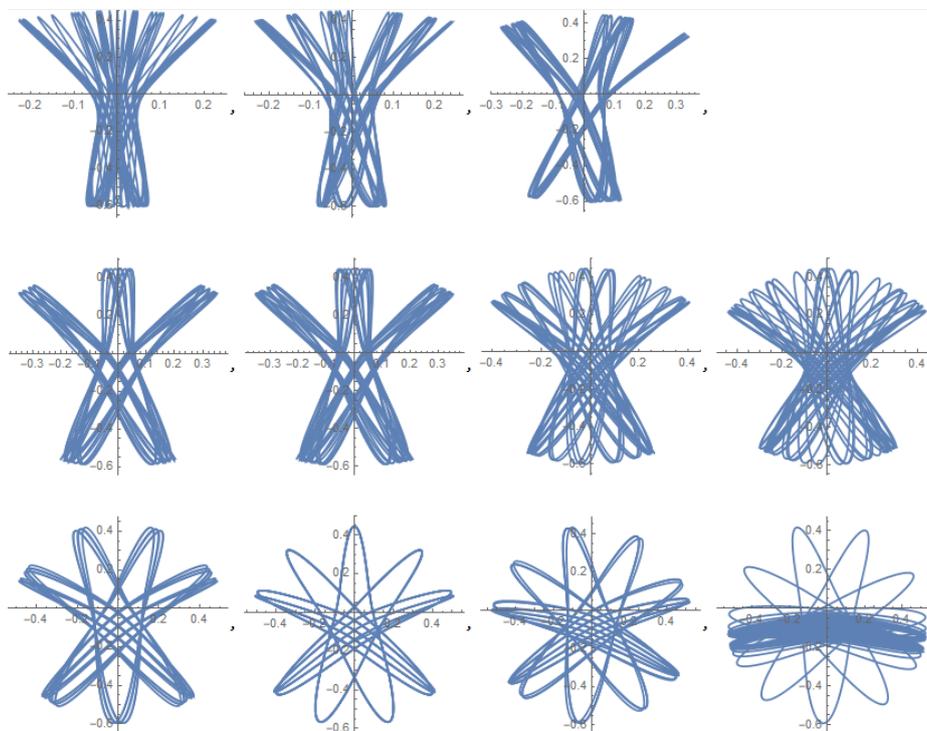
Figura 53 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 5$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

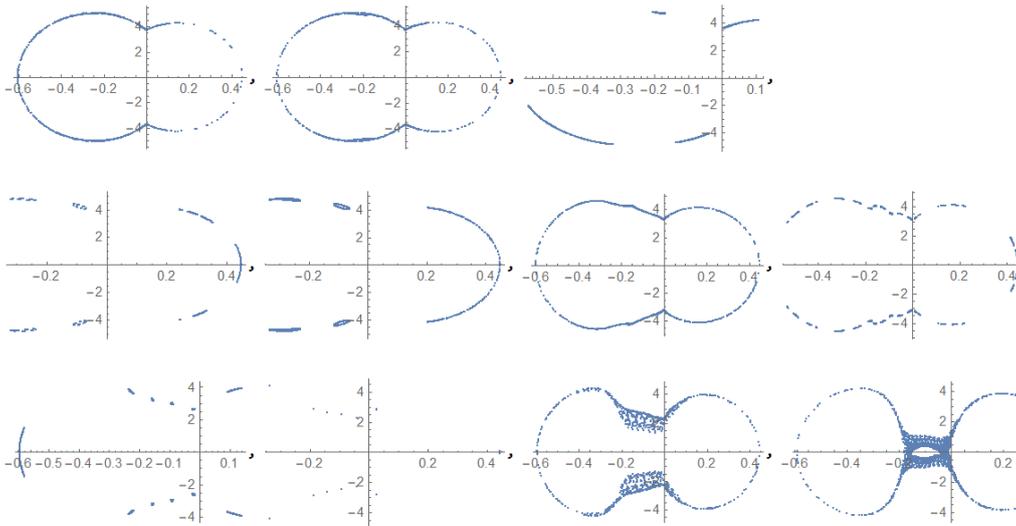
Figura 54 - Trajetórias em  $R = 5$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

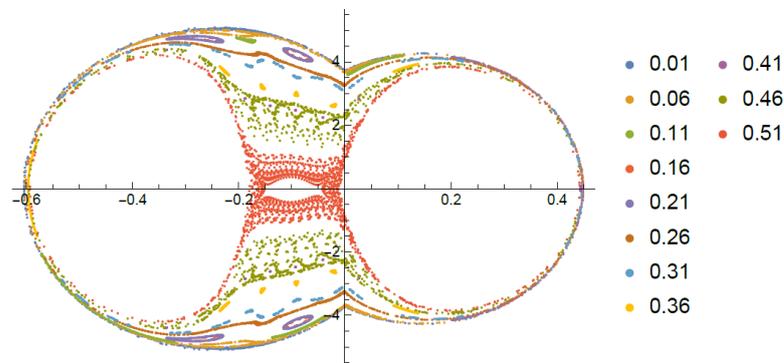
Figura 55 - Seções de Poincaré em  $R = 5$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 56 - Sobreposição das Seções em  $R = 5$



Fonte: Autor

Para esse nível de energia, é notável predominantemente a presença de movimentos ordenados, conforme evidenciado nas seções de Poincaré. A utilização dessas seções se revela crucial para a análise desses movimentos, uma vez que, se limitássemos nossa observação apenas às trajetórias descritas pelo pêndulo nessas condições iniciais, aparentemente estas poderiam parecer levemente caóticas ou desordenadas. No entanto, ao examinarmos as seções, a conclusão é inversa. É possível inferir que apenas as duas últimas condições

iniciais de  $x$  {0.46 e 0.51} resultaram em movimento parcialmente caótico, como evidenciado nas seções de Poincaré.

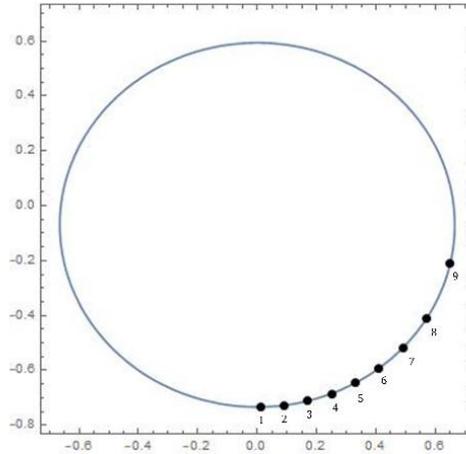
Vale ressaltar que as trajetórias 4, 5 e 8 apresentam o padrão de movimento do tipo estrela-do-mar. É possível ver outras trajetórias com estrutura semelhante a uma estrela, porém, com mais pontas. Embora não se enquadrem como estrelas-do-mar, essas trajetórias apresentam movimentos completamente ordenados, conforme evidenciado pelas seções de Poincaré. Já as duas últimas figuras, embora tenham uma parte do seu movimento caótico, também apresentam movimentos ordenados tanto na parte superior quanto inferior do pêndulo. Na parte intermediária, observa-se a presença de um movimento caótico com alta densidade de pontos dispersos nas seções, incluindo bifurcações.

#### **8° Simulação $R = 10$**

Foram escolhidas 9 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 10$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.65$  (equivalentes a 1 *cm* e 65 *cm*, respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são {0.01, 0.09, 0.17, 0.25, 0.33, 0.41, 0.49, 0.57, 0.65}, e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por {-0.733216, -0.727185, -0.711239, -0.684608, -0.645814, -0.592158, -0.518344, -0.411573, -0.210391}. Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

Figura 57 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 10$

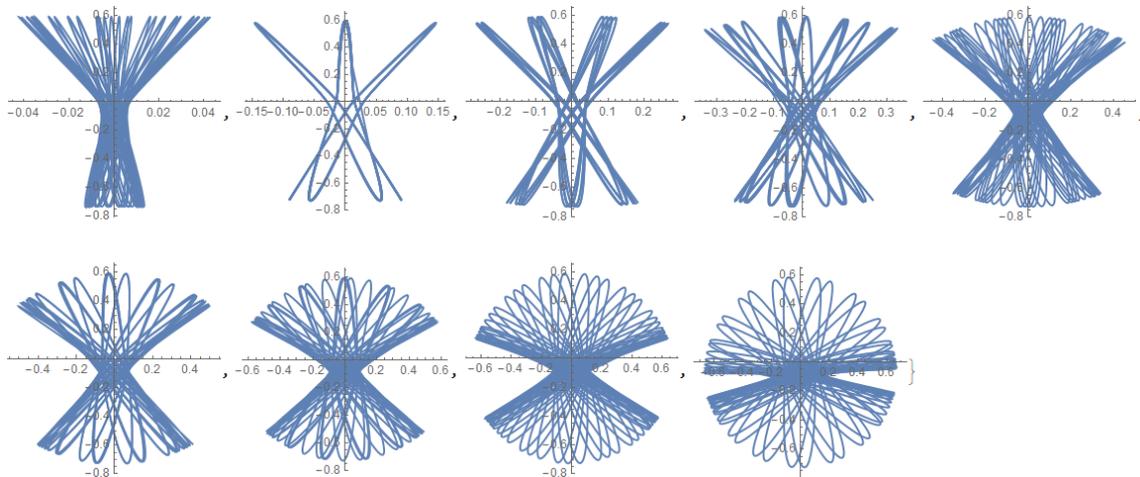
$R = 10$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

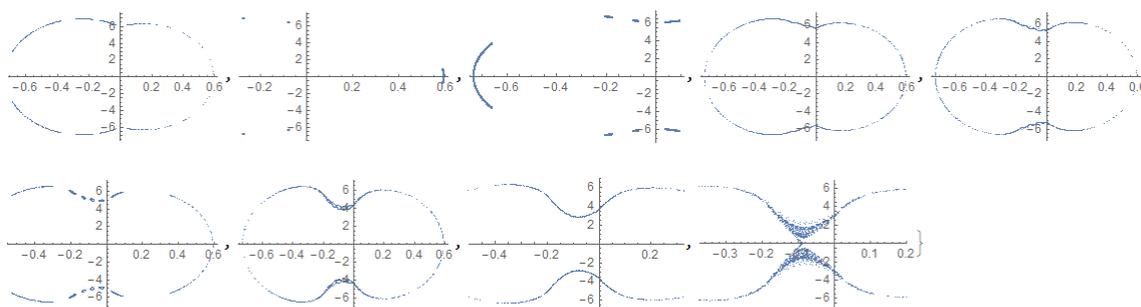
Figura 58 - Trajetórias em  $R = 10$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

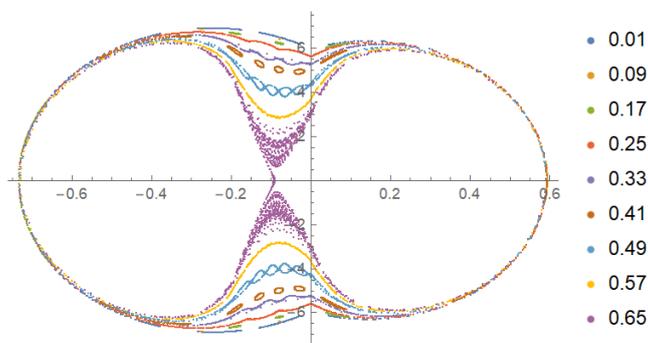
Figura 59 - Seções de Poincaré em  $R = 10$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as seções de uma só vez.

Figura 60 - Sobreposição das Seções em  $R = 10$



Fonte: Autor

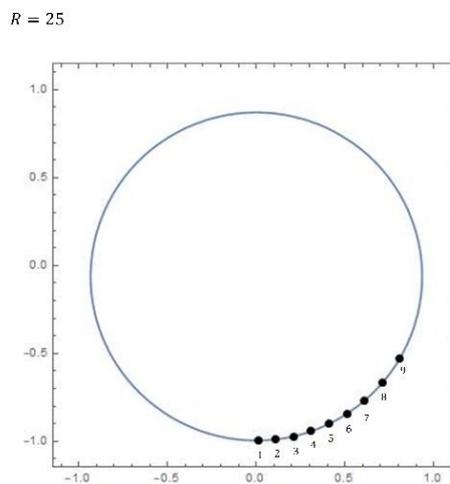
Neste novo nível de energia, observamos um padrão similar ao caso anterior. Novamente, apenas a última condição inicial de  $x \{0.65\}$  apresentou um comportamento ligeiramente caótico, dado a grande distribuição de pontos nas seções de Poincaré e a presença de bifurcações nesses pontos.

É possível notar que algumas trajetórias até lembram um movimento do tipo estrela-do-mar, porém com mais pontas do que o normal, mesmo não sendo propriamente dito, ainda se enquadram como movimentos ordenados. Outro ponto interessante aparece ao analisar o único movimento que parece que vai formar um círculo completo, que é a última trajetória, é o único que apresenta uma seção levemente caótica, se dá pelo fato de que ele cruza o eixo  $y$  com valores diferentes repetidamente ao longo do tempo.

## 9° Simulação $R = 25$

Foram escolhidas 9 condições iniciais que satisfazem o nível de energia exigido. Os valores de  $x$  que satisfazem o nível de energia  $R = 25$  e  $\mu = 5$  estão dentro de um intervalo de  $x = 0.01$  e  $x = 0.81$  (equivalentes a  $1\text{ cm}$  e  $81\text{ cm}$ , respectivamente). Os valores específicos de  $x$  que foram obtidos são  $\{0.01, 0.11, 0.21, 0.31, 0.41, 0.51, 0.61, 0.71, 0.81\}$ , e para cada valor de  $x$ , corresponde um valor específico de  $y$ , representados por  $\{-0.995517, -0.989074, -0.971669, -0.942652, -0.90082, -0.844118, -0.768979, -0.668588, -0.526863\}$ . Na figura subsequente, foram representadas todas as condições iniciais para as variáveis  $x$  e  $y$  que atendem a esse nível específico de energia. Os pontos assinalados em preto correspondem às condições iniciais mencionadas anteriormente, as quais foram empregadas como parâmetros para a condução das simulações.

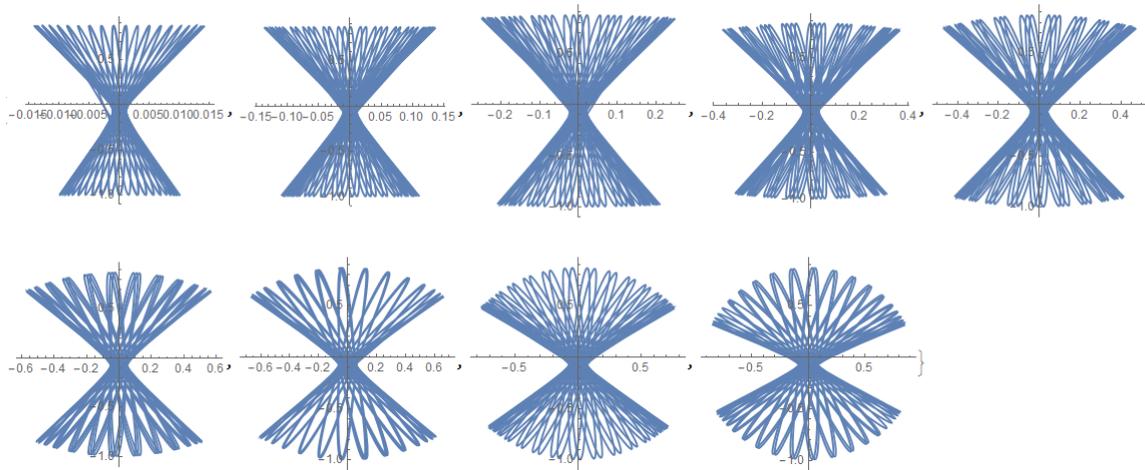
Figura 61 - Condições Iniciais que satisfazem  $R = 25$



Fonte: Autor

Sendo assim, é possível mostrar a trajetória de cada uma dessas combinações de  $x$  e  $y$ , e são mostradas logo abaixo.

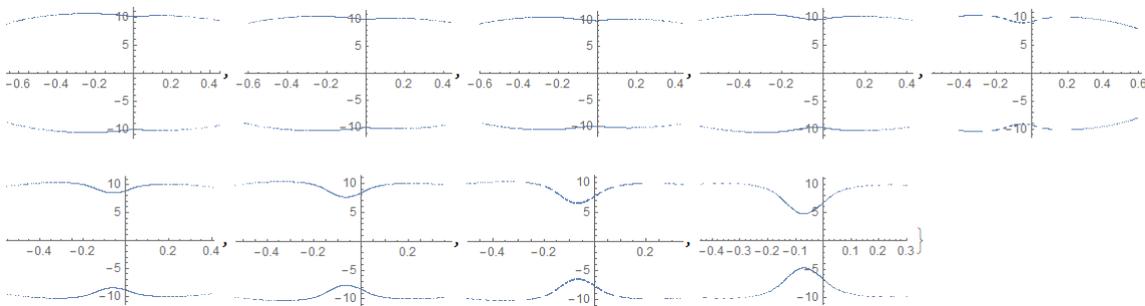
Figura 62 - Trajetórias em  $R = 25$



Fonte: Autor

Após a obtenção de diversas condições iniciais correspondentes a um mesmo nível de energia, prosseguimos para o cálculo das seções de Poincaré a fim de investigar a possível presença de comportamento caótico. As seções correspondentes estão apresentadas logo abaixo para análise e avaliação.

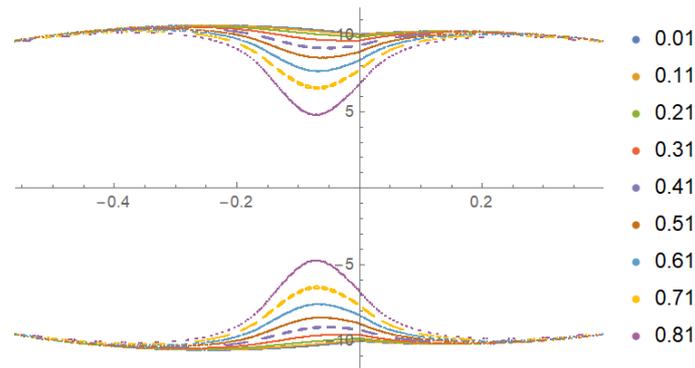
Figura 63 - Seções de Poincaré em  $R = 25$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do movimento como um todo, podemos mostrar todas as secções de uma só vez.

Figura 64 - Sobreposição das Seções em  $R = 25$



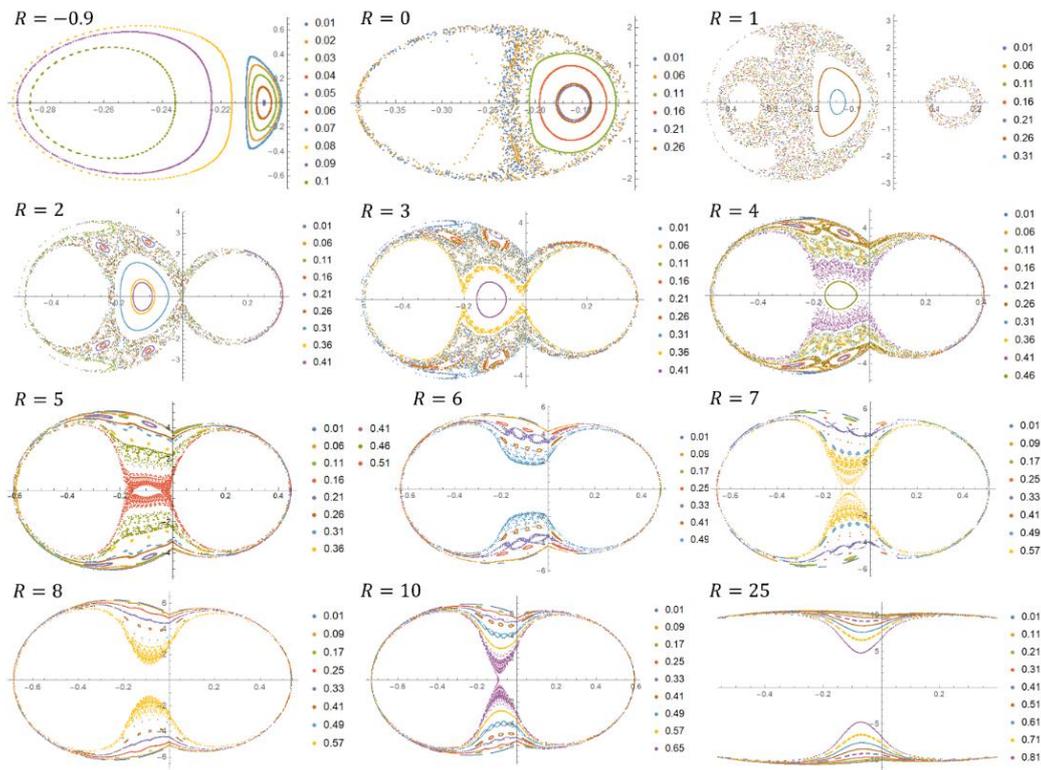
Fonte: Autor

Neste último nível de energia, constatamos que todas as condições iniciais de  $x$  demonstraram total ordenação. É possível ver que todas as trajetórias tem as mesmas características, com a trajetória resultante lembrando a figura de uma hipérbole, nessa situação, vemos que o pêndulo cruza o eixo  $y$  praticamente sempre nos mesmos pontos, o que resulta em uma trajetória ordenada como é possível nas seções. É relevante enfatizar que esse nível de energia é consideravelmente elevado, o que fundamenta a frequente permanência do pêndulo em sua trajetória na parte superior de seu ponto de pivô.

Vale ressaltar que na prática, dificilmente conseguiríamos reproduzir esta situação, pois se trata de um nível tão elevado de energia que para alcançar o mesmo, deveríamos esticar muito a mola, o que provavelmente perderia suas propriedades elásticas.

Na figura apresentada abaixo, compilamos todas as seções de Poincaré obtidas em cada nível de energia, dispostas lado a lado. Essa organização visual facilita a observação simultânea de todas as seções, eliminando a necessidade de percorrer diversas páginas para sua análise. Essa disposição contígua proporciona uma visão panorâmica e simplificada, permitindo uma comparação direta entre os diferentes comportamentos observados em cada nível de energia.

Figura 65 - Compilação de todas as sobreposições das seções de Poincaré para todos os casos analisados



Fonte: Autor

Ao analisarmos os diferentes níveis de energia ao longo deste estudo, torna-se evidente a presença do fenômeno da transição ordem-caos-ordem. Nos extremos, especificamente para o nível  $R = -0.9$  e  $R = 25$ , o sistema demonstrou-se completamente ordenado. No entanto, para os níveis intermediários, foi possível observar a presença de movimentos caóticos e aleatórios. É relevante salientar que, em nenhum caso, alcançamos uma condição na qual todas as condições iniciais resultaram em movimentos caóticos. Mesmo diante das condições em que o movimento caótico predominava, constatamos consistentemente a existência de pelo menos uma condição inicial que resultava em um comportamento ordenado.

Ao realizar uma análise exclusiva do primeiro lançamento em todas as situações, em que o valor de  $x$  é consistente para todos os casos ( $x = 0,01$ ), pode-se inferir que, quando  $R$  está em baixa energia ( $R = -0,9$ ), a trajetória torna-se completamente ordenada. No entanto, ao examinarmos energias intermediárias,

representadas por  $R = 0$ ,  $R = 1$ ,  $R = 2$  e  $R = 3$ , observamos um comportamento caótico e desordenado. Por outro lado, ao analisarmos os casos em que  $R = 4$ ,  $R = 5$ ,  $R = 10$  e  $R = 25$ , o sistema retorna a um estado completamente ordenado. Dessa maneira, torna-se evidente que, ao mantermos o valor de  $x$  constante para todos os níveis energéticos, somos capazes de discernir o fenômeno marcado pela transição entre ordem, caos e novamente ordem.

Esses resultados destacam a complexidade e a sensibilidade do sistema frente às variações nos níveis de energia. A presença de um comportamento ordenado, mesmo em cenários onde a tendência caótica era preponderante, ressalta a natureza não determinística e a influência crucial das condições iniciais sobre a dinâmica do sistema. Esta constatação reforça a importância de considerar minuciosamente as condições iniciais ao analisar sistemas dinâmicos complexos, uma vez que mesmo em situações aparentemente caóticas, a presença de ordem pode estar intrinsecamente presente. Essa conclusão reitera a necessidade contínua de investigar e compreender as dinâmicas complexas que regem tais sistemas, contribuindo para um entendimento mais profundo dos fenômenos transicionais entre ordem e caos.

## 4.2 – Ressonância Auto-paramétrica

A ressonância auto-paramétrica é um fenômeno físico que ocorre quando um sistema dinâmico exibe uma resposta amplificada ou de alta amplitude a uma frequência de excitação específica, mesmo que essa frequência não esteja diretamente relacionada à frequência natural de vibração do sistema. Essa resposta amplificada ocorre devido a interações não lineares entre as diferentes partes ou componentes do sistema. Em outras palavras, é quando um sistema não linear responde com oscilações de alta amplitude devido a uma coincidência entre a frequência de excitação variável e a frequência natural do sistema.

O termo "auto-paramétrico" refere-se ao fato de que a frequência de excitação não é uma frequência externa aplicada, mas sim uma frequência que muda internamente devido a alguma variação paramétrica no sistema. Isso pode ocorrer quando um dos parâmetros do sistema (como a rigidez da mola ou a massa) varia com o tempo.

Em sistemas sujeitos à ressonância auto-paramétrica, a resposta do sistema a uma frequência específica de excitação pode ser muito maior do que seria esperado com base em seu comportamento linear. Isso pode levar a oscilações de alta amplitude ou comportamento caótico. Em resumo, a ressonância auto-paramétrica é um fenômeno não linear em que um sistema dinâmico responde de forma amplificada a uma frequência de excitação que varia internamente devido a mudanças paramétricas.

### Metodologia Computacional

Agora que elucidamos o fenômeno em questão, procederemos à observação do mesmo por meio de simulação computacional, utilizando o *software Mathematica*. Para tanto, empregaremos as equações de movimento do sistema obtidas anteriormente, os parâmetros de energia  $R$  e as frequências  $\mu$ , além das condições iniciais. Os resultados das simulações são apresentados a

seguir, o sistema foi mantido em um estado de baixa energia ( $R = -0.9$ ), enquanto variávamos os valores para  $\mu$  de 2 a 8. O código utilizado se encontra no apêndice A.

Para realizar a simulação computacional, configuramos todos os parâmetros relevantes para o estudo. Inicialmente, definimos as condições iniciais do sistema, especificamente, as velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , foram mantidas como zero, indicando que o pêndulo partia do repouso, sem qualquer velocidade inicial. Além disso, estabelecemos as constantes fundamentais, como a massa suspensa ( $m = 0,05 \text{ kg}$ ), a constante elástica da mola ( $k = 10 \text{ N/m}$ ), a aceleração da gravidade ( $g = 9,81$ ), o parâmetro de energia ( $R = -0,9$ ), caracterizando uma baixa energia e o fator de dissipação do sistema ( $\gamma = 0$ ).

Dado que nosso foco era investigar a ressonância auto-paramétrica, a estratégia adotada foi variar o valor de  $\mu$ , mantendo todas as demais condições constantes. Com as equações de movimento do sistema previamente obtidas, implementamos um código no *Mathematica*. Nesse código, fixamos um valor para a posição em  $x$  e calculamos todas as posições possíveis de  $x$  que satisfaziam as condições preestabelecidas. Conhecendo esses valores de  $x$ , determinamos as correspondentes posições de  $y$ , criando assim uma família de condições iniciais que serviram como parâmetros para os lançamentos da simulação computacional.

Com todas as condições iniciais estabelecidas, em uma nova célula de código, também contendo as equações de movimento, procedemos para a plotagem dos gráficos de uma gama de possíveis trajetórias para o valor predefinido de  $\mu$ . Repetimos esse processo, ajustando os valores de  $\mu$ , permitindo-nos observar a evolução do sistema em diferentes condições. Esse procedimento sistemático nos proporcionou uma compreensão sobre o regime de oscilação auto-paramétrica, especialmente quando  $\mu$  atingia um valor

próximo de 4, evidenciando a ocorrência do fenômeno da ressonância auto-paramétrica no sistema em análise.

Ao analisar as figuras que representam as distintas trajetórias para diferentes condições iniciais, é crucial exercer cautela, pois os gráficos apresentam escalas discrepantes nos eixos. Embora as imagens estejam uniformes em tamanho, os valores numéricos nos eixos variam significativamente.

Destaco que nas imagens apresentadas a seguir, para todas as condições mostradas, ao lado esquerdo da página, temos a representação da trajetória ao longo de um intervalo temporal de 20 segundos. Esse período é escolhido estrategicamente para permitir uma visualização abrangente da periodicidade do movimento, possibilitando uma compreensão mais detalhada de como a trajetória se desenvolve ao longo do tempo. No entanto, em certas circunstâncias, a visualização do movimento completo pode se tornar complexa, dificultando a identificação da origem do movimento e comprometendo a clareza da trajetória total.

Para contornar essa limitação, as imagens do lado direito da página representam os instantes iniciais do movimento, onde o tempo decorrido é de apenas 2 segundos. Essa escolha temporal específica facilita a compreensão da origem do movimento e a observação dos primeiros momentos da trajetória. Ao focar nos estágios iniciais, proporcionamos uma visão mais nítida e desobstruída da origem do movimento, permitindo uma análise mais detalhada desses momentos cruciais. Dessa forma, a combinação das representações temporais, tanto ao longo do intervalo completo quanto nos instantes iniciais, enriquece a análise visual do movimento do pêndulo elástico, fornecendo uma compreensão abrangente e detalhada de sua dinâmica ao longo do tempo.

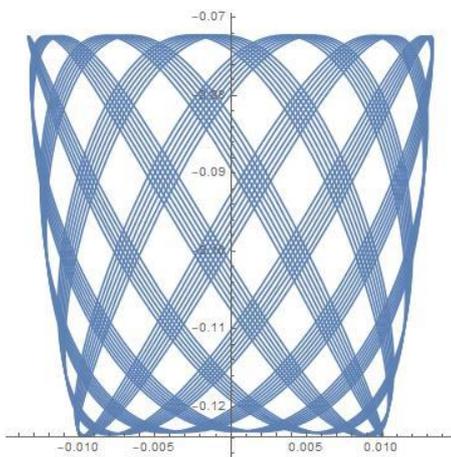
Destaco ainda que nas imagens da direita da página, foi adicionado um ponto vermelho, este ponto representa o ponto inicial da trajetória, indicando o

ponto específico no plano  $xy$  a partir do qual o movimento teve início. É relevante ressaltar que todas as trajetórias apresentadas foram obtidas a partir de uma condição inicial de repouso.

A inclusão desse ponto vermelho não apenas proporciona uma referência visual imediata para a origem do movimento, mas também realça a importância de compreendermos a influência do ponto de partida na evolução subsequente do pêndulo elástico. A visualização do ponto inicial, combinada com os diferentes instantes temporais apresentados, contribui para uma análise mais abrangente e detalhada da dinâmica do sistema, permitindo uma apreciação mais aprofundada dos fenômenos em jogo ao longo do tempo.

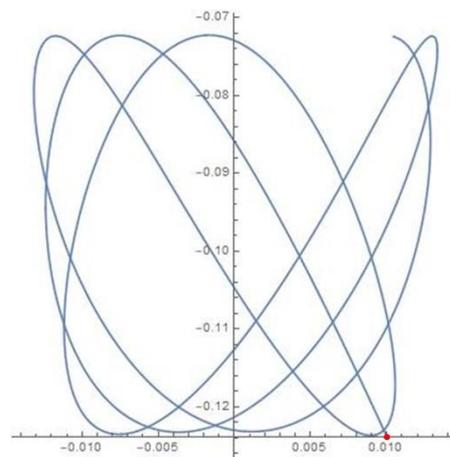
- a) Para  $\mu = 2$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.123816$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 66 - Trajetória para  $\mu = 2$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 67 - Trajetória para  $\mu = 2$  e  $R = -0,9$  em 2 s



Fonte: Autor

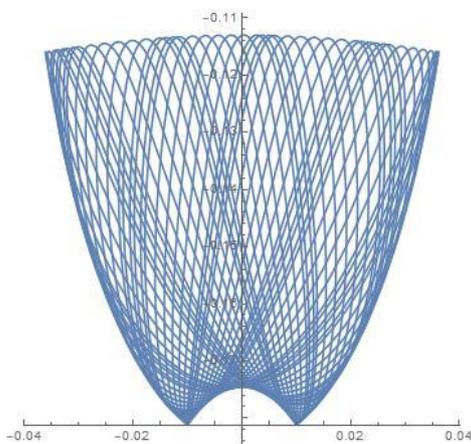
Observa-se que o movimento do pêndulo elástico teve início no ponto específico do plano  $xy$ , com coordenadas  $x = 0.01$  e  $y = -0.123816$  metros. Nota-se que, dadas as condições iniciais e as constantes do problema, o único parâmetro ajustável foi o comprimento da mola. Ao analisar as trajetórias resultantes, percebe-se que o movimento se limita a aproximadamente 2 centímetros no eixo  $x$  e, praticamente, não ultrapassa 6 centímetros no eixo  $y$ .

Essa limitação é reflexo da escolha das variáveis que respeitam as condições iniciais e constantes impostas ao problema.

A imagem à esquerda destaca um aspecto intrigante: mesmo após apenas 2 segundos de movimento, já é possível observar um estágio relativamente avançado do pêndulo elástico.

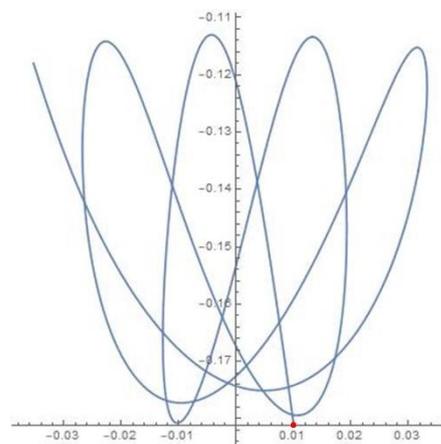
- b) Para  $\mu = 3$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.181166$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 68 - Trajetória para  $\mu = 3$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 69 - Trajetória para  $\mu = 3$  e  $R = -0,9$  em 2 s



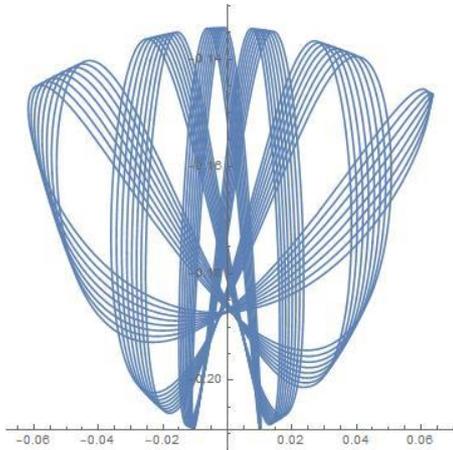
Fonte: Autor

Observe que o movimento teve início no ponto  $x = 0.01$  e  $y = -0.181166$  metros, é relevante notar que, neste caso, o parâmetro  $\mu$  foi ligeiramente maior em comparação ao caso anterior, resultando em um aumento discreto do comprimento da mola disponível para oscilação. Essa variação é evidenciada pela amplitude do movimento no eixo  $x$ , que se estendeu levemente além de 6 centímetros, enquanto no eixo  $y$  não ultrapassou os 7 centímetros.

Observa-se, ainda, uma peculiaridade na trajetória, uma certa concavidade se desenvolve na parte inferior do movimento, adicionando uma complexidade visual à dinâmica do pêndulo elástico.

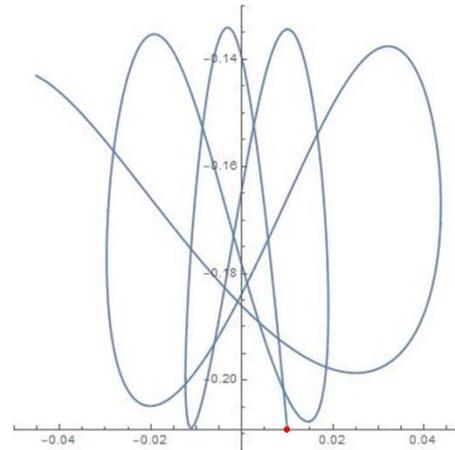
- c) Para  $\mu = 3.5$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.20912$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 70 - Trajetória para  $\mu = 3,2$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 71 - Trajetória para  $\mu = 3,2$  e  $R = -0,9$  em 2 s



Fonte: Autor

Neste ponto da análise, constatamos que o movimento se iniciou nos pontos  $x = 0.01$  e  $y = -0.20912$  metros. É notável que, nesse caso, o movimento se restringiu a um valor próximo de 6 centímetros no eixo  $x$  e ligeiramente superior a 6 centímetros no eixo  $y$ .

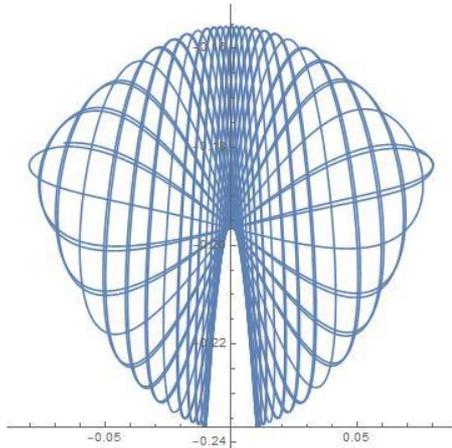
Observa-se também um aumento sutil na concavidade na parte inferior da trajetória. Esse crescimento sugere uma resposta mais pronunciada do sistema às forças envolvidas, indicando a proximidade da condição de ressonância auto-paramétrica. Nesse estágio, a trajetória começa a apresentar uma amplificação notável no eixo  $x$ , sugerindo que o movimento do pêndulo elástico está prestes a assumir características mais próximas de um movimento pendular puro, com influência reduzida da mola.

Ao mesmo tempo, o aumento da concavidade evidencia a tendência do pêndulo elástico de realizar um movimento predominantemente "mola", minimizando as influências do movimento pendular, uma vez que o movimento puramente pendular ocorre quando a mola está praticamente sem esticar. Essa dinâmica delicada sinaliza uma transição iminente para um comportamento

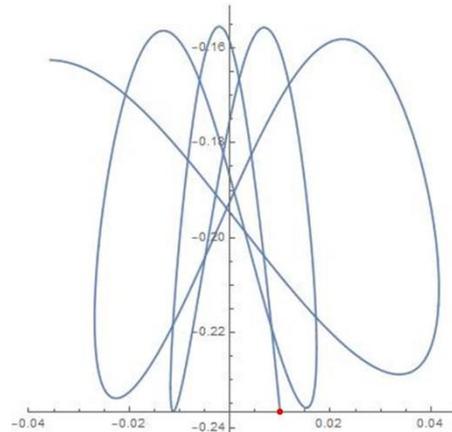
mais complexo, refletindo a interação entre as características oscilatórias do pêndulo.

- d) Para  $\mu = 4$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.236774$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 72 - Trajetória para  $\mu = 4$  e  $R = -0,9$       Figura 73 - Trajetória para  $\mu = 4$  e  $R = -0,9$  em 2 s

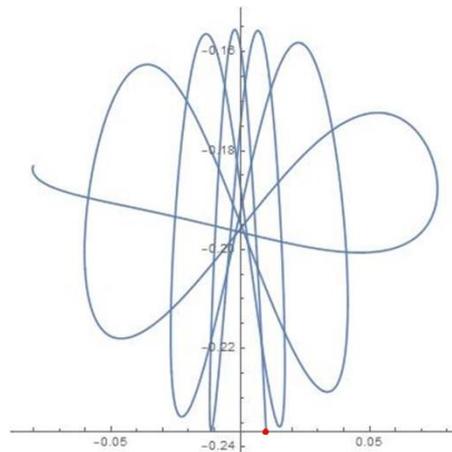


Fonte: Autor



Fonte: Autor

Figura 74 - Trajetória para  $\mu = 4$  e  $R = -0,9$  em 3 s



Fonte: Autor

Aqui apresentamos o ápice da ressonância autoparamétrica, destacando a relação entre as frequências de ressonância em que o efeito se torna mais visível. Esta condição é prontamente observável na trajetória que se evidencia de maneira notável, com amplas oscilações (grande amplitude) tanto no eixo  $x$

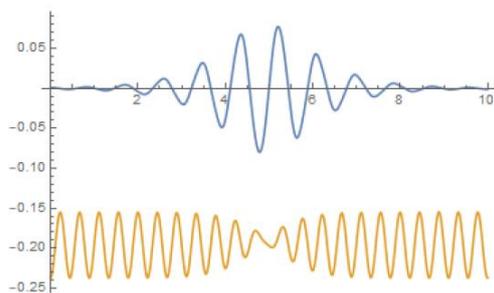
quanto no eixo  $y$ . Tal fenômeno evidencia que, ao longo do tempo, o sistema oscila ora como um pêndulo simples e ora como um sistema massa-mola vertical.

Observa-se, na figura do meio, a representação da simulação do movimento em um intervalo de apenas 2 segundos. Nesse cenário, dado o aumento significativo do comprimento da mola em comparação com o primeiro caso, verifica-se que o movimento tende a demandar um período mais prolongado para se desenrolar completamente. Com apenas 2 segundos de duração, torna-se menos perceptível a ocorrência da ressonância autoparamétrica, que se manifesta como a transição entre os regimes de oscilação predominantemente mola e predominantemente pêndulo.

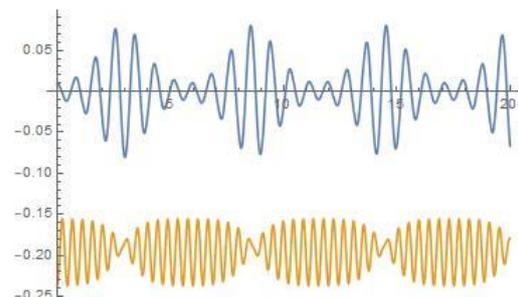
Diante dessa consideração, realizamos simulações adicionais, agora com uma duração de 3 segundos. Nesse contexto, torna-se evidente uma amplitude considerável no eixo  $x$ , indicando o início de um movimento praticamente pendular. Esse comportamento é característico da ressonância autoparamétrica, onde o sistema oscila entre os regimes de movimento predominantemente mola e predominantemente pêndulo, a extensão da simulação proporciona uma visão mais clara dessa transição.

A transição entre esses regimes de oscilação é claramente perceptível nas figuras subsequentes, que demonstra de forma individualizada a componente de oscilação em  $x$  e  $y$ , simultaneamente representadas ao longo do mesmo intervalo de tempo.

Figura 75 - Evolução do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  em 10 s      Figura 76 - Evolução do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  em 20 s



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Na figura acima, o eixo  $x$  representar o tempo decorrido, enquanto o eixo  $y$  representa a posição correspondente do pêndulo elástico. A curva em azul ilustra a componente do eixo  $x$  do pêndulo, ao passo que a curva em laranja retrata a componente  $y$  do pêndulo elástico.

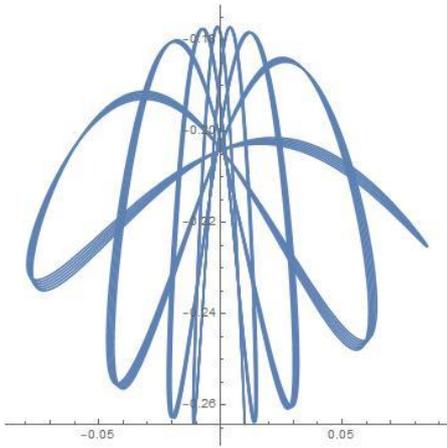
Analisando a evolução dessas curvas, torna-se evidente que o movimento ao longo do eixo do pendulo  $x$  (curva azul) tende a aumentar quando a componente  $y$  do pendulo elástico (curva laranja) está diminuindo. Da mesma forma, no ponto em que o valor de  $x$  é máximo, a componente  $y$  tende ao valor mínimo, estabelecendo um padrão sucessivo e inter-relacionado entre essas variáveis.

Essa observação é intrinsicamente característica do fenômeno da ressonância autoparamétrica. No momento em que a componente  $y$  atinge seu valor mínimo e a componente  $x$  está no ponto máximo, o sistema manifesta um movimento semelhante ao de um pêndulo simples com amplitude máxima. Da mesma maneira, quando o valor em  $x$  é mínimo e  $y$  tende ao valor máximo, ocorre o movimento predominantemente elástico da mola, marcado pela distensão máxima da mesma. Nesse contexto, o fato de  $x$  permanecer praticamente em repouso indica uma fase em que a oscilação pendular está praticamente ausente nesse eixo, enquanto a mola se estica.

Dessa forma, a interação entre os movimentos oscilatórios do pêndulo e da mola se manifesta claramente durante a ressonância autoparamétrica. A alternância entre o comportamento de pêndulo simples e o movimento elástico da mola reflete a complexidade dessa ressonância, evidenciando a habilidade do sistema em transitar entre diferentes regimes oscilatórios de forma coerente e interconectada.

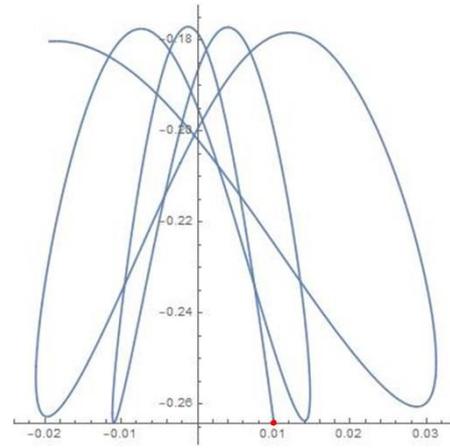
- e) Para  $\mu = 4.5$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.264195$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 77 - Trajetória para  $\mu = 4,5$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 78 - Trajetória para  $\mu = 4,5$  e  $R = -0,9$  em 2 s

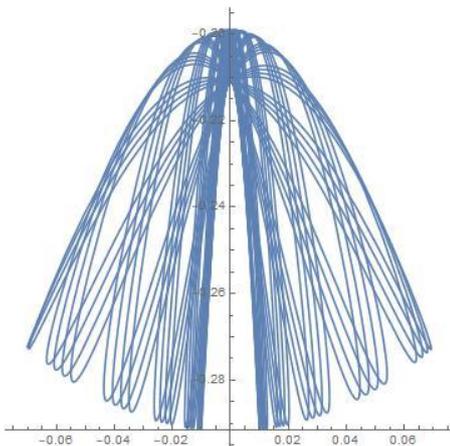


Fonte: Autor

Neste ponto específico da análise, nota-se que o movimento teve início nos pontos  $x = 0.01$  e  $y = -0.264195$  metros. É possível observar que, nessa condição, o movimento se restringiu a um valor máximo de 9 centímetros tanto no eixo  $x$  quanto no eixo  $y$ . Como agora estamos em uma condição em que o valor de  $\mu$  é ligeiramente maior do que o valor ideal para observarmos o fenômeno da ressonância auto-paramétrica, pode não ficar tão claro ou evidente a presença desse fenômeno.

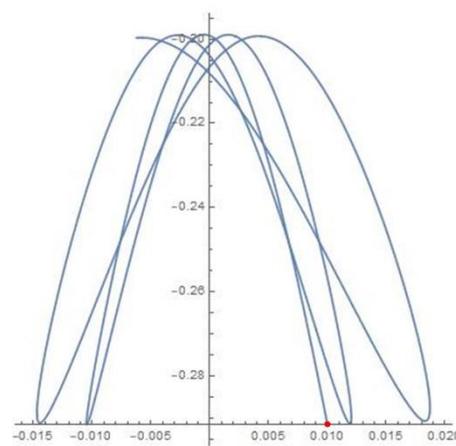
- f) Para  $\mu = 5$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.29143$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 79 - Trajetória  $\mu = 5$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 80 - Trajetória  $\mu = 5$  e  $R = -0,9$  em 2 s

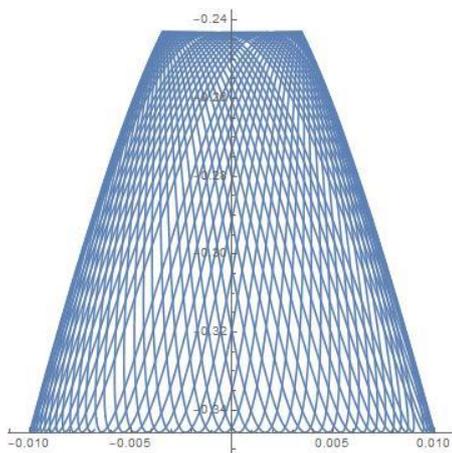


Fonte: Autor

Observa-se que o movimento do pêndulo elástico teve início no ponto  $x = 0.01$  e  $y = -0.23456$  metros. Nota-se que o movimento se restringiu a uma amplitude de 3 centímetros no eixo  $x$  e 6 centímetros no eixo  $y$ . Nesse contexto, torna-se evidente o notável tamanho da concavidade na trajetória, atingindo seu ponto máximo.

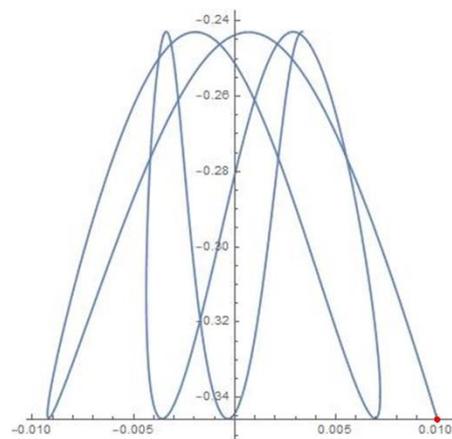
- g) Para  $\mu = 6$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.345461$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 81 - Trajetória para  $\mu = 6$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 82 - Trajetória para  $\mu = 6$  e  $R = -0,9$  em 2 s

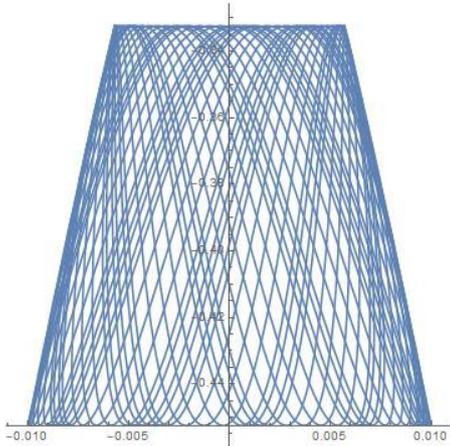


Fonte: Autor

Neste ponto da análise, constatamos que o movimento se iniciou nos pontos  $x = 0.01$  e  $y = -0.345461$  metros. É notável que, nesse caso, o movimento se restringiu a um valor próximo de 1 centímetros no eixo  $x$  e ligeiramente superior a 3 centímetros no eixo  $y$ . Aqui já não percebemos mais a concavidade na parte inferior da trajetória, resultando em um movimento oscilatório que preenche todo o espaço que é possível para o seu regime de oscilação.

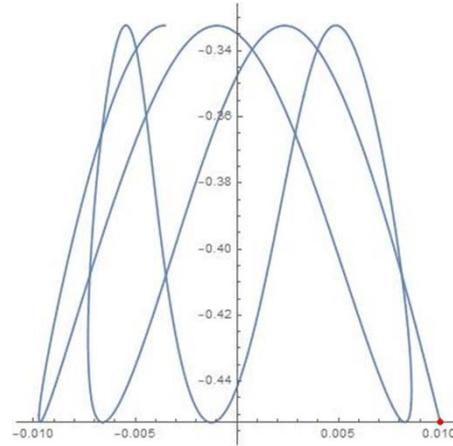
- h) Para  $\mu = 8$ ,  $R = -0.9$ ,  $x = 0.01$ , obtemos  $y = -0.452273$  e resultou na seguinte trajetória:

Figura 83 - Trajetória para  $\mu = 8$  e  $R = -0,9$



Fonte: Autor

Figura 84 - Trajetória para  $\mu = 8$  e  $R = -0,9$  em 2 s



Fonte: Autor

Neste ponto da análise, constatamos que o movimento se iniciou nos pontos  $x = 0.01$  e  $y = -0.452273$  metros. É notável que, nesse caso, o movimento se restringiu a um valor próximo de 1 centímetro no eixo  $x$  e ligeiramente superior a 4 centímetros no eixo  $y$ . Como no caso anterior, também não é possível ver mais a concavidade na parte inferior da trajetória.

Uma observação crucial nos dois últimos casos reside na ausência da ressonância autoparamétrica. Em vez disso, observa-se predominantemente um movimento característico de um sistema massa-mola no eixo  $y$ , deslocando-se ao longo do eixo  $x$ . Essa dinâmica resulta na trajetória apresentada na figura à esquerda da página.

A transição para um comportamento mais proeminente de sistema massa-mola sugere que, nessas condições específicas, as forças elásticas exercem uma influência preponderante sobre o movimento, limitando a expressividade do fenômeno da ressonância autoparamétrica.

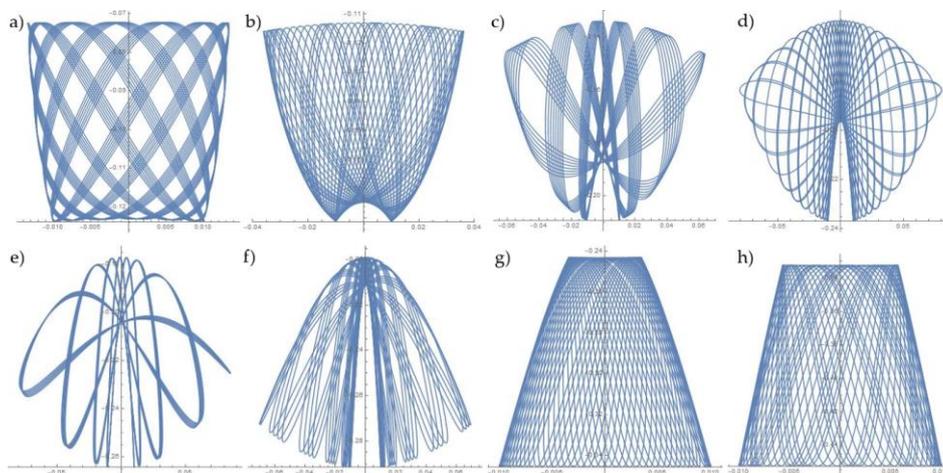
Essa mudança no padrão de movimento ressalta a sensibilidade do sistema às condições iniciais e aos parâmetros, evidenciando a capacidade do

pêndulo elástico de manifestar uma variedade de comportamentos oscilatórios, dependendo das condições impostas. Essa observação é de relevância significativa para uma compreensão mais abrangente da dinâmica de sistema não lineares.

Por meio da sequência de imagens apresentadas, provenientes de simulações computacionais realizadas através do *software Mathematica*, observou-se de maneira notável a transição entre distintos regimes de oscilação para o pêndulo elástico. Mesmo mantendo-se sob condições iniciais invariáveis, tais como energia e posição inicial no eixo  $x$  ao longo de múltiplas simulações, destaca-se uma marcante alteração no comportamento do pêndulo elástico quando analisado em função de diferentes valores de  $\mu$ . Este estudo evidencia de forma clara o fenômeno da ressonância autoparamétrica, ressaltando a notável mudança na dinâmica do sistema para diferentes parâmetros.

No intuito de proporcionar uma visualização abrangente das diversas trajetórias de movimento sob diferentes condições iniciais, apresentamos na figura abaixo todas as variações identificadas de (a) a (h), correspondendo cada letra à sua respectiva condição inicial indicada acima, mantendo a mesma ordem de identificação.

Figura 85 - Compilação de todas as trajetórias analisadas



Fonte: Autor

Essa disposição foi estrategicamente concebida para permitir que o leitor visualize de forma simultânea todas as trajetórias, simplificando a observação do fenômeno da ressonância auto paramétrica. Essa estruturação evita a necessidade de retroceder páginas, oferecendo uma análise comparativa direta e facilitando a compreensão dos diferentes padrões de movimento.

### 4.3 – Movimento com Dissipação de Energia

Um movimento com dissipação de energia, no geral, é aquele em que parte da energia do sistema se converte em outras formas de energia, como calor, som ou deformação. Em sistemas físicos reais, a dissipação de energia ocorre devido a várias formas de atrito, resistência do ar, deformações plásticas, entre outros fatores.

Existem diversas causas para a dissipação de energia, dependendo do contexto físico do sistema. Aqui estão alguns exemplos:

- **Atrito:** É uma das causas mais comuns de dissipação de energia. Quando dois corpos estão em contato e se movem um em relação ao outro, o atrito entre suas superfícies converte parte da energia cinética do movimento em calor.
- **Resistência do ar:** Em objetos que se deslocam no ar, como veículos, a resistência do ar atua como uma força oposta ao movimento. Isso faz com que parte da energia cinética do objeto seja dissipada na forma de calor e som, diminuindo a velocidade do objeto.
- **Deformação:** Em sistemas mecânicos, como molas ou estruturas, quando há deformação dos materiais devido a forças aplicadas, parte da energia mecânica é convertida em calor devido a esse processo de deformação do material.

A dissipação de energia não é necessariamente prejudicial em todos os contextos. Às vezes, pode ser útil, como no caso de freios de um veículo, onde a dissipação de energia cinética é usada para desacelerar ou parar o veículo de maneira controlada e segura. No entanto, em muitos casos, a dissipação de energia pode ser indesejada, pois reduz a eficiência do sistema, desperdiçando energia que poderia ser utilizada para realizar trabalho útil. Geralmente a dissipação de energia se divide em três categorias:

**Amortecimento Supercrítico** – Ocorre quando o sistema é amortecido de tal maneira que a taxa de amortecimento é maior do que a taxa crítica para a oscilação; nesse cenário, o sistema retorna rapidamente ao equilíbrio sem ultrapassar a posição de equilíbrio inicial após ser perturbado.

**Amortecimento Crítico** – Ocorre quando a taxa de amortecimento é exatamente igual à taxa crítica. Nesse caso, o sistema retorna ao equilíbrio da forma mais rápida possível sem oscilações excessivas.

**Amortecimento Subcrítico** – Acontece quando a taxa de amortecimento é menor do que a taxa crítica. Nesse contexto, o sistema exibe oscilações amortecidas, e pode levar mais tempo para retornar ao equilíbrio após uma perturbação, comparado aos casos de amortecimento crítico ou supercrítico.

## **Metodologia Computacional**

A fim de analisar os efeitos da dissipação no sistema, optamos por considerar o fator  $\gamma$  como isotrópico, indicando que possui a mesma magnitude em todas as direções do espaço, o fator  $\gamma$  foi escolhido arbitrariamente como sendo  $\gamma^2 = 0,5$ . Com base nesse pressuposto, delinearemos três cenários distintos de amortecimento para o sistema em questão, a investigar: subcrítico, crítico e supercrítico.

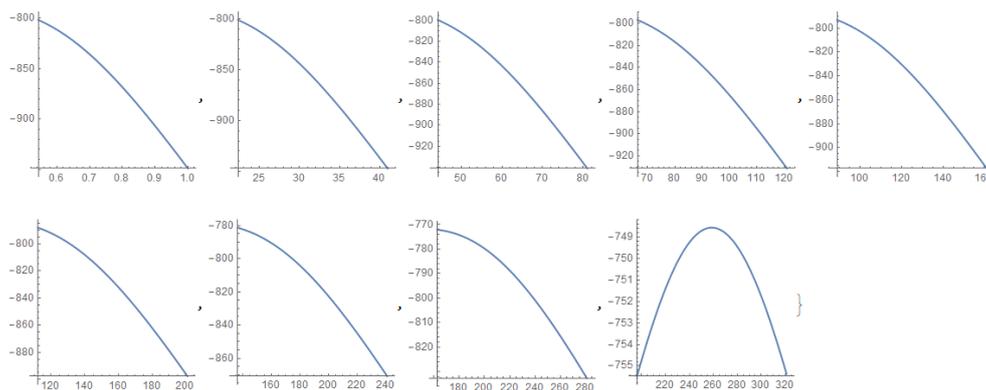
É relevante destacar que determinados parâmetros foram mantidos constantes entre as implementações, a exemplo da massa ( $m = 0,05 \text{ kg}$ ) e da aceleração gravitacional ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ), desde o código inicial. Dada a nossa intenção de investigar o impacto da dissipação na ressonância auto-paramétrica, ou seja, mantivemos o sistema em condições de baixa energia ( $R = -0,9$  e  $\mu = 4$ ), a única variável ajustada foi a constante elástica, permitindo-nos abranger os mencionados cenários de amortecimento. (a) Supercrítico. (b) Crítico. (c) Subcrítico

### 1º - Amortecimento Supercrítico ( $\omega_0^2 < \gamma^2$ )

Para garantir que o sistema apresentasse amortecimento supercrítico, é preciso assegurar que  $\omega_0^2 < \gamma^2$ . Numericamente, obtemos  $\omega = 0,223607$  e  $\gamma = 0,707107$ , corroborando a confirmação de que, de fato, o sistema entraria em amortecimento supercrítico. Para alcançar esses valores, a variável  $k$ , representando a constante elástica da mola, foi ajustada para  $0,0025 \text{ N/m}^2$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas as trajetórias obtidas para diversas condições iniciais que atendem às especificações previamente estabelecidas. Para a posição inicial em  $x$ , utilizamos  $\{1, 41, 81, 121, 161, 201, 241, 281, 321\}$ . Já para a posição inicial em  $y$ , adotamos  $\{-948,952, -947,002, -941,262, -931,49, -917,213, -897,561, -870,816, -832,702, -755,376\}$ .

Figura 86 - Trajetórias para o amortecimento supercrítico

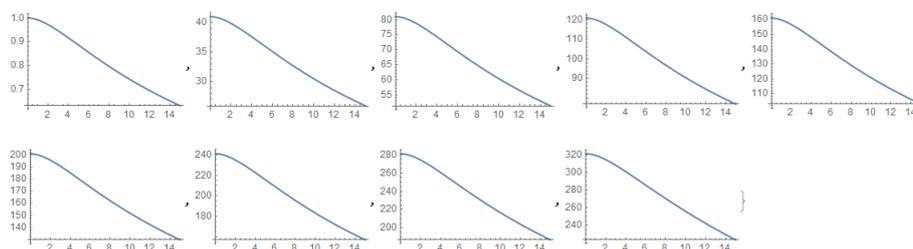


Fonte: Autor

Com base nas representações gráficas das trajetórias obtidas para cada par ordenado de  $x$  e  $y$ , é evidente a ausência de movimento oscilatório. Observa-se claramente que o movimento cessa rapidamente, conforme esperado para o caso de amortecimento supercrítico. As figuras abaixo fornecem uma visualização mais detalhada do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  individualmente.

Para o eixo  $x$ , temos:

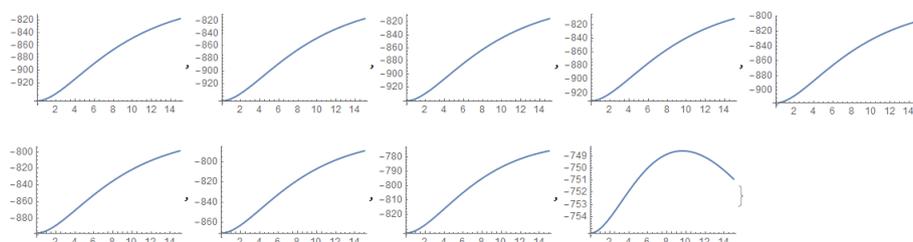
Figura 87 – Evolução temporal da coordenada  $x$  em regime de amortecimento supercrítico



Fonte: Autor

Para o eixo  $y$ , temos:

Figura 88 – Evolução temporal da coordenada  $y$  em regime de amortecimento supercrítico



Fonte: Autor

Ao analisar as figuras que retratam a evolução do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  individualmente, é evidente a ausência de movimento oscilatório. Em vez disso, observa-se um amortecimento significativo no movimento, indicando uma rápida dissipação de energia ao longo do tempo.

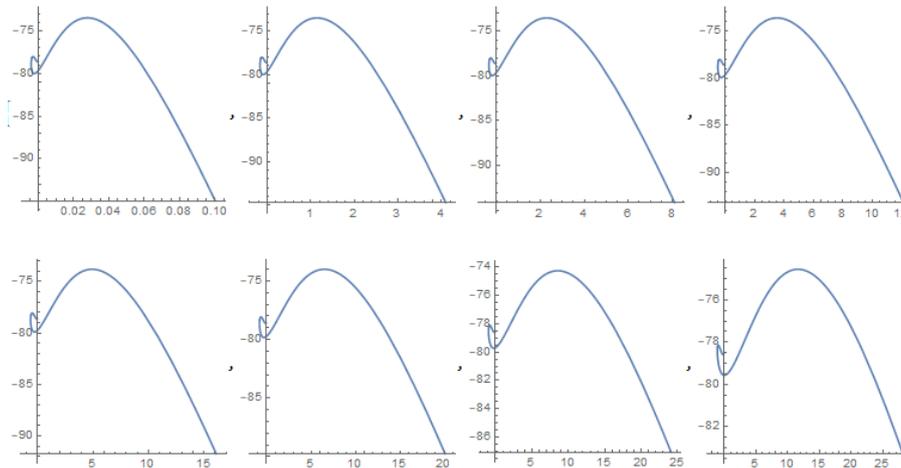
## 2º - Amortecimento Crítico ( $\omega_0^2 = \gamma^2$ )

Para garantir que o sistema apresentasse amortecimento supercrítico, é preciso assegurar que  $\omega_0^2 = \gamma^2$ . Numericamente, obtemos  $\omega = 0,7070107$  e  $\gamma = 0,707107$ , corroborando a confirmação de que, de fato, o sistema entraria em amortecimento crítico. Para alcançar esses valores, a variável  $k$ , representando a constante elástica da mola, foi ajustada para  $0,025 \text{ N/m}^2$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas as trajetórias obtidas para diversas condições iniciais que atendem às especificações previamente estabelecidas. Para

a posição inicial em  $x$ , utilizamos  $\{0,1, 4,1, 8,1, 12,1, 16,1, 20,1, 24,1, 28,1\}$ . Já para a posição inicial em  $y$ , adotamos  $\{-94,8952, -94,7002, -94,1262, -93,149, -91,7213, -89,7561, -87,0816, -83,2702\}$ .

Figura 89 - Trajetórias para o amortecimento crítico

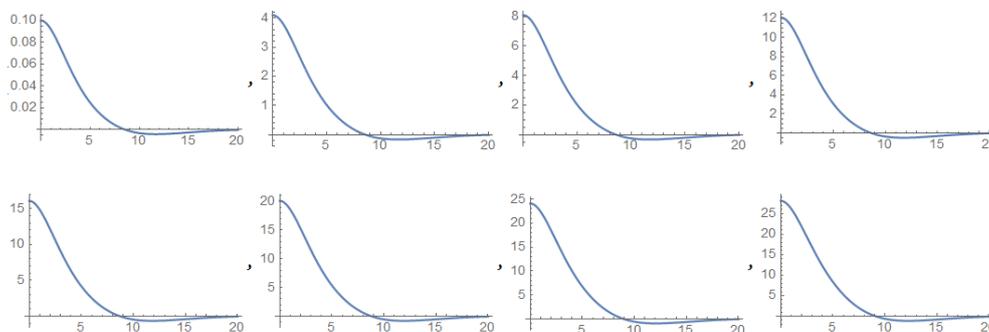


Fonte: Autor

Com base nas representações gráficas das trajetórias obtidas para cada par ordenado de  $x$  e  $y$ , observa-se agora uma tendência do movimento em buscar uma natureza periódica, no entanto, ele continua enfrentando uma considerável resistência, o que é característico do amortecimento crítico. As figuras abaixo fornecem uma visualização mais detalhada do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  individualmente.

Para o eixo  $x$ , temos:

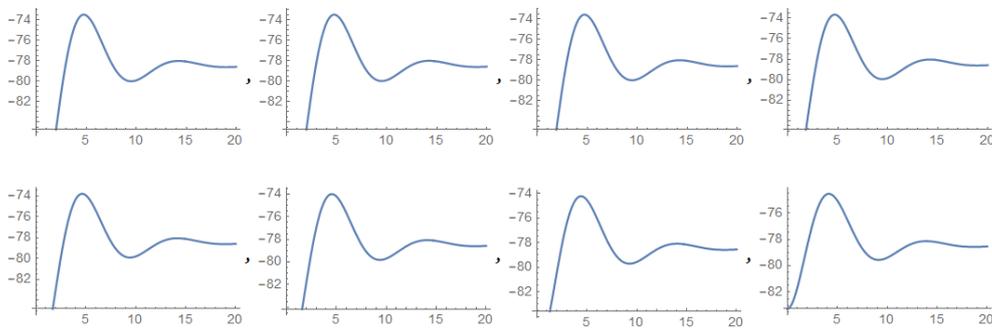
Figura 90 – Evolução temporal da coordenada  $x$  em regime de amortecimento crítico



Fonte: Autor

Para o eixo  $y$ , temos:

Figura 91 – Evolução temporal da coordenada  $y$  em regime de amortecimento crítico



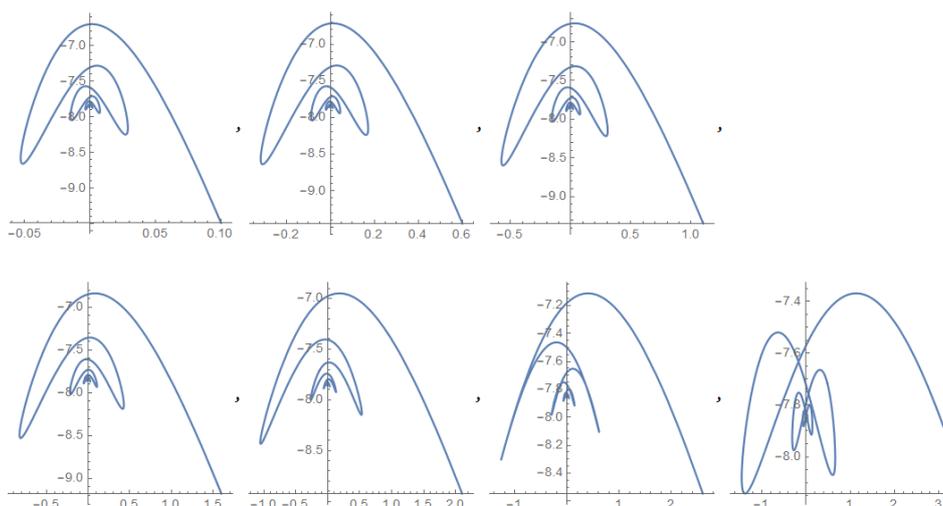
Fonte: Autor

### 3º Simulação – Amortecimento Subcrítico ( $\omega_0^2 > \gamma^2$ )

Para garantir que o sistema apresentasse amortecimento subcrítico, é preciso assegurar que  $\omega_0^2 > \gamma^2$ . Numericamente, obtemos  $\omega = 2,23607$  e  $\gamma = 0,707107$ , corroborando a confirmação de que, de fato, o sistema entraria em amortecimento subcrítico. Para alcançar esses valores, a variável  $k$ , representando a constante elástica da mola, foi ajustada para  $0,25 \text{ N/m}^2$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas as trajetórias obtidas para diversas condições iniciais que atendem às especificações previamente estabelecidas. Para a posição inicial em  $x$ , utilizamos  $\{0,1, 0,6, 1,1, 1,6, 2,1, 2,6, 3,1\}$ . Já para a posição inicial em  $y$ , adotamos  $\{-9.48837, -9.44758, -9.34601, -9.1763, -8.92252, -8.54615, -7.88418\}$ .

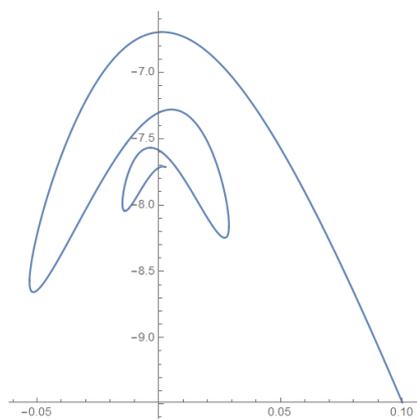
Figura 92 - Trajetórias para o amortecimento subcrítico



Fonte: Autor

Trajétória do primeiro par ordenado  $x$  e  $y$   $\{0,1, -9,48837\}$ .

Figura 93 - Trajetória do primeiro regime de oscilação para o regime de amortecimento subcrítico

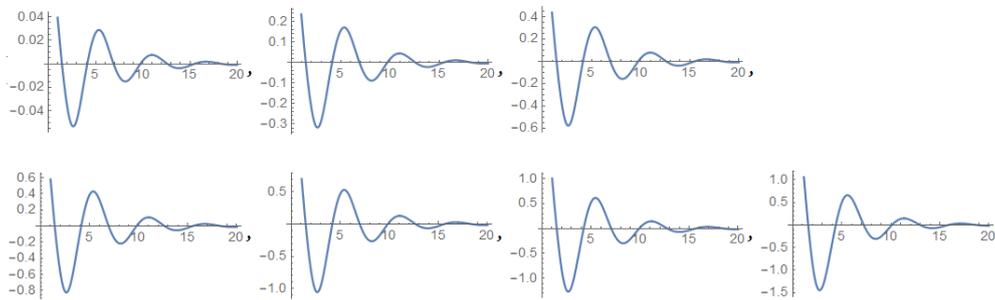


Fonte: Autor

Neste ponto, já é possível identificar algum tipo de movimento oscilatório. A trajetória mostra claramente que a partícula oscila entre os eixos até alcançar sua posição de equilíbrio. Como se trata de um movimento de subamortecimento, era de se esperar que a partícula oscilasse antes de eventualmente parar completamente. As figuras abaixo fornecem uma visualização mais detalhada do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  individualmente.

Para o eixo  $x$ , temos:

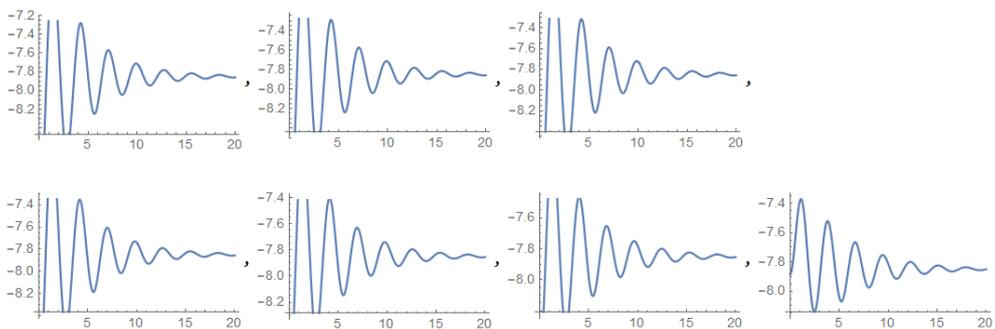
Figura 94 - Evolução temporal da coordenada  $x$  em regime de amortecimento subcrítico



Fonte: Autor

Para o eixo  $y$ , temos:

Figura 95 - Evolução temporal da coordenada  $y$  em regime de amortecimento subcrítico



Fonte: Autor

Para maiores detalhes do movimento, mostramos a evolução do eixo  $x$  e  $y$  simultaneamente do quarto par ordenado de posições iniciais  $x$  e  $y$ .

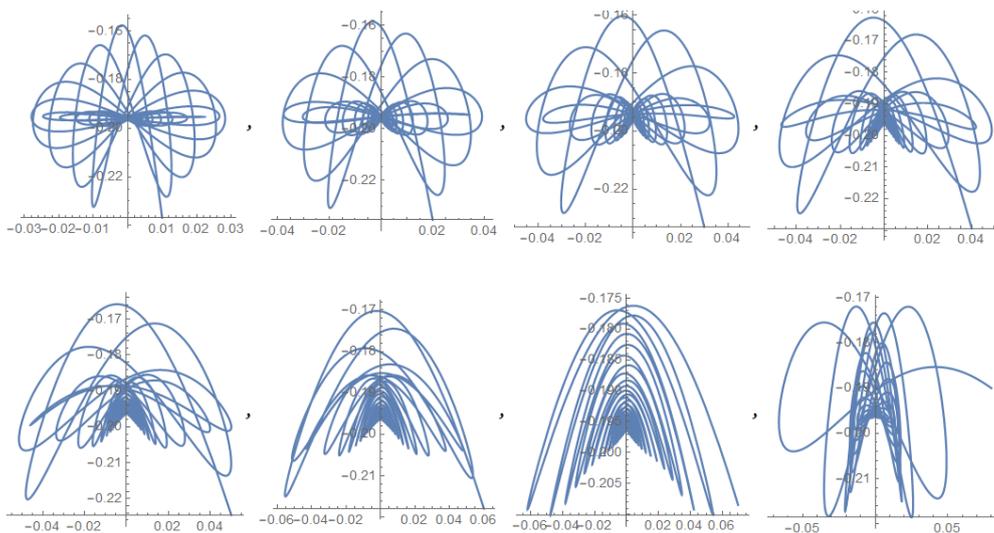
#### 4º Simulação – Amortecimento Subcrítico ( $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ )

Considerando o caso anterior, não foi possível nem ver os indícios do efeito da ressonância auto-paramétrica, logo, ao considerar um cenário em que ( $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ ), pode tornar possível a visualização de tal fenômeno. Ao fazer essa consideração, temos que amortecimento subcrítico é caracterizado por uma taxa de amortecimento relativamente pequena em comparação com a frequência natural do sistema. Isso implica que o sistema tem a capacidade de oscilar por períodos prolongados antes de atingir uma posição de equilíbrio final.

Para garantir que o sistema apresentasse amortecimento subcrítico nessas condições, é preciso assegurar que  $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ . Numericamente, obtemos  $\omega = 14,1421$  e  $\gamma = 0,707107$ , corroborando a confirmação de que, de fato, o sistema entraria em amortecimento crítico. Para alcançar esses valores, a variável  $k$ , representando a constante elástica da mola, foi ajustada para  $10 \text{ N/m}^2$ .

Nas figuras a seguir, são apresentadas as trajetórias obtidas para diversas condições iniciais que atendem às especificações previamente estabelecidas. Para a posição inicial em  $x$ , utilizamos  $\{0,01, 0,02, 0,03, 0,04, 0,05, 0,06, 0,07, 0,08\}$ . Já para a posição inicial em  $y$ , adotamos  $\{-0,236774, -0,235363, -0,232947, -0,229408, -0,224532, -0,217899, -0,208468, -0,190018\}$ .

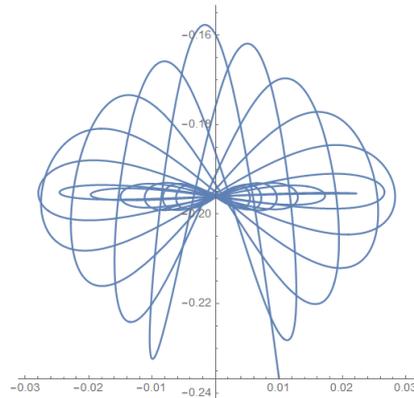
Figura 96 - Trajetórias para o regime de amortecimento subcrítico com  $\omega_0^2 \gg \gamma^2$



Fonte: Autor

Para facilitar a visualização do efeito do amortecimento e da ressonância auto-paramétrica, temos a trajetória do primeiro par ordenado  $x$  e  $y$   $\{0,01, -0,236774\}$ , em detalhes.

Figura 97 - Trajetória do primeiro regime de oscilação para o regime de amortecimento subcrítico com  $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$

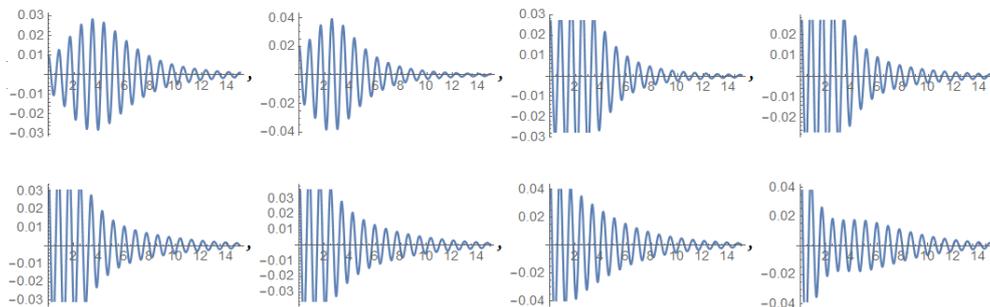


Fonte: Autor

Ao considerar o novo valor para  $k$ , foi possível observar claramente o efeito do fator de amortecimento atuando no sistema. Mesmo com a presença desse amortecimento, ainda conseguimos perceber a influência marcante da ressonância auto-paramétrica. Este fenômeno é evidenciado pela resposta do sistema, que, mesmo sob a ação do amortecimento, exibe comportamentos que indicam a atuação significativa da ressonância auto-paramétrica. As figuras abaixo fornecem uma visualização mais detalhada do movimento nos eixos  $x$  e  $y$  individualmente.

Para o eixo  $x$ , temos:

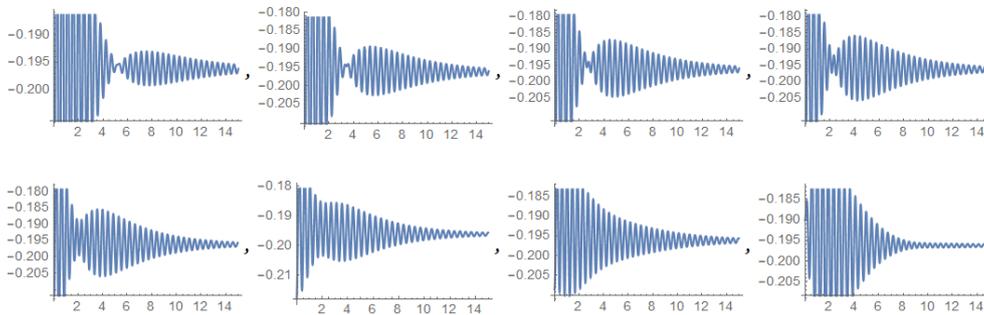
Figura 98 - Evolução do eixo  $x$  em regime de amortecimento subcrítico com  $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$



Fonte: Autor

Para o eixo  $y$ , temos:

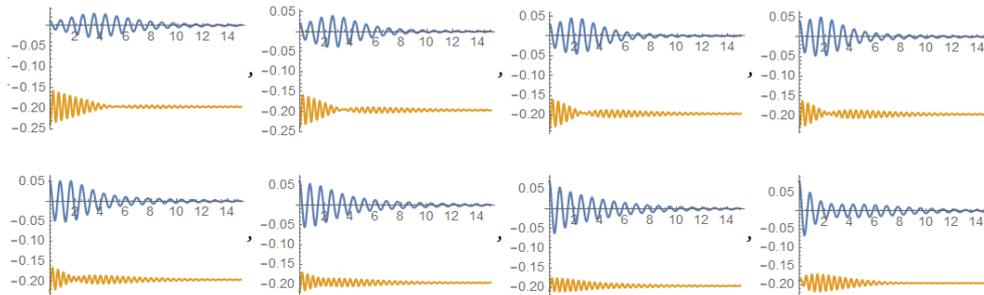
Figura 99 - Evolução do eixo  $y$  em regime de amortecimento subcrítico com  $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$



Fonte: Autor

Para o eixo  $x$  e  $y$  simultaneamente, temos:

Figura 100 - Evolução do eixo  $x$  e  $y$  simultaneamente em regime de amortecimento subcrítico com  $\omega_0^2 \gg \gamma_0^2$



Fonte: Autor

Em suma, ao analisar a evolução temporal dos eixos  $x$  e  $y$ , tanto de forma individual como quando apresentados simultaneamente, torna-se evidente o impacto significativo do fator de amortecimento no sistema. Mesmo sob a influência do amortecimento, é possível discernir claramente a presença persistente da ressonância auto-paramétrica, ressaltando a complexidade intrínseca do comportamento dinâmico.

Essa observação tem implicações substanciais, uma vez que demonstra que, em situações práticas, onde amortecimento pode ser uma realidade, a ressonância auto-paramétrica ainda desempenha um papel discernível. Essa discussão serve como base para o próximo capítulo, onde abordaremos mais profundamente as implicações desse cenário para aplicações do mundo real.

#### 4.4 – Análise Experimental da Ressonância Auto-paramétrica

Para validar o modelo teórico proposto neste trabalho, conduzimos o experimento em um dos laboratórios didáticos do departamento de Física, a fim de comparar os dados obtidos experimentalmente com a teoria desenvolvida até o momento. Ao realizar o experimento do pêndulo elástico no laboratório, buscamos otimizar a obtenção de dados e aumentar sua precisão, para isso, gravamos o experimento e, por meio do *software Tracker*, coletamos informações de posição, tempo e velocidade, por exemplo.

Esses dados foram cruciais para determinar as condições iniciais, calcular o período de oscilação e o fator de amortecimento do movimento, para que por fim, de posse dos dados experimentais, pudéssemos simular o movimento de maneira computacional e verificar se as respostas seriam as mesmas.

A utilização desses recursos experimentais e computacionais proporcionou uma base sólida para validar o modelo teórico, possibilitando uma análise comparativa entre os dados experimentais observados e os resultados obtidos por meio da simulação. Esse procedimento foi essencial para verificar a coerência do modelo proposto com a realidade observada no experimento, contribuindo significativamente para a validação e a confiabilidade dos resultados teóricos desenvolvidos no presente trabalho.

A análise experimental foi dividida em dois momentos distintos. Inicialmente, montamos o aparato experimental e ajustamos a posição da câmera. Nessa primeira etapa, configuramos o pêndulo elástico para oscilar verticalmente, como um simples oscilador massa-mola. Dessa forma, determinamos o período de oscilação do sistema, o que nos possibilitou calcular a constante elástica da mola. Ao mesmo tempo, usando o mesmo vídeo, calculamos o fator de amortecimento do sistema com base na diminuição da amplitude do movimento ao longo do tempo.

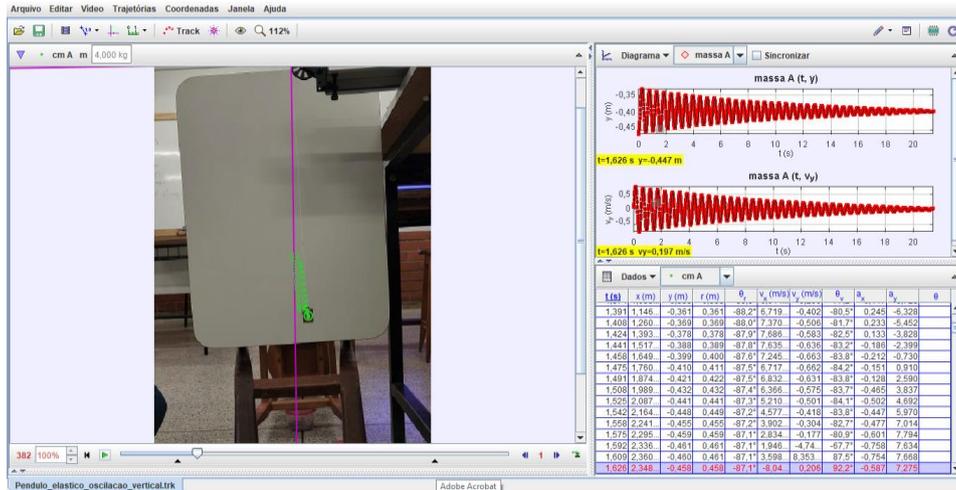
A segunda etapa tinha como objetivo explorar a ressonância auto-paramétrica, que é o objetivo deste capítulo, mas antes disso, houve a necessidade passar pela etapa 1 onde determinamos algumas características do sistema que são fundamentais para a etapa 2. Para verificar a ressonância auto-paramétrica, buscamos encontrar um valor  $l_{max}$  que atendesse à relação entre as frequências de oscilação da mola e do pêndulo, representado pelo parâmetro  $\mu$ . Finalmente, utilizando os dados do *software Tracker*, realizamos uma simulação no *software Mathematica*. A comparação entre a resposta experimental e a resposta computacional nos permitiu avaliar a consistência do modelo teórico apresentado neste trabalho.

## 1º Etapa

Inicialmente, tínhamos conhecimento de algumas variáveis do sistema, como, a massa experimental  $m_{exp} = 0.06975 \text{ kg}$ , o comprimento máximo do pêndulo em repouso com a massa suspensa  $l_{max_{exp}} = 0,263$ , obtida pelo *software tracker* momentos antes de colocar o sistema para oscilar verticalmente, o comprimento do pêndulo em repouso  $l_{0_{exp}} = 0,196048$ , posição inicial em  $x$  denominado  $x_{0_{exp}} = -2,357581 \times 10^{-2}$ , posição inicial em  $y$  denominado  $y_{0_{exp}} = -3,228911 \times 10^{-1}$ .

Ao analisar o vídeo gravado focado exclusivamente na oscilação vertical, determinamos as características específicas da mola utilizada no experimento. A análise desse vídeo permitiu a determinação do período de oscilação, possibilitando o cálculo do coeficiente de elasticidade da mola.

Figura 101 – Análise do movimento na vertical através do software Tracker



Fonte: Autor

Os dados apresentados a seguir correspondem exclusivamente aos valores de amplitude máxima do movimento, não abrangendo todos os pontos ao longo da trajetória, mas sim focando nos pontos máximos e no segmento positivo do deslocamento. Essa seleção se justifica pelo interesse específico na análise desses pontos, visto que são determinantes para a dedução do período do movimento.

A consideração dos pontos máximos viabiliza a determinação do intervalo de tempo entre esses pontos sucessivos, essencial para a avaliação e cálculo do período do movimento. Essa identificação do período, por sua vez, é crucial para a inferência da constante de elasticidade da mola, uma vez que a relação entre o período e a constante elástica é fundamental na descrição teórica desse tipo de sistema oscilatório. A tabela abaixo contém os dados obtidos pelo *software tracker*.

Tabela 1 - Dados obtidos experimentalmente pelo software tracker

<b>Tempo (s)</b>	<b>Eixo y (cm)</b>	2,664	0,455	5,798	0,441
0	0,472	3,167	0,451	6,301	0,441
0,553	0,466	3,703	0,45	6,837	0,438
1,089	0,46	4,223	0,448	7,357	0,436
1,592	0,461	4,742	0,445	7,876	0,436
2,128	0,456	5,279	0,444	8,396	0,433

8,932	0,433	13,607	0,421	18,233	0,413
9,435	0,43	14,127	0,42	18,769	0,413
9,971	0,43	14,646	0,419	19,255	0,412
10,49	0,428	15,166	0,419	19,774	0,411
11,01	0,427	15,685	0,417	20,277	0,41
11,529	0,426	16,188	0,416	20,78	0,409
12,032	0,424	16,708	0,416	21,299	0,409
12,568	0,424	17,227	0,414		
13,071	0,423	17,763	0,414		

Fonte: Autor

Ao analisarmos o vídeo, torna-se evidente que a massa está executando uma oscilação vertical a uma distância considerável da origem do sistema, influenciada pelo comprimento do fio. Para viabilizar uma análise mais precisa e facilitar a interpretação dos dados de movimento, optamos por desconsiderar o comprimento excessivo do fio, focalizando a oscilação da massa em uma amplitude que permitisse que o movimento se encerrasse próximo ao ponto zero. Para isso, subtraímos o valor de 0,063 de todos os valores de  $y$  e agora temos um movimento que quando cessa sua oscilação e fica em repouso, ele esse encontra na posição zero.

Tabela 2 - Tratamento dos dados

<b>Tempo</b>	<b>Eixo y Ajustado</b>	4,223	0,039	8,932	0,024
0	0,063	4,742	0,036	9,435	0,021
0,553	0,057	5,279	0,035	9,971	0,021
1,089	0,051	5,798	0,032	10,49	0,019
1,592	0,052	6,301	0,032	11,01	0,018
2,128	0,047	6,837	0,029	11,529	0,017
2,664	0,046	7,357	0,027	12,032	0,015
3,167	0,042	7,876	0,027	12,568	0,015
3,703	0,041	8,396	0,024	13,071	0,014

13,607	0,012	16,708	0,007	19,774	0,002
14,127	0,011	17,227	0,005	20,277	0,001
14,646	0,01	17,763	0,005	20,78	0
15,166	0,01	18,233	0,004	21,299	0
15,685	0,008	18,769	0,004		
16,188	0,007	19,255	0,003		

Fonte: Autor

De posse dos dados, calculamos o período médio das oscilações, na qual apresentou o valor de 0.519 s; logo, podemos determinar o valor da constante elástica da mola, através da seguinte equação:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \frac{4 \pi^2 m}{T^2} \quad (3.4.1)$$

Substituindo com os dados fornecidos e calculados, temos:

$$k = \frac{4 \pi^2 0,06975}{0,519^2} = 10,22 \text{ N/m} \quad (3.4.2)$$

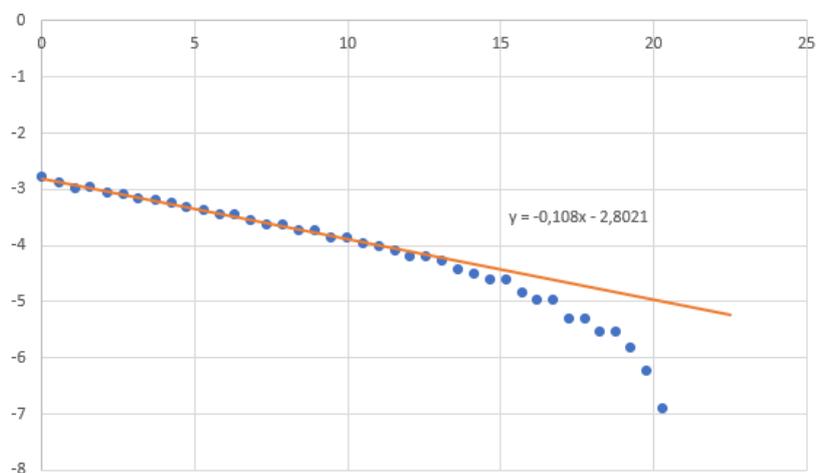
Concluimos então que o valor para a constante elástica utilizada no vídeo apresenta um valor  $k_{exp} = 10,22 \text{ N/m}$ .

Para determinar o fator de amortecimento do sistema, analisamos os pontos de amplitude máxima do movimento oscilatório e através da análise do decaimento desses valores ao longo do tempo, foi possível calcular o fator de amortecimento para o sistema, esse procedimento viabilizou a obtenção do fator experimental de amortecimento, representado por  $\gamma_{exp}$ .

Para determinar o fator de amortecimento do sistema, deveríamos gerar um gráfico da evolução do movimento, porém, inicialmente, construímos um gráfico usando o logaritmo natural (ln) do eixo y. Essa abordagem foi adotada para transformar uma curva, que teoricamente se comporta de maneira exponencial, em uma linha reta. A premissa aqui é que, se todos os pontos se alinharem em uma reta, poderíamos determinar com confiança o valor de  $\gamma$ ,

uma vez que este representaria o coeficiente angular dessa reta, na figura 102 podemos ver esse gráfico.

Figura 102 - Ln da evolução da coordenada y do sistema massa-mola vertical em função do tempo



Fonte: Autor

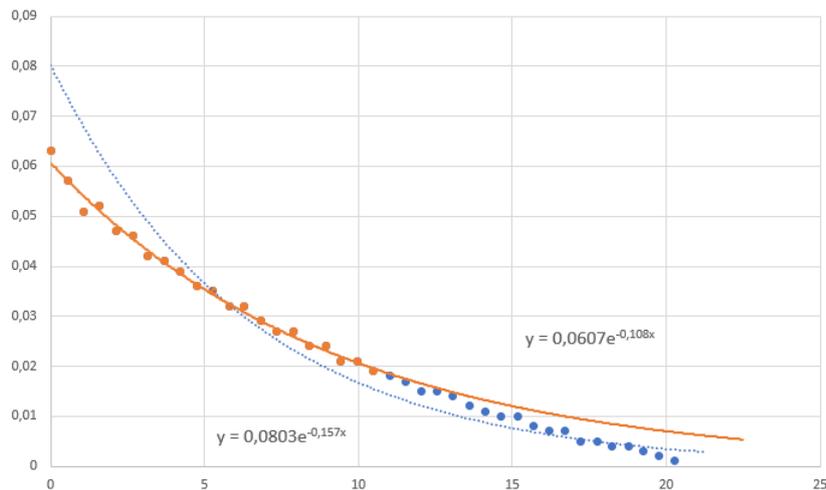
Ao analisar a Figura 102, é evidente que os pontos não formam uma linha reta, apresentando um desvio notável nos últimos pontos do gráfico. Isso indica que não seria apropriado utilizar todos os pontos para determinar o fator de amortecimento, uma vez que não seguem a curva característica de um decaimento exponencial, típico do fator de amortecimento do sistema. Observa-se que até o tempo de 15 segundos, os pontos formam uma linha reta, mas a partir desse ponto, eles decaem mais rapidamente do que o previsto, levando o movimento a cessar mais rápido do que o esperado.

O rápido declínio desses pontos pode ser atribuído a diversos fatores, possivelmente relacionados ao estágio avançado de dissipação ocorrido por volta dos 15 segundos. Nesse estágio, o sistema pode ter perdido significativa energia, impedindo-o de superar o atrito na polia, no fio ou na mola, resultando na interrupção abrupta do movimento. No entanto, até os primeiros 15 segundos, obtemos uma aproximação satisfatória para o fator de dissipação do movimento.

Com base nesses dados, podemos agora construir um gráfico da evolução do movimento no eixo y e realizar um ajuste da função exponencial considerando

os pontos obtidos nos primeiros 15 segundos, onde o fator de dissipação mostrou-se coerente com o resultado esperado. Na figura abaixo, observamos os pontos diminuindo ao longo do tempo, característico do processo de amortecimento.

Figura 103 - Ajuste exponencial das curvas obtidas experimentalmente



Fonte: Autor

Na Figura 103, o eixo vertical do gráfico representa os pontos de máximo da componente y da trajetória do sistema massa-mola vertical em centímetros, enquanto o eixo horizontal do gráfico representa o tempo decorrido até a cessação completa do movimento devido à influência das forças dissipativas, medido em segundos.

A curva pontilhada em azul representa o ajuste exponencial para todos os pontos obtidos. No entanto, é evidente que o ajuste não é adequado, com vários pontos distantes da curva ajustada, corroborando com nossa análise anterior.

Por outro lado, a curva em laranja representa o ajuste exponencial para os pontos obtidos até aproximadamente 10 segundos. Neste caso, observa-se uma melhor concordância entre a curva de ajuste e os pontos experimentais. Dessa forma, podemos concluir que, a partir da equação que descreve essa curva, podemos extrair o fator de amortecimento para o sistema.

$$y = 0,0607 e^{-0,108 x} \quad (3.4.3)$$

Comparado com as equações teóricas para o movimento harmônico amortecido, cuja solução tem o termo  $(A e^{-\frac{\gamma}{2}t})$ ; olhando para a equação (3.4.3) vemos que o argumento  $-0,108$  corresponde ao  $\gamma/2$  do nosso modelo teórico; porém, para ter o valor de  $\gamma$  para o nosso modelo experimental, precisamos resolver a equação abaixo:

$$\gamma = -0,108 \cdot 2 \Rightarrow \gamma = -0,216 \quad (3.4.4)$$

Portanto, para atender o nosso modelo experimental, devemos realizar o cálculo da equação (3.4.4), logo, obtemos:  $\gamma = 0,216 \text{ s}^{-1}$ , que corresponde ao nosso fator de amortecimento.

## 2º Etapa

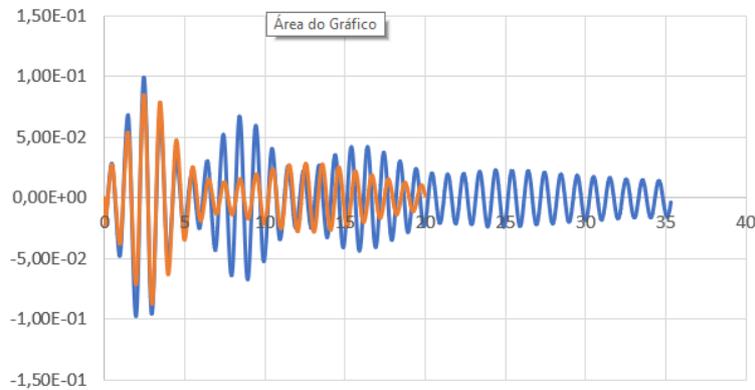
Munidos da constante elástica e do fator de amortecimento, estamos preparados para iniciar a análise da ressonância auto-paramétrica. Para tal propósito, identificamos um trecho do vídeo no *Tracker* no qual o pêndulo elástico estava em repouso, com a massa suspensa. Dessa maneira, conseguimos mensurar o comprimento máximo do pêndulo, denominado  $l_{max}$ . Com essa informação em mãos, calculamos o parâmetro  $\mu$ , uma vez que ele depende de  $l_{max}$ .

Como demonstrando anteriormente, buscamos assegurar que o valor de  $\mu$  experimental se aproximasse do valor numérico igual a quatro para observarmos o efeito da ressonância auto-paramétrica. Experimentalmente, obtivemos um valor de  $\mu = 3,8669$  quando o valor de  $l_{max}$  era igual a  $0,2589 \text{ m}$ . Considerando que esses valores atendem aos requisitos pretendidos, procedemos com as simulações das trajetórias do movimento.

Ao iniciar as simulações, observamos notáveis disparidades entre o modelo teórico e o modelo experimental ao levar em conta o fator dissipativo isotrópico. Essa divergência é evidenciada de maneira clara na figura abaixo,

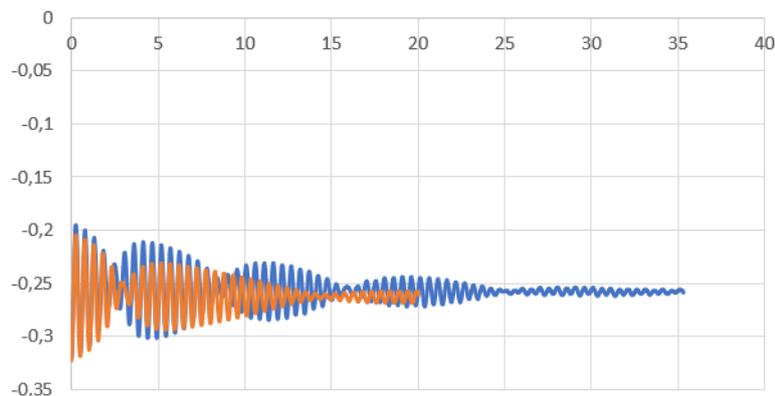
mostrando a evolução temporal do eixo x e y no modelo teórico (curva em laranja) e o modelo experimental (curva em azul).

Figura 104 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo x com dissipação isotrópica



Fonte: Autor

Figura 105 – Comparação da evolução temporal do movimento no eixo y com dissipação isotrópica



Fonte: Autor

A análise comparativa entre a curva em azul, representando os dados experimentais obtidos pelo *tracker*, e a curva em laranja, que reflete os resultados da simulação computacional, revelou uma considerável disparidade entre os dois modelos. Diante dessa observação, optamos por introduzir a consideração de fatores dissipativos anisotrópicos ao longo dos eixos  $r$  e  $\theta$ .

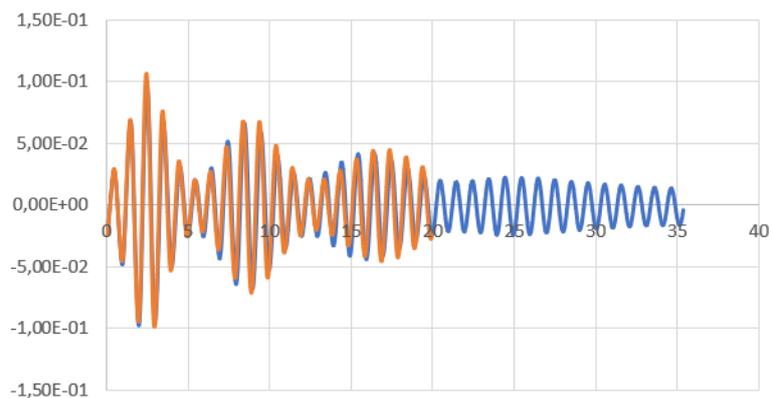
Partindo da ideia de que o movimento no eixo  $\theta$  apresenta baixa dissipação de energia devido ao contato com o ar, sendo experimentalmente confirmado como um valor reduzido para baixas velocidades, já em

contrapartida, no eixo  $r$ , observamos significativas perdas devido às características intrínsecas da mola, dissipando energia na forma de som e calor.

Diante desse cenário, assumimos que o fator dissipativo seria consideravelmente maior em  $r$  do que em  $\theta$ . Dessa forma, para as simulações, adotamos  $\gamma_r = 0,216$ , valor obtido na etapa 1, e  $\gamma_\theta = 0$ , uma vez que, em comparação com  $\gamma_r$ , seu efeito torna-se negligenciável. A dedução detalhada das equações para a anisotropia na dissipação encontra-se no apêndice C.

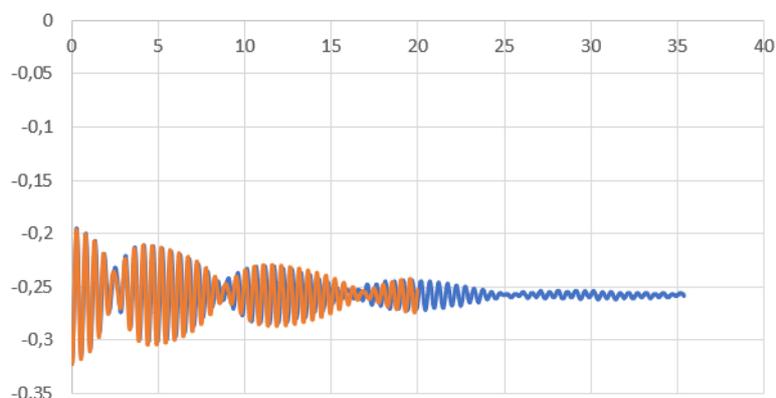
Ao fazer essas considerações, obtivemos novas trajetórias e novas evoluções para os eixos  $x$  e  $y$ , e fica claro nas imagens abaixo.

Figura 106 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo  $x$  com dissipação anisotrópica



Fonte: Autor

Figura 107 - Comparação da evolução temporal do movimento no eixo  $y$  com dissipação anisotrópica

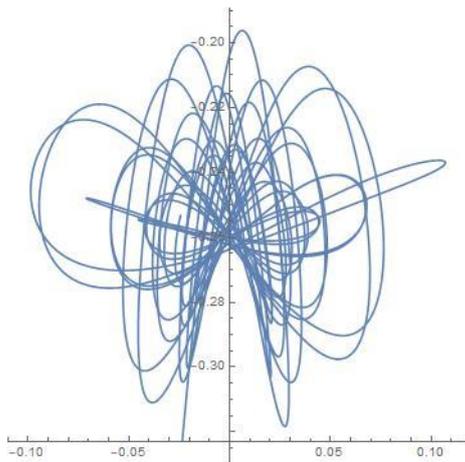


Fonte: Autor

Ao adotarmos as considerações de  $\gamma_\theta = 0$  e  $\gamma_r = 0,216$ , notamos uma notável melhoria no comportamento do sistema, resultando em uma significativa sobreposição entre as curvas em laranja e em azul. Essa concordância marcante entre os resultados simulados e os dados experimentais indica uma aproximação bastante precisa ao caso real. Conseqüentemente, podemos concluir que a escolha desses parâmetros dissipativos anisotrópicos foi altamente eficaz, proporcionando uma representação fiel e coerente do comportamento dinâmico do sistema em estudo.

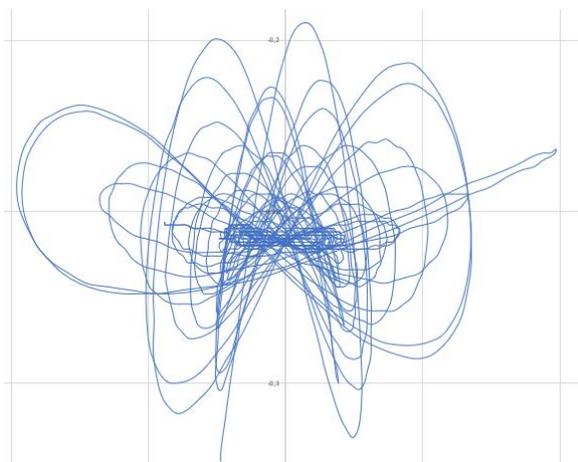
Já a trajetória obtida de forma computacional pode ser visualizada na figura 108, enquanto a trajetória obtida de experimental, conforme os pontos rastreados no *Tracker*, é apresentada na figura 109.

Figura 108 - Trajetória obtida computacionalmente



Fonte: Autor

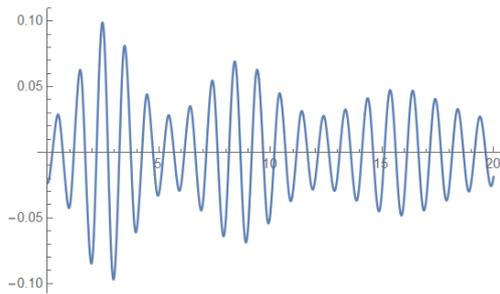
Figura 109 - Trajetória obtida experimentalmente



Fonte: Autor

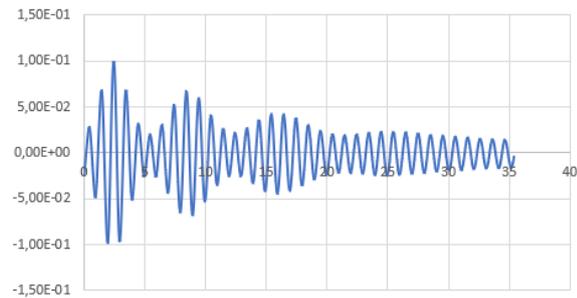
Ao analisar a evolução dos movimentos nos eixos  $x$  e  $y$ , torna-se evidente que o modelo teórico demonstrou eficácia em aplicações práticas em laboratório. Na Figura 110, observamos a progressão do movimento no eixo  $x$  ao longo do tempo no caso computacional. Já na Figura 111, é apresentada a evolução do movimento no eixo  $x$  ao longo do tempo para o caso experimental, considerando os pontos obtidos pelo *Tracker*, concluímos que a evolução temporal do movimento se dá de forma muito parecida nos dois casos.

Figura 110 - Evolução do eixo  $x$  computacional



Fonte: Autor

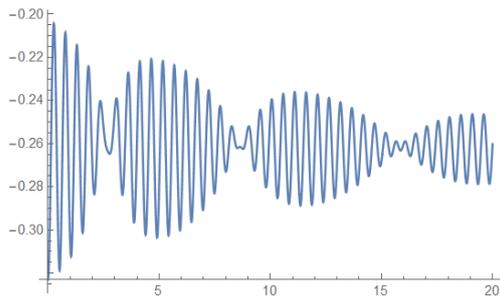
Figura 111 - Evolução do eixo  $x$  experimental



Fonte: Autor

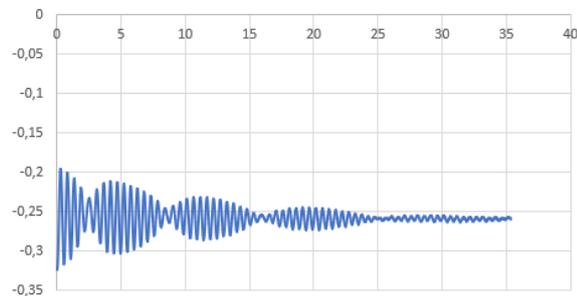
Já na figura 112, podemos ver a evolução temporal do movimento no eixo  $y$  obtida de forma computacional e na figura 113, temos a evolução temporal do movimento no eixo  $y$  obtida de forma experimental com os pontos obtidos pelo tracker. Novamente, destaca-se a notável semelhança entre os movimentos, mesmo quando consideramos dois cenários distintos.

Figura 112 - Evolução do eixo  $y$  computacional



Fonte: Autor

Figura 113 - Evolução do eixo  $y$  experimental



Fonte: Autor

A fim de fazer uma comparação entre os dois movimentos – com os dados obtidos experimentalmente através do *tracker* e com os dados obtidos pela simulação das equações de movimento obtidas teoricamente, procedemos com a sobreposição da plotagem dos dados para o eixo  $x$ . Dessa maneira, os dados experimentais e teóricos são contrastados na mesma figura, afim de uma análise comparativa entre os mesmos, o gráfico para o eixo  $x$  se encontra na figura 106. De maneira análoga, repetimos o procedimento para o eixo  $y$ , apresentando os resultados nas Figuras 107, onde os dados experimentais e teóricos também são sobrepostos para análise comparativa.

Com base na análise das Figuras 106 e 107, podemos concluir que o modelo teórico proposto neste trabalho reproduz de maneira notável a realidade, mesmo em situações complexas que envolvem equações diferenciais acopladas de segunda ordem. O modelo demonstra eficácia ao considerar a presença de fenômenos como a ressonância auto-paramétrica, forças dissipativas decorrentes do atrito com o ar, atrito com a polia e forças internas na mola, seja na forma de calor ou na emissão de som. Mesmo ao simplificar o problema para um cenário ideal, onde apenas a constante elástica da mola está presente, e simplificar as forças dissipativas, o modelo ainda se mostra fiel à realidade.

A precisão do modelo teórico, evidenciada nos casos anteriores, permite-nos estender essa confiança para outros tópicos analisados neste trabalho. Por exemplo, ao considerar a transição ordem-caos-ordem e as simulações de forças dissipativas no sistema, mesmo em situações em que as trajetórias se mostram caóticas e complexas, o modelo teórico parece descrever com precisão os fenômenos observados. Assim, com base nesses dados, podemos afirmar que o modelo teórico apresentado é robusto e confiável, pois ele tem descrito bem a realidade.

## 4.5 – Conclusão

O estudo da mecânica clássica representa uma base fundamental no entendimento dos fenômenos físicos que regem o comportamento dos corpos em movimento. O Capítulo 1 do presente trabalho inicia-se com uma introdução abrangente a essa área da física, destacando sua importância histórica e suas principais teorias. A partir disso, realiza-se uma revisão detalhada da mecânica newtoniana, cujos princípios estabelecidos por Sir Isaac Newton têm sido a pedra angular da física clássica por séculos. A compreensão dos conceitos de força, massa e movimento desenvolvidos por Newton é essencial para a análise posterior das dinâmicas físicas abordadas neste trabalho.

Além disso, o Capítulo 1 também oferece uma revisão da Mecânica Lagrangiana, uma abordagem alternativa e poderosa para a descrição dos movimentos de sistemas físicos complexos. A formulação lagrangiana, desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange, baseia-se no princípio da mínima ação e permite uma análise mais elegante e eficiente de uma ampla variedade de problemas mecânicos. Ao abordar esses dois enfoques teóricos complementares da mecânica, o Capítulo 1 estabelece uma base sólida para a exploração posterior dos fenômenos dinâmicos estudados neste trabalho.

O Capítulo 2 concentra-se no estudo específico do pêndulo elástico, um sistema mecânico simples, porém rico em comportamentos dinâmicos interessantes. Inicialmente, são deduzidas as equações de movimento que descrevem o comportamento do pêndulo elástico, levando em consideração as forças elásticas que atuam sobre o sistema. A compreensão dessas equações é crucial para analisar o comportamento oscilatório do pêndulo e suas propriedades dinâmicas.

Além disso, o Capítulo 2 aborda os parâmetros de controle do sistema, que influenciam diretamente seu comportamento dinâmico. Ao explorar como

diferentes variáveis, como comprimento do fio, massa do pêndulo e rigidez da mola, afetam o movimento do sistema, busca-se uma compreensão mais profunda das características do pêndulo elástico e suas possíveis aplicações práticas.

Partindo para um dos objetos de estudo deste trabalho, a transição ordem-caos-ordem é um fenômeno intrínseco a sistemas dinâmicos não lineares, descrevendo uma sequência complexa de comportamentos que envolvem a transição entre estados de ordem, caos e novamente ordem. Este conceito é fundamental para compreender a dinâmica de sistemas complexos, destacando como os padrões de comportamento podem se alternar entre estados organizados e aleatórios.

Para investigar essa transição em nosso estudo, utilizamos as seções de Poincaré, uma ferramenta crucial na análise de sistemas dinâmicos. Essas seções fornecem uma representação visual das trajetórias do sistema em um espaço de fase reduzido, permitindo observar padrões de comportamento periódicos ou caóticos. Durante as simulações computacionais, exploramos uma ampla gama de condições iniciais para cada nível de energia, registrando as interseções das trajetórias com as seções de Poincaré.

Observamos que, em cada nível de energia, mesmo com a predominância de movimentos caóticos, sempre encontramos pelo menos uma condição inicial que resultava em um comportamento ordenado, evidenciando a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Ao analisar os diferentes níveis de energia, identificamos claramente a presença da transição ordem-caos-ordem. Nos extremos de energia, o sistema demonstrou comportamento completamente ordenado. No entanto, para energias intermediárias, observamos comportamento caótico e desordenado. Surpreendentemente, mesmo em situações de aparente caos, encontramos condições que resultavam em comportamento ordenado.

Ao manter um valor de  $x$  específico e constante para todos os níveis de energia, conseguimos discernir claramente a transição entre ordem, caos e novamente ordem.

Já para o caso da ressonância auto-paramétrica, um fenômeno fascinante que ocorre em sistemas dinâmicos não lineares, onde uma resposta amplificada ou de alta amplitude é observada em uma frequência de excitação específica, mesmo que essa frequência não esteja diretamente relacionada à frequência natural de vibração do sistema. Este fenômeno é resultado das interações não lineares entre as diferentes partes ou componentes do sistema, levando a uma resposta amplificada em determinadas condições.

A expressão "auto-paramétrica" refere-se ao fato de que a frequência de excitação não é uma frequência externa aplicada, mas sim uma frequência que varia internamente devido a alguma variação paramétrica no sistema. Isso pode acontecer quando um dos parâmetros do sistema, como a rigidez da mola ou a massa, varia com o tempo.

Para investigar esse fenômeno, realizamos simulações computacionais utilizando o software Mathematica. Configuramos o sistema com base nas equações de movimento obtidas anteriormente, variando os parâmetros de energia  $R$  e as frequências  $\mu$ , enquanto mantínhamos as condições iniciais constantes.

Durante as simulações, observamos uma variedade de comportamentos oscilatórios do sistema pêndulo-elástico, incluindo a presença marcante da ressonância auto-paramétrica em determinadas condições. O sistema demonstrou uma resposta amplificada em frequências específicas, mesmo quando essas frequências não estavam diretamente relacionadas à frequência natural do sistema.

Ao variar os valores dos parâmetros, especialmente  $\mu$ , pudemos observar claramente a transição entre diferentes regimes de oscilação para o pêndulo elástico. Essa mudança no padrão de movimento destacou a sensibilidade do sistema às condições iniciais e aos parâmetros, evidenciando sua capacidade de manifestar uma variedade de comportamentos oscilatórios, dependendo das condições impostas.

Por meio das simulações computacionais realizadas, pudemos observar de forma notável o fenômeno da ressonância auto-paramétrica, ressaltando a notável mudança na dinâmica do sistema para diferentes valores de  $\mu$ .

Já para o movimento com dissipação de energia, um fenômeno comum em sistemas mecânicos, no qual parte da energia do sistema se converte em outras formas de energia, como calor, som ou deformação. Esta dissipação de energia é influenciada por diversos fatores, como atrito, resistência do ar e deformações plásticas, e desempenha um papel significativo na dinâmica dos sistemas físicos reais.

No contexto do nosso trabalho, é essencial analisar os casos em que há dissipação de energia em um sistema mecânico, pois isso afeta diretamente o comportamento e a estabilidade do sistema. A compreensão dos diferentes regimes de amortecimento, como o supercrítico, crítico e subcrítico, é crucial para prever e controlar o comportamento dinâmico do sistema, especialmente em sistemas oscilatórios como o pêndulo elástico.

Ao analisar o amortecimento no sistema pêndulo-elástico, podemos determinar a resposta do sistema a diferentes níveis de dissipação de energia. Por exemplo, em um amortecimento supercrítico, o sistema retorna rapidamente ao equilíbrio sem oscilações excessivas, enquanto em um amortecimento subcrítico, o sistema exibe oscilações amortecidas que podem levar mais tempo para retornar ao equilíbrio após uma perturbação.

Compreender o papel da dissipação de energia em sistemas mecânicos não só nos permite prever e controlar o comportamento desses sistemas, mas também nos ajuda a otimizar o design e o desempenho de dispositivos e máquinas. Ao considerar cuidadosamente a dissipação de energia em nossas análises, podemos tomar decisões mais informadas para melhorar a eficiência e a estabilidade dos sistemas mecânicos em questão.

Para validar o modelo teórico proposto neste trabalho, realizamos um experimento em um dos laboratórios didáticos do departamento de Física. Nosso objetivo era comparar os dados experimentais com a teoria desenvolvida até o momento, garantindo assim a confiabilidade e a precisão do modelo proposto.

Durante o experimento do pêndulo elástico, buscamos otimizar a coleta de dados e aumentar sua precisão. Utilizamos o software Tracker para registrar informações importantes, como posição, tempo e velocidade, e esses dados foram essenciais para determinar as condições iniciais, calcular o período de oscilação e o fator de amortecimento do movimento.

Com base nos dados experimentais coletados, simulamos o movimento de forma computacional e comparamos os resultados com os dados teóricos. Essa abordagem experimental e computacional proporcionou uma base sólida para validar o modelo teórico, permitindo uma análise comparativa entre os dados observados e os resultados da simulação.

Ao sobrepor os dados experimentais e teóricos para os eixos  $x$  e  $y$ , pudemos realizar uma análise comparativa detalhada. Concluímos que o modelo teórico proposto reproduz de maneira notável a realidade, mesmo em situações complexas que envolvem equações diferenciais acopladas de segunda ordem e fenômenos como a ressonância auto-paramétrica e forças dissipativas.

A precisão e a eficácia do modelo teórico foram evidenciadas não apenas na análise da ressonância auto-paramétrica, mas também em outros aspectos

abordados neste trabalho, como a transição ordem-caos-ordem e as simulações de forças dissipativas no sistema. Em todas essas situações, o modelo teórico se mostrou robusto e confiável, descrevendo com precisão os fenômenos observados.

Portanto, com base nos resultados obtidos na análise experimental e na comparação com o modelo teórico, podemos afirmar que o modelo proposto neste trabalho é confiável e preciso, proporcionando uma compreensão abrangente e detalhada da dinâmica do sistema massa-mola e dos fenômenos físicos envolvidos.

.....

## Referências

BREITENBERGER, Ernst; MUELLER, Robert D.. The elastic pendulum: a nonlinear paradigm. **Journal Of Mathematical Physics**, [S.L.], v. 22, n. 6, p. 1196-1210, 1 jun. 1981. AIP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1063/1.525030>.

CAYTON, Thomas E.. The laboratory spring-mass oscillator: an example of parametric instability. **American Journal Of Physics**, [S.L.], v. 45, n. 8, p. 723-732, 1 ago. 1977. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.11035>.

LEMONS, Nivaldo A.. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. 386 p.

SOUSA, M. C. de; MARCUS, F.A.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.. Energy distribution in intrinsically coupled systems: the spring pendulum paradigm. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, [S.L.], v. 509, p. 1110-1119, nov. 2018. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>.

SYMON, Keith R.. **Mecânica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1986. 683 p. Tradução de: Gilson Brand Batista.

TAYLOR, John R.. **Mecânica Clássica**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. 786 p. Tradução de: Waldir Leite Roque.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B.. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Tradução da 5ª edição norte-americana.

WATARI, Kazunori. **Mecânica Clássica**: volume 1. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004. 150 p.

WATARI, Kazunori. **Mecânica Clássica**: volume 2. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2003. 140 p.

WEELE, J.P. van Der; KLEINE, E. de. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum. **Physica A**, Netherlands, v. 228, p. 245-272, 1996.

## Apêndices

### A – Revisão Sobre Mecânica Hamiltoniana

A Mecânica Hamiltoniana é uma formulação alternativa da mecânica clássica que descreve o movimento de partículas e sistemas físicos usando equações diferenciais parciais chamadas Equações de Hamilton. Ela foi desenvolvida pelo matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton no século XIX como uma maneira de reformular e estender a mecânica newtoniana. A Mecânica Hamiltoniana é especialmente útil quando se lida com sistemas físicos com graus de liberdade complexos, como sistemas com muitas partículas interagindo entre si.

Um marco crucial no desenvolvimento da Mecânica Hamiltoniana foi a criação de uma quantidade chamada "ação". Hamilton percebeu que a trajetória que uma partícula segue é aquela que minimiza a ação ao longo de seu caminho. A ação é definida como a integral da Lagrangiana (uma função que descreve a energia cinética e potencial do sistema) ao longo do tempo. Esse princípio da ação mínima se tornou a base da Mecânica Hamiltoniana.

Hamilton introduziu variáveis generalizadas ( $q$ ) e momentos conjugados ( $p$ ) como uma maneira mais conveniente de descrever sistemas com coordenadas generalizadas e independentes do espaço. Ele também formulou as famosas Equações de Hamilton, que relacionam essas variáveis generalizadas e momentos conjugados com a função Hamiltoniana (que representa a energia total do sistema) e descrevem como essas quantidades evoluem no tempo.

#### Notação Variacional

O cálculo variacional é um ramo da matemática que se concentra em encontrar funções que otimizam determinados funcionais, isto é, determinar os extremos de uma função (os máximos e mínimos). Já o funcional é uma função que atribui um número real a uma função específica; em outras palavras, em vez

de otimizar uma única variável, como no cálculo diferencial, o cálculo variacional lida com otimização de funções.

Matematicamente, temos que a variação de  $y$ , denotada por  $\delta y$ , é definida por  $\delta y = \varepsilon \eta$ , de modo que a equação  $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{y} = y + \delta y \quad (A.1)$$

Analogamente, a variação do funcional  $J$  é defendida por:

$$\delta J = \varepsilon \left( \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (A.2)$$

Onde usando a equação

$$\left( \frac{d\Phi}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 \quad (A.3)$$

E

$$\delta y' = \varepsilon \eta' = (\varepsilon \eta)' = (\delta y)' \equiv \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (A.4)$$

A notação aqui adotada é análoga à notação do cálculo diferencial, no qual, a expressão  $\varepsilon f'(x) \equiv df$  com parâmetro arbitrário  $\varepsilon$  é chamada de diferencial da função  $f(x)$ . Uma integração por partes, com o uso de  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ , reduz a equação (A.2) à forma:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx \quad (A.5)$$

Dessa forma, uma condição necessária para um extremo de um funcional  $J[y]$  é que sua variação  $\delta J$  seja anulada para qualquer variação arbitrária  $\delta y$ , com a única exceção de se anular nas extremidades do intervalo de integração. De modo geral, as funções  $y(x)$  para as quais  $\delta J = 0$  são designadas como extremantes ou curvas estacionárias. Essa terminologia é justificada pelo fato de que  $\delta J = 0$  implica apenas que uma variação  $\delta y$  da curva  $y$  torna o funcional  $J[y]$



É dada por:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt \quad (A.12)$$

Uma integração por partes, fornece:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (A.13)$$

Levando em conta que as variações das coordenadas generalizadas se anulam nos pontos extremos, esta última equação reduz-se a:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k \quad (A.14)$$

Impondo  $\delta S = 0$  somos conduzidos a:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k = 0 \quad (A.15)$$

Uma vez que os  $\delta q_s$  são mutuamente independentes, podemos tomar todos iguais a zero exceto um particular  $\delta q_{k_0}$ . Neste caso, a soma em (A.15) reduz-se a um único termo correspondente a  $k = k_0$ . Mas, como  $\delta q_{k_0}$  é uma função arbitrária, o lema fundamental do cálculo das variações estabelece que o coeficiente de  $\delta q_{k_0}$  em (A.15) é identicamente nulo. Finalmente, como o argumento anterior é aplicável a qualquer  $k_0$ , conclui-se que (A.15) equivale a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad (A.16)$$

Isto completa a dedução das equações de Lagrange a partir do princípio variacional  $\delta S = 0$  para sistemas holônomos. A evolução dinâmica corresponde a uma trajetória traçada no espaço de configuração e podemos enunciar o seguinte princípio fundamental.

**Princípio de Hamilton** – Dado um sistema mecânico holônomo descrito pela lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ , seu movimento do instante  $t_1$  ao instante  $t_2$  é tal que a ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (A.17)$$

É mínima (mais geralmente, estacionária) para a trajetória real, mantidos fixos os pontos inicial e final da trajetória no espaço de configuração (Mecânica Analítica, Nivaldo).

## Equações Canônicas de Hamilton

Na formulação lagrangiana, o movimento de um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade é regido por  $n$  equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo. A dinâmica de Hamilton consiste em substituir as  $n$  equações de Lagrange por um certo conjunto equivalente de  $2n$  equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

De modo geral, as equações de Hamilton para problemas específicos não são mais fáceis de resolver do que as equações de Lagrange. A importância do formalismo hamiltoniano reside em fornecer um método poderoso, geral e flexível para a investigação de questões estruturais da mecânica, e, sobretudo, em servir de fundamento para a mecânica quântica e a mecânica estatística.

Naturalmente, as equações de Lagrange podem ser trivialmente substituídas por um sistema equivalente de primeira ordem, com o número de equações duplicado, meramente introduzindo as variáveis  $s_i = \dot{q}_i, i = 1, \dots, n$  e tratando  $q_1, \dots, q_n, s_1, \dots, s_n$  como  $2n$  variáveis independentes. As equações de movimento seriam:

$$\dot{q}_i = s_i \quad , \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial s_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (A.18)$$

Em que  $L(q, s, t)$  é a lagrangiana do sistema. Estas equações, no entanto, envolvem  $q_i$  e  $s_i$  de forma assimétrica e não são particularmente úteis.

## Momentos Canônicos e Equações de Hamilton

William Rowan Hamilton mostrou em 1835 que a duplicação simétrica do número de variáveis independentes é conseguida graças à descrição da dinâmica por intermédio das  $2n$  quantidades  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$  onde  $p_i$  é o momento canônico conjugado a  $q_i$ , definido por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (A.19)$$

Supondo uma matriz hessiana  $\mathbb{W} = (W_{ij})$  com elementos:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (A.20)$$

E não singular, isto é:

$$\det \mathbb{W} \neq 0 \quad (A.21)$$

Pois neste caso o teorema da função implícita (Loomis & Sternberg 1968) garante que a equação (A.19) podem ser resolvidas para as velocidades generalizadas. Assim, a descrição hamiltoniana envolve a substituição das variáveis  $(q, \dot{q})$  por  $(q, p)$  em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função  $H(q, p, t)$  em lugar da lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$  para gerar a dinâmica.

Tal mudança de descrição realiza-se mediante uma transformação de Legendre, que no presente contexto consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e na introdução da função de Hamilton ou, simplesmente, hamiltoniana  $H(q, p, t)$  definida por:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (A.22)$$

As consequências mais imediatas da introdução da função  $H$  podem ser deduzidas tomando a diferencial da equação (A.22):

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\} \quad (A.23)$$

Em virtude da equação (A.19) dos momentos canônicos e das equações de Lagrange, esta última equação reduz-se a:

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (A.24)$$

Indicando que, de fato,  $H$  só depende dos  $q$  e  $p$ . Por outro lado,

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (A.25)$$

Comparando estas duas últimas equações, resulta em:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (A.26)$$

E como, subproduto, temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (A.27)$$

A equação (A.26) também conhecida como equações de Hamilton ou também equação canônica de Hamilton, são um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem que equivalem ao sistema de  $n$  equações de segunda ordem de Lagrange. Elas relacionam as variáveis canônicas  $(q, p)$ . A equação (A.27) não descreve movimento, mas estabelece uma relação importante entre as dependências temporais da lagrangiana e da hamiltoniana.

As equações de Hamilton expressam as variáveis  $q$  em termos das variáveis canônicas, e é importante notar que, ao contrário da formulação lagrangiana, não há uma conexão a priori entre as variáveis canônicas. Portanto, ambas as metades das equações de Hamilton são igualmente importantes e

formam o conjunto completo de equações de movimento do sistema. Resumindo, a construção das equações de Hamilton envolve os seguintes estágios:

- a) Escolhidas coordenadas generalizadas, constrói-se a lagrangiana  $L(q, \dot{q}, t)$ .
- b) As equações (A. 19) são resolvidas para as velocidades  $\dot{q}_i$  como funções de  $(q, p, t)$ .
- c) Constrói-se  $H(q, p, t)$  substituindo-se em (A. 22) os  $\dot{q}$ 's obtidos no passo anterior.
- d) Uma vez obtida  $H(q, p, t)$ , as equações de movimento do sistema são (A. 26).

### Forma Variacional das Equações de Hamilton

O princípio de Hamilton, formulado em termos de variações da trajetória no espaço de configurações, escreve-se:

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (A. 28)$$

Com  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . Este princípio variacional pode ser transcrito em termos de variações da trajetória no espaço de fase da seguinte forma:

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right\} dt = 0 \quad (A. 29)$$

Onde  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  e as variações dos  $q$ s e  $p$ s são considerados independentes. Com efeito, temos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = 0 \quad (A. 30)$$

Uma integração por parte fornece:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt \quad (A. 31)$$

De modo que a equação (A. 30) torne-se:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right\} = 0 \quad (A.32)$$

Uma vez que as variações dos  $qs$  e  $ps$  são arbitrárias e independentes entre si, decorre da equação anterior que:

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (A.33)$$

Que são as equações de Hamilton (Mecânica Analítica, Nivaldo Lemos).

## Apêndice B – Dedução das Equações de Movimento pela Formulação Hamiltoniana sem Dissipação de Energia

### Formulação Hamiltoniana em Coordenadas Polares

Para a formulação hamiltoniana, vamos deduzir as equações de movimento somente para o caso sem a presença dos fatores dissipativos, dessa forma, vamos partir da lagrangiana em coordenadas polares sem a presença desses fatores, já obtida anteriormente:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + m g r \cos \theta + \frac{1}{2}k (r - l_0)^2$$

Devemos em primeiro lugar, calcular os momentos conjugados para as coordenadas generalizadas  $q_1 = r$  e  $q_2 = \theta$ .

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \Rightarrow p_r = m \dot{r} \Rightarrow \therefore \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (B.1)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow p_\theta = m \dot{\theta} r^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \quad (B.2)$$

De posse dessas informações, precisamos escrever a hamiltoniana.

$$H(q, p, t) = \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - L(q, p, t) \quad (B.3)$$

Fazendo as substituições, temos:

$$H = \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - \left[ \frac{1}{2}m \left( \left( \frac{p_r}{m} \right)^2 + r^2 \left( \frac{p_\theta}{m r^2} \right)^2 \right) + m g r \cos \theta + \frac{1}{2}k (r - l_0)^2 \right] \quad (B.4)$$

Simplificando a expressão, temos:

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} \right) + m g r \cos \theta + \frac{1}{2}k (r - l_0)^2 \right] \quad (B.5)$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + m g r \cos \theta + \frac{1}{2}k (r - l_0)^2 \quad (B.6)$$

Agora, temos que resolver as equações de Hamilton para  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $p_1 = p_r$  e  $p_2 = p_\theta$ , logo:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (B.7)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \Rightarrow \dot{p}_r = -\left(\frac{p_\theta^2}{2m}(-2r^{-3}) + mg \cos \theta + k(r - l_0)\right) \quad (B.8)$$

$$\therefore \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - mg \cos \theta - k(r - l_0) \quad (B.9)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \quad (B.10)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta = -\left(\frac{2\dot{\theta}\dot{r}}{r} + mg r \sin \theta\right) \quad (B.11)$$

$$\therefore \dot{p}_\theta = -\frac{2\dot{\theta}\dot{r}}{r} - mg r \sin \theta \quad (B.12)$$

Da equação (B.7), temos:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow p_r = m \dot{r} \quad (B.13)$$

Da equação (B.10), temos:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m} \Rightarrow p_\theta = m \dot{\theta} r^2 \quad (B.14)$$

Substituindo na equação (B.9), chegamos a:

$$m \ddot{r} = \frac{(m \dot{\theta} r^2)^2}{m r^3} - mg \cos \theta - k(r - l_0) \quad (B.15)$$

Simplificando, temos:

$$m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - k(r - l_0) \quad (B.16)$$

Finalmente dividindo por  $m$ , chegamos à equação de movimento para a componente  $r$  do sistema:

$$\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 - g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - l_0) \quad (B.17)$$

Fazendo as substituições na equação (B.12), temos:

$$m \ddot{\theta} r^2 = -\frac{2 \dot{\theta} \dot{r}}{r} + m g r \sin \theta \quad (B.18)$$

Finalmente dividindo por  $m r^2$ , chegamos à equação de movimento para a componente  $\theta$  do sistema:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2 \dot{\theta} \dot{r}}{r} - \frac{g}{r} \sin \theta \quad (B.19)$$

## Formulação Hamiltoniana em Coordenadas Cartesianas

Partindo da lagrangiana em coordenadas cartesianas, sem a presença dos fatores dissipativos, já obtida anteriormente:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m g y - \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_o)^2$$

Devemos em primeiro lugar, calcular os momentos conjugados para as coordenadas generalizadas  $q_1 = x$  e  $q_2 = y$ .

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow p_x = m \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (B.20)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Rightarrow p_y = m \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad (B.21)$$

De posse dessas informações, precisamos escrever a hamiltoniana.

$$H(q, p, t) = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y - L(q, p, t) \quad (B.22)$$

Fazendo as substituições, temos:

$$H(q, p, t) = \frac{p_x}{m} p_x + \frac{p_y}{m} p_y - \left[ \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{p_x}{m} \right)^2 + \left( \frac{p_y}{m} \right)^2 \right) - m g y - \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_o)^2 \right] \quad (B.23)$$

Simplificando a expressão, temos:

$$H(q, p, t) = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - m g y - \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_o)^2 \right] \quad (B.24)$$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + m g y + \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + y^2} - l_o)^2 \quad (B.25)$$

Agora, temos que resolver as equações de Hamilton para  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $p_1 = p_x$  e  $p_2 = p_y$ , logo:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (B.26)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p}_x = -k x \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (B.27)$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m} \quad (B.28)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \Rightarrow \dot{p}_y = -\left( m g + k y \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \right) \quad (B.29)$$

$$\therefore \dot{p}_y = -m g - k y \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (B.30)$$

Da equação (B.26), temos:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow p_x = m \dot{x} \quad (B.31)$$

Substituindo na equação (B.27), temos:

$$m \ddot{x} = -k x \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (B.32)$$

Finalmente isolando  $\ddot{x}$ , chegamos à equação de movimento para a componente  $x$  do sistema:

$$\ddot{x} = -\frac{k x}{m} \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (B.33)$$

Da equação (B.28), temos:

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} \Rightarrow p_y = m \dot{y} \quad (B.34)$$

Substituindo na equação (B.30), temos:

$$m \ddot{y} = -m g - k y \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (B.35)$$

Finalmente isolando  $\ddot{y}$ , chegamos à equação de movimento para a componente  $y$  do sistema:

$$\ddot{y} = -g - \frac{k y}{m} \left( \frac{l_o}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \quad (B.36)$$

## Apêndice C – Dedução das Equações de Movimento com Dissipação Anisotrópica

Para realizar essas manipulações algébricas, vamos partir da decomposição dos vetores em  $r$  e  $\theta$  para achar as contribuições em  $x$  e  $y$ , logo:

- Em  $\hat{r}$ , temos:

$$\hat{r} = \sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y} \quad (C.1)$$

ou

$$\hat{r} = \frac{x}{r} \hat{x} + \frac{y}{r} \hat{y} \quad \text{com} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (C.2)$$

- Em  $\dot{r}$ , temos:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (C.3)$$

$$2 r \dot{r} = 2 x \dot{x} + 2 y \dot{y} \quad (C.4)$$

$$\Rightarrow \therefore \dot{r} = \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \quad \text{ou} \quad \dot{r} = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta \quad (C.4)$$

- Em  $\vec{F}_r$ , temos:

$$\vec{F}_r = -\gamma_r \dot{r} \hat{r} = -\gamma_r \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] \hat{r} \quad (C.5)$$

$$\vec{F}_r = -\gamma_r \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] \left[ \frac{x}{r} \hat{x} + \frac{y}{r} \hat{y} \right] \quad (C.6)$$

$$\vec{F}_r = -\gamma_r \frac{x}{r} \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] \hat{x} - \gamma_r \frac{y}{r} \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] \hat{y} \quad (C.7)$$

Portanto:

$$F_x = -\gamma_x \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] \quad \text{com} \quad \gamma_x = \gamma_r \frac{x}{r} \quad (C.8)$$

$$F_y = -\gamma_y \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] \quad \text{com} \quad \gamma_y = \gamma_r \frac{y}{r} \quad (C.9)$$

- Em  $\hat{\theta}$ , temos:

$$\hat{\theta} = \cos \theta + \sin \theta \hat{y} \quad \text{ou} \quad \hat{\theta} = -\frac{y}{r} \hat{x} + \frac{x}{r} \hat{y} \quad (C.10)$$

- Em  $\dot{\theta}$ , temos:

$$r \dot{\theta} = \dot{y} \sin \theta + \dot{x} \cos \theta \quad \text{ou} \quad r \dot{\theta} = \frac{x}{r} \dot{y} - \frac{y}{r} \dot{x} \quad (C.11)$$

- Em  $\vec{F}_\theta$ , temos:

$$\vec{F}_\theta = -\gamma_\theta r \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (C.12)$$

$$\vec{F}_\theta = -\gamma_\theta \left[ \frac{x}{r} \dot{y} - \frac{y}{r} \dot{x} \right] \left[ -\frac{y}{r} \hat{x} + \frac{x}{r} \hat{y} \right] \quad (C.13)$$

$$\vec{F}_\theta = -\gamma_\theta \frac{y}{r} \left[ \frac{y}{r} \dot{x} - \frac{x}{r} \dot{y} \right] \hat{x} - \gamma_\theta \frac{x}{r} \left[ \frac{x}{r} \dot{y} - \frac{y}{r} \dot{x} \right] \hat{y} \quad (C.14)$$

- Em  $F_x$ , temos:

$$F_x = -\gamma_r \left( \frac{x}{r} \right) \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] - \gamma_\theta \left( \frac{y}{r} \right) \left[ \frac{y}{r} \dot{x} - \frac{x}{r} \dot{y} \right] \quad (C.15)$$

Se  $\gamma_r = \gamma_\theta = \gamma$ , temos:

$$F_x = -\gamma \left[ \left( \frac{x}{r} \right)^2 \dot{x} + \left( \frac{xy}{r^2} \right) \dot{y} \right] - \gamma \left[ \left( \frac{y}{r} \right)^2 \dot{x} - \left( \frac{xy}{r^2} \right) \dot{y} \right] \quad (C.16)$$

$$\therefore F_x = -\gamma \left( \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) \dot{x} = -\gamma \dot{x} \quad (C.17)$$

- Em  $F_y$ , temos:

$$F_y = -\gamma_r \left( \frac{y}{r} \right) \left[ \frac{x}{r} \dot{x} + \frac{y}{r} \dot{y} \right] - \gamma_\theta \left( \frac{x}{r} \right) \left[ \frac{x}{r} \dot{y} - \frac{y}{r} \dot{x} \right] \quad (C.18)$$

$$F_y = - \left[ \gamma_r \left( \frac{y}{r} \right)^2 + \gamma_\theta \left( \frac{x}{r} \right)^2 \right] \dot{y} - \left[ \gamma_r \left( \frac{yx}{r^2} \right) - \gamma_\theta \left( \frac{yx}{r^2} \right) \right] \dot{x} \quad (C.19)$$

Se  $\gamma_r = \gamma_\theta = \gamma$ , temos:

$$F_y = -\gamma \dot{y} \quad (C.20)$$

## Apêndice D – Código *Mathematica*

# Pêndulo Elástico Em Coordenadas Cartesianas

### Condições Iniciais

```
In[ ]:= k = 10;  
m = 0.05;  
g = 9.81;  
μ = 5;  
l0 = (μ - 1) * (m * g) / k  
lmax = l0 + m * g / k  
RR = 1;  
Eminima = -m * g (l0 + (m g / (2 k)));  
  
CI1 = Table[NSolve[{- (1 / 2 k (Sqrt[(xi ^ 2 + yi ^ 2)] - l0) ^ 2 + m g yi) / Eminima == RR, xi == i},  
[tabela [solução numérica [raiz quadrada  
{xi, yi}, Reals][[1]], {i, 0.01, 0.31, 0.1}];  
[números reais  
CI2 = Table[NSolve[{- (1 / 2 k (Sqrt[(xi ^ 2 + yi ^ 2)] - l0) ^ 2 + m g yi) / Eminima == RR, xi == i},  
[tabela [solução numérica [raiz quadrada  
{xi, yi}, Reals][[2]], {i, 0.01, 0.31, 0.1}];  
[números reais  
  
vx0 = 0;  
vy0 = 0;  
x0 = xi /. CI1  
y0 = yi /. CI1  
contagem = Length[%]  
[comprimento  
  
γ = 0;  
ωm = Sqrt[k / m];  
[raiz quadrada  
ωp = Sqrt[g / lmax];  
[raiz quadrada
```

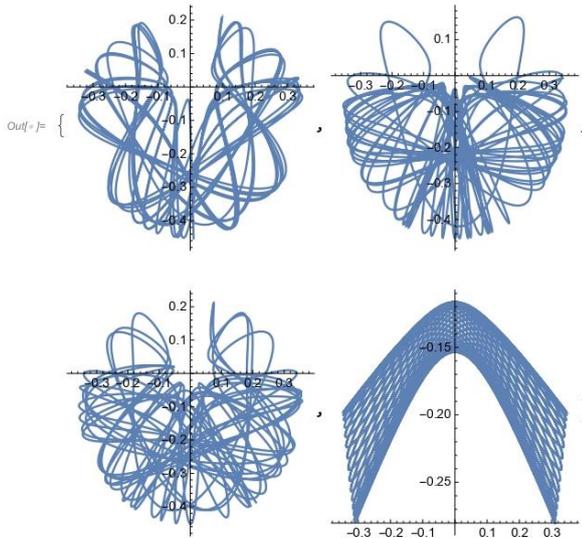
### Equações de Movimento

```
In[ ]:= a =  
Table[NDSolve[{x''[t] == (-k / m) * x[t] * ((1 - l0 / (Sqrt[x[t] ^ 2 + y[t] ^ 2))) + γ x'[t],  
[tabela [resolve numericamente equação diferencial [raiz quadrada  
y''[t] == -g - ((k / m) * y[t] * ((1 - l0 / (Sqrt[x[t] ^ 2 + y[t] ^ 2]))) + γ y'[t],  
[raiz quadrada  
x[0] == x0[[i]], y[0] == y0[[i]], x'[0] == vx0, y'[0] == vy0},  
{y[t], x[t]}, {t, 0, 1000}], {i, 1, contagem, 1}];
```

```
In[ ]:=  $\mu$ 
Etotal = 1/2 * m * (vx $\theta$ 2 + vy $\theta$ 2) + m * g * y $\theta$  + 1/2 * k * (Sqrt[x $\theta$ 2 + y $\theta$ 2] - l $\theta$ )2
R = -N[Etotal/Eminima]
```

## Trajatórias do Movimento

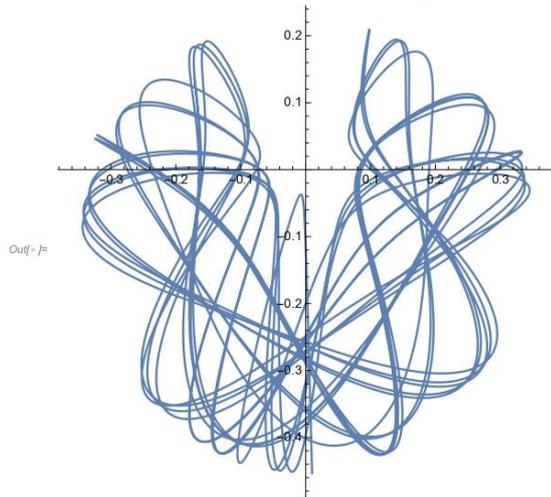
```
In[ ]:= Table[ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. a[[i]],
{t,  $\theta$ , 2 $\theta$ }, AspectRatio -> 1, PlotRange -> All], {i, 1, contagem, 1}]
```



```

In[ ]:= ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. a[[1]]],
  gráfico paramétrico calcula
  {t, 0, 20}, AspectRatio -> 1, PlotRange -> All, PlotPoints -> 1000]
  quociente de aspecto intervalo do g tudo número de pontos no gráf

```



## Animações dos Movimentos

```

Animate[ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. a[[3]]],
  anima gráfico paramétrico calcula
  {t, 0, i}, AspectRatio -> 1], {i, 0, 25, 1}];
  quociente de aspecto

```

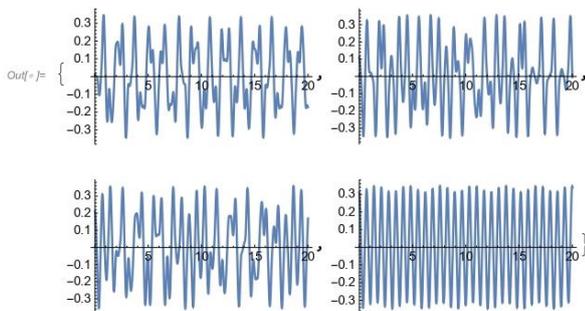
```

In[ ]:= Animate[ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. a[[2]]],
  anima gráfico paramétrico calcula
  {t, i, i + 2}, AspectRatio -> 1], {i, 0, 100, 1}];
  quociente de aspecto

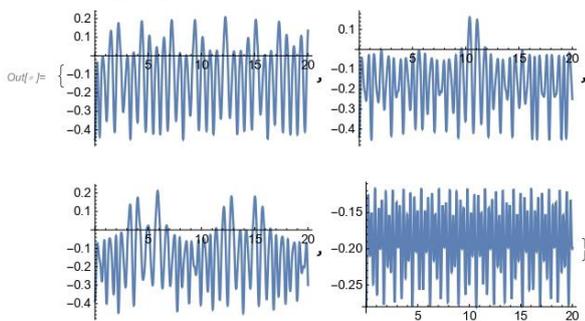
```

## Movimento do Sistema nos Eixos Coordenados

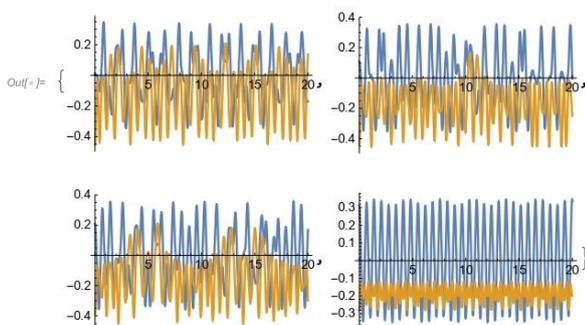
In[ ]:= Table[Plot[Evaluate[x[t] /. a[[i]], {t, 0, 20}], {i, 1, contagem, 1}]



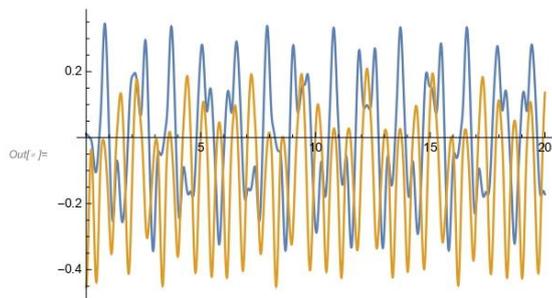
In[ ]:= Table[Plot[Evaluate[y[t] /. a[[i]], {t, 0, 20}], {i, 1, contagem, 1}]



In[ ]:= Table[Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. a[[i]], {t, 0, 20}], {i, 1, contagem, 1}]



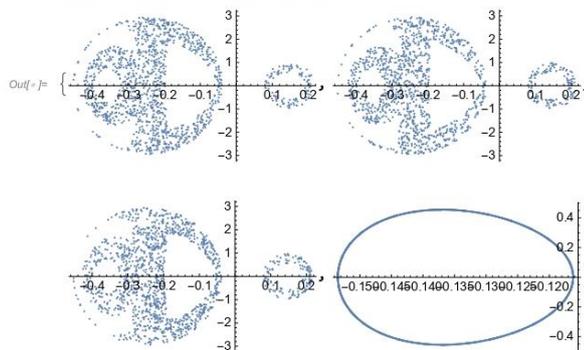
```
In[ ]:= Table[Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. a[[1]], {t, 0, 20}]]
      |tabela |gráfico|calcula
```



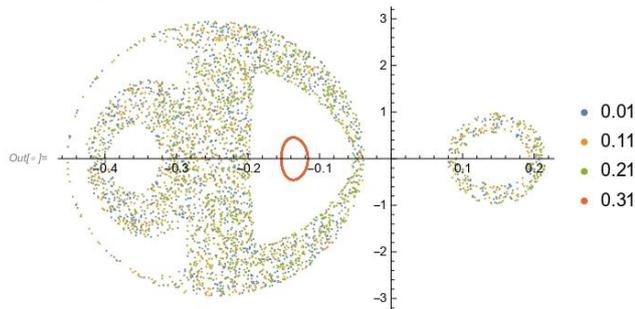
### Secções de Poincaré

```
In[ ]:= sol = Table[
      |tabela
      Reap[NDSolve[{x''[t] + (k/m) x[t] * (1 - (10/Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2)) + γ x'[t] == 0,
      |reto|resolve numericamente equação diferencial |raiz quadrada
      y''[t] + g + (k/m) y[t] * (1 - (10/Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2)) + γ y'[t] == 0,
      |raiz quadrada
      x[0] == x0[[i]], y[0] == y0[[i]], x'[0] == vx0, y'[0] == vy0,
      WhenEvent[x[t] == 0 && x'[t] > 0, Sow[{y[t], y'[t]}]],
      |ação quando um evento ocorreu |gera
      {x, y}, {t, 1500}]]][[-1, 1]], {i, 1, contagem, 1}];
```

```
In[ ]:= Table[ListPlot[sol[[i]], {i, 1, contagem, 1}]]
      |tabela |gráfico de uma lista de valores
```

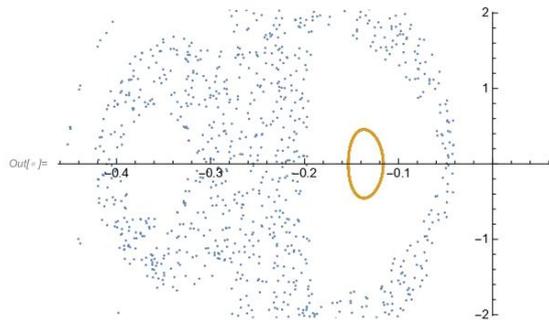


```
In[ ]:= Imagem = ListPlot[Table[sol[[i]], {i, 1, contagem, 1}],
  gráfico de tabela
  PlotLegends -> Table[x0[[i]], {i, 1, contagem, 1}]
  legenda do gráfico tabela
```



```
In[ ]:= sol3 =
  Reap[NDSolve[{x''[t] + (k/m) x[t] * (1 - (l0/Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2)) + γ x'[t] == 0,
  resolve numericamente equação diferencial raiz quadrada
  y''[t] + g + (k/m) y[t] * (1 - (l0/Sqrt[x[t]^2 + y[t]^2)) + γ y'[t] == 0,
  raiz quadrada
  x[0] == x0[[3]], y[0] == y0[[3]], x'[0] == vx0, y'[0] == vy0, WhenEvent[
  ação quando um evento ocorreu
  x[t] == 0 && x'[t] > 0, Sow[{y[t], y'[t]}]}, {x, y}, {t, 1000}][[-1, 1]];
  gera
```

```
In[ ]:= ListPlot[{sol[[1]], sol[[4]]}
  gráfico de uma lista de valores
```



```
In[ ]:= ListPlot[sol[[2]]]  
gráfico de uma lista de valores
```

