

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

PATRÍCIA APARECIDA GALI

**O ANO MILAGROSO DE EINSTEIN E O MOVIMENTO BROWNIANO**

MARINGÁ

2021

PATRÍCIA APARECIDA GALI

**O ANO MILAGROSO DE EINSTEIN E O MOVIMENTO BROWNIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista

MARINGÁ

2021

PATRÍCIA APARECIDA GALI

**O ANO MILAGROSO DE EINSTEIN E O MOVIMENTO BROWNIANO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Física.

Aprovado em: 03/12/2021

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista

---

Prof. Dr. Luciano Carvalhais Gomes

---

Prof. Dr. Rodolfo Teixeira de Souza

---

Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne – Suplente

*Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é  
senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria  
menor se lhe faltasse uma gota.*

*(Madre Tereza de Calcutá)*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus em primeiro lugar por tudo que sou.

Agradeço à minha família, meu pai Nestor, minha mãe Neide, que sempre me deu forças para continuar a lutar pelos meus sonhos; aos meus irmãos, que, mesmo na distância ou na cotidiana convivência, estavam me incentivando em cada desafio e puxando minha orelha quando necessário.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista, não só pela disposição em me orientar, mas também pela paciência, competência, pela sua amizade e compreensão em que por muitas vezes eu desisti, mas sempre me fez acreditar no que sou capaz.

Aos meus amigos pelo incentivo, pelas risadas, pelas longas conversas nos momentos incertos e pelos melhores conselhos possíveis.

## RESUMO

Este trabalho consiste de uma abordagem introdutória, por meio de uma apresentação progressiva e diferenciada, dos principais resultados apresentados ao mundo científico no “ano milagroso” de Einstein. Uma atenção maior é concentrada no estudo do movimento browniano, da equação de difusão e de suas extensões, considerando alguns aspectos matemáticos básicos e um pouco da história. Com efeito, pela sua natureza didática, o trabalho se inicia com o contexto histórico da época, passa pela descrição resumida de cada artigo desenvolvido por Einstein, naquele ano miraculoso e se concentra no problema do movimento de partículas suspensas. O primeiro dos trabalhos analisados discorre sobre o conceito dos quanta de luz, tendo como alvo o efeito fotoelétrico – quando se admite que a energia de radiação eletromagnética é descontínua (repartida em pacotes discretos). O segundo e terceiro artigos apresentam a hipótese sobre o movimento das moléculas, com a análise do movimento browniano. Por fim, o quarto artigo estabelece as bases da teoria da relatividade, unificando a mecânica e a eletrodinâmica na perspectiva do Princípio de Relatividade. Nessa linha de raciocínio, aborda-se, por fim, com um certo detalhe, o tratamento pioneiro do movimento browniano e da equação de difusão, enfatizando os elementos indispensáveis para esclarecer de que maneira se desenvolveram os fatos relacionado à física dos processos estocásticos em suas origens.

**Palavras-chave:** história da física, movimento browniano, equação de difusão.

## **ABSTRACT**

This work consists of an introductory approach, through a progressive and differentiated presentation, of the main results presented to the scientific world in Einstein's "miraculous year". A major attention is focused on the study of Brownian motion, the diffusion equation and its extensions, considering some basic mathematical aspects and some history. In fact, due to its didactic nature, the work begins with the historical context of the period, goes through a brief description of each article developed by Einstein in that miraculous year, and focuses on the problem of the motion of suspended particles. The first of the analyzed papers discusses the concept of light quanta, targeting the photoelectric effect - when it is admitted that the energy of electromagnetic radiation is discontinuous (divided into discrete packets). The second and third articles present the hypothesis on the motion of molecules, with the analysis of Brownian motion. Finally, the fourth article establishes the basis of the theory of relativity, unifying mechanics and electrodynamics in the perspective of the Principle of Relativity. Along this line of reasoning, we finally address, in some detail, the pioneering treatment of Brownian motion and the diffusion equation, emphasizing the essential elements to clarify how the facts related to the physics of stochastic processes developed from their origins.

**Keywords:** history of physics, Brownian motion, diffusion equation.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
<b>1.1 Einstein e a teoria do movimento browniano</b> .....	<b>9</b>
<b>2. O ANO MILAGROSO</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1 Efeito fotoelétrico</b> .....	<b>12</b>
<b>2.2 Movimento browniano</b> .....	<b>15</b>
<b>2.3 Relatividade especial</b> .....	<b>17</b>
<b>2.4 Equivalência entre massa e energia</b> .....	<b>18</b>
<b>3. O MOVIMENTO BROWNIANO</b> .....	<b>19</b>
<b>3.1 Definição</b> .....	<b>19</b>
<b>3.2 Um pouco de história sobre o movimento browniano</b> .....	<b>21</b>
<b>4. EQUAÇÃO DE DIFUSÃO</b> .....	<b>25</b>
<b>4.1 Definição</b> .....	<b>25</b>
<b>4.2 Movimento browniano e o processo difusivo</b> .....	<b>25</b>
<b>4.3 A difusão e o artigo de Einstein no movimento browniano</b> .....	<b>26</b>
<b>5. CONCLUSÃO</b> .....	<b>32</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>34</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O ano milagroso de Einstein é principalmente lembrado pelas rupturas da teoria da relatividade e do “quantum de luz”. No entanto, a tese de doutoramento, terminada em abril de 1905 e aceita pela Universidade de Zurique em julho, e o primeiro artigo sobre o movimento browniano, recebido para publicação no *Annalen der Physik* em maio, são trabalhos de alta qualidade, que já teriam sido suficientes para estabelecer a reputação do jovem Einstein. O tema deste trabalho é o relacionamento entre o mundo microscópico das partículas (átomos, moléculas) em eterno movimento e as leis visíveis do universo macroscópico da termodinâmica. Tanto na tese quanto no artigo sobre o movimento browniano há propostas para a estimativa do número de Avogadro, grandeza equivalente ao número de moléculas num mol de uma substância. Todos os trabalhos de 1905 compartilham a engenhosidade característica de Einstein, que é sempre ancorada na realidade profunda dos sistemas físicos.

Durante a minha graduação e principalmente na regência do meu estágio pude perceber a dificuldade e a falta de determinadas linhas de aprendizagem para os alunos do ensino médio. Portanto, o objetivo deste trabalho é aproximar o aluno do ensino médio, da física, de maneira menos frustrante e traumática ao conteúdo que a ciência nos traz. O contato tem sido desastroso e não se consegue na maioria das vezes atingir o aluno. Muitos sobrecarregam seus alunos com um mar de cálculos, complicando ainda mais a situação. A física sempre foi apresentada como um conjunto de equações matemáticas ao aluno, que sem base, depara com um grande problema e não consegue entender o que essa ciência oferece.

Para ter um melhor aproveitamento, uma boa alternativa dessa aprendizagem seria aliar ao ensino da física o lado humano da ciência. Ciência não é um conhecimento pronto e acabado, é algo em constante evolução. Quando se ensina física, deve-se retratar a vida do cientista, seu contexto histórico, suas tentativas, erros e acertos.

De acordo com Einstein:

“Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque ele se tornará assim uma máquina utilizável e não uma personalidade. É necessário que se ensine um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser compreendido, daquilo que é belo, daquilo que é eticamente correto.”

Infelizmente, com livros cada vez mais compactos, a história da física raramente encontra espaço.

A metodologia está centrada no estudo dos trabalhos originais relativos ao *Annus Mirabilis* (Ano Milagroso) de Einstein, concentrando no trabalho sobre o movimento browniano e equações de difusão. A ênfase será no uso de fontes primárias, mas também estudos de história da física serão importante instrumento para o desenvolvimento do trabalho. Também nos valeremos de artigos dedicados a problemas específicos relacionados com a temática do projeto de TCC.

### **1.1 Einstein e a teoria do movimento browniano**

Em 1827, o “movimento browniano” foi descoberto pelo botânico inglês Robert Brown, ao observar ao microscópio que grãos de pólen, quando suspensos em água, se movimentam continuamente de modo caótico. Inicialmente, esse movimento foi considerado como uma forma de vida, mas logo verificou-se que pequenas partículas inorgânicas apresentavam o mesmo comportamento. Até o desenvolvimento da Teoria Cinética, não houve explicação quantitativa para esse fenômeno. Foi só em 1905, que Albert Einstein desenvolveu a teoria cinética do movimento browniano, publicada na mesma edição no “*Annalen der Physik*” que continha o famoso artigo da Teoria da Relatividade e também o trabalho sobre o Efeito Fotoelétrico, por meio do qual ganhou o Prêmio Nobel de 1921.

Desde a sua publicação, a análise do movimento browniano feita por Einstein tem chamado a atenção da comunidade acadêmica por sua eficácia multidisciplinar, abrangendo as áreas da Física, Engenharia, Biologia, Matemática e Ciências Econômicas.

Existem várias abordagens por meio da qual podemos descrever o movimento browniano. São quatro abordagens básicas teóricas das partículas brownianas: o *tratamento difusivo de Einstein*, o *procedimento estocástico ou de força aleatória proposto por Paul Langevin*, a *abordagem via equação de Fokker-Planck originadas a partir do trabalho de Mariam Smoluchowski* e as *caminhadas aleatórias de Mark Kac*. Neste trabalho, abordaremos o tratamento centrado na difusão proposto por Einstein, no qual o comportamento irregular das partículas em suspensão surge

devido aos movimentos moleculares térmicos, e em que cada partícula executa esse movimento independentemente.

A hipótese de Einstein só é válida se os intervalos de tempo considerados não são exageradamente pequenos, mas, sim, pequenos se comparados com o tempo de observação macroscópica, sendo que esses eventos devem ser necessariamente admitidos como independentes. Essa teoria é construída a partir de uma hidrodinâmica de fluidos com conceitos probabilísticos que permite obter a flutuação quadrática associada a um processo dissipativo (descrito pelo coeficiente de viscosidade).

Essas flutuações permitiram que, depois, Jean Perrin pudesse obter experimentalmente com grande precisão o número de Avogadro. Os resultados puderam contribuir significativamente para que a hipótese atômico-molecular tivesse a aceitação necessária como uma descrição realista da matéria.

## 2. O ANO MILAGROSO

O ano de 1905 foi o ano marcante para Einstein – um ano que mudou e influenciou profundamente o curso da ciência do século XX; ano no qual escreveu, em seis meses, cinco artigos, os mais importantes e produtivos que algum cientista já teve. Einstein tinha uma intuição física muito profunda, criativa e precisa; por esse motivo ele conseguia observar coisas do cotidiano, dando importância e significado que, muitas vezes, outros não podiam visualizar.

Einstein divisava imagens com características próprias, como um objeto em queda livre para a Terra ou uma matéria cósmica correndo ao lado de um feixe de luz; neste caso, algo dificilmente pensável para uma pessoa comum.

Ao longo dos anos, Einstein exerceu uma espécie de presciência, como, por exemplo, quando conseguiu prever o uso da energia nuclear mais de três décadas antes da descoberta que a tornou possível; antecipou o desvio gravitacional para o vermelho em mais de quatro décadas antes de sua confirmação, previu o condensado de Bose-Einstein setenta anos antes da descoberta. Por fim, descreveu (ou, ao menos, possibilitou a descoberta) de estados quânticos emaranhados três décadas antes de eles se tornarem objeto de intenso estudo da comunidade de físicos e engenheiros de computação.

Embora suas ideias fossem de vagarosa aceitação na comunidade científica, Einstein estava sempre à frente do seu tempo em vários setores do conhecimento humano.

No século XX, duas grandes revoluções na física mudaram a forma de se interpretar os fenômenos físicos. A primeira delas foi a concepção de espaço e tempo – um espaço-tempo que, além de se unificar em um único conceito, também se mostra curvo em um grau sutil, nunca antes imaginado. A segunda dessas revoluções diz respeito à natureza da matéria e da radiação, trazendo à luz uma nova realidade de como as partículas se comportam como ondas e partículas, criando um conceito sobre a dualidade da luz.

Muitos cientistas que ocupam um lugar honroso na história científica faziam parte da população de cientistas do século XX – uma comunidade que contribuiu para o crescimento exponencial das ciências. Mas nenhuma dessas mentes brilhantes

conseguiu chegar perto da qualidade e da quantidade de trabalhos que Einstein produziu entre março e setembro de 1905.

Naquele ano maravilhoso, ele escreveu vinte e uma pequenas resenhas e cinco artigos fundamentais – um feito dificilmente igualável na história da física, mesmo levando-se em conta os trabalhos admiráveis de Newton – quatro revoluções abrangendo a matemática, a física e a cosmologia – e, mais tarde, as profundas e criativas intuições de Fresnel no campo da óptica física.

Um dos artigos mais importantes que destacaremos, dentre esses artigos mencionados anteriormente, é o que deu origem à sua dissertação de doutoramento e se ocupava da determinação das dimensões moleculares e da análise da natureza do movimento browniano. “De fato, seu trabalho sobre o movimento browniano estabeleceu as bases de uma parte importante do conhecimento estatístico, que teve implicações enormes em muitas outras áreas”. (STACHEL; JOHN, 2001, pg.8)

Nas próximas seções iremos relatar, de maneira abreviada, o conteúdo de cada artigo do ano milagroso de Einstein. Além do texto sobre o movimento de pequenas partículas em suspensão dentro de líquidos em repouso – que é o objetivo central de nossa análise – mencionaremos a sua abordagem sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, o seu trabalho sobre a inércia do corpo e a equivalência entre massa e energia – o pequeno trabalho que desvela a energia encerrada na matéria.

## **2.1 Efeito fotoelétrico**

Naquele início de século, o chamado efeito fotoelétrico – no qual a luz (radiação eletromagnética) arranca elétrons de certos metais - ainda intrigava os físicos. Abaixo de certa frequência da luz incidente, por maior que fosse a intensidade luminosa, elétrons não conseguiam escapar do metal. Quando se aumentava a intensidade de radiação, esperava-se, como previa a teoria, que elétrons mais energéticos saltassem. Porém, notava-se apenas um aumento na quantidade de partículas ejetadas, todas dotadas da mesma energia. Ao se aumentar a frequência da luz incidente – indo da luz visível para a ultravioleta, por exemplo – os elétrons se tornavam mais energéticos.

O efeito fotoelétrico foi descoberto por Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), em 1887, quando a sua atenção foi concentrada em um efeito periférico que ele observou

enquanto investigava a natureza das ondas eletromagnéticas; então, descobriu que a luz pode produzir centelhas elétricas. Iluminando-se a superfície de um metal com a luz de um arco voltaico – usado nos seus experimentos com as ondas eletromagnéticas –, Hertz observou essas centelhas.

William Hallwachs (1859 –1922), em Dresden, em 1887, demonstrou que a irradiação com luz ultravioleta age de modo que os corpos carregados adquiram uma carga positiva.

Em 1889, foi sugerido que a luz ultravioleta podia fazer surgirem grânulos metálicos a partir dos metais iluminados. Diversos autores, entre eles o bolonhês Augusto Righi (1850 – 1920), esclareceram que o fenômeno tinha a ver com a emissão de corpúsculos carregados negativamente.

Dez anos depois, Joseph John Thomson (1856 -- 1940) afirmou que o efeito fotoelétrico induzido pela luz ultravioleta consistia na emissão de elétrons: são os chamados *raios catódicos*.

Em 1902, Phillip Lennard (1862-1947) descobriu que a energia do elétron que era emitido pela superfície do metal não dependia da intensidade da radiação incidente.

Quando Einstein afrontou o problema em 1905, diversas características do efeito fotoelétrico eram conhecidas. Algumas delas já foram mencionadas acima e são:

1. quando a luz incide sobre o metal, os elétrons são emitidos umas vezes sim, outras não;
2. a luz intensa (brilhante) incidindo sobre o metal faz com que mais elétrons sejam expelidos do que quando incide uma luz menos brilhante;
3. a intensidade da luz não influi na energia dos elétrons que são emitidos;
4. para um dado metal iluminado por uma determinada luz, a energia cinética dos elétrons nunca é maior do que um certo valor máximo.

O fato de a energia dos elétrons depender da frequência da luz e não da intensidade é um dos fenômenos mais estranhos para a teoria ondulatória clássica.

Era esperado, com efeito, que quanto mais intensa fosse a luz incidente, mais energéticos fossem os elétrons emitidos pelo metal. Ao invés disso, porém, a intensidade da luz determina somente o número dos elétrons emitidos, mas não as suas energias.

Em poucas palavras, a explicação para isso tudo escapava à física da época.

Tentativas teóricas haviam sido feitas para solucionar a disparidade entre teoria e experimento. O físico alemão Max Planck (1858-1947), em uma tentativa desesperada de encontrar uma solução, fez a hipótese, em 1900, de que a troca de energia entre a radiação luminosa e a matéria só pode ocorrer através de quantidades com um certo valor mínimo – o quantum de energia – e não de forma contínua, como exigido pela teoria ondulatória. Insatisfeito com sua própria proposta e considerando-a um artifício provisório, Planck tentaria inúmeras vezes encontrar outra maneira de chegar à expressão experimentalmente correta a que chegara e que preservasse o caráter contínuo da radiação. Mas foi o artigo ‘Sobre um ponto de vista heurístico relativo à produção e à transformação da luz’, de 17 de março - portanto, o primeiro concluído naquele ano - que resolveu o problema. É muito comum identificar esse trabalho como aquele do efeito fotoelétrico, tendo-se a impressão de que o seu escopo principal fosse o de explicar, justamente, o efeito. Entretanto, o trabalho é dedicado ao problema da radiação de corpo negro. Somente no final do artigo, depois de ter discutido a radiação de corpo negro, essa é usada como possível explicação de três experimentos, um dos quais é o efeito fotoelétrico.

Nele, Einstein adotou uma hipótese aparentemente simples: a luz é formada por partículas, os quanta de luz, que passaram, em 1926, a ser chamados fótons. A energia da radiação vem, portanto, em pacotes (fótons). Com isso, o efeito fotoelétrico ganhou uma explicação que podia ser testada experimentalmente: aumentar a intensidade da luz significa apenas aumentar o número de fótons de mesma energia que incidem sobre o metal. Aumentar a frequência da luz torna os fótons mais energéticos, pois sua energia, pela proposta de Einstein, é proporcional à frequência

- e isso faz com que os elétrons venham a ganhar mais energia nas colisões com os fótons que os injetam.

Assim, a solução proposta por Einstein foi tal que a energia máxima dos elétrons que deixam o metal é determinada pela equação simples:

$$E_{\text{máx}} = h \nu - P \quad (2.1)$$

em que  $P$  é chamada de *função de trabalho* do metal e  $\nu$  é a frequência, sendo  $h$  a famosa constante de Planck.

O quantum de luz, de energia  $h\nu$ , absorvido pelo elétron no metal é diminuído pelo trabalho,  $P$ , -- quantidade necessária para fazê-lo "escapar" do metal. A diferença na energia é aquela que se encontra sob a forma de energia cinética. A energia cinética dos elétrons cresce linearmente com a frequência da radiação incidente, um fato que não depende da substância utilizada.

A ideia de que a luz tem natureza corpuscular foi classificada por Einstein como a "mais revolucionária" de sua vida. Em 1915, o físico norte-americano Robert Millikan (1868-1953), ao contrário do que pretendia inicialmente, chegou a resultados que confirmaram a previsão de Einstein sobre o efeito fotoelétrico. Foi principalmente por essa previsão quantitativamente correta que Einstein ganhou o Nobel de 1921 – o prêmio não cita 'quanta de luz', cuja realidade era ainda controversa.

## 2.2 Movimento browniano

Em seu segundo trabalho de 1905: 'Movimento de partículas em suspensão em um fluido em repouso como consequência da teoria cinética molecular do calor'. Einstein previu a variação (média) na posição da partícula ocasionada por essas colisões, variação essa que pode ser medida pela observação em um microscópio. Deduziu também uma maneira de se calcular o número de Avogadro (cerca de  $6 \times 10^{23}$ ), ou seja, o número de átomos (ou moléculas) existentes em uma quantidade pré-fixada - o chamado átomo-grama (ou molécula-grama) - de um elemento químico ou substância.

Einstein terminou o trabalho oferecendo aos oponentes da teoria atômica um experimento que poderia testar a sua previsão: “Se não estiver correta, isso significaria um argumento de peso contra o conceito cinético-molecular de calor. Esperamos que logo venha um pesquisador para elucidar esta questão importante para a teoria do calor”.

A tese de doutorado de Einstein, pela Universidade de Zurique (Suíça), ‘Uma nova determinação das dimensões moleculares’, girava em torno do mesmo tema: a existência e o comportamento dos átomos e das moléculas. Ele combinou resultados da hidrodinâmica clássica com os da teoria da difusão para criar um novo método de determinação das dimensões moleculares e do número de Avogadro. Para isso, teve que trabalhar com uma teoria molecular para os líquidos, tarefa bem mais difícil que para os gases. Os átomos e as moléculas não podiam ser observados diretamente pelos microscópicos então existentes.

Einstein inventou uma maneira indireta de fazê-lo: uma teoria simples e elegante que, a partir da medida de quantidades macroscópicas, com a viscosidade de um líquido e o coeficiente de difusão de uma substância nela imersa, permitia determinar as dimensões das moléculas dissolvidas. Usou os dados disponíveis para o açúcar dissolvido na água e, com isso, pôde fazer uma boa estimativa das dimensões das moléculas.

A tese foi concluída em 30 de abril de 1905, mas teve uma história longa e tortuosa. Em 1901, Einstein havia já submetido uma dissertação à Universidade de Zurique - onde o original não sobreviveu -, mas retirou-a no início de 1902, e em janeiro de 1903, abandonou seus planos de tese dizendo: “Essa comédia toda já me aborreceu”. Em 1905, no entanto, retomou a ideia do doutorado. As razões eram claras: isso poderia ajudá-lo na ascensão no escritório de patentes e abriria a chance de uma carreira acadêmica. Ele tentou inicialmente que o trabalho sobre relatividade constituísse a dissertação, o que teria sido rejeitado. Voltou-se então, para uma questão ao feitio dos físicos de Zurique, uma investigação mais solidamente escorada em experimentos. E teve êxito. Einstein veria também, posteriormente, falharem várias tentativas de conseguir um certificado para lecionar nas universidades, o que só conseguiria em 1908. Outro detalhe curioso, difundido em algumas de suas biografias, é que Kleiner aprovou a tese de 1905, mas reclamou que ela estava muito

curta - 17 páginas apenas. Einstein acrescentou uma única frase, e ela foi aceita sem comentários, o que divertiu particularmente seu autor.

### 2.3 Relatividade especial

Enviado em 30 de junho de 1905 o artigo 'Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento' aborda o conflito aparente entre a teoria eletromagnética e o princípio da relatividade - pelo qual as leis da física devem ter a mesma forma para todos os observadores inerciais, ou seja, não acelerados -, originado da mecânica clássica.

O eletromagnetismo oferecia uma descrição unificada dos fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos e tinha já décadas de sucesso. Por outro lado, a mecânica clássica contava com mais de 200 anos de êxito quase absoluto em seu domínio descritivo. No entanto, as equações de Maxwell do eletromagnetismo não são compatíveis com o princípio da relatividade de Galileu, que está na base da mecânica clássica.

Como conciliá-los?

Hipóteses ad hoc - ou seja, forjadas a partir do fenômeno que querem explicar e sem maiores fundamentações teóricas - haviam sido formuladas, especialmente pelo físico holandês Hendrik Lorentz (1853-1928), mas não ofereciam uma solução teórica aceitável aos olhos de Einstein. Sua proposta será radical e aparentemente inconsistente: estender o princípio da relatividade para toda a física e introduzir a hipótese adicional da independência da velocidade da luz em relação ao movimento da fonte que a emite.

Com uma frase curta, o jovem físico eliminou de suas considerações a noção do éter que era aceito como realidade por praticamente todos os físicos de sua época. O resultado, decorrente de suas premissas, de que a luz tem a mesma velocidade para todos os observadores quaisquer que sejam seus movimentos, estavam em conflito com o senso comum e com a mecânica de Newton, que previa velocidades diferentes quando medidas por observadores que se movem um em relação ao outro. Isso forçou Einstein a uma revisão dos fundamentos cinemáticos da física: discutir os conceitos de tempo e de espaço e a maneira como são mensurados. Sua nova definição para se medir o tempo e sincronizar os relógios, por meio de sinais

luminosos, levou ao abandono da noção de tempo absoluto: dois eventos que são simultâneos para um observador (com um relógio) em repouso não são simultâneos para um observador em movimento.

A reformulação dos conceitos fundamentais de tempo e espaço, tornados como dados a priori por séculos, constitui-se certamente em uma das revoluções mais importantes da ciência, embora seu próprio autor não pensasse assim: ele a via como um aperfeiçoamento da física clássica.

#### **2.4 Equivalência entre massa e energia**

No último artigo em setembro de 1905, um artigo de apenas três páginas, com um título interrogativo, “A inércia de um corpo depende de seu conteúdo energético?”, Einstein deduziu uma fórmula que se tornou famosa, relacionando a energia de um corpo com sua massa.

Essa dedução indica que quantidades muito pequenas de massa podem ser convertidas em quantidades enormes de energia e vice-versa, sendo que a massa e a energia são de fatos equivalentes.

Einstein concluiu o artigo de maneira cuidadosa:

*“A massa de um corpo é uma medida de seu conteúdo de energia; se a energia muda de  $E$ , a massa varia no mesmo sentido de  $E/c^2$  ... Não é impossível que, com corpos cujo conteúdo de energia é variável em um alto grau (por exemplo, com sais de rádio), a teoria possa ser colocada à prova com sucesso. Se a teoria corresponder aos fatos, a radiação carrega inércia entre os corpos emissores e os corpos absorvedores”.*

Experimentos vieram a confirmar as expectativas de Einstein na década de 1930. Em 1945, a bomba atômica – a qual Einstein duvidou por muito tempo que fosse ser construída, pois sabia que seu uso pudesse ser trágico – mostrando de forma trágica o acerto e o poder de suas ideias.

### 3. O MOVIMENTO BROWNIANO

Antes de abordar diretamente a contribuição de Einstein para o problema, é útil apresentar os principais ingredientes do fenômeno que será por ele discutido no artigo de 1905.

#### 3.1 Definição

É o movimento irregular de pequenas partículas que estão suspensas em um líquido ou gás, causado pelo bombardeamento dessas partículas por moléculas do meio.

Um dos primeiros cientistas a observar, e, conseqüentemente, a relatar o movimento aleatório das partículas foi o botânico inglês Robert Brown (1773-1858) ao observar que uma suspensão aquosa do pólen da erva *Clarkia pulchella* continha partículas microscópicas realizando um movimento em ziguezague contínuo e aleatório. Antes dele, a primeira observação do fenômeno foi relatada pelo poeta romano, Titus Lucretius Carus (morto por volta de 55 a.C.), no poema *De rerum natura* (Sobre a Natureza das Coisas).

O trabalho de Brown foi precedido pelas observações feitas por John T. Needham (1713-1781) e F. Wilhelm von Gleichen (1717-1783), mas ele foi o primeiro a realizar uma investigação detalhada do fenômeno, provando que é uma característica de todas as partículas microscopicamente pequenas (e não pode ser atribuída à vida em partículas propriamente ditas). A teoria quantitativa do movimento Browniano translacional foi desenvolvida independentemente por Einstein (1905), Marian von Smoluchowski (1906), e Paul Langevin (1908).

Em poucas palavras, as partículas, quando estão suspensas em um líquido, tendem a se mover em caminhos pseudoaleatórios através do líquido, mesmo se este líquido estiver calmo.

O movimento browniano é um fenômeno que resulta da assimetria nos impactos cinéticos das moléculas que compõem o líquido (é um fenômeno devido a flutuações). Essa fase líquida deve estar a uma temperatura tal, que suas moléculas ou átomos sejam termicamente animados (agitados), colidindo uns com os outros.

Os movimentos são realizados por qualquer partícula minúscula suspensa num líquido ou num gás. Tais movimentos caóticos são realizados, por exemplo, por partículas de fumo em ar parado. As investigações mostraram que a natureza do movimento browniano depende das propriedades do líquido e do gás em que as partículas estão suspensas, mas não depende das propriedades da substância em que as próprias partículas consistem.

A velocidade do movimento browniano das partículas cresce com o aumento da temperatura e com a diminuição das dimensões das partículas. Todas essas leis podem ser facilmente explicadas se admitirmos que os movimentos das partículas em suspensão aparecem devido aos impactos recebidos por elas das moléculas em movimento do líquido ou gás em que se encontram, tal como interpretado corretamente pelo poeta Lucrecio.

Naturalmente, cada partícula é sujeita a tais impactos de todos os lados. Após a completa desordem dos movimentos moleculares, poderíamos esperar que o número de impactos de um lado e da direção oposta é tal que todas elas devem compensar-se completamente umas às outras, e as partículas devem permanecer estacionárias.

Isto é exatamente o que ocorre se as partículas não forem demasiado pequenas.

Mas quando temos a ver com partículas microscópicas ( $10^{-4}$  a  $10^{-5}$  cm de diâmetro), as coisas são diferentes. Apenas decorre do fato de os movimentos moleculares serem caóticos que, em média, o número de impactos de diferentes direções é o mesmo. Desvios em relação aos valores médios, no entanto, são inevitáveis num sistema estatístico como um líquido ou um gás. Tais desvios dos valores médios ou médios das quantidades que ocorrem num pequeno volume ou durante um pequeno intervalo de tempo são denominados *flutuações*.

O ponto crucial da análise é que se um corpo de tamanho normal estiver num líquido ou num gás, o número de impactos das moléculas é tão grande que é impossível notar impactos separados ou uma predominância aleatória de impactos numa direção em relação aos impactos noutras direções. Para partículas minúsculas, contudo, o número total de impactos é comparativamente pequeno, de modo que a prevalência do número de impactos primeiro numa direção e depois noutra se torna

perceptível. Devido a estas flutuações do número de impactos, os movimentos convulsivos característicos das partículas em suspensão são chamados movimentos Brownianos.

É importante insistir. O movimento browniano não é o movimento das moléculas. Só muito claramente revela a existência de um movimento molecular caótico. Pode ser explicado pelo aparecimento de uma força resultante tendo uma direção definitiva devido a uma diferença de probabilidade entre o número de impactos das moléculas contra uma partícula de diferentes direções. Como as flutuações normalmente duram pouco tempo, então a direção da resultante mudará muito rapidamente, e juntamente com ela, a direção do movimento das partículas mudará. Isso está subjacente à natureza caótica do movimento Browniano, que reflete a natureza caótica do movimento molecular.

A estes aspectos qualitativos do movimento browniano foram acrescentadas abordagens matemáticas bem sucedidas no início do século XX, como iremos discutir agora.

Esse fenômeno do movimento browniano também pode se referir a modelos matemáticos usados para descrevê-los, e são usados como outros padrões de movimento estocástico.

O modelo matemático está relacionado com uma estrutura maior e não propriamente com o deslocamento de uma única partícula.

O fenômeno admite que o estado futuro da partícula é determinado inteiramente pelo seu estado atual e, não por qualquer estado passado. Por essa propriedade, o fenômeno também é denominado de processo de Markov ou markoviano. Nessa perspectiva simplificada, o modelo matemático tem muita semelhança com o movimento físico browniano.

### **3.2 Um pouco de história sobre o movimento browniano**

Além do que foi acenado anteriormente, alguns aspectos da história do problema merecerão a nossa atenção, nesta seção. Como vimos, foi no ano de 1827 que o botânico Robert Brown observou pequenos grãos de pólen na água,

microscopicamente, até que verificou que esses grânulos se moviam constantemente como se alguma coisa estivesse chocando entre eles. Após várias observações, uma delas se destacou: a hipótese de que esses movimentos tivessem a sua origem na troca de calor no líquido, ou da sua gradativa evaporação. O botânico imaginava (inicialmente) que essa mobilidade partia da própria partícula; porém, tal ideia foi rejeitada quando “ele descobriu que o mesmo movimento ocorria quando usava grãos de pólen que haviam sido guardados durante 100 anos, demonstrando que o movimento não era iniciado pelos grãos vivos”. (ROONEY; ANNE, 2013, pg.42)

Nas décadas seguintes às descobertas de Brown, várias tentativas foram feitas para descobrir a natureza do movimento browniano. Experimentos em laboratórios demonstraram que a intensidade do movimento aumentava quando se reduziam a viscosidade do meio ou o tamanho das partículas, ou quando se elevava a temperatura da solução.

*Muitas causas possíveis foram aos poucos eliminadas, tais como: atrações ou repulsões entre as partículas suspensas, ações capilares ou higrométricas, bolhas temporárias de ar, correntes de convecção no interior da solução, gradientes de temperatura ou algum tipo de perturbação mecânica, além de outros tipos de instabilidade no fluido.* (SILVA; J.M., LIMA; J.A.S., 2007, v.29, n.1, pg.25)

Devido às colisões com moléculas do fluido, foi que a partir de 1860, começava a ganhar corpo a teoria que o movimento errático browniano poderia ocorrer, e o movimento aleatório aparentemente nunca cessava.

Foi em 1877, que J. Desaulx retornou ao tema sugerindo:

*em minha forma de pensar, o fenômeno é um resultado de movimento molecular térmico no ambiente líquido (das partículas)”.* (ROONEY; ANNE,2013)

Em 1889, o físico francês Louis Georges Gouy (1854-1926), concordou com Desaulx, quando descobriu que quanto menor a partícula, mais rápido ela se movia.

Em 1900, o geofísico austríaco Felix Maria Exner (1876-1930) fez um experimento, conseguindo medir o movimento e relacionou essa capacidade de se movimentar ao tamanho e a temperatura da partícula.

*“Exner calculou a velocidade das moléculas com base em observações que, segundo ele interpretou, forneciam as velocidades médias das partículas em suspensão”. (STACHEL; JOHN, 2001, pg.94)*

Einstein, durante a sua vida acadêmica, procurou se apoderar de conhecimentos diversos a respeito da teoria molecular do calor, estudando os trabalhos de Ostwald, Mach e Boltzmann. Ele concluiu a leitura de uma obra de Boltzmann, a *Gastheorie*, em 1900, chamada a teoria do gás.

Ludwig Boltzmann (1844-1906) era um físico austríaco fragilizado emocionalmente e mentalmente. “A desilusão com a maioria dos físicos que rejeitaram o atomismo acabou contribuindo para o suicídio de Boltzmann, que se enforcou em 1906”. (ROONEY; ANNE, 2013, pg.42)

Na confrontação da sua teoria com a observação, Einstein criticava Boltzmann pela falta de ênfase, mas ficou convencido da sua retificação dos princípios teóricos em seus primeiros trabalhos de pesquisa independentes que publicou. Einstein desenvolveu uma teoria das forças atômicas moleculares, por entender como correta a constituição atômica da matéria e da eletricidade, estabelecendo muitas relações entre fenômenos observáveis.

Einstein em seu trabalho dizia:

*uma molécula dissolvida difere de um corpo em suspensão apenas no tamanho, e é difícil ver a razão pela qual corpos em suspensão não devam produzir a mesma pressão osmótica que um número igual de moléculas dissolvidas. (STACHEL; JOHN, 2001, pg.92)*

Einstein fez uma observação sobre a teoria clássica da termodinâmica levantando questionamentos sobre objetos usados macroscopicamente em partículas suspensas num fluido, pois elas não deveriam efetuar uma pressão osmótica sobre uma parede semipermeável. Essa observação foi inédita, porque ninguém havia olhado para essa teoria dessa maneira levando a uma comparação com a Teoria Cinética. A partir deste momento, Einstein mudou radicalmente os estudos em relação às teorias termodinâmicas e atômicas, começando a ter o seu núcleo sobre aplicação do conceito termodinâmico, pressão osmótica e as partículas em suspensão.

Com a invenção do ultramicroscópio, observações sobre o movimento browniano puderam ser feitas em 1902, sendo possível demonstrar além da realidade

física das partículas coloidais o seu movimento irregular. Mas esse avanço da tecnologia continuava a deixar em aberto a medição das velocidades. Essa questão só foi discutida por Einstein e Smoluchowski, de modo independente, em seus estudos teóricos sobre o movimento browniano nos trabalhos de 1905 e 1907, respectivamente.

*“Ambos introduziram o deslocamento quadrático médio das partículas em suspensão como quantidade observável primária no movimento browniano”. (STACHEL; JOHN, 2001, pg.93)*

No trabalho de Einstein, ele argumentou que a velocidade da partícula suspensa num fluido era tão pequena que não poderia ser medida, pois as forças dissipativas relacionavam com a direção, o sentido e a grandeza dessa velocidade.

Foi em 1908 que o francês Jean Perrin (1870-1942), aprovou a teoria de Einstein sobre o movimento browniano, medindo o tamanho de uma molécula de água usando o modelo de Einstein.

*“Esta foi a primeira evidência experimental para a existência de moléculas, pela qual Perrin recebeu o Prêmio Nobel da Física em 1926”. (ROONEY; ANNE, 2013)*

Nenhum cientista poderia negar a existência de átomos e moléculas.

## 4. EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

### 4.1 Definição

A difusão molecular é um tipo de transporte de matéria que tem como objetivo promover o equilíbrio entre duas soluções que se encontram com concentrações diferentes. É um fenômeno físico, no qual as moléculas se movem constantemente em um fluido devido à existência de energia térmica, sendo que esse fluido pode ser um líquido ou um gás, permitindo a passagem do soluto para regiões onde há menores concentração.

Um exemplo ocorre quando abrimos um frasco de perfume em um ambiente fechado: podemos sentir o seu cheiro rapidamente, porque as moléculas do líquido, depois da evaporação, se difundem pelo ar, propagando-se por todo o ambiente. Outro exemplo ocorre quando colocamos um pouco de açúcar em uma xícara de café: as moléculas de sacarose se difundem por todo o café.

Esses exemplos permitem demonstrar que para o fenômeno da difusão acontecer, a distribuição espacial das moléculas não pode ser homogênea: tem que existir uma diferença ou um gradiente de concentração entre dois pontos no meio.

### 4.2 Movimento browniano e o processo difusivo

Usando a lei mais conhecida no processo de difusão, a Lei de Fick, o movimento browniano se torna um exemplo da ocorrência desse processo de difusão.

A Lei de Fick afirma que a densidade de corrente de partículas é proporcional ao gradiente de concentração, dada por:

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\rho, \quad (4.1)$$

em que  $D$  é o coeficiente de difusão, que depende das propriedades do meio, indicando a rapidez com que a grandeza medida por  $\rho$  se difunde de regiões de alta concentração para regiões de baixa concentração.

*“O sinal negativo combinado com o gradiente na Lei de Fick, significa que a difusão ocorre da região de alta densidade para a região de baixa densidade”.*  
(MACEDO; ANTÔNIO, 2008, pg.14)

A quantidade  $\rho$  é definida como a quantidade de substância e pode ser função do tempo e da posição,  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ .

A equação de continuidade é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.2)$$

Devido a um fluxo de entrada ou de saída de partículas do sistema, essa equação nos informa qual é a alteração na densidade em um sistema (o gás, por exemplo). Ou seja, as partículas não podem ser destruídas nem criadas: a expressão corresponde a uma lei de conservação.

Se, agora, substituirmos (4.1) em (4.2), obteremos a importante equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D\nabla \rho) = D\nabla^2 \rho \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\nabla^2 \rho \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é chamada de equação de difusão no caso em que  $D$  é constante e  $\nabla^2$  é o operador de Laplace ou laplaciano. Se o coeficiente de difusão depende da densidade, então a equação não é linear; caso contrário será linear.

Essa importante equação possui inúmeras aplicações relevantes na física atual: difusão de calor em diferentes meios, difusão de massa, difusão de carga elétrica em meios condutores são as aplicações mais comuns. As partículas se difundem através do gás, quando se diminui a pressão desse gás, e a equação permite estudar esse comportamento.

### 4.3 A difusão e o artigo de Einstein no movimento browniano

Como mencionado brevemente, entre os anos de 1902 e 1904, há uma série de trabalhos dedicados à mecânica estatística que Einstein escreveu, apresentando uma mudança na perspectiva do trabalho precedente de Boltzmann sobre os fundamentos da mecânica estatística.

Os artigos são *Kinetische Theorie des Wärmegleichgewichtes und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamici* (Teoria cinética de equilíbrio térmico e a segunda lei da termodinâmica), em que trata das definições de temperatura e entropia em condições de equilíbrio térmico e do teorema de equipartição.

O segundo trabalho se intitula *Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamic* (Uma teoria dos fundamentos da termodinâmica), em que se ocupa dos problemas da irreversibilidade.

O terceiro é *Zu allgemeinen moleculares Theorie der Wärme* (Por uma teoria molecular geral do calor), em que trata das flutuações e dos novos processos para determinar a constante de Boltzmann.

Ele desejava usar a mecânica estatística para provar a estrutura molecular da matéria. Assim, suas atenções foram centradas em torno do equilíbrio (esse negligenciado por Boltzmann e ignorado por Planck). Einstein ainda retomou a primitiva interpretação de Boltzmann para a probabilidade em termos de tempo de permanência do sistema naqueles estados, ligando-a agora à frequência temporal do sistema.

Nesse ponto de vista, a constante  $k$  (chamada durante um certo tempo de constante de Planck, mas depois, por justo mérito, de constante de Boltzmann) desempenha um papel fundamental e a sua determinação será um dos objetivos nos estudos de Einstein.

Em uma carta de grande valor histórico, para o seu amigo Conrad Habicht (1876 -- 1958), no final do mês de maio, Einstein antecipa quais seriam as suas contribuições em gestação naquele período. Ele fala do seu trabalho sobre o movimento browniano, mencionando as partículas “suspensas no líquido” que “devem realizar um movimento desordenado observável, causado pela agitação térmica”.

Com efeito, na abertura do artigo dedicado ao problema, ele explicita a sua proposta geral sobre o trabalho:

*Neste trabalho se mostrará que, segundo a teoria cinético-molecular do calor, corpos de diminuição macroscopicamente visível em suspensão em líquidos devem executar, em consequência da agitação térmica molecular, movimentos de amplitude tal que podem ser facilmente observáveis ao microscópio. É possível que os movimentos em discussão sejam idênticos ao*

*chamado “movimento molecular browniano”; todavia, as informações à minha disposição concernentes a este último são tão carentes de precisão que eu não pude formar uma opinião a respeito. Se o movimento discutido aqui pode ser de fato observado (juntamente com as regularidades que se espera encontrar para ele), então a termodinâmica clássica não se pode mais tomar como exatamente válida para espaços de dimensões acessíveis ao microscópio e é então possível uma determinação exata das dimensões efetiva.*

No trabalho de Einstein, dois objetivos são estreitamente ligados: a revelação efetiva das flutuações estatísticas e a busca dos fatos que tornassem o mais possivelmente certa a existência dos átomos de definidas dimensões finitas.

Um primeiro resultado impressionante exposto no trabalho se refere ao cálculo do coeficiente de difusão  $D$ , da substância, na forma:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi\eta P} \quad (4.5)$$

na qual  $P$  é aqui o raio da partícula esférica,  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade do líquido que a circunda,  $R$  a constante dos gases,  $T$  a temperatura absoluta e  $N$  representa, segundo o próprio Einstein, “o número real de moléculas contidas em uma molécula-grama”, ou seja, o número de Avogadro.

Einstein considera a relação entre o movimento irregular das partículas e o processo de difusão, numa seção posterior do artigo. Assim, o movimento browniano é descrito como um processo de difusão através da equação.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (4.6)$$

na qual  $f(x,t)$  é o número de partículas por unidade de volume em torno de  $x$  no tempo  $t$ .

Para que Einstein conseguisse obter essa equação, a ideia era considerar que cada partícula executasse um movimento que é independente do movimento das outras partículas, em diferentes intervalos temporais  $\tau$ , muito pequenos, mas suficientemente grandes para dar margem a observações; mesmo assim, é de tal magnitude que o movimento executado por uma partícula em dois intervalos consecutivos de tempo  $\tau$  podem ser considerados como fenômenos mutuamente independentes; assim, o movimento de uma partícula não depende da história antes

do intervalo considerado. A difusão seria um processo markoviano, como sublinhado anteriormente.

Seja  $\phi(\Delta)d\Delta$  a probabilidade de uma partícula em suspensão no líquido sofrer um deslocamento entre  $\Delta$  e  $\Delta + d\Delta$  num intervalo de tempo  $\tau$ . A densidade de probabilidade deve ser simétrica,  $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$  e normalizada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1. \quad (4.7)$$

O número de partículas por unidade de volume,  $f(x,t)$ , que estão localizadas entre dois planos perpendiculares ao eixo  $x$ , com abscissas  $x$  e  $x+dx$ , no instante de tempo  $\tau$ , será

$$f(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \Delta, t)\phi(\Delta)d\Delta$$

ou

$$f(x, t + \tau) \approx f(x, t) + \tau \frac{\partial f}{\partial x},$$

em que a aproximação é possível porque  $\tau$  é muito pequeno. Agora,  $f(x,t)$  no integrando do lado direito pode ser desenvolvida em série de Taylor até os termos de segunda ordem em  $\Delta$ ,

$$f(x + \Delta, t) = f(x, t) + \Delta \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \dots .$$

assim,

$$f(x, t + \tau)dx = f(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\phi(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta + \dots .$$

Usando (4.7), conseguimos deduzir que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\phi(\Delta)d\Delta = 0$ , pois  $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$  e, por conseguinte, que

$$\tau \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2} \phi(\Delta)d\Delta. \quad (4.8)$$

Definindo  $D$  como o segundo momento da distribuição de probabilidade,

$$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \phi(\Delta) d\Delta,$$

chegamos à equação de difusão na forma (4.6) das partículas em suspensão. O resultado implica que a distribuição  $\phi(\Delta)$  possui um segundo momento.

Einstein aponta a solução da equação de difusão, com condições iniciais apropriadas, da forma gaussiana, admitindo que no instante  $t=0$  todas as partículas se encontram na origem do sistema de coordenadas, a solução da equação (4.6) é

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \quad (4.9)$$

em que  $n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx$ . Portanto, o deslocamento quadrático médio das partículas em suspensão é definido por,

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, t) dx = 2Dt \quad (4.10)$$

e é proporcional ao coeficiente de difusão, comportando-se linearmente com o tempo. Essa equação representa uma primeira forma das conhecidas “relações de flutuações-dissipação”. Neste ponto, Einstein argumenta que os movimentos das diversas partículas são independentes e que, portanto, a origem das coordenadas não deve ter nenhum significado.

Agora, usando (4.5), como

$$\langle x^2 \rangle = \frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi\eta P} t, \quad (4.11)$$

obtem-se uma relação que pode ser usada para se determinar o número de Avogadro, em que

$$N = \frac{RT}{\langle x^2 \rangle} \frac{1}{3\pi\eta P} t, \quad (4.12)$$

as quantidades  $\langle x^2 \rangle$ ,  $t$ ,  $P$  e  $\eta$  podem ser medidas experimentalmente; assim, podemos obter pela expressão o valor experimental de  $N$ .

O físico francês Jean Baptiste Perrin representou em seu trabalho, um marco histórico importante, ao estabelecer a existência de átomos e moléculas experimentalmente:

*Em poucas palavras, se moléculas e átomos existem, os seus pesos relativos são conhecidos por nós, e os seus pesos absolutos podem ser conhecidos do mesmo modo como são o número de Avogadro.*

Assim, o trabalho de Einstein abriu caminho para uma série de experiências de Jean Perrin, que conseguiu medir o número de Avogadro de acordo com as previsões de Einstein em uma série de experimentos.

Ele mesmo colocou seu estudo como uma “estimativa grosseira” obtendo resultados  $N \approx 64 \times 10^{22}$  moléculas/mol, sendo que o número usado em nossos dias é  $N = 6,022 \times 10^{23}$ /mol.

Em 1865 outro cientista, Joseph Loschmidt (1821-1895), grande amigo de Boltzmann, tinha sido o primeiro a estimar as dimensões das moléculas de ar.

Procuramos acima seguir os passos de Einstein e seus argumentos nos originais trabalhos de 1905, e ele concluiu dizendo: “Esperemos que um pesquisador consiga resolver brevemente o problema tratado aqui, que é de grande importância para a teoria do calor”. Einstein na época, percebeu que o movimento browniano é um excelente laboratório para observar e medir os efeitos das flutuações microscópicas de um sistema físico.

A forma com que Einstein afrontou este problema representou uma reviravolta na física teórica do século XX, trazendo uma profunda consequência sobre a física estatística experimental.

## 5. CONCLUSÃO

Procuramos, neste trabalho, discorrer brevemente sobre o ano miraculoso de Einstein, em 1905.

Como vimos, os manuscritos enviados à prestigiosa revista *Annalen der Physik* foram de grande importância para o desenvolvimento de suas ideias.

Recapitulando, devemos sublinhar que o primeiro artigo, o que aparece em março de 1905, estabelece o conceito dos quanta de luz – o efeito fotoelétrico – ou seja, a energia da radiação eletromagnética é descontínua, repartida em pacotes discretos, o que conduz (mais tarde) ao conceito de fóton.

O segundo e o terceiro artigos têm a ver com a sua tese de doutoramento, na qual apresenta a hipótese sobre o movimento caótico das moléculas, com a análise do movimento browniano, confirmando experimentalmente a existência de átomos e moléculas.

O quarto artigo estabeleceu as bases da teoria da relatividade, unificando a mecânica e a eletrodinâmica.

Reformulada no último artigo, surgiu a equação  $E = mc^2$ , ligada à conservação da massa e da energia, fórmula esta dedicada à relatividade e que deu origem ao desenvolvimento da utilização da energia nuclear para fins civis e militares.

Esses artigos mudaram a face da física do século XX.

De particular importância, aqui, são os desenvolvimentos surgidos a partir de sua famosa tese de doutorado, dedicada à existência de átomos. O artigo de maio de 1905 tratava do movimento de partículas suspensas em um fluido. A abordagem pioneira do fenômeno do movimento browniano abriu um longo e fértil caminho para o estudo dos fenômenos estatísticos.

De fato, os estudos de fenômenos difusivos, foi amplamente beneficiado pelas contribuições pioneiras de Einstein, seguidas das de Smoluchowski e Langevin, entre muitos outros. Abria-se, assim, toda uma área de pesquisa dedicada aos fenômenos estocásticos.

Por um lado, no que se refere aos fenômenos difusivos, houve uma explosão de investigações que levaram a uma descrição consistente dos fenômenos usuais e também dos anômalos. Esses fenômenos anômalos envolvem processos difusivos

mais lentos (subdifusão) ou mais rápidos (superdifusão) que podem ser encontrados na natureza, em inúmeros sistemas físicos e processos de engenharia e biologia.

Por outro lado, o estudo dos sistemas complexos foi fortemente influenciado pelo tratamento dos fenômenos estocásticos e suas aplicações são, eventualmente, inumeráveis. Até mesmo uma nova área de pesquisa – a econofísica – foi fruto, ainda que tardio, desses desenvolvimentos que têm no trabalho original daqueles pioneiros mencionados acima (começando com o artigo de Einstein) e que se debruçaram sobre o problema (antigo) do movimento browniano.

Assim, a história que começou com Robert Brown em 1827 (mas na verdade havia começado numa vertente poética, a partir das agudas observações – acompanhadas de uma explicação qualitativa correta e perfeitamente aceitável na perspectiva da física atual) e que deu nome para essa mobilidade das partículas analisadas, revelou-se uma fonte praticamente inesgotável de intuições e abordagens em amplos setores do conhecimento humano.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOREIRA, Ildeu de Castro. 1905 um ano miraculoso. **Física na Escola**, v.6, n. 1, 2005.

RIGDEN, John S. **Einstein 1905 o padrão da grandeza**. 2007 – Lisboa / Portugal – Edições 70 Ltda

ROONEY, Anne. **A história da física**. 2013 – São Paulo – M. Books do Brasil Editora Ltda

SALINAS, Silvio R. A. **Einstein e a teoria do movimento browniano**. Artigo, revista brasileira de ensino de física, v. 27, n. 2, p. 263 - 269 (2005).

SALINAS, Silvio R. A. **Introdução à Física Estatística**. Ed. 4. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2018.

SILVA, J.M.; LIMA, J.A.S. **Quatro abordagens para o movimento browniano**. Artigo, revista brasileira de ensino de física, v.29, n.1, p. 25 - 35 (2007).

STACHEL, John. **O ano miraculoso de Einstein: cinco artigos que mudaram a face da física**. Física – história; 2. Física – teoria. 3. Einstein, Albert, 1879-1955. I. Stachel, John, org.

L. R. EVANGELISTA, **Massa – Energia: Einstein, a relatividade e a energia encerrada da matéria** (MARINGÁ, PR, 2018).

H. A. LORENTZ, A. EINSTEIN, H. MINKOWSKI, **O princípio da relatividade** (CALOUSTE GULBEKIAN, LISBOA 1983).

I.C. MOREIRA, 1905: **Um ano milagroso** (FÍSICA NA ESCOLA, V.6, N.1, RIO DE JANEIRO, 2005).

L. R. EVANGELISTA, E. K. LENZI, **Fractional Diffusion Equations and Anomalous Diffusion** (Cambridge University Press. Cambridge, 2018).

J.B.PERRIN, **Discontinuous Structure of Matter, Nobel Lectures, Physics 1922-1941** (Elsevier, Amsterdam, 1965)

J. LOSCHMIDT, **Zun Grösse der Luftmolecüle** (sobre as dimensões das moléculas de ar), Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien **52**, 395-413 (1865)

A. EINSTEIN, **Eine Neue Bestimmung der Moleküldimensionem**, Annalen der Pysik **19**, 289 (1906).