UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CAMPUS MARINGÁ

Thais Mikami Ornellas

UM ESTUDO DA TEORIA DE CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN

MARINGÁ

2023

THAIS MIKAMI ORNELLAS

Um estudo da teoria de campo gravitacional de Einstein

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Estadual de Maringá, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Maringá, 2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

THAIS MIKAMI ORNELLAS

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Bacharel em Física, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador(a): Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Profa. Dra. Hatsumi Mukai
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Maringa, 2023

Agradecimentos

Agradeço sinceramente ao Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne por toda a paciência e pela disposição durante todo este processo.

Aos meus amigos de turma, que chegaram no final mas fizeram uma grande diferença: Henrique, Victoria, Alexandre, Luiz, Hygor, Hugo e Zé Guilherme pelas conversas, momentos de diversão e companheirismo. Principalmente à Ana, por estar comigo em todos os momentos.

Ao meu pai Donizeti, que sempre me apoiou e confiou em mim. À minha madrasta Juliana, por todo apoio e incentivo. E, também, aos meus irmãos: Anna Julia e Eduardo por todas as risadas e por sempre estarem comigo.

Resumo

A descrição dinâmica de objetos foi alvo da ciência desde a antiguidade. A mecânica clássica consegue descrever os movimentos de corpos macroscópicos somente dentro um limite de validade. No entanto, para uma descrição completa é necessário a incorporação de outras teorias, como a mecânica quântica e relatividade geral. Nessa direção, a gravitação sempre foi um fenômeno que despertou muita curiosidade entre as pessoas. Neste trabalho, apresentamos um estudo de revisão teórica das duas maiores teorias de gravitação, uma proposta por Isaac Newton em 1713 e a outra mais recente proposta por Albert Einstein em 1915.

Palavras-chave: gravitação, relatividade geral, equação de campo.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Isaac Newton, em seus estudos de mecânica clássica, elaborou a primeira mais conhecida teoria da gravitação que é utilizada até hoje. Em meados do século XIX as ideias de Albert Einstein modificaram o pensamento da época, trazendo uma nova visão para a atração gravitacional. Com sua teoria da Relatividade Geral, Einstein conseguiu descrever o fenômeno da gravitação de uma maneira mais completa, trazendo a ideia de campo gravitacional no espaço-tempo.

Os campos gravitacionais passaram a não ser mais retratados apenas como mais uma componente do espaço e do tempo - como os campos elétricos e magnéticos - mas a fazer parte da própria estrutura do espaço e do tempo [1]. Uma das propriedades fundamentais de um campo gravitacional é que, diferentes corpos de prova, sujeitos às mesmas condições iniciais, caem com a mesma aceleração independentemente de suas massas. Isso leva a identificar localmente os efeitos físicos da gravitação dos corpos que não estão em um referencial inercial [2].

Em conjunto com Marcel Grossman em 1913, Einstein compreendeu que o campo gravitacional deve ser identificado com os 10 componentes do tensor métrico da geometria do espaço-tempo Riemanniana. O princípio de equivalência é incorporado a este formalismo através da exigência de que as equações físicas sejam invariáveis sob transformações de coordenadas gerais [3].

O objetivo principal deste trabalho é obter uma formação em uma área da física que não faz parte do currículo principal do bacharelado em física. Não se tem a pretensão de uma compreensão total do assunto, visto a complexidade do mesmo, mas sim uma visão inicial deste tema. De tal forma que este trabalho está estruturado como segue.

Este trabalho esta divido em 4 capítulos, no qual cada um aborda os passos necessários para o estudo do campo gravitacional. No Capítulo 1 é introduzido o conceito de gravidade em sua forma teórica. Partimos das observações feitas por Isaac Newton até os princípios que Albert Einstein estudou para formular sua teoria, como o princípio da equivalência. É também discutido brevemente sobre algumas das principais diferenças entre as duas teorias. No Capítulo 2 é iniciado o estudo de cálculo tensorial e apresentado as técnicas matemáticas necessárias para aprofundar a teoria da Relatividade Geral. É introduzido a ideia de vetores covariantes e contravariantes, tensores, e a derivada covariante. No Capítulo 3 é feito uma breve contextualização histórica sobre a Relatividade Geral e é aplicado os conhecimentos vistos no capítulo 2 para estudar a teoria matematicamente. O Capítulo 4 é onde é encontrado de fato a equação de campo gravitacional da teoria de Einstein e é feito uma discussão sobre a equação e o que ela representa.

1 Fundamentação: Teoria da Gravitação de Newton e de Einstein

Para conhecer mais a fundo as teorias de gravitação propostas por Isaac Newton e Albert Einstein, será introduzido neste capítulo a base necessária para a compreensão das duas teorias.

1.1 Gravitação por Newton

A mecânica newtoniana tem como base o uso dos conceitos de espaço e tempo absolutos. De acordo com Newton, os objetos se interagem entre si por meio de grandezas físicas chamadas forças. As forças são representadas por um vetor, possuindo intensidade, direção e sentido. Matematicamente, uma força pode ser expressa como

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.1}$$

em que m é a massa inercial, definida pela capacidade do objeto a resistir ao movimento [4].

Essa lei de movimento é valida dessa forma somente em um referencial inercial, de modo que para um sistema acelerado deve ser introduzido as forças fictícias. Newton acreditava na existência de espaço absoluto e na possibilidade de definir uma aceleração absoluta [2].

Newton se dedicou no estudo de uma interação em particular: gravitação. Ele postulou uma lei que descreve esse fenômeno, expressa por

$$\vec{F_g} = G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}. \tag{1.2}$$

Por esta lei, é descrito como dois corpos de massas M e m no universo se atraem de forma proporcional ao produto de suas massas e ao inverso do quadrado da distância entre eles. O vetor $\vec{F_g}$ representa a força gravitacional e r o módulo do vetor que representa a distância entre os dois corpos. A constante de proporcionalidade G é conhecida como constante gravitacional e tem o valor de $G = 6,67384 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{k}g^{-1}\mathrm{s}^{-2}$. Newton postulou que essa lei de força deve estar sempre presente entre corpos massivos.

É possível notar por meio desta lei que a força de atração parte da interação entre objetos que possuam massa gravitacional.

A teoria de gravitação proposta por Newton tem sido extremamente bem sucedida na descrição dos movimentos planetários [5]. Anterior ao modelo de Newton da gravitação, os movimentos e a natureza dos corpos celestes já eram discutidos entre filósofos da época. Entretanto, todas as teorias foram feitas por meio de suposições e crenças e não podem ser considerados modelos que descrevem a gravitação de forma física [6].

O que se entende de espaço e tempo é que é que não há espaço sem coisas, e não há tempo se nada acontece, sendo tempo uma contagem de acontecimentos. Newton rompe com essa tradição, trazendo o conceito de "espaço absoluto" e "tempo absoluto" como sendo entidades que existem por si mesmas.

Filósofos como Berkeley [7], e Mach [8], questionaram a ideia de espaço absoluto de Newton e Einstein foi fortemente influenciado por suas críticas à concepção newtoniana.

No início do século XX, a relatividade restrita modificou os conceitos e ideias da física. Os conceitos de espaço e tempo absolutos foram rejeitados pela relatividade restrita e ficou claro que a teoria newtoniana - apesar de seus numerosos sucessos - deveria ser substituída. A nova teoria proposta utilizou espaço-tempo de Minkowski[1].

O começo para a formulação da relatividade geral é a abolição do espaço absoluto.

1.2 Gravitação por Einstein

Embora a mecânica newtoniana tenha sucesso ao descrever movimentos em baixas velocidades, ela não se torna tão relevante quando aplicada a partículas cujas velocidades se aproximam da velocidade da luz. Devido a isso surge em 1905 a Teoria da Relatividade Restrita (TRR). Seu principal feito foi utilizar as *transformações de Lorentz* para relacionar um evento ocorrendo em dois referenciais distintos, diferente da mecânica newtoniana que utiliza as *transformações de Galileu* para relacionar os dois referenciais dado um evento [9].

No final de 1915, Albert Einstein, com sua nova teoria da relatividade voltou sua atenção para a questão da gravitação. Era obvio para os contemporâneos que a teoria de Newton precisava apenas de pequenos ajustes para ficar de acordo com a teoria da relatividade. Entretanto, os primeiros trabalhos publicados de Einstein sobre a questão ignoram completamente a possibilidade de somente simples ajustes. Em vez disso, ele via a gravitação como o caminho para estender o princípio da relatividade ao movimento acelerado. Einstein desenvolveu essas primeiras ideias em seu maior sucesso científico, a teoria geral da relatividade, e com esse feito, a teoria da gravitação mudou para sempre [1].

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) formulada por Einstein é uma teoria da gravitação que é puramente geométrica em que a dinâmica da matéria é descrita pela geometria, e da mesma forma, a geometria do espaço é determinada pela matéria. Dessa

[1] Hermann Minkowski foi um matemático alemão que apresentou o chamado *espaço de Minkowski*, que é uma configuração matemática na qual é comum formular a teoria de relatividade restrita. Nesta configuração, as dimensões de espaço são combinadas com a dimensão de tempo representando-o um espaço quadridimensional para o espaço-tempo.

forma, a ideia de espaço absoluto da mecânica clássica é abandonada. O conceito de espaço e tempo absoluto traz o conceito de aceleração absoluta, que é um traço caraterístico da relatividade restrita. Na TRG, a aceleração perde seu significado absoluto. Isso é equivalente à afirmação de que não há sistemas de coordenadas inerciais ou preferenciais: Todos os sistemas de coordenadas são equivalentes. Esta é realmente a razão pela qual a teoria é chamada de relatividade geral [6]. De certa forma, a relatividade geral é a generalização da relatividade restrita.

Do ponto de vista matemático, a equivalência de todos os sistemas de coordenadas exigidos pela relatividade geral é obtida de maneira direta. O espaço de Minkowski da relatividade restrita é um espaço riemanniano em sua forma mais simples, ou seja, é um espaço plano. Na relatividade geral é feita uma substituição do espaço de Minkowski por um espaço riemanniano curvo, no qual geralmente não há sistemas de coordenadas preferidos.

Do ponto de vista físico, a transição do espaço riemanniano plano para o curvo se mostrou necessária para obter uma descrição quantitativa do campo gravitacional. Ou seja, na relatividade geral, o campo gravitacional é apenas a expressão do fato de que na realidade, o que temos de fato é um espaço riemanniano curvo e não o espaço plano de Minkowski. Portanto, pode-se dizer que o traço característico da relatividade geral é a descrição geométrica ou simplesmente a geometrização do campo gravitacional.

Ao contrário da teoria newtoniana que é uma teoria escalar, a relatividade geral é uma teoria tensorial do campo gravitacional. Será mostrado que o campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico do espaço riemanniano.

Dois princípios servem como base conceituais para a teoria da relatividade geral, o primeiro é chamado de princípio de equivalência, que traz um experimento mental proposto por Albert Einstein.

1.2.1 Princípio de Equivalência

O experimento mental pode ser brevemente descrito como um sujeito em uma caixa viajando no espaço com uma aceleração $\vec{g}$ e que está sob o mesmo efeito caso o mesmo sujeito esteja na caixa na superfície da Terra sob efeito da força da gravidade $\vec{g}$. De acordo com Einstein os dois sistemas são equivalentes.

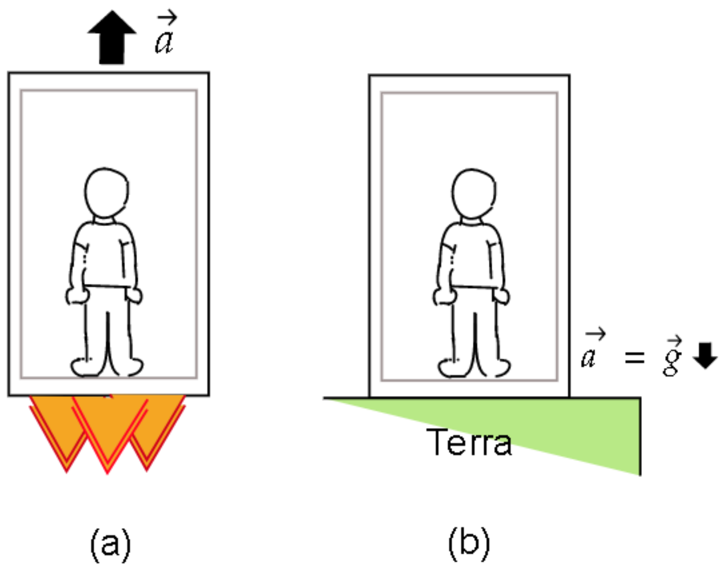

Figura 1 – Ilustração para explicar o Princípio da Equivalência. Figura (a) o sujeito está em uma caixa com aceleração $a = g$ no espaço. Figura (b) o sujeito está na superfície da Terra parado sob ação da gravidade g.

Em outras palavras, um sujeito na presença de um campo gravitacional experimenta a mesma força que um sujeito em movimento acelerado, contanto que eles sejam idênticos. Este princípio traz a discussão de massa inercial e massa gravitacional, que por meio deste princípio, Einstein conclui que as duas massas são iguais.

A massa inercial é a resistência de um objeto à mudança de movimento e a massa gravitacional é responsável por produzir atração gravitacional. Ao comparar a equação (1.1) com a força peso dada por $P = ma$, como a aceleração a deve ser igual a g, as massas devem ser equivalentes [4].

1.2.2 Curvatura do espaço-tempo

Outro princípio importante para o estudo da relatividade geral é mostrar que um raio de luz se curva devido a ação de um campo gravitacional.

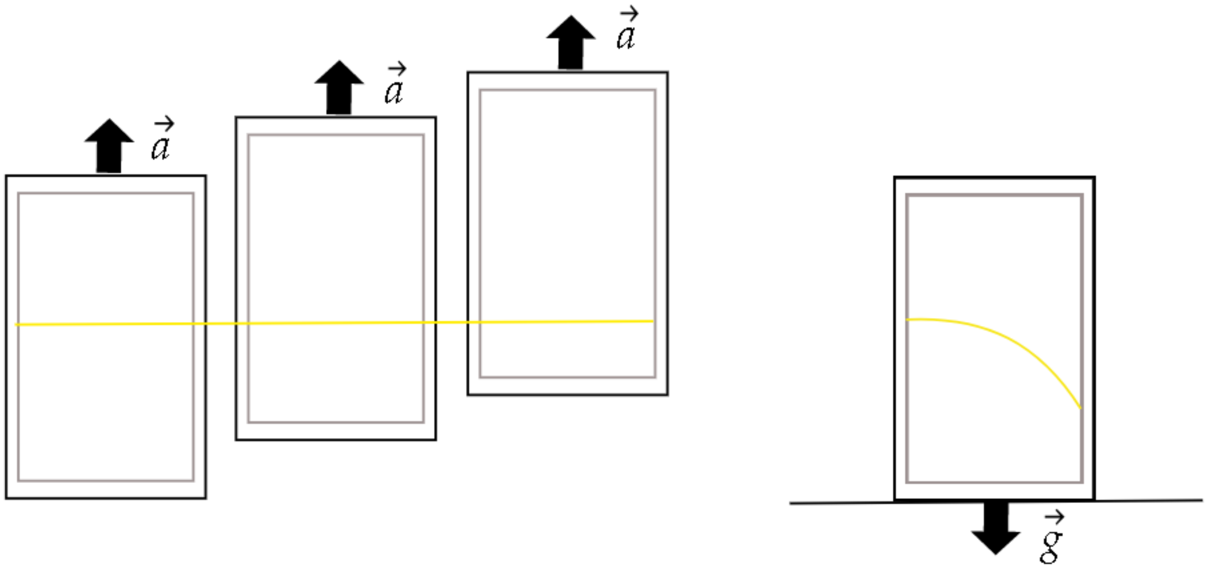

Figura 2 – Feixe de luz indo de uma extremidade a outra em uma caixa sob ação de uma aceleração $\vec{a} = \vec{g}$ deve ser equivalente a mesma caixa na superfície sob ação da gravidade. Note-se que se considera um referencial externo a caixa.

A partir do princípio da equivalência sabe-se que um objeto deve sentir a mesma força quando sujeito à uma aceleração inercial de módulo igual a gravidade e quando sujeito ao campo gravitacional. Da mesma forma, um feixe de luz deve apresentar a mesma trajetória quando acelerado e quando está sob o efeito do campo gravitacional. O feixe de luz apresenta uma trajetória curvilínea quando sujeito a uma aceleração $|\vec{a}| = |\vec{g}|$, portanto, de acordo com o princípio proposto por Einstein a mesma ação deve acontecer quando sujeito a um campo gravitacional. Assim, para ter uma trajetória curvilínea, o espaço deve ser curvo. Esse fenômeno pode ser observado quando uma estrela que se localiza atrás do Sol pode ser vista ao lado dele. O que acontece é que a luz da estrela é curvada pelo campo gravitacional do Sol [10]. Uma demonstração do fenômeno pode ser observado na Figura 3.

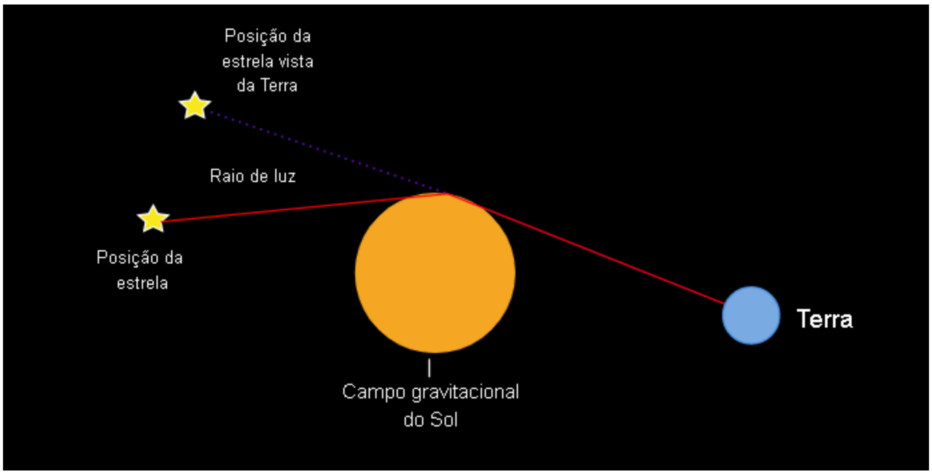

Figura 3 – Demonstração de como uma estrela localizada atrás do Sol pode ser vista ao lado dele devido ao campo gravitacional do Sol. Fonte: Adaptado de BBC News Brasil (2019) [11].

A lei de gravitação newtoniana, dada pela equação (1.2) não se aplica a este fenômeno, pois na equação há a presença de duas massas (M e m). No exemplo do Sol e da luz da estrela, a massa do Sol é representada pelo M e a massa m seria a luz. Entretanto, o fóton - partícula que representa a luz - não tem massa, isso torna a teoria newtoniana inválida para este caso. Com isso, Einstein considerou outra teoria, de que movimento é devido a um espaço-tempo curvo.

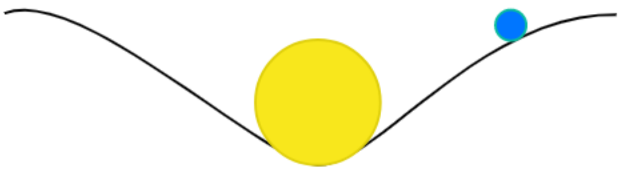

Figura 4 – Curvatura de um pano esticado com duas massas, sendo a amarela maior que a azul.

Isso pode ser observado pela Figura 4. Se há um corpo de maior massa sobre um tecido esticado e uma bolinha de gude, Newton postula que o que atrai a bola de gude para próximo do corpo de maior massa é a força gravitacional. De acordo com Einstein, o que acontece é que a bola menor se move pelo menor caminho possível na curvatura do espaço-tempo.

A curvatura do espaço-tempo e o princípio de equivalência constituem as bases conceituais da teoria da relatividade geral de Einstein.

2 Base Matemática para a TRG

Para o estudo da física básica normalmente as grandezas escalares e vetoriais são suficientes para descrever o sistema. Para Gravitação e Relatividade Geral é apresentado uma notação mais ampla de escalares e vetores chamada de tensores. Um tensor de ordem 0 é, na verdade, um escalar e um vetor é simplesmente um tensor de ordem 1 [12]. O cálculo tensorial é uma ferramenta muito usada para o estudo de diversos outros fenômenos na Física, tendo como exemplo eletrodinâmica, cristais líquidos e teoria de campos. E ela permite também postular as leis físicas de tal forma que elas não mudem sua forma sob rotações.

O motivo de introduzir esse cálculo tensorial é devido a algumas grandezas físicas necessitarem de mais informações para serem representadas além daquelas que um vetor pode apresentar, como por exemplo na curvatura do espaço. Dessa forma, o tensor é uma ferramenta matemática que permite armazenar mais informações das grandezas estudadas [12].

2.1 Vetores covariantes e contravariantes

A partir deste ponto as coordenadas serão expressas como x^μ com μ podendo assumir os valores de $0, 1, 2, 3$. Com isso, a representação de coordenadas no plano cartesiano tridimensional, por exemplo, fica expressa como x^1, x^2, x^3 para x, y, z respectivamente. O equivalente a x^0 seria a componente tempo t. Vamos supor um sistema de referenciais x e um x'.

Em um referencial de coordenadas chamado de x'^μ é possível representar um ponto nas coordenadas novas em termos da base antiga x^μ. Na forma diferencial um comprimento infinitesimal dx'^μ pode ser escrito seguindo a relação

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \tag{2.1}$$

havendo um somatório implícito[1] em ν. Para um vetor, podemos seguir a mesma ideia, escrevendo-o da forma

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu. \tag{2.2}$$

[1] Neste trabalho usaremos a notação de Einstein, em que se pode deixar o somatório implícito quando representando equações com índices repetidos, como é o caso de ν.

Esse é o chamado *vetor contravariante*. Sendo V^μ um vetor de 4 componentes $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$ que para ser contravariante deve seguir a regra de transformação descrita na equação (2.2).

Digamos que ϕ é uma função escalar qualquer, o gradiente da função é escrito como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^\mu} + ... \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}. \tag{2.4}$$

O *vetor covariante* é um vetor V_μ com 4 dimensões $V_\mu = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ que para ser chamado de covariante deve seguir a transformação dada na equação (2.4),

$$V'^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu. \tag{2.5}$$

Nota se que a representação do vetor covariante é dada com o índice na parte inferior direita da letra, ao contrário da representação do vetor contravariante que é dado com o índice na sua parte superior direita. Será utilizado essa representação para diferenciar vetores covariantes e contravariantes.

Para ver a diferença geométrica entre componentes covariantes e contravariantes, consideramos dois vetores unitários $\hat{e_1}$ e $\hat{e_2}$ no qual seus módulos são iguais a 1 e eles definem dois eixos x^1 e x^2 em um plano. As componentes contravariantes (A^1, A^2) de um vetor são então dadas pelas projeções do vetor $\vec{A}$ paralelas ao eixo x^1 e x^2, enquanto as componentes covariantes (A_1, A_2) são fornecidas pelas projeções ortogonais do vetor $\vec{A}$ em relação aos eixos. Se os vetores unitários $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ forem perpendiculares entre si, as componentes covariantes e contravariantes serão iguais, ou seja, $A_1 = A^1$ e $A_2 = A^2$ [2].

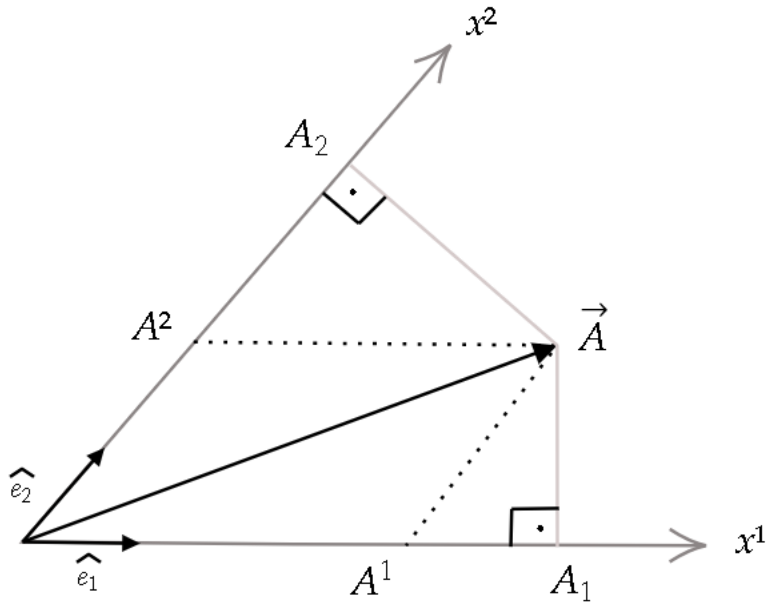

Figura 5 – Representação dos vetores covariantes e contravariantes.

2.2 Tensores de ordem superiores

Uma equação entre tensores é chamada de equação tensorial. Se uma equação tensorial vale em um sistema de coordenadas, valerá em todos sistemas de coordenadas, ou seja, um tensor que é zero em um sistema de coordenadas é zero em todos os sistemas de coordenadas. Isso ocorre devido a linearidade da transformação de um tensor. Ao tomar uma relação verdadeira em um determinado sistema de coordenadas, podemos utilizar o mesmo resultado em qualquer outro sistema de coordenadas. Podemos então dizer que a equação tensorial é uma relação que não depende de um determinado sistema de coordenadas.

Para entender melhor, veremos como exemplo um sistema com dois vetores que pode ser observado na Figura 6. Considerando que a força $\vec{F}$ e a distância $\vec{x}$ são dois vetores, então, o trabalho será dado pelo produto escalar dos mesmos. Supondo que a força seja na direção perpendicular a mesa de modo a fazer um ângulo de 90 graus em relação a mesa, ao realizar o produto escalar o resultado será zero. Dessa forma, o trabalho será zero. Não importa o referencial escolhido pois o bloco não vai se mover, ou seja, não importa o referencial, o valor do trabalho sempre será zero. Com isso, vemos na prática o que foi explicado acima: a relação entre dois vetores em que se o tensor tiver o valor de zero em um referencial, será zero em qualquer referencial [13]. Por isso que tensores são tão importantes no estudo da teoria proposta por Eistein.

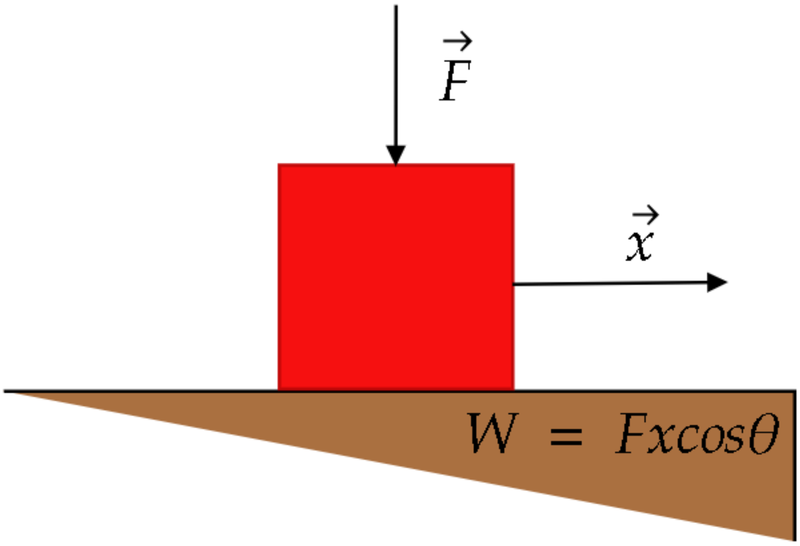

Figura 6 – Exemplo de um sistema com dois vetores. Bloco sobre uma mesa com uma força perpendicular a mesa sendo aplicada. θ é o ângulo formado entre o vetor $\vec{F}$ e $\vec{x}$.

Como um tensor é a combinação de dois vetores, podemos escrever um tensor como

$$T^{\mu\nu} = A^{\mu}B^{\nu}. \tag{2.6}$$

Sabendo que um vetor pode ser escrito seguindo a relação da equação 2.2, substituindo essa representação de vetores no tensor, ele poderá ser expresso como

$$T'^{\mu\nu} = A^{\mu'}B^{\nu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}B^{\beta}, \tag{2.7}$$

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}. \tag{2.8}$$

Sendo o tensor $T^{\alpha\beta} = A^{\alpha}B^{\beta}$. A equação (2.8) é a chamada transformação contravariante. Há uma transformação equivalente, chamada de transformação covariante para tensores, expressa com os índices subescritos

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}T_{\alpha\beta}. \tag{2.9}$$

Existe também a possibilidade de um tensor misto, que é a junção de um tensor covariante e um tensor contravariante. Sua representação é com um dos índices sobrescrito e outro subescrito,

$$T'^{\nu}_{\ \mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{\beta}_{\alpha}. \tag{2.10}$$

2.2.1 Contrações

Uma propriedade de tensores que será bastante usada neste trabalho é a ideia de "contrações", que é quando um tensor reduz o número da sua ordem. Isso ocorre quando os índices covariantes e contravariantes de um vetor se igualam e os termos acabam se anulando. Essa manipulação é necessária para se poder dividir os tensores em partes menores, como por exemplo, tornar um tensor de ordem 2 em um escalar.

2.3 O tensor métrico

Comecemos analisando o Teorema de Pitágoras para a geometria euclidiana. O comprimento ds pode ser escrito como

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \tag{2.11}$$

De modo geral, podemos escrever essa expressão com uma somatória de todas as dimensões de dx^i

$$ds^2 = dx^i dx^j. \tag{2.12}$$

Neste ponto, introduzimos a função Delta de Kronecker que é definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad i = j. \end{cases}$$

Com isso, o comprimento ds pode ser escrito como

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \tag{2.13}$$

Considerando o diferencial de dx^i e dx^j dado pela equação (2.1), temos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} dx'^r \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^k && (2.14) \\ ds^2 &= \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^r dx'^k \\ ds^2 &= g_{ij} dx'^r dx'^k, && (2.15) \end{aligned}$$

no qual definimos o tensor métrico como sendo

$$g_{ij} = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}. \tag{2.16}$$

Encontramos como o tensor métrico se comporta, mas o que isso significa fisicamente? Para a geometria euclidiana, ou seja, para um plano, a Delta de Kronecker se faz suficiente para descrever o comprimento ds na equação (2.13). Entretanto, para espaços curvos a equação (2.13) não satisfaz o comprimento ds a ser calculado, de forma que deve haver um termo que leve em conta a curvatura da superfície analisada, papel esse do tensor métrico. Um exemplo é a superfície de uma esfera. O tensor métrico é responsável por fazer a correção em uma superfície curva. Note que para espaços planos, o tensor métrico é a delta de Kronecker podendo somente ser 0 ou 1.

Por exemplo, na Figura 7, considerando um espaço bidimensional, para o espaço plano $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dy^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ em contrapartida, para o espaço curvo $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2$, em que o tensor métrico g_{ij} soma valores que dependem da curvatura.

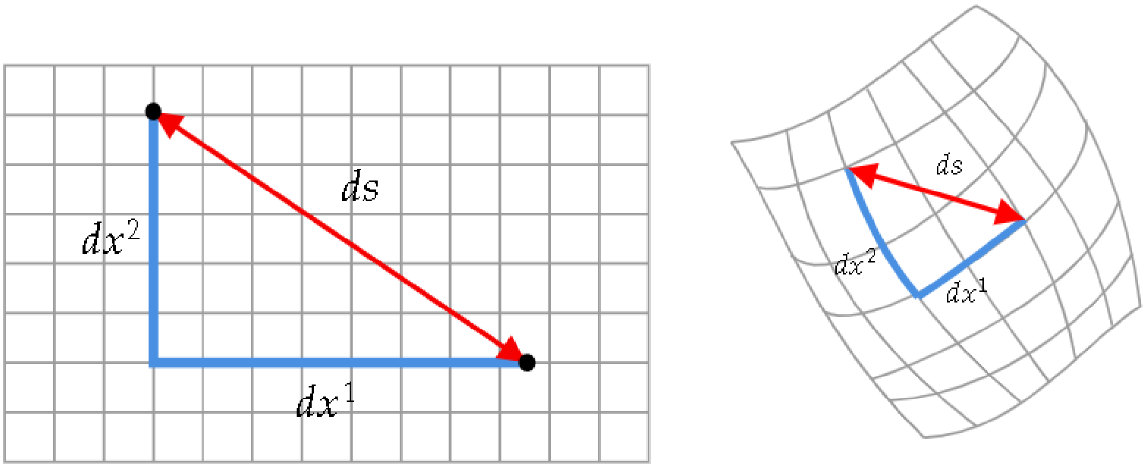

Figura 7 – Representação do deslocamento ds para o caso de espaço plano e espaço curvo.

Para um exemplo da métrica, tomemos o espaço euclidiano em que o tensor métrico pode ser representado na forma de matriz como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

no qual o termo $\eta_{\mu\nu}$ é chamado de *métrica de Minkowski*, que é a entidade geométrica quadridimensional que descreve a estrutura do espaço-tempo na Relatividade Restrita[2]

A ideia de Einstein é, portanto, sair da aproximação onde o campo gravitacional é descrito pelo espaço de Minkowski, substituindo a métrica fixa de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por um campo $g_{\mu\nu}$. O campo $g_{\mu\nu}$ descreve a geometria variando no espaço-tempo sendo ao mesmo tempo, o campo gravitacional. Como o espaço de Minkowski é apenas uma aproximação válida quando a gravidade é desprezível, ou seja, é tão pequena que pode ser considerada uma reta, em geral, a geometria do espaço tempo não é Minkowskiano.

Algumas propriedades que valem a pena mencionar é que se pode introduzir o tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$ em que o elemento de linha fica

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \tag{2.18}$$

O tensor métrico introduzido e seu inverso pode ser um fator utilizado para subir ou descer índices, em outras palavras, relacionar componentes covariantes com contravariantes para qualquer tensor, incluindo o próprio tensor métrico. Eles se relacionam da seguinte forma, [12]

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu, \tag{2.19}$$

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu. \tag{2.20}$$

Além disso, desde que $V^\mu A_\nu = V_\mu A^\nu$, temos

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda. \tag{2.21}$$

2.4 A derivada covariante

Antes de entrar em detalhes sobre a derivada covariante será apresentado um conceito chamado *deslocamento paralelo*. Ao transportar um vetor em paralelo em uma superfície plana em um contorno fechado qualquer, o vetor final coincide com o vetor inicial, como mostrado na Figura 8.a. Entretanto, o mesmo não ocorre quando se realiza um transporte paralelo em uma superfície curva. Como observado na Figura 8.b, o vetor inicial não coincide com o vetor que foi transportado ao longo do caminho fechado. Essa ideia é importante para permitir caracterizar superfícies como sendo planas ou curvas.

[2] Lembrando que na Relatividade Restrita o espaço-tempo é dado pela equação

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

A Relatividade Restrita não foi entrada em detalhes neste trabalho porém se o leitor tiver interesse pode encontrar na referência [14].

De forma geral, a maneira que o transporte paralelo é realizado permite caracterizar a curvatura de uma superfície [15].

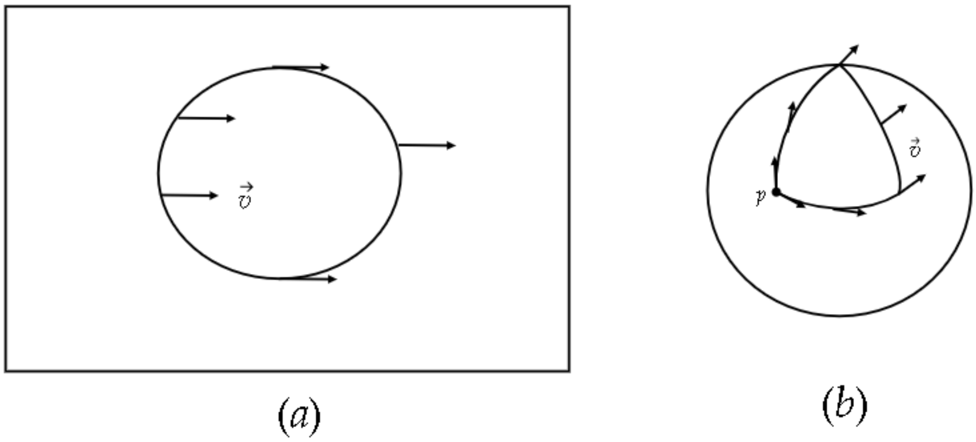

Figura 8 – Transporte paralelo de um vetor $Vecv$ em um contorno fechado em (a) um plano; e (b) em uma superfície curva.

Dessa forma, para um espaço curvo, vemos que a derivada não se comporta da forma usual, ou seja, ela não parte de $V_\mu(x+dx)-V_\mu(x)$. Isso se dá porque no espaço curvo não se pode comparar diretamente $V_\mu(x)$ com $V_\mu(x+dx)$. O deslocamento de um vetor V_μ do ponto x para o ponto $x+dx$ depende da curvatura do espaço em que o deslocamento ocorre e, não somente, do vetor e do deslocamento dx. Dessa forma, podemos escrever que o vetor segue a seguinte relação [12]

$$V_\mu(x) \longrightarrow V_\mu(x) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda(x) dx^\nu. \tag{2.22}$$

Os coeficientes representados pela letra grega "gama" se chamam *conexão afim* ou *Símbolos de Christoffel*[3] e serão vistos com mais detalhes na seção 2.5 do trabalho. A derivada covariante pode ser escrita como

$$D_\nu V_\mu = \frac{V_\mu(x+dx) - [V_\mu(x) + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} V_\lambda(x) dx^\alpha]}{dx^\nu}, \tag{2.23}$$

no qual podemos notar que os termos

$$\frac{V_\mu(x+dx) - V_\mu(x)}{dx^\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu}, \tag{2.24}$$

se reduzem a uma derivada comum. Dessa forma a derivada covariante pode ser escrita como

$$D_\nu V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda(x). \tag{2.25}$$

[3] Do matemático, Elwin Bruno Christoffel.

Utilizando uma notação mais compacta que é bem utilizada, escrevemos

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}(x), \tag{2.26}$$

em que o 'ponto e vírgula' simboliza a derivada covariante e a 'vírgula' simboliza a derivada comum. Generalizando a derivada para tensores de ordem superiores os índices permutam havendo dois símbolos de Christoffel. Com isso, temos

$$T_{\mu\nu;\alpha} = T_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} T_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} T_{\mu\lambda}. \tag{2.27}$$

2.4.1 Propriedades da derivada covariante

A derivada covariante segue algumas propriedades específicas. Primeiramente, a derivada covariante de um tensor de ordem zero, também conhecido como escalar, coincide com a derivada usual, ou seja,

$$\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}. \tag{2.28}$$

A derivada covariante de um produto tem a mesma regra da derivada de um produto de uma derivada usual. Para verificar, tomemos dois vetores $V_{\mu}(x)$ e $A_{\nu}(x)$. Como a relação entre dois vetores é chamada de tensor de ordem 2, utilizamos a equação (2.27) [12].

$$(V_{\mu}(x)A_{\nu}(x))_{;\alpha} = (V_{\mu}(x)A_{\nu}(x))_{,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} V_{\lambda}(x)A_{\nu}(x) - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} V_{\mu}(x)A_{\lambda}(x). \tag{2.29}$$

Colocando os termos V_{μ} e A_{ν} em evidencia, chegamos a

$$(V_{\mu}(x)A_{\nu}(x))_{;\alpha} = (V_{\mu,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} V_{\lambda})A_{\nu} + V_{\mu}(A_{\nu,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} A_{\lambda}) = V_{\mu;\alpha}A_{\nu} + V_{\mu}A_{\nu;\alpha}, \tag{2.30}$$

que é igual a regra do produto para uma derivada comum.

É possível obter a derivada covariante de um vetor contravariante a partir de um escalar $V^{\mu}A_{\mu}$. Combinando as propriedades descritas pelas equações (2.28) e (2.30), encontramos

$$\begin{aligned}
(V^{\mu}A_{\mu})_{;\nu} &= (V^{\mu}A_{\mu})_{,\nu} && (2.31)\\
V^{\mu}{}_{;\nu}A_{\mu} + V^{\mu}A_{\mu;\nu} &= V^{\mu}{}_{,\nu}A_{\mu} + V^{\mu}A_{\mu,\nu} && (2.32)\\
V^{\mu}{}_{;\nu}A_{\mu} + V^{\mu}(A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}) &= V^{\mu}{}_{,\nu}A_{\mu} + V^{\mu}A_{\mu,\nu} && (2.33)\\
V^{\mu}{}_{;\nu}A_{\mu} &= (V^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda})A_{\mu}. && (2.34)
\end{aligned}$$

Desta relação, tiramos a derivada covariante de um vetor contravariante como

$$V^{\mu}{}_{;\nu} = V^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} V^{\lambda}. \tag{2.35}$$

Sabemos que a derivada covariante deve ser um tensor de segunda ordem, logo, transforma-se seguindo a relação de transformação para tensores descrita pela equação (2.9). Entretanto não temos conhecimento de como a conexão afim se transforma, que é o que iremos apresentar a seguir. A derivada covariante de uma coordenada 'linha' pode ser escrita como

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} V'_{\beta}. \tag{2.36}$$

Como V_μ e a derivada em relação a ν são tensores, podemos escrevê-los seguindo a transformação de tensores descritas pela equação (2.5), e para a derivada a relação

$$V'_{\mu;\nu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} V_{\sigma;\rho}. \tag{2.37}$$

Substituindo na equação (2.36), ficamos com

$$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} V_{\sigma;\rho} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\upsilon}} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\alpha} - \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} V_{\alpha}. \tag{2.38}$$

Utilizando a expressão da derivada (2.26) para substituir o termo $V_{\sigma;\rho}$ a equação se torna

$$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} V_{\alpha} \right) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\upsilon}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\upsilon}} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \partial x'^{\nu} V_{\alpha} - \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} V_{\alpha}, \tag{2.39}$$

se reduzindo a

$$-\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} V_{\alpha} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\alpha} - \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} V_{\alpha}. \tag{2.40}$$

Como V_α é um vetor arbitrário e está presente em todos os termos ele pode ser cancelado na equação, dessa forma, chegamos a

$$\Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} - \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}. \tag{2.41}$$

Multiplicando a equação por $\partial x'^{\lambda} / \partial x^{\alpha}$ ficamos com

$$\Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}, \tag{2.42}$$

em que o termo do lado esquerdo é obtido com

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\beta} \Gamma'^{\beta}_{\mu\nu} = \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}. \tag{2.43}$$

A equação (2.42) mostra como a conexão afim deve se transformar. Pela transformação, notamos que há um termo que o impede de se transformar como tensores, ou seja, tem um termo homogêneo na transformação da conexão que o impede de ser um tensor. Isso significa que se todos os componentes da conexão forem zero em um referencial, eles não são necessariamente zero em outro referencial [16]. A conexão afim é considerada um pseudo-tensor.

De modo geral, para os estudos das aplicações da Relatividade Geral, a conexão afim é considerada simétrica. Há os chamados espaços com torção que consideram uma contribuição da parte antissimétrica que não será detalhado neste trabalho[4].

2.5 Derivada do tensor métrico e simbolo de Christoffel

No caso do tensor métrico, qual será o resultado para a derivada, ou seja, $(Dg_{\mu\nu})$? Para espaços planos, os valores possíveis para $g_{\mu\nu}$ são 1 ou 0, ou seja, uma constante. Portanto, a derivada para espaços planos deve ser igual a zero. Entretanto, pela definição de tensores, se for zero em um referencial, deve ser zero em todos os referenciais.

Isso pode ser mostrado tomando a derivada covariante do tensor. Considerando A_μ como um tensor, com a ajuda do tensor métrico podemos escrever

$$A_\mu = g_{\mu\lambda} A^\lambda, \tag{2.44}$$

que é passar de um tensor contravariante para um covariante. Se tomarmos a derivada covariante dos dois lados da expressão $A_\mu = g_{\mu\lambda} A^\lambda$, pela derivada do produto, encontramos

$$DA_\mu = Dg_{\mu\lambda} A^\lambda + g_{\mu\lambda} DA^\lambda. \tag{2.45}$$

Ao comparar o resultado da equação (2.44) com a (2.45), concluímos que a derivada do tensor métrico deve-se de fato ser zero. Esse resultado equivale ao comprimento ser preservado no transporte paralelo.

Dado este resultado, usando a expressão da derivada covariante de um tensor (Eq (2.27)) para o tensor métrico, será escrito como

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} = 0. \tag{2.46}$$

Podemos ainda tomar permutações entre os índices, variando-os ciclicamente

[4] A teoria da gravitação se torna bem mais complexa ao considerar espaços com torção. Caso o leitor se interessar pode encontrar de forma mais completa em [2].

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} = 0, \tag{2.47}$$

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\lambda\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\nu\lambda} = 0, \tag{2.48}$$

no qual $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. E então obtendo 3 equações no total. Ao multiplicar a equação (2.46) por $-\frac{1}{2}$, multiplicar por $\frac{1}{2}$ as equações (2.47) e (2.48) e então somar os resultados temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha}) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} &= 0, && (2.49)\\ \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}) + \Gamma_{\mu\nu\alpha} &= 0. && (2.50) \end{aligned}$$

Com isso, podemos obter

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}), \tag{2.51}$$

que é o chamado *símbolo de Christoffel* de primeira ordem. Ao multiplicar a equação por $g^{\lambda\alpha}$ ficamos com

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \tag{2.52}$$

que é o chamado *símbolo de Christoffel* de segunda ordem. Para obter estes resultados consideramos a simetria do tensor métrico e de Γ. A partir destas equações mostrou-se que o *símbolo de Christoffel* pode ser escrito em termos do tensor métrico e suas derivadas.

Note que o *símbolo de Christoffel* não é um tensor e sim um termo de correção. Outra propriedade é que deve ser igual a zero em espaços planos e é diferente de zero em espaços curvos.

3 Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral é a teoria que melhor descreve a interação gravitacional e os aspectos geométricos do espaço-tempo. A base da teoria consiste na ideia de que a gravidade é descrita por uma teoria de campo, que também determina as propriedades geométricas do espaço-tempo.

A Relatividade Geral não descreve a gravidade como uma força entre as massas separadas por uma distância - assim como Newton propôs -, mas trata a gravidade como uma interação local transportada em velocidade finita por um campo chamado de campo gravitacional.

De acordo com a relatividade restrita, a lei de Newton para a gravitação, dada pela equação (1.2) não pode ser considerada uma lei universal, sendo válida apenas para o caso não relativístico, ou seja, quando as massas não se movem rapidamente em relação a outras. Sendo assim, fora do limite estático, a gravidade deve ser descrita por uma teoria de campo, capaz de lidar com a velocidade finita de propagação de interação. A relatividade geral é uma dessas teorias de campo [17].

Pode-se definir a relatividade geral por: **(i)** um campo: campo gravitacional; **(ii)** uma lei que descreve como as massas se movem sob a ação do campo gravitacional, que é a chamada equação da geodésica, a qual será vista mais a frente; e **(iii)** equações de campo: as equações de Einstein [17].

É possível dizer que a Teoria da Relatividade Geral é paralela a Teoria de Maxwell[1]. No entanto, há um aspecto da gravidade que o torna muito diferente do eletromagnetismo. O campo gravitacional também está relacionado à estrutura geométrica do espaço-tempo.

O campo gravitacional determina a taxa em que um relógio funciona, ou a separação entre as pontas de uma haste (porque átomos e partes móveis do relógio interagem com o gravitacional campo). Portanto, o que se chama de geometria do espaço-tempo é a manifestação de um campo físico real e dinâmico: o campo gravitacional.

Algumas diferenças dretas entre a teoria de Newton e a Relatividade Geral podem ser observadas no Quadro 3.1.

[1] James Clerk Maxwell propôs uma teoria sobre o eletromagnetismo. Sua teoria assim como da Relatividade Geral é definida por um campo e equações de campo.

Newton	**Einstein**
Partículas livres se movem em linhas retas pelo espaço	Partículas livres seguem geodésicas pelo espaço tempo
Para cada ação há uma reação igual oposta	A interação entre dois corpos não é simples, cada corpo produz uma curvatura no espaço tempo

Quadro 3.1: Comportamento de partículas livres e interação entre corpos na mecânica clássica e na relatividade geral.

3.1 Matemática da Relatividade Geral

Como dito anteriormente, a Relatividade Geral é uma teoria que descreve a geometria do espaço-tempo. Neste capítulo, apresentaremos as equações que descrevem como a Relatividade Geral funciona matematicamente.

3.1.1 Tensor de curvatura

Para encontrar o *tensor de curvatura*, também conhecido como *Tensor de Riemann* partiremos do comutador de duas derivadas covariantes de um tensor. Para um tensor qualquer, o comutador é definido como

$$D_\nu D_\rho T^\alpha_\beta - D_\rho D_\nu T^\alpha_\beta. \tag{3.1}$$

No caso de um vetor V_α por exemplo, tomando a derivada covariante definida como (2.26), temos

$$V_{\alpha;\nu} = \partial_\nu V_\alpha + \Gamma^\beta_{\nu\alpha} V_\beta. \tag{3.2}$$

Tomando a segunda derivada covariante é necessário intercalar os índices como na equação (2.27)

$$V_{\alpha;\nu;\rho} = \partial_\rho(\partial_\nu V_\alpha - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} V_\beta) - \Gamma^\beta_{\rho\alpha}(\partial_\nu V_\beta - \Gamma^\sigma_{\nu\beta} V_\sigma) - \Gamma^\beta_{\rho\nu}(\partial_\beta V_\alpha - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} V_\sigma). \tag{3.3}$$

De forma análoga podemos escrever a equação para $V_{\alpha;\rho;\nu}$ como

$$V_{\alpha;\rho;\nu} = \partial_\nu(\partial_\rho V_\alpha - \Gamma^\beta_{\rho\alpha} V_\beta) - \Gamma^\beta_{\nu\alpha}(\partial_\rho V_\beta - \Gamma^\sigma_{\rho\beta} V_\sigma) - \Gamma^\beta_{\rho\nu}(\partial_\beta V_\alpha - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} V_\sigma), \tag{3.4}$$

considerando a simetria dos índices inferiores do símbolo de Christoffel em um espaço sem torção, e assumindo que

$$\partial_\rho \partial_\nu V_\alpha = \partial_\nu \partial_\rho V_\alpha \tag{3.5}$$

podemos subtrair a equação (3.4) de (3.3), obtendo

$$\begin{aligned} V_{\alpha;\nu;\rho} - V_{\alpha;\rho;\nu} &= \partial_\rho \partial_\nu V_\alpha - \partial_\rho \Gamma^\beta_{\nu\alpha} B_\beta - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \partial_\rho V_\beta - \Gamma^\beta_{\rho\alpha} \partial_\nu V_\beta + \Gamma^\beta_{\rho\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} V_\sigma \\ &- \partial_\nu \partial_\rho V_\alpha + \partial_\nu \Gamma^\beta_{\rho\alpha} V_\beta + \Gamma^\beta_{\rho\alpha} \partial_\nu V_\beta + \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \partial_\rho V_\beta - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\rho\beta} V_\sigma \\ &+ \Gamma^\beta_{\rho\nu} (\partial_\beta V_\alpha - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} V_\sigma) - \Gamma^\beta_{\rho\nu} (\partial_\beta V_\alpha - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} V_\sigma). \end{aligned} \tag{3.6}$$

excluindo os termos iguais encontramos

$$V_{\alpha;\nu;\rho} - V_{\alpha;\rho;\nu} = R^\beta{}_{\alpha\nu\rho} V_\beta, \tag{3.7}$$

em que $R^\beta{}_{\alpha\nu\rho}$ é o chamado *Tensor de Riemann*, que é definido como

$$R^\beta{}_{\alpha\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\beta_{\rho\alpha} - \partial_\rho \Gamma^\beta_{\nu\alpha} + \Gamma^\sigma_{\rho\alpha} \Gamma^\beta_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} \Gamma^\beta_{\rho\sigma}. \tag{3.8}$$

3.1.2 Propriedades do tensor de Riemann

Com o resultado expresso na equação (3.8), vemos que $R^\alpha{}_{\beta\nu\rho}$ depende diretamente da métrica e da sua primeira e segunda derivada, considerando a equação (2.52)

Da definição vemos diretamente que o tensor é antissimétrico nos dois últimos índices "$\nu\rho$", de forma que

$$R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} = -R^\alpha{}_{\beta\rho\nu}. \tag{3.9}$$

Pela conexão ser simétrica temos a relação

$$R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} + R^\alpha{}_{\rho\beta\nu} + R^\alpha{}_{\nu\rho\beta} = 0. \tag{3.10}$$

É possível também expressar o tensor de outra maneira, com todos os índices abaixados. Realizamos isso usando o tensor métrico

$$g_{\sigma\alpha} R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} = R_{\sigma\beta\nu\rho}. \tag{3.11}$$

Com os índices abaixados, o tensor se comporta da seguinte forma, são simétricos na troca de posição dos pares *sigma*, *beta* com *nu* e *rho*, e antisimétricos na troca de posição entre os pares de índices individuais *alfa* com *beta* e *nu* com *rho*,

$$
\begin{aligned}
R_{\sigma\beta\nu\rho} &= R_{\nu\rho\sigma\beta} && (3.12)\\
R_{\sigma\beta\nu\rho} &= -R_{\beta\sigma\nu\rho} && (3.13)\\
R_{\sigma\beta\nu\rho} &= -R_{\sigma\beta\rho\nu}, && (3.14)
\end{aligned}
$$

e essa simetria satisfaz a relação

$$R_{\sigma\beta\nu\rho} + R_{\sigma\rho\beta\nu} + R_{\sigma\nu\rho\beta} = 0. \tag{3.15}$$

Há as chamadas 'contrações' que podemos utilizar para manipular as equações com tensores, apresentando-os como uma versão contraída. Contraindo-se o tensor de curvatura é possível encontrar o chamado *tensor de Ricci* que é dado por

$$g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\rho} = R_{\alpha\rho}, \tag{3.16}$$

e que, ao realizar mais uma contração, chegamos ao resultado de um escalar R conhecido como *Escalar de Ricci*.

Consideremos agora uma região no espaço em que $\Gamma = 0$, isto é, uma região plana. Neste caso o tensor de curvatura se reduz a

$$R^{\alpha}_{\beta\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^{\beta}_{\rho\alpha} - \partial_\rho \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \tag{3.17}$$

pois por mais que $\Gamma = 0$ não podemos afirmar que sua derivada será zero. Da equação (3.17) a derivada covariante é dada por

$$(R^{\alpha}_{\beta\nu\rho})_{;\sigma} = D_\sigma \partial_\nu \Gamma^{\beta}_{\rho\alpha} - D_\sigma \partial_\rho \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{3.18}$$

Realizando as permutações e somando as equações obtemos

$$R^{\alpha}_{\beta\nu\rho;\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\rho\sigma;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\nu;\rho} = 0, \tag{3.19}$$

que é a chamada *Identidade de Bianchi*. Essa identidade é uma equação de tensores, logo, se verdadeira em um referencial, deve ser verdadeira para todos os demais. Podemos também escrever as relações de Bianchi com os índices abaixados como

$$R_{\alpha\beta\nu\rho;\sigma} + R_{\alpha\beta\rho\sigma;\nu} + R_{\alpha\beta\sigma\nu;\rho} = 0. \tag{3.20}$$

Pela simetria nos dois primeiros e dois últimos termos de $R_{\alpha\beta\nu\rho}$ a equação (3.20) pode ser escrita como

$$R_{\alpha\beta\nu\rho;\sigma} - R_{\alpha\beta\sigma\rho;\nu} - R_{\beta\alpha\sigma\nu;\rho} = 0. \tag{3.21}$$

Subindo e contraindo índices os tensores com $g^{\alpha\rho}\ g^{\beta\nu}$ e $\rho \to \nu$ encontramos

$$\begin{aligned} R_{;\sigma} - R^{\nu}{}_{\sigma;\nu} - R^{\rho}{}_{\sigma;\rho} &= 0 \qquad (3.22)\\ R^{\nu}{}_{\sigma;\nu} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} &= 0. \qquad (3.23) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os termos por $g^{\mu\sigma}$ obtemos a relação

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0. \qquad (3.24)$$

O termo entre parênteses é conhecido como *Tensor de Einstein*. Dado por

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \qquad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \qquad (3.25)$$

Na forma contravariante e covariantes, respectivamente. Da equação (3.24) vemos que $(G^{\mu\nu})_{;\nu} = 0$ em que o tensor $G^{\mu\nu}$ de Einstein é construído apenas com o tensor de Riemann e a métrica do espaço-tempo.

3.1.3 Equação da geodésica

As geodésicas são descritas como sendo o caminho mais curto entre dois pontos. Para a geometria riemanniana, geodésicas são equivalente a linhas retas utilizadas na geometria euclidiana. Essa caracterização pode ser usada na geometria riemaniana com o comprimento de curva definido, entretanto, pode apresentar dificuldades quando o tensor métrico é indefinido - como no caso do espaço-tempo. As geodésicas satisfazem uma equação chamada de equação da geodésica, que é um fator importante na relatividade geral. A frente, veremos como a equação da geodésica se relaciona com o tensor métrico.

A equação da geodésica é uma consequência do princípio variacional[2]

$$\delta \int ds = 0, \qquad (3.26)$$

em que o termo ds é a raiz quadrada do termo dado em (2.15). Para simplificar a expressão é conveniente substituir $\dot{x}^\mu = dx^\mu/ds$ e definir $y = (g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)^{1/2}$ de forma que a expressão acima possa ser escrita como

$$\delta \int ds = \delta \int (g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2} = \delta \int y ds = 0. \qquad (3.27)$$

[2] O princípio variacional é um princípio utilizado com o cálculo de variações, em que são desenvolvidos métodos para encontrar funções que minimiza ou maximiza valores que dependam das funções. Pode ser visto com mais detalhes em [18].

Dessa forma, podemos resolver este problema variacional seguindo as equações de Euler-Lagrange [19]

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{3.28}$$

Nesse caso para tornar os cálculos mais simples é conveniente escolher uma função $y = ds^2$. Em que

$$\delta \int y ds = 0, \tag{3.29}$$

teremos então

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial y}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) - \frac{\partial y}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{3.30}$$

Lembrando que a métrica é função apenas de x e não de sua derivada $\dot{x}$ a derivada de y em relação a $\dot{x}^{\mu}$ fica expressa como

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\mu}}(g_{\nu\alpha}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\alpha}) = g_{\nu\alpha}\delta^{\nu}_{\mu}\dot{x}^{\alpha} + g_{\nu\alpha}\dot{x}^{\nu}\delta^{\alpha}_{\mu} = g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\alpha} + g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\nu} = 2g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\alpha}. \tag{3.31}$$

Sabendo que a métrica é simétrica. Dessa forma, voltando a equação de Lagrange, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(2g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\alpha}) - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} &= 0 \quad (3.32)\\ 2g_{\mu\alpha}\ddot{x}^{\alpha} + 2\dot{x}^{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\alpha}\dot{x}^{\beta} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}, &= 0 \quad (3.33) \end{aligned}$$

em que

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx^{\beta}}{ds}\frac{\partial}{dx^{\beta}} = \dot{x}^{\beta}\partial_{\beta}. \tag{3.34}$$

Dividindo-se a equação por 2 e lembrando da propriedade de simetria do tensor métrico pode-se escrever a equação como

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^{\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_{\beta}g_{\mu\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\mu\beta} - \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}\right)\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0. \tag{3.35}$$

Lembrando que o símbolo de Christoffel de segunda ordem é dado pela equação (2.52), podemos reescrever a equação acima como

$$\ddot{x}^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0, \tag{3.36}$$

que é a equação da geodésica. Essa equação nos diz que ao se conhecer a métrica do sistema, é possível determinar a trajetória da partícula. Para o caso da métrica do espaço plano, temos que $\ddot{x}^{\nu} = 0$ que equivale a equação da reta.

Após esses temas abordados podemos obter as equações de campo de Einstein e apresentar com mais detalhes sobre o seu significado.

4 O Campo Gravitacional

Para este capítulo, vamos encontrar a equação de campo e discutir sobre algumas de suas importantes propriedades físicas e matemáticas.

4.1 A equação de campo

A teoria de gravitação proposta por Newton é uma teoria escalar, com um potencial escalar ϕ que corresponde com uma fonte escalar do campo, sendo essa fonte a densidade de massa da distribuição do material.

Considerando o caso não relativístico da teoria de gravitação de Newton, em que $v << c$, sendo c a velocidade da luz igual a $c = 2,99 \times 10^8$ m/s, o potencial escalar de gravitação ϕ satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \tag{4.1}$$

no qual ρ descreve a densidade de matéria, e G a constante de Newton já mencionada no Capítulo 1. A sua solução geral é

$$\phi(x) = -G\int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x'}|}. \tag{4.2}$$

A generalização da densidade de matéria e energia é o chamado tensor de energia e momento $T_{\mu\nu}$. Por outro lado, em um espaço Riemanniano, o tensor métrico tem o papel do potencial gravitacional. Com isso, faremos uma analogia com a teoria de Newton seguindo a equação de Poisson apresentada acima. Para essa equação fazer sentido para o caso relativístico são necessários alguns requisitos: não deve conter nenhuma derivada do tensor métrico de ordem superior a dois e deve ser linear nas segundas derivadas do tensor métrico. As condições descritas são contempladas pelo tensor de Einstein, com isso, foi postulado a seguinte equação [2]

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \tag{4.3}$$

Note que do lado direito, a equação contém o tensor de energia e momento e o lado esquerdo é dado pela equação (3.25). Tirando o traço do tensor de Einstein chegamos a $-R = \chi T$, dessa forma, a equação (4.3) fica [2]

$$R_{\mu\nu} = \chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \tag{4.4}$$

Falta determinar o valor da constante χ, para isso, é necessário reduzir a equação (4.4) na forma da equação de Poisson descrita em (4.1) no limite não relativístico. Para isso, tomemos o movimento de uma partícula descrita pela equação da geodésica

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{4.5}$$

No caso não relativístico desprezamos o termo de segunda ordem da velocidade (dx^2, dy^2, dz^2), de modo que o elemento de linha fica sendo $ds^2 = c^2dt^2 = (dx^0)^2$. Logo, a equação se torna

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma^k_{00}\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 \tag{4.6}$$

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma^k_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 \tag{4.7}$$

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -c^2\Gamma^k_{00}. \tag{4.8}$$

Agora, faremos a aproximação para campos fracos, no qual escrevemos a métrica como a métrica de Minkowski mais um termo infinitesimal $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Por $h_{\mu\nu}$ ser muito pequeno podemos desprezar os termos de ordem igual ou maior que h^2. Assumindo um campo estático, ou seja, a derivada da componente do tempo é zero, temos pelo simbolo de Christoffel

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}g^{km}(-\partial_m g_{00}) = \frac{1}{2}\partial_k h_{00}. \tag{4.9}$$

Os índices só correspondem a coordenadas espaciais, desta forma, a expressão pode ser escrita como

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}h_{00}c. \tag{4.10}$$

comparando-se com a equação de movimento de Newton dada por,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi, \tag{4.11}$$

encontramos que o termo h_{00} deve ser

$$h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi. \tag{4.12}$$

Para o caso de movimentos muito lentos, ou seja, velocidades muito menores que a velocidade da luz, o termo principal no tensor de momento-energia é $T_{00} = \rho c^2$, dessa forma, o traço do tensor é dado por $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{00}T_{00} \backsimeq \eta^{00}T_{00} = \rho c^2$ [2]. fazendo a aproximação para a métrica de Minkowski. Da equação (4.4) temos

$$R_{00} = \frac{1}{2}\chi\rho c^2. \tag{4.13}$$

Utilizando a equação (3.8), e desprezando-se as derivadas temporais e os termos de ordem Γ^2 ficamos com

$$R_{00} = \partial_k \Gamma^k_{00}, \tag{4.14}$$

que ao comparar com a equação (4.9) e substituir a relação encontrada para h_{00} obtemos

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\phi. \tag{4.15}$$

Enfim, chegamos ao resultado

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{2}\chi\rho c^4, \tag{4.16}$$

que ao ser comparada com a equação de Poisson, equação (4.1), temos

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{4.17}$$

Com isso podemos escrever as equações de campo de Einstein. Substituindo χ em (4.3) encontramos

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

substituindo o lado direito pela equação (3.25) a equação de campo de Einstein fica escrita na forma,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{4.19}$$

A fonte situada no lado direito das equações de Einstein, $T_{\mu\nu}$, é o tensor de momento de energia da matéria. Este é um campo que descreve a densidade e o fluxo de energia e momento no espaço-tempo. Ele é o análogo gravitacional da corrente eletromagnética. O componente tempo-tempo do tensor com índices superiores dá a densidade de energia, os componentes tempo-espaço dão o fluxo de energia e a densidade de momento, e os componentes espaço-espaço dão o fluxo de impulso.

Note que com a equação expressa, o lado esquerdo tem componentes que se referem somente a geometria do espaço, envolvendo o tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de Ricci. O lado direito da equação descreve a matéria, a densidade e energia com o tensor momento-energia. No lado direito tem também a constante de Newton pois sob uma aproximação não relativística, devemos voltar a teoria de Newton. Com isso, podemos dizer que pela equação de Einstein a matéria diz como o espaço-tempo deve se comportar e da mesma forma, a curvatura do espaço tempo descreve o movimento dos objetos.

Na Relatividade Geral chama-se 'vácuo' uma região no espaço sem matéria, ou seja, uma região onde $T_{\mu\nu} = 0$. Assim, as equações de Einstein são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \tag{4.20}$$

Contraindo com $g^{\mu\nu}$, tem-se $R = 0$. Substituindo em (4.20)

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{4.21}$$

Logo, na ausência de matéria, o tensor de Ricci desaparece. Esse fenômeno não significa que o espaço é plano. Geralmente, o espaço-tempo é curvo também na ausência de matéria (espaço vazio). Do mesmo modo que as cargas não são suficientes para determinar o campo eletromagnético, a matéria não é suficiente para determinar o campo gravitacional. Um espaço-tempo onde o tensor de Ricci está desaparecendo em toda parte é chamado de espaço de Einstein.

Dessa forma, pode-se dizer:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= 0 \longrightarrow \text{espaço plano}, \\ R_{\mu\nu} &= 0 \longrightarrow \text{espaço vazio}. \end{aligned}$$

A equação de campo de Einstein em sua forma mais geral é escrita

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{4.22}$$

isto é, com um termo Λ multiplicando o tensor métrico. Esse termo Λ é o chamado constante cosmológica, que está relacionada com a expansão do universo. A constante é considerada ser muito pequena e só tem significância quando em uma escala cosmológica.

Enfim, essas equações definem a relatividade geral. Eles são suficientes para prever ondas gravitacionais, buracos negros, a expansão do Universo, e o Big Bang.

4.2 Interpretação da equação de campo

As equações de campo podem ser vistas de três formas [20]:

1. Equações diferenciais para determinar o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ a partir de um determinado tensor momento energia. Aqui estamos lendo as equações da direita para a

esquerda. O caso mais importante nesse modo de ver, é quando $T_{\mu\nu}$, neste caso,fornecem as soluções para o vácuo.

2. Equações a partir das quais o tensor energia-momento pode ser lido correspondente a um dado tensor métrico. Aqui estamos lendo a equação da esquerda para a direita. Originalmente, se pensava que essa seria uma maneira proveitosa para encontrar os tensores de energia-momento. Primeiramente escolhemos arbitrariamente 10 funções de $g_{\mu\nu}$, calculamos o valor do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ e com o resultado é possível encontrar o valor do tensor $T_{\mu\nu}$. No entanto, esse modo não se faz muito útil na prática pois o tensor energia-momento resultante é geralmente irreal fisicamente, como por exemplo a densidade de energia resulta em um valor negativo que é considerado como um resultado não físico, pois o caráter positivo da densidade de energia faz parte da teoria da gravitação.

3. As equações de campo consistem em dez equações que contém os dez componentes do tensor métrico e os dez componentes do tensor energia-momento. Deste ponto de vista, há uma escolha simultânea de $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. Essa abordagem é utilizada quando se pode ter uma noção parcial da geometria do espaço e da energia-momento. Dessa forma, as equações são utilizadas para tentar determinar os dois valores de fato.

4.2.1 Soluções para equação de campo

Um dos problemas para encontrar soluções para as equações de campo é devido ao fato delas não serem lineares, ou seja, se você tem duas soluções não pode simplesmente somá-las para obter uma terceira. De maneira prática, isso significa que não é possível dividir este problema físico em partes mais simples para poder analisá-lo. Fisicamente temos o seguinte: o campo gravitacional produzido por alguma fonte contém energia, logo, contém massa, e essa massa se torna ela mesma a fonte de um campo gravitacional, podemos dizer então que o campo gravitacional está acoplado a si mesmo. Originalmente Einstein previu que nunca seria capaz de encontrar uma solução exata para suas equações. Foi em menos de um ano após a publicação de Einstein que K. Schwarzschild[1] encontrou uma solução exata. Atualmente existem um grande número de soluções em que quase todas foram supostas algum tipo de simetria, devido a isso, pode ser que algumas das soluções não sejam físicas nem significativas de fato. Encontrar soluções para as equações de campo ainda é um caso em aberto.

Idealmente, queremos saber o que a teoria diz sobre situações fisicamente importantes. Nos casos em que a simetria está ausente, ou onde as condições de simetria não são fortes o suficiente para determinar uma solução, deve-se recorrer a métodos de aproximação. Esses métodos de aproximação são baseados na intensidade dos campos gravitacionais que

[1] Karl Schwarzschild foi um astrônomo e físico alemão, ele obteve a primeira solução para as equações de campo de Einstein em um campo estático e com simetria esférica. A solução de Schwarzschild é uma aproximação boa do campo produzido pelo Sol [2].

são mais frequentemente encontrados na natureza, ou em métodos assintóticos aplicados a fontes isoladas, de modo que, novamente, os campos são fracos muito longe das fontes. Essa intensidade de campos fracos significa, do ponto de vista matemático, que os termos lineares em certas equações são mais importantes do que o resto, que são os termos de ordem superior.

Considerações Finais

Com este trabalho foi possível fazer uma análise teórica sobre os conceitos de gravitação propostos por dois cientistas diferentes. Foi visto que a mecânica Newtoniana estava simplesmente incompleta por não ter uma visão relativística que não era comum na época. Além disso, foram estudados temas da "matemática pura" com a apresentação do cálculo tensorial aplicados na Relatividade Geral. Este trabalho permitiu uma formação adicional à da graduação, visto o que o tema Relatividade Geral normalmente não é apresentado dentro do currículo regular do bacharelado em física na UEM.

Referências

[1] J. D. Norton, "Einstein and nordström: some lesser-known thought experiments in gravitation," *The attraction of gravitation: New studies in history of general relativity*, pp. 3–29, 1993.

[2] V. D. SABBATA, M. GASPERINI, *Introduction to Gravitation*. World Scientific, 1985.

[3] S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Massachusetts Institute of Technology., 1972.

[4] J. D. Toniato, "De newton a einstein: a geometrização da gravitação," *Cadernos de Astronomia*, vol. 1, no. 1, pp. 17–29, 2020.

[5] L. POFFENBERGER, "September 23, 1846: Neptune's Existence Observationally Confirmed." https://www.aps.org/publications/apsnews/202008/history.cfm#:~:text=September%2023%2C%201846%3A%20Neptune%27s%20Existence,in%20the%20solar%20system%3A%20Neptune., September 2020. (Acesso em 07/01/2023).

[6] A. PAPAPETROU, *Lectures on General Relativity*. D.Reidel Publishing Company, 1974.

[7] W. O. Asher, "Berkeley on absolute motion," *History of Philosophy Quarterly*, vol. 4, no. 4, pp. 447–466, 1987.

[8] H. I. Hartman and C. Nissim-Sabat, "On mach's critique of newton and copernicus," *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 11, pp. 1163–1169, 2003.

[9] R. A. SERWAY, C. J. MOSES, and C. A. MOYER, *Modern Physics*. Thomson Brooks/Cole, 2004.

[10] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, "Ix. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 220, no. 571-581, pp. 291–333, 1920.

[11] C. Costa, "Teoria da relatividade: como eclipse solar no ceará há 100 anos transformou einstein em celebridade mundial." https://www.bbc.com/portuguese/brasil-48296017, 2019. Acesso em: 14/04/2023.

[12] J. B. NETO, *Matemática para Físicos*, vol. 1. Livraria da Física, 2010.

[13] DrPhysicsA, "Einstein field equations - for beginners!." https://www.youtube.com/watch?v=foRPKAKZWx8&t=1305s, 2013.

[14] R. EISBERG, *Fundamentals of Modern Physics*. John Wiley Sons, 1966.

[15] R. M. WALD, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[16] D. F. LAWDEN, *An Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology*. Dover Publications, 2003.

[17] C. ROVELLI, *General Relativity: The Essentials*. Cambridge University Press, 2021.

[18] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, and J. SAFKO, *Classical Mechanics*. Pearson, 2001.

[19] K. R. SYMON, *Mecânica Clássica*. Campus, 1996.

[20] R. DÍnverno, *Introducing Einsteinś Relativity*. Oxford University Press, 1998.