



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CAMPUS SEDE - MARINGÁ

MAYARA HILGERT PACHECO

ALGUNS MODELOS DE UNIVERSO COSMOLÓGICO

MARINGÁ – PARANÁ
ABRIL, 2022

MAYARA HILGERT PACHECO

ALGUNS MODELOS DE UNIVERSO COSMOLÓGICO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido a Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Física pelo Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá.

Orientadora: Profa. Dra. Hatsumi Mukai

Banca Avaliadora

Profa. Dra. Hatsumi Mukai (orientadora-DFI/UEM)

Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira(DFI/UEM)

Prof. Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira (UFPR-Jandaia do Sul)

**MARINGÁ– PARANÁ
ABRIL, 2022**

Agradecimentos

Durante a minha jornada acadêmica tive a oportunidade de conhecer muitas pessoas que me ajudaram das mais variadas maneiras a chegar até aqui. Portanto, não poderia deixar de agradecê-las.

Primeiramente, a Professora Doutora Hatsumi Mukai por ter aceito meu pedido de orientação deste trabalho mesmo sem me conhecer, agradeço a orientação e confiança.

Aos meus amigos de curso, desde a licenciatura até o bacharelado, obrigada pelas indicações de referências, conversas sobre os projetos, sessões de estudo, piadas, amizade e companheirismo. Foram vocês que fizeram as horas sem fim dentro da UEM mais toleráveis, os momentos de desespero com provas e trabalhos mais leves e os dias de descanso mais felizes.

Agradeço aos meus pais por terem sempre me apoiado na minha escolha de carreira e por terem me incentivado a participar ativamente da vida acadêmica. Agradeço por terem me ensinado o valor da educação e a lutar por meus sonhos, além de me ter proporcionado as condições necessárias para que eu pudesse crescer e dedicar-me exclusivamente a isso.

Sobre a realização desse trabalho, agradeço aos diversos professores e alunos de pós-graduação que divulgam suas aulas gravadas e notas de aula, sem essas referências a realização desse trabalho não seria possível.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação, incluindo toda a infraestrutura pessoal e material que compõe a nossa Universidade, em especial ao DFI e DCI;

Por fim, a Universidade Estadual de Maringá por ter me proporcionado participar de programas que me possibilitou tantas experiências que me fizeram refletir acerca da importância da minha formação.

Muito obrigada a todos por fazerem parte da primeira etapa da minha vida acadêmica.

RESUMO

Com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade, a Cosmologia pôde desenvolver modelos que explicam como o Universo se comporta e realizar previsões. Entretanto, atualmente há uma variedade de modelos propostos na intenção de explicar dados observacionais, que foram obtidos com o avanço da tecnologia. Diante disso, mediante ao princípio cosmológico e o uso da equação de Friedmann–Robertson–Walker, equação de estado e equação do fluido perfeito e embasada na Teoria da Relatividade e matemática por ela aplicada, este trabalho apresenta uma revisão da literatura com o objetivo de compreender o que envolve o estudo de alguns Modelos de Universo Cosmológicos, mais precisamente os apresentados por Barbara Ryden [1], que tomamos como referência base.

Sumário

Agradecimentos.....	3
RESUMO	4
Introdução.....	7
<u>Capítulo 1 - Geometria do Espaço-Tempo.....</u>	11
1.1 Espaços Curvos	11
1.2 O Tensor Métrico	14
1.3 Geodésicas.....	15
1.4 Transporte Paralelo e Derivada Covariante.....	19
<u>Capítulo 2 - Teoria da Relatividade Geral.....</u>	22
2.1 Breve Histórico da Teoria da Relatividade	22
2.2 Teoria da Relatividade Especial	25
2.2.1 Transformações de Lorentz.....	26
2.3 O espaço-tempo de Minkowski.....	28
2.4 O Princípio de Equivalência.....	29
2.5 Equações de Campo de Einstein	31
2.5.1 Lado Esquerdo: Curvatura.....	32
2.5.2 Curvatura de Riemann.....	32
2.5.3 Tensor de Curvatura de Ricci e Escalar de Ricci	33
2.6 Lado Direito: tensor energia-momento	34
<u>Capítulo 3 - Dinâmica Cósmica.....</u>	40
3.1 Princípio Cosmológico.....	40
3.2 Fator de escala e Coordenadas Comoveis.....	43
3.3 A métrica de Robertson-Walker.....	48
3.4 Lei de Hubble e Redshift Cosmológico.....	44
3.5 Equação de Friedmann	52
3.6 Equação da Aceleração e Equação do Fluido Perfeito.....	55
3.7 Evolução da Densidade de Energia.....	57
<u>Capítulo 4 - Modelos de Universo Cosmológicos.....</u>	63
4.1 Universo Vazio: só curvatura.....	63
4.2 Modelos de uma só componente	65
4.2.1 Só matéria.....	68
4.2.2 Só radiação	70
4.2.3 Só constante cosmológica Λ	71
4.3 Universos com múltiplas componentes.....	74
4.3.1 Radiação + Matéria	76
4.3.2 Matéria + Curvatura	78
4.3.3 Modelo Λ CDM Plano.....	85

4.3.4 Modelo Λ CDM com curvatura.....	90
4.3.5 Modelo <i>Benchmark</i>	94
Considerações Finais	97
Referências	102

Introdução

Caracteriza-se Cosmologia como uma ciência observacional [18, 19], cujo objetivo é, a partir das leis da Física, descrever a origem do Universo e tornar compreensível suas propriedades. Modelos Cosmológicos são entendidos como a descrição conjunta da geometria e do conteúdo existente no Universo. Se a cosmologia é uma ciência observacional, o melhor modelo cosmológico é aquele que pode ser determinado a partir de observações [19].

A cosmologia moderna teve início com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein [1], publicada em 1915. Responsável por uma mudança de paradigma. A relatividade de Einstein fornece, entre outras coisas, o princípio de equivalência e as equações da relatividade geral, que denotam que a massa determina como o espaço-tempo se curva, enquanto a curvatura do espaço-tempo define como as massas se movem. Tais conceitos permitiram a explicação de certos fenômenos, como o avanço no periélio de Mercúrio, a deflexão gravitacional da luz e o deslocamento de linhas espectrais provenientes de estrelas [5]. Além disso, outra aplicação da teoria da gravitação de Einstein, se refere a capacidade de modelar o conteúdo de densidade do Universo, a fim de determinar sua geometria e dinâmica [1].

Pouco tempo após a publicação da Teoria Geral da Relatividade, em 1917, Einstein propôs o primeiro modelo cosmológico relativística [20], isotrópico, homogêneo, finito, de curvatura espacial constante positiva e estático, isto é, sem expansão ou contração, um modelo no qual o Universo é constante no tempo [21, 22, 27]. Todavia esse cenário era instável, a atração gravitacional da matéria levaria a um colapso dos corpos sobre si mesmos. A solução encontrada foi uma pequena modificação das equações originais da gravitação, o próprio Einstein adicionou às equações relativísticas uma constante, conhecida como constante cosmológica [1], responsável por contrabalancear a gravidade ao agir como uma força repulsiva.

Ainda em 1917, Willem de Sitter propôs um modelo estático, plano, sem matéria ou radiação, apenas com energia escura¹. Mais tarde foi mostrado que o modelo de Sitter era “vazio”, isotrópico, homogêneo, infinito, plano e expansivo! Na década de 1920, Aleksander

¹Alguns autores como [31, 19] tratam a constante cosmológica como equivalente a energia escura ou matéria escura. Outros autores [1], preferem tratar a constante apenas como uma constante, sem atribuir uma componente a ela.

Milne estabeleceu um dos mais importantes conceitos da cosmologia, o Princípio Cosmológico, que define o Universo como isotrópico e homogêneo.

Ao empregar esse princípio, em 1922 surgiu a possibilidade teórica de um Universo em expansão com matéria. Aleksander Friedmann, um autodidata no estudo da Relatividade Geral, derivou as primeiras soluções expansionistas para as equações de Einstein [20, 21]. O modelo de Friedmann descreve um Universo em expansão, espacialmente homogêneo, isotrópico, que teve início a partir de um cenário de densidade de matéria divergente [9, 12]. Apesar disso seu trabalho não recebeu muita atenção pois Friedmann não se preocupou em explorar as propriedades físicas de suas soluções, seu trabalho foi eminentemente matemático. De maneira independente, em 1927, Georges E. Lemaître obteve equações equivalentes às de Friedmann. Lemaître, diferente de seu colega, buscou usar a Física e a Astronomia da época para descrever o Universo, atraindo o interesse da comunidade científica.

Foi apenas em 1929, com observações astronômicas e utilizando a técnica de variáveis cefeidas como marcadoras de distância que Edwin Hubble derrubou o paradigma do Universo estático e os modelos expansionistas ganharam força. Hubble encontrou uma relação direta entre velocidade de recessão das galáxias e sua distância, provando que o Universo estava em expansão. Tal descoberta deu início a busca pela origem do cosmos. Um Universo em expansão implica uma origem, um único momento quando espaço e tempo emergiram.

Lemaître foi o primeiro a realizar o experimento mental para essa questão. Ele imaginou que se às galáxias se afastam houve um momento no passado em que elas estavam muito próximas uma da outra, até formarem, o que ele chamou de átomo primordial [5]. Até então as teorias relacionadas a origem/criação do Universo eram destinadas a metafísica. O átomo primordial evoluiu até se firmar como a teoria do Big Bang.

A teoria do Big Bang suscita que no momento da criação uma quantidade significativa de energia tenha sido liberada. Tal energia sofreria um processo de resfriamento conforme o Universo se expande. Ao fim da década de quarenta foi previsto, por Ralph Alpher e Robert Herman, que a energia remanescente ainda deveria existir na forma de radiação micro-ondas a uma temperatura entorno de 5K. Entretanto, foi apenas em 1964, que Arno Penzias e Robert Wilson, acidentalmente, detectaram a evidência observacional do Big Bang, a chamada Radiação Cosmológica de Fundo, fazendo com que a Cosmologia fosse reconhecida como Ciência.

Pelos anos seguintes dois grandes questionamentos permearam as mentes dos cosmólogos: porque o Universo era tão uniforme e porque ele está no limiar entre expansão

eterna e eventual colapso. Em 1979, Alan Guth calculou como um super-resfriamento afetaria a expansão do Universo primordial. Guth concluiu que um período de super-resfriamento atribuiria uma energia potencial intensa ao Universo, a pressão causada por ela reverteria o efeito gravitacional, ou seja, a gravidade seria repulsiva [5] por aproximadamente 10^{-35} s, o suficiente para resultar em uma expansão de fator 10^{30} . A esse período deu-se o nome de inflação.

Atualmente, o Modelo Cosmológico Padrão, ou $\Lambda - CDM$ (*Lambda-Cold Dark Matter*; Lambda – Matéria Negra Fria), baseia-se nas proposições do *Big Bang*, Relatividade Geral, Princípio Cosmológico, constante cosmológica, energia escura fria, inflação e física de partículas elementares. Rosenfeld [19] em sua palestra sobre *Dark Matter Survey*² (Pesquisa da Matéria Escura) diz que a Cosmologia nunca foi tão precisa em suas medidas e que estamos em uma era privilegiada nas quais instrumentos incríveis estão em operação ou estão sendo construídos para estudar o Universo. Sabemos que 25% do Universo é matéria escura, 70% é energia escura e 5% é matéria bariônica, ou seja, não sabemos do que é composto 95% do Universo, o que mostra a importância de se continuar a testar modelos cosmológicos. Além disso, a Tamara Davis [25] diz que avanços teóricos também são tão importantes quanto avanços observacionais, ainda é necessário o desenvolvimento de uma teoria fundamental, ou gravitação quântica, e teorias de modelação, pois há muitos dados que não podem ser utilizados no momento devido à falta de modelos.

Dessa forma, a presente pesquisa é justificada pois, os modelos cosmológicos, além de apresentarem uma teoria de como o Cosmos teria se formado, nos permitem fazer previsões e entender sua dinâmica a partir da modelação do conteúdo de matéria e energia de todo o Universo. Buscou, de maneira geral, estudar alguns Modelos de Universos Cosmológicos e a Física da qual está embasada para compreender como ocorre a evolução do Universo e se a expansão ocorrerá em um tempo infinito ou se esse processo cessará e algum momento. De maneira específica, buscou-se estudar a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), Teoria da Relatividade Geral (TRG), álgebra tensorial e evolução da densidade de energia para compreender diferentes modelos do Universo, compreender o significado físico da constante cosmológica, e por fim, estudar alguns Modelos de Universo Cosmológicos isotrópicos e homogêneos³ relevantes historicamente, dentre eles: Universo Vazio, como uma introdução

² O *Dark Energy Survey* (DES) é um esforço colaborativo internacional para mapear centenas de milhões de galáxias, detectar milhares de supernovas e encontrar padrões de estrutura cósmica que revelarão a natureza da energia escura que está acelerando a expansão de nosso Universo [19].

³Ressaltando que há diversos Modelos Cosmológicos, entre eles os anisotrópicos e não homogêneos [41].

ao estudo de modelos mais complexos, Universo de uma única componente, Universo de multicomponentes e de *Benchmark*.

O presente trabalho está organizado conforme segue: no Capítulo 1 uma introdução matemática aos modelos cosmológicos, abrangendo curvatura, geodésicas, tensor métrico, transporte paralelo, e a derivada covariante, com o intuito de posteriormente aplicá-los no desenvolvimento da Teoria da Relatividade, que é o conteúdo do Capítulo 2, onde é apresentada a base para descrição da Relatividade Restrita e Geral, a fim de descrever o espaço-tempo plano e um espaço com curvatura. No Capítulo 3 é descrita a dinâmica cósmica por meio da lei de Hubble, evolução da densidade de energia e equações essenciais para descrever os modelos cosmológicos, sendo elas a equação de Friedmann, equação da aceleração, equação do fluido perfeito, e a equação do estado. Seguida do Capítulo 4 são apresentados alguns modelos cosmológicos, entre eles: Universo vazio, modelo Einstein-de Sitter, só radiação, só constante cosmológica ($\Lambda - \textit{lambda}$), radiação e matéria, matéria e curvatura, modelo Λ CDM Plano, modelo Λ CDM com curvatura e modelo *Benchmark*. E por fim, as Considerações Finais e Referências Bibliográficas. Contendo ainda um Apêndice com o desenvolvimento de alguns cálculos detalhados realizados no decorrer deste estudo, que achamos relevante apresentar.

1

Geometria do Espaço-Tempo

Neste capítulo será apresentada uma introdução à matemática dos modelos cosmológicos, abrangendo curvatura, geodésicas, tensor métrico, transporte paralelo, e a derivada covariante, com o intuito de posteriormente aplicá-los no desenvolvimento de Teoria da Relatividade.

1.1 Espaços Curvos

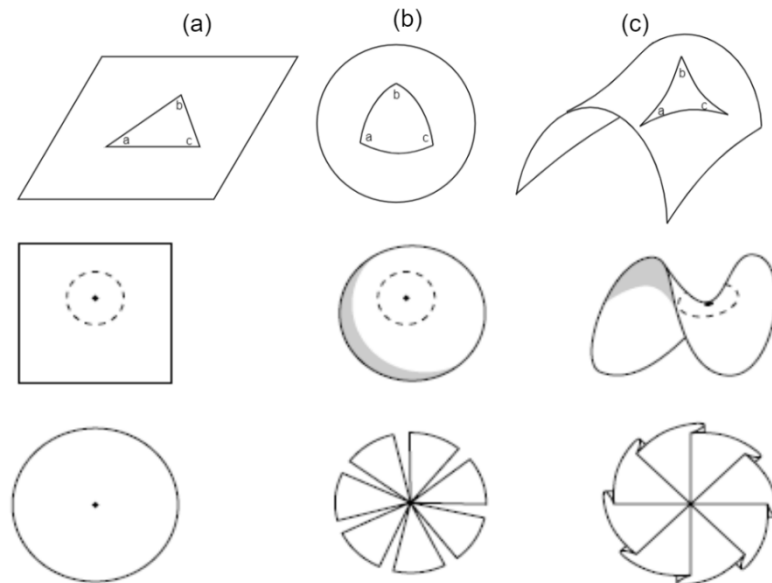
A matemática necessária para descrever espaços curvos foi desenvolvida por Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss fez distinção entre dois tipos de curvatura: intrínseca e extrínseca. A curvatura extrínseca é uma superfície imersa em um espaço de maior dimensão [32], por exemplo, uma superfície 2D em um espaço 3D, e as superfícies intrínsecas são aquelas que independem do que exista fora dessa superfície [4]. Assim, as propriedades intrínsecas são aquelas que dependem apenas de medidas feitas na superfície, tais propriedades são preservadas caso a superfície seja dobrada sem esticar ou rasgar. A característica intrínseca mais importante é a totalidade de suas geodésicas, definidas como caminhos que minimizam a distância entre dois pontos. Aqui, trataremos de curvaturas intrínsecas, visto que não podemos sair do espaço-tempo quadrimensional para fazer medidas, ou seja, o espaço-tempo não está imerso em algo de maior dimensão.

Mas imaginar a curvatura do espaço-tempo quadrimensional é um desafio. Tomemos como exemplo espaços bidimensionais. O espaço bidimensional mais simples é um plano, em que a geometria euclidiana é válida. No plano a geodésica é uma linha reta. Se desenharmos um triângulo, Figura 1.1 (a), os ângulos internos seguem a relação $a + b + c = \pi$, se os ângulos forem medidos em radianos. A circunferência de um círculo é $C = 2\pi r$. Podemos ainda construir um sistema de coordenadas cartesianas e definir coordenadas do tipo (x, y) . No plano o Teorema de Pitágoras é válido e é dado pela relação $dl^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, se considerarmos dl a distância entre dois pontos (x, y) e $(x + dx, y + dy)$.

Agora, tomemos a superfície de uma esfera, Figura 1.1 (b), sua geodésica é parte de um grande círculo. Se um triângulo for desenhado nessa superfície conectando-se três geodésicas, a relação que representa a soma dos ângulos internos é $a + b + c = \pi + A/R^2$, em que, A é a área do triângulo e R é o raio da esfera. Essa equação sempre será satisfeita para qualquer região da esfera que o triângulo seja desenhado. A circunferência de um círculo é $C < 2\pi r$. Na superfície dessa esfera podemos definir um sistema de coordenadas polares. Se r é a distância ao polo norte e θ é o ângulo medido relativo ao meridiano principal, a distância dl entre dois pontos é $dl^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 r/R d\theta^2$. Vale ressaltar que a superfície esférica possui uma área finita e uma distância máxima entre os pontos que formam a geodésica.

Tomemos agora uma superfície na forma de sela, de geometria hiperbólica, Figura 1.1 (c). Desenhando um triângulo na superfície da sela, a soma dos seus ângulos internos segue a relação $a + b + c = \pi - A/R^2$. Desenhando uma circunferência de um círculo o seu valor $C > 2\pi r$. A distância entre dois pontos é escrita na forma de $dl^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 r/R d\theta^2$.

Figura 1.1 – Imagens ilustrando superfícies bidimensionais. (a) Plano euclidiano com um triângulo e círculo, e a última figura é a área total esperada do um círculo. (b) Superfície esférica com um triângulo e círculo, seguida da imagem representando a área total esperada de um círculo. (c) Superfície em formato de sela com um triângulo e círculo, última imagem é a área total esperada do um círculo.



Fonte: adaptada de Ryden (2017) e Rindler (2006).

Exploremos melhor tais curvaturas. Imagine uma esfera de raio a com duas geodésicas (r) desenhadas, que formam entre si um ângulo θ no polo norte P, Figura 1.2. Por definição temos que a curvatura $k = 1/a^2$ [4]. A uma distância r , ao longo das geodésicas, tomemos a separação angular como η ,

$$\eta = \theta \left(a \sin \frac{r}{a} \right).$$

Usando geometria básica e série de Taylor para $\text{sen}x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$, em que no caso $x = \frac{r}{a}$, temos que,

$$\eta = \theta \left(r - \frac{1}{6}kr^3 + \dots \right) , \quad (1.1)$$

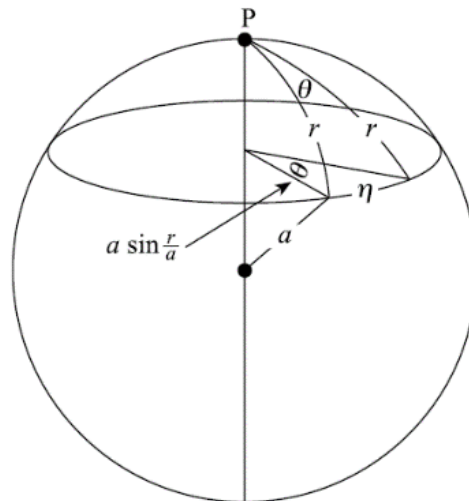
a circunferência C e a área A ficam expressas como,

$$C = 2\pi \left(r - \frac{1}{6}kr^3 + \dots \right), \quad A = \pi \left(r^2 - \frac{1}{12}kr^4 + \dots \right) . \quad (1.2)$$

Aplicando o limite para quando $r \rightarrow 0$, encontramos a relação,

$$k = \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r - C}{r^3} = \frac{12}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - A}{r^4} . \quad (1.3)$$

Figura 1.2 – Imagem de uma esfera de polo Norte P com duas geodésicas r separadas por um ângulo θ .



Fonte: Rindler (2006).

A equação (1.3) permite a interpretação que [15]:

- regiões onde C e A são menores que seus valores euclidianos, k é positivo, enquanto
- regiões onde C e A possuem valores maiores que os euclidianos, k é negativo; e

Universos de geometria:

- $k = 0$ são chamados de Universos planos;
- $k > 0$ Universos fechados e
- $k < 0$ Universos abertos.

1.2 O Tensor Métrico

Um espaço é dito métrico quando é possível definir a distância infinitesimal ds entre dois pontos em função de um tensor covariante simétrico denominado de tensor métrico, uma função das coordenadas [33]. O tensor métrico é uma ferramenta utilizada para calcular o quadrado do comprimento de um único vetor, ou o produto escalar de dois vetores diferentes [30].

De modo simples essa ferramenta possui dois campos de apresentação de vetores

$$g(\text{campo1}, \text{campo 2}) . \quad (1.4)$$

O resultado do produto escalar de dois vetores diferentes (u, v) e do quadrado do comprimento de um único vetor (u) , é um número real,

$$g(u, v) = \text{produto escalar de } u \text{ e } v, u \cdot v ; \quad (1.5)$$

$$g(u, u) = \text{quadrado do comprimento de } u, u^2. \quad (1.6)$$

O tensor métrico é simétrico e não depende da ordem na qual os vetores são apresentados,

$$g(u, v) = g(v, u) . \quad (1.7)$$

Uma propriedade desse tensor é a linearidade, que permite que resultados sejam calculados para qualquer vetor inserido nos campos se soubermos apenas o que ela faz com as bases dos vetores em um referencial de Lorentz.

Definindo:

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu , \quad (1.8)$$

e sabendo que o vetor de separação entre dois eventos é $\xi = \Delta x^\mu e_\mu$,

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (\Delta x^0)^2 - [(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2] \\ &= g(\Delta x^\mu e_\mu, \Delta x^\nu e_\nu) = \Delta x^\mu \Delta x^\nu g(e_\mu, e_\nu) \\ &= \Delta x^\mu \Delta x^\nu \eta_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Se calcularmos o produto escalar entre dois vetores quaisquer,

$$\begin{aligned} u \cdot v &= g(u, v) = g(u^\mu e_\mu, v^\nu e_\nu) = u^\mu v^\nu g(e_\mu, e_\nu) \\ u \cdot v &= u^\mu v^\nu g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Podemos considerar um espaço 3D euclidiano (x^1, x^2, x^3) no qual o tempo é absoluto e as Leis de Newton são obedecidas. Nessas condições o tempo não é considerado uma coordenada e a distância entre dois pontos, l , pode ser calculada por meio do Teorema de Pitágoras,

$$l^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}x^i x^j, \quad (1.10)$$

sendo g_{ij} as 9 componentes do tensor métrico g , que contém toda informação da geometria intrínseca do espaço 3D. As componentes do tensor métrico em um plano euclidiano são representadas pelo delta de Kronecker δ_{ij} ,

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad . \quad (1.11)$$

Uma forma mais generalizada de se escrever o tensor métrico [17, 4]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad (1.12)$$

que possui a propriedade de conexão entre as componentes contravariantes e covariantes⁴ do tensor, dada pela relação

$$g_{\mu\nu} u^\nu = u_\mu \quad . \quad (1.13)$$

Quando tal definição não pode ser definida, diz-se que o espaço é afim [33]. Além disso, podemos definir um tensor contravariante $g^{\mu\nu}$, denominado tensor conjugado por,

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda \quad (1.14)$$

De forma semelhante a (1.13), podemos elevar o índice, ou seja, aplicando o tensor contravariante $g^{\mu\nu}$, em um covariante u_ν , e o resultado é um tensor contravariante u^μ ,

$$g^{\mu\nu} u_\nu = u^\mu \quad . \quad (2.15)$$

Algumas propriedades do espaço são definidas pelo tensor métrico, como a homogeneidade e isotropia. A homogeneidade ocorre se a métrica independe do ponto escolhido como referência. A isotropia ocorre quando existe um vetor não nulo e $ds^2 = 0$. O tensor métrico é invariante, pois não depende do sistema de coordenadas. As componentes do tensor métrico são diferentes em diferentes sistemas de coordenadas.

1.3 Geodésicas

De acordo com a Teoria da Relatividade Geral o espaço-tempo é curvo e a luz não viaja em linha reta, mas sim ao longo de uma geodésica. Geodésica é o caminho mais reto em um espaço curvo que minimiza a distância entre dois pontos. Tomemos um espaço plano,

⁴Assim como os componentes de um vetor mudam quando mudamos a base do espaço vetorial, os componentes de um tensor também mudam sob tal transformação. Se um índice de um tensor em uma mudança de base se transforma como um vetor, com o inverso da transformação de base ele é dito contravariante e é tradicionalmente denotado com um índice (sobrescrito) superior. Um índice que se transforma com a transformação própria base é chamado covariante e é indicado com um índice inferior (subscrito) [36].

como saber se o trajeto é reto? A resposta para essa pergunta repousa no vetor velocidade e aceleração.

Em um espaço curvo, um caminho reto possui aceleração tangencial nula para velocidades constantes. Isso é verdadeiro quando o vetor aceleração é perpendicular a superfície. Para computar a equação da geodésica precisamos encontrar curvas para os quais o vetor aceleração é normal a superfície.

O vetor aceleração sempre contará com uma componente normal, e uma componente tangencial. Considere um plano (u, v) capaz de curvar e formar uma superfície 2D imersa em um espaço 3D (x, y, z) .

$$\vec{R}(u, v) = [X(u, v); Y(u, v); Z(u, v)] \quad . \quad (1.16)$$

Uma curva nessa superfície primeiro é desenhada no plano (u, v) em função do parâmetro de curvatura λ e a colocamos na função (1.16) para trazê-la para o espaço 3D. Defina-se que a derivada parcial do vetor posição \vec{R} são vetores tangentes a superfície, portanto,

$$\vec{e}_u = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} ; \quad \vec{e}_v = \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \quad . \quad (1.17)$$

Do mesmo modo a derivada parcial do vetor posição em função de lambda nos dá o vetor tangente da curva parametrizada,

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial \lambda} \quad . \quad (1.18)$$

Para calcular a equação da geodésica precisamos do vetor aceleração ao longo da curva, dado pela derivada segunda do vetor posição em função de λ , derivando uma vez,

$$\frac{d\vec{R}}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right) + \frac{dv}{d\lambda} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right), \quad (1.19)$$

derivando a segunda vez,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\vec{R}}{d\lambda} \right) = \frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{du}{d\lambda} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right) + \frac{dv}{d\lambda} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right) \right]. \quad (1.20)$$

Aqui teremos que usar a regra da cadeia para os termos dentro dos colchetes.

$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2 u}{d\lambda^2} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right) + \frac{du}{d\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right) + \frac{d^2 v}{d\lambda^2} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right) + \frac{dv}{d\lambda} \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right). \quad (1.21)$$

Vamos trabalhar o segundo e quarto termos da equação (1.21). Pela regra da cadeia de multivariáveis temos que o operador λ derivativo pode ser expandido como uma soma linear dos operadores derivativos u e v na forma de,

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{du}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (1.22)$$

Logo temos que,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \vec{R}}{\partial u} = \frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v \partial u}, \quad (1.23 (a))$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = \frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v \partial u} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v^2}. \quad (1.23 (b))$$

Substituindo as equações (1.23(a)) e (1.23(b)), na equação (1.21) e reorganizando a ordem dos termos, temos que:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2 u}{d\lambda^2} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \right) + \frac{d^2 v}{d\lambda^2} \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \right) + \frac{du}{d\lambda} \left(\frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v \partial u} \right) + \frac{dv}{d\lambda} \left(\frac{du}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v \partial u} + \frac{dv}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v^2} \right). \quad (1.24)$$

Os dois primeiros termos envolvem apenas a derivada primeira do vetor posição, portanto sabemos que esses termos estão no plano tangencial, os termos restantes são mais complexos e não podemos afirmar se são tangenciais ou normais ao plano.

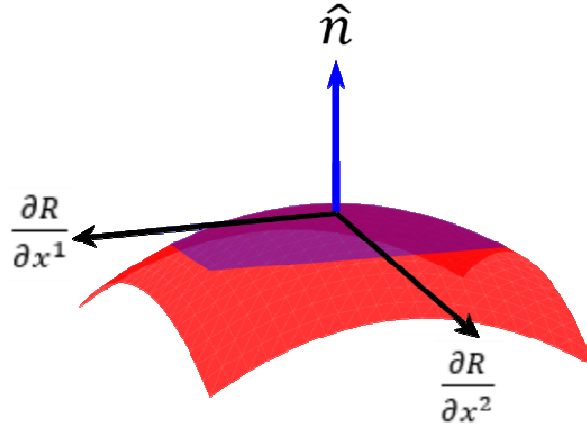
Para facilitar nossos cálculos daqui em diante, vamos considerar $x^1 = u$ e $x^2 = v$. Assim podemos generalizar a equação (1.24), utilizando a convenção de soma de Einstein⁵ na forma de:

$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^i} + \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (1.25)$$

O último termo $\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j}$ da equação (1.25) representa vetores tridimensionais em um espaço tridimensional. Portanto, podemos expandi-lo como uma combinação linear de bases 3D. Ao invés de utilizar as bases $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, vamos utilizar os dois vetores tangentes $\frac{\partial \vec{R}}{\partial x^1}$ e $\frac{\partial \vec{R}}{\partial x^2}$ que nos fornece uma base para o plano 2D tangente e como terceira componente utilizaremos o vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$, Figura 1.3.

⁵A notação de Einstein é uma convenção introduzida por Albert Einstein em 1916 para simplificar a escrita de somatórios. A notação de Einstein consiste em omitir o símbolo de somatório e interpretar índices que se repetem uma vez em um mesmo termo como indicador desse somatório (em certos contextos pode ser exigido que estes índices apareçam uma vez em cima e uma vez em baixo). Índices que não se repetem não representam somatórios, mas o número de equações.

Figura 1.3 – Ilustração das bases adotadas para desenvolvimento do termo $\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j}$. Em vermelho superfície 2D, em azul plano tangente. A normal \hat{n} em ambas superfícies é no mesmo ponto.



Fonte: adaptada do Wikipédia⁶.

Mas não conhecemos as componentes desses vetores nessa nova base, então usaremos novas variáveis. Assim decidido podemos escrever que,

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^1 \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^1} + \Gamma_{ij}^2 \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^2} + L_{ij} \hat{n}. \quad (1.26)$$

Novamente, utilizando a notação de Einstein podemos escrever que,

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^k} + L_{ij} \hat{n}. \quad (1.27)$$

Devido à ortogonalidade, o produto escalar entre a componente normal e as componentes tangenciais é zero. Portanto, aplicando a equação (1.27) em $\frac{\partial \vec{R}}{\partial x^l}$,

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^l} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^k} + L_{ij} \hat{n} \right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^l} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^k} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^l}. \quad (1.28)$$

Pela definição,

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial x^k} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^l} = g_{kl}. \quad (1.29)$$

Utilizando a equação (1.14), e substituindo as duas derivadas parciais pela métrica (1.28) e logo em seguida multiplicarmos os dois lados da igualdade por g^{ln} , temos que,

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^l} g^{ln} = \Gamma_{ij}^n. \quad (1.30)$$

Podemos seguir os mesmos passos, mas aplicando a equação (1.26) no vetor normal,

⁶Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Normal_\(geometria\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Normal_(geometria)).

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j} \hat{n} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial x^k} + L_{ij} \hat{n} \right) \hat{n} = L_{ij} \quad , \quad (1.31)$$

pois,

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{e_i \times e_j}{\|e_i \times e_j\|} = L_{ij} \quad . \quad (1.32)$$

Agora podemos reescrever o vetor tangente, equação (1.25) como,

$$\frac{d^2 R}{d\lambda^2} = \left[\left(\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right) \frac{\partial R}{\partial x^k} \right] + L_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \hat{n} \quad . \quad (1.33)$$

Lembremos que estamos em busca da equação da geodésica, e para tanto precisamos encontrar curvas onde o vetor aceleração é normal a superfície. Na equação (1.33) o termo entre parênteses é sempre tangente a superfície, logo é nulo,

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad , \quad (1.34)$$

e o vetor tangente, equação (1.33) como,

$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = L_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \hat{n} \quad . \quad (1.35)$$

A equação (1.34) é a **equação da geodésica**, que em uma notação mais compacta por se escrita como

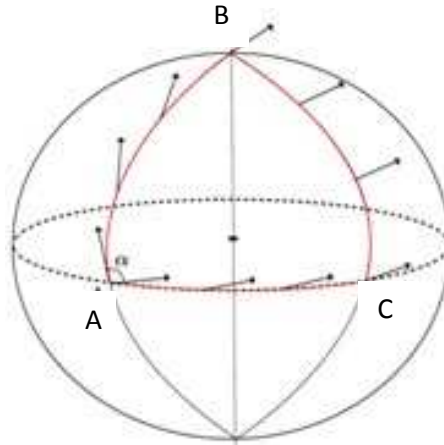
$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad . \quad (1.35)$$

Em que, \dot{x} é a derivada primeira de x em relação a λ , e \ddot{x} a sua derivada segunda.

1.4 Transporte Paralelo e Derivada Covariante

Os tensores são objetos algébricos que descrevem uma relação multilinear entre conjuntos de objetos em um espaço vetorial. Uma característica essencial dos tensores é de que eles são invariantes (independente dos sistemas de coordenadas escolhido) [34]. Entretanto a derivada de um tensor não é um tensor.

Figura 1.4 – Representação do transporte de um vetor sobre uma superfície curva faz com que o vetor possua direções, inicial e final, diferentes.



Fonte: Moraes, 2016.

Considere que desejamos transportar um vetor do ponto A pelo caminho ABCA. Ao longo do percurso é feito um esforço para que esse vetor se mantenha na mesma direção e sentido. Devido à curvatura da trajetória, o vetor acaba mudando sua direção e sentido. A operação que fornece a variação entre o vetor inicial e final é a derivada covariante, em outras palavras, a derivada covariante fornece a taxa de variação de um tensor em determinada coordenada [32]. Em outras palavras, a derivada covariante $\nabla_\mu V^\mu$ pode ser definida como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (1.36)$$

Sobre a equação (1.36), ela nos informa que: “para cada direção μ , a derivada covariante ∇_μ será dada pela derivada parcial ∂_μ mais uma correção especificada por uma configuração de n matrizes $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$, sendo $\Gamma_{\nu\lambda}^\nu$ os Símbolos de Christoffel”. Entretanto, tomaremos sua definição intrínseca

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}) \quad (1.36)$$

Os Símbolos de Christoffel são “objetos” matemáticos que descrevem como a base de vetores muda com o sistema de coordenadas. Na Teoria da Relatividade Geral (TRG), ele descreve mudanças na métrica pelo do espaço-tempo. Na derivada covariante o segundo termo do lado direito considera as mudanças sofridas pelo sistema de coordenadas.

Algumas propriedades da derivada covariante são [28],

- Linearidade: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$;
- Regra do produto de Leibniz: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$;
- Comutação com contração: $\nabla_\mu (T^\lambda{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}{}^\lambda{}_{\lambda\rho}$;

- É reduzida a derivada parcial em escalares: $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$;
- A derivada covariante de um vetor covariante é definida como:

$$\nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v_\nu ; \quad (1.37)$$
- Livre de torção: $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = \Gamma_{(\mu\lambda)}^\nu$;
- Compatível com a métrica: $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$.

Além disso, se a derivada covariante de um vetor é nula sob um caminho qualquer γ , o ângulo entre o vetor e a tangente do caminho é constante, isto é, o vetor é transportado paralelamente [29]. A curvatura e outras propriedades estão explicadas com maiores detalhes nas seções 2.5.1, 2.5.2 e 2.5.3.

2

Teoria da Relatividade Geral

Nesta seção serão apresentadas a Teoria da Relatividade Especial (TRE) e a Teoria da Relatividade Geral (TRG). Em relação à primeira, será de maneira mais conceitual. Em relação à segunda, será apresentado o Princípio de Equivalência, a equação de campo de Einstein, a qual terá seus termos desenvolvidos.

2.1 Breve Histórico da Teoria da Relatividade

Em escala cosmológica a força dominante que determina a evolução do Universo é a gravidade. Mas ao referirmos à gravidade como uma força, estamos adotando a visão clássica. Com o objetivo de descrever o movimento dos corpos em função do tempo, a mecânica newtoniana utiliza-se do espaço euclidiano, de três dimensões espaciais e uma temporal, para caracterizar trajetórias. Portanto, baseia-se em um espaço \mathbb{R}^4 , em que as coordenadas são dadas por (x, y, z, t) .

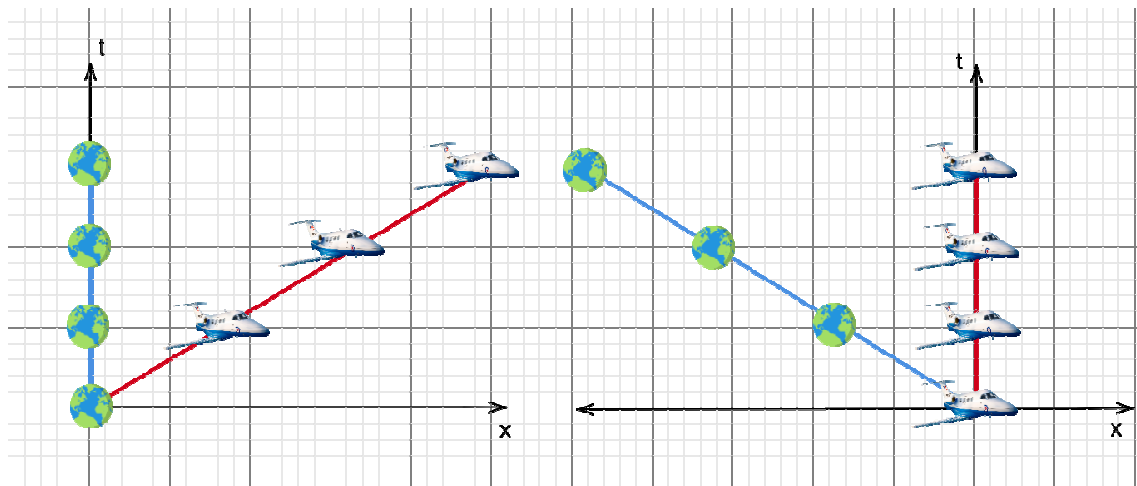
Sobre a coordenada temporal, temos que para esse espaço o tempo passa de maneira igual para todos os observadores, em outras palavras, o tempo é independente do referencial em que é medido. Assim, se imaginarmos dois observadores com relógios sincronizados, que observam o movimento de um objeto, como um trem que parte do repouso de uma estação A até uma estação B, os dois observadores concordariam que o trem chega ao seu destino final no mesmo horário. Mais formalmente, diz-se que o tempo é absoluto.

Para que as equações de movimento sejam escritas, toma-se a suposição que elas são covariantes, isto é, são as mesmas para diferentes referenciais inerciais. Portanto, temos a seguinte definição do Princípio de Galileu, “*Um referencial inercial é todo aquele no qual um corpo livre da ação de forças tende a permanecer em repouso ou em movimento uniforme retilíneo*” [1, 12].

Tomemos como exemplo o experimento mental apresentado por Bennett e coautores na referência [6]: imagine um avião que viaja a uma velocidade de 1.670 km/h de Nairobi,

Quênia, à Quito, Equador. Ambas as localizações estão próximas da linha do Equador terrestre, onde a velocidade equatorial de rotação do planeta Terra é 1.670 km/h , mas no sentido oposto à do avião. Para um observador localizado na Terra o avião move-se a uma taxa de 1.670 km/h em relação a Terra, ou ao solo, de oeste para leste, conforme ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Imagem ilustrando o movimento relativo entre o avião e o planeta Terra sob o referencial de uma (a) pessoa na superfície do planeta Terra e (b) um passageiro do avião (a direita).



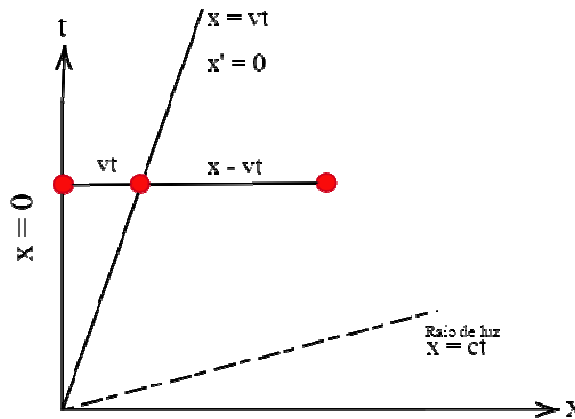
Fonte: a autora.

Para um observador localizado na Lua o avião deixa o chão em Nairobi e permanece estático no ar, enquanto o planeta Terra rotaciona e o leva até Quito, onde a aeronave retorna ao chão. Se trocarmos a posição dos observadores encontra-se interpretações ainda mais contrastantes. Considere um observador em qualquer ponto do Sistema Solar, ele entenderia que o avião se move a uma velocidade superior a 100.000 km/h , pois essa é a taxa com que a Terra se move ao redor do Sol. Diferentes observadores apenas concordaram com o fato de que o avião se move em relação a superfície terrestre a uma velocidade de 1.670 km/h . Então, apenas faz sentido os questionamentos do tipo quem/o que se move e qual taxa se descrevermos relativo a quem ou o que.

Na mecânica newtoniana, pode-se relacionar um evento que ocorre em um referencial, R , a outro que ocorre em um referencial, R' , que está em movimento em relação ao primeiro, Figura 2.2, a partir das transformações de Galileu. Adotando os referenciais R e R' de coordenadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z') , respectivamente, sendo que o movimento ocorre apenas no eixo x , temos que se suas origens coincidem em $t = t' = 0$, em um instante posterior, $t = t' \neq 0$, as coordenadas de ambos se relacionam, de maneira que,

$$\begin{aligned}
 x' &= x - vt, \\
 y' &= y, \\
 z' &= z, \\
 t' &= t.
 \end{aligned}$$

Figura 2.2 – Representação em que o referencial estático R e referencial R' se movendo a uma velocidade V em relação a R . Aqui consideramos que não há movimento nas coordenadas y e z .



Fonte: a autora baseada na Figura 2.1 da referência [12].

Ao estender a covariância das leis da mecânica para as leis da Física, postula-se que: *todas as leis físicas são covariantes por transformações de Galileu*. Isso implica que diferentes observadores em sistemas de coordenadas distintos irão sempre concordar em relação a massa do objeto, tempo e espaço, mas podem discordar em relação a velocidade, momento e energia cinética.

Entretanto, no final do século XIX, período pelo qual a Física passava por grandes mudanças, surgia a eletrodinâmica. Segundo as Leis de Maxwell, que apesar de explicarem diversos fenômenos eram falhas na perspectiva clássica, pois não eram invariantes pelas transformações de Galileu. Outra discrepância entre eletrodinâmica e a mecânica clássica se refere a constância da velocidade da luz, c [4]. Quando combinamos todas equações de Maxwell temos equações para ondas eletromagnéticas, ou para a luz. Segundos as equações, a luz viaja no vácuo a velocidade constante definida por $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. A luz do som é relativa ao ar, a velocidade das ondas do mar é relativa à água, mas ao que a velocidade da luz é relativa se ela viaja no vácuo?

Para tentar responder essa questão, físicos da época tentaram propor a existência do éter: um referencial estacionário no qual a luz viaja. A hipótese era que o éter era parcialmente arrastado pela Terra pelo seu movimento de translação. Michelson-Morley então

realizaram o experimento do interferômetro em 1887 [5]. A expectativa era de que seriam detectados padrões de interferência, porém estes não foram observados e constatou-se que a velocidade da luz de fato era constante em todos os referenciais inerciais.

Entre 1899 e 1904, H. A. Lorentz publicou dois trabalhos nos quais introduziu um novo conjunto de transformações, para as quais o tempo era medido localmente, isto é, a sua passagem é diferente para diferentes observadores. Isso mantinha as leis de Maxwell constantes para qualquer referencial e a velocidade da luz constante, tornando-a uma velocidade limite. Entretanto, as ideias de Lorentz foram, a princípio, rejeitadas [1, 5]. De qualquer forma havia a necessidade de se desenvolver uma mecânica que obedecesse às transformadas de Lorentz.

Apenas em 1905, com a formulação da TRE, por Albert Einstein, as hipóteses de Lorentz foram confirmadas. Em sua teoria, Einstein buscava escrever todas as leis da Física sob uma forma que fosse a mesma para todos os referenciais inerciais, incluindo a eletrodinâmica, sem a necessidade do éter.

Em 1908, o Físico Hermann Minkowski (1864-1909), desenvolveu uma interpretação geométrica para TRE, ao argumentar que espaço e tempo eram entidades conectadas, formando o espaço-tempo. Após 10 anos, a partir da geometrização do espaço-tempo e postulado da covariância, Einstein generaliza sua teoria para a presença de campos gravitacionais e a ela dá o nome de Teoria da Relatividade Geral (TRG).

2.2 Teoria da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial, também conhecida por Teoria da Relatividade Restrita, descreve a estrutura do espaço-tempo sem curvatura, e a física do movimento na ausência de campos gravitacionais. Em 1905, Albert Einstein (1879-1955) teve seu ano milagroso, com a publicação de suas descobertas sobre o efeito fotoelétrico, movimento Browniano e a Teoria da Relatividade Restrita em uma série de artigos. Dentre eles, *On the Electrodynamics of Moving Bodies, Annalen der Physik, volume 17 (1905)*, no qual é descrito um “paradoxo”⁷ que o incomodava [5]: *De acordo com as equações do eletromagnetismo uma barra magnética se movendo no interior da bobina ou a bobina se movendo em relação a uma barra magnética estacionária, apesar de descreverem processos diferentes, apresentam o mesmo resultado observacional, o fluxo de corrente através da bobina.*

⁷Einstein apresenta esse problema em seu trabalho “On the Electrodynamics of Moving Bodies” (Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento), *Annalen der Physik*, volume 17 (1905).

As leis do eletromagnetismo não eram capazes de revelar qual corpo, bobina ou barra magnética, estava em movimento e qual estava em repouso. Einstein então compreendeu que não há um sistema de referência absoluto. O princípio da relatividade traduz a vontade de encontrar uma imagem do mundo que seja independente da situação dos diversos observadores.

A partir de tais ideias Einstein enunciou dois postulados [6]:

Postulado 2.1 - Princípio de Covariância: *as leis da Física são as mesmas para qualquer referencial inercial.*

Postulado 2.2 - Constância da Velocidade da luz: *a velocidade da luz é uma constante universal e possui o mesmo valor em todos os referenciais inerciais de referência. Tal velocidade não depende do movimento da fonte de luz e apresenta o mesmo valor c em todas as direções.*

Tais postulados permitiram Einstein derivar transformações entre referenciais. Essas transformações já haviam sido derivadas anos antes para invariância das equações do Eletromagnetismo. A essas transformações dá-se o nome de Transformações de Lorentz.

2.2.1 Transformações de Lorentz

A relatividade, como qualquer teoria física, é expressa por um grupo de transformações as quais deixam as leis da teoria invariantes e descrevem simetrias [4]. Ao abrir mão do tempo absoluto, o grupo de transformações de Galileu deixou de ser o artifício matemático utilizado, seu lugar foi tomado pelas transformações de Lorentz que mantinham a primeira lei de Newton, a geometria euclidiana, e respeitava o princípio da relatividade em cada referencial inercial.

Entretanto, Lorentz, quando as desenvolveu, manteve os conceitos de espaço e tempo absolutos, pois as transformações não eram nada além de um artifício matemático (seixas). Para dois referenciais inerciais R e R' de coordenadas (t, x, y, z) e (t', x', y', z') , respectivamente, sendo que o movimento ocorre apenas no eixo x , temos que se suas origens coincidem em $t = t' = 0$, em um instante posterior, $t = t' \neq 0$, as coordenadas de ambos se relacionam, sob as Transformações de Lorentz, como,

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt); \\y' &= y; \\z' &= z; \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),\end{aligned}$$

em que, $\gamma = 1/\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. A referência [4] possui um capítulo inteiro voltado para discussão e derivação das transformações de Lorentz, como não é o foco deste trabalho não o faremos aqui.

Na TRR, as transformações de Lorentz apresentam como consequências: *dilatação temporal, contração do espaço, matéria e massa são conversíveis entre si, e relatividade da simultaneidade* [6]. Vejamos sobre cada uma no seguinte exemplo, considere um referencial estático R e um referencial R' que se move a uma velocidade v , próxima a velocidade da luz, em relação a R . Neste cenário temos que,

- Dilatação temporal - Se observarmos de R alguém ou alguma coisa se movendo em R' , vamos concluir que o tempo passa mais lentamente para a pessoa ou objeto se movendo em R' . Isto é, quanto mais rápido no espaço um referencial se move mais lentamente ele se move no tempo.
- Contração do espaço - Se precisamente medirmos o comprimento de alguma coisa se movendo em relação a nós, que estamos em R , com uma velocidade muito próxima a velocidade da luz, referencial R' , encontraremos que o comprimento na direção do movimento é menor do que o comprimento do objeto em R . Portanto, quanto mais rápido um referencial se move, menor o comprimento de corpos nele.
- Conversibilidade entre massa e energia ($E = mc^2$) - Se um objeto se move em relação ao seu referencial R com uma velocidade v próxima a velocidade da luz, então do seu ponto de vista a massa daquele objeto é maior do que a massa do mesmo objeto em repouso. Ou seja, quanto mais rápido um objeto se move maior é seu aumento de massa. Essa consequência dos postulados de Einstein justifica o segundo postulada, para o qual há uma velocidade limite c . Quanto maior a velocidade de um objeto, maior o seu aumento de massa, isso implica que uma força aplicada a esse objeto terá menos efeito conforme v aumenta. À medida que v aproxima-se de c a massa tende a infinito, nenhuma força consegue acelerar um corpo de massa infinita.
- Simultaneidade - Se observarmos dois eventos e concluirmos que são simultâneos no referencial R , um observador em R' se movendo a uma alta velocidade poderá discordar que os dois eventos são simultâneos.

Com isto, a primeira parte da Teoria da Relatividade buscou desenvolver uma nova mecânica, baseada nas transformações de Lorentz, para um Universo de referenciais inerciais, onde o tempo e espaço não são absolutos e a gravidade é desprezível.

2.3 O espaço-tempo de Minkowski

Hermann Minkowski, matemático alemão, em 1907, foi o primeiro a dar uma interpretação quadridimensional para o espaço e o tempo, o espaço-tempo, em que se consideram três dimensões espaciais e uma temporal. A parte espacial se refere a um espaço euclidiano trivial, cuja característica é ser geometricamente plano [21]. A métrica de um espaço n -dimensional arbitrário é a expressão matemática para o cálculo de distâncias nesse espaço.

No espaço de Minkowski, a distância infinitesimal entre dois eventos é dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad (2.1)$$

em que, c é a velocidade da luz, o sinal negativo é adotado por conveniência. Se $ds = 0$, temos que $c = \pm dl/dt$, isto é, somente a luz pode viajar entre esses dois eventos. A $ds = 0$ dá-se o nome de geodésica nula, no caso do espaço de Minkowski a geodésica nula é uma linha reta [22]. O termo $\eta_{\mu\nu}$ é uma matriz diagonal 4×4 na forma de⁸:

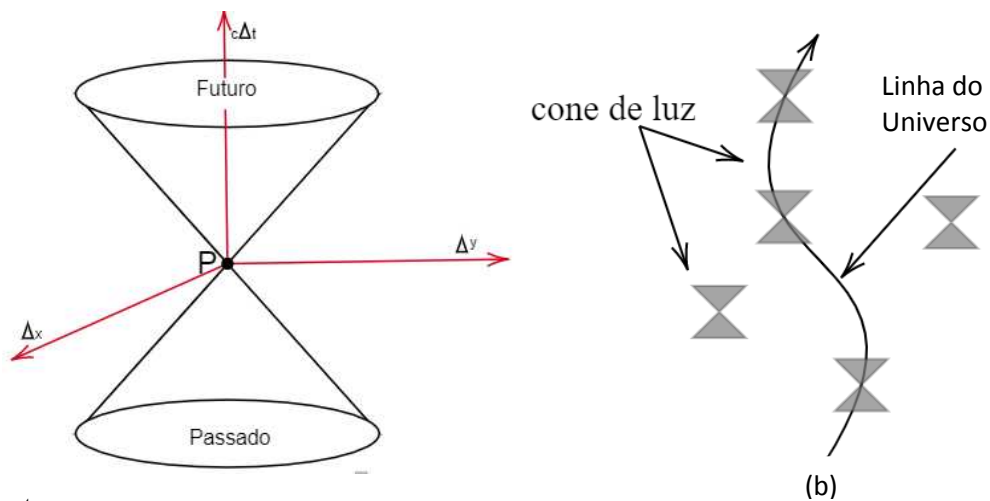
$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag} [1, -1, -1, -1] \quad . \quad (2.2)$$

Um ponto individual no espaço-tempo é chamado de evento. O caminho que uma partícula descreve pelo espaço-tempo é uma curva parametrizada em uma direção chamada linha do Universo [28], Figura 2.3(a). Uma partícula em uma localização fixa segue a linha do Universo paralela ao eixo do tempo na direção em que o tempo aumenta [21].

Além disso, dois eventos no espaço-tempo podem estar casualmente conectados se sua separação espacial e temporal respeitarem $c \geq |dl/dt|$. Diz-se então que a linha do Universo está dentro do cone de luz. O cone de luz, Figura 2.3 (b), é uma estrutura invariante do espaço de Minkowski. Pode ser descrita como pacote de linhas do Universo de todos os fótons (partículas) que passam por um determinado evento no espaço-tempo. Sua estrutura é formada por dois cones ligados pelo vértice, indicando o futuro e passado, com o evento P no presente ao centro (vértice). Todos os eventos localizados no cone futuro podem ser afetados por eventos presentes.

⁸ Essa forma depende de quem a adota, é a chamada assinatura da métrica, no caso -2, no caso o primeiro termo se refere ao tempo, e as demais a parte espacial. Poderia ser considerada também a métrica +2, que representa $\text{diag}[+1, +1, +1, -1]$, ou seja, primeiro as partes espaciais e depois a temporal.

Figura 2.3 – Imagem representando (a) um cone de luz e (b) cones de luz em um espaço curvo.



Fonte: a autora.

O espaço de Minkowski também é chamado de espaço pseudo-riemanniano ou lorentziano.

2.4 O Princípio de Equivalência

Em 1907, Einstein apresentou o *princípio de equivalência*, ponto de partida para a TRG [6]. Para imaginar esse princípio suponha que você seja um astronauta que, repentinamente, acorda em um quarto sem janela, a prova de sons e termicamente isolado, privado de qualquer informação do mundo exterior. Considere que há a sua disposição uma bola de tênis, você a segura a uma determinada altura e a libera, observando que ela cai a uma taxa de $9,8 \text{ m/s}^2$. Ao verificar tal informação chega à conclusão que está no planeta Terra. De repente em uma das paredes uma janela se abre, você percebe que na verdade está dentro de um foguete que acelera a $9,8\text{m/s}^2$, muito distante da Terra.

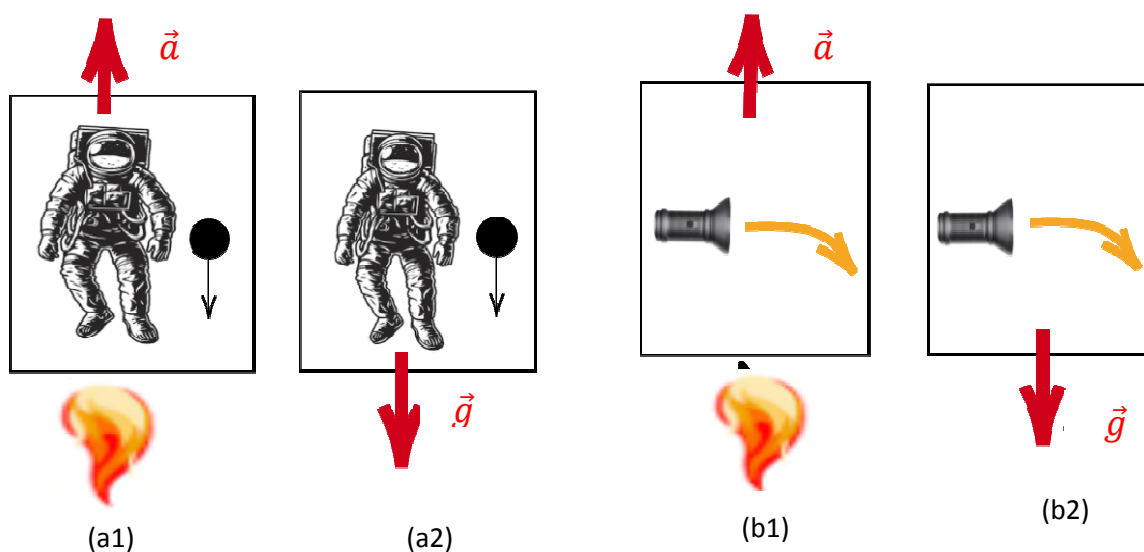
As condições dentro da nave permitem duas interpretações:

- a bola de tênis está em repouso enquanto a nave é acelerada por uma força externa (inercial), Figura (2.4(a1)), ou
- a nave está parada e a bola de tênis se move para baixo devido a ação de uma força gravitacional, Figura 2.4 (a2).

Supondo que a aceleração aplicada na bola seja igual a aquela proporcionada pelo campo gravitacional, você terá a mesma descrição do movimento para a bola, sendo impossível distinguir o movimento devido a forças inerciais (1) e aquele devido a forças gravitacionais (2). O mesmo experimento pode ser executado considerando-se um raio de luz

que sai de uma lanterna, Figura 2.4 (b1) e (b2). Suponha que você tenha ligado uma lanterna, mantendo-a paralelo ao chão. Se sua nave está acelerando para cima, para você, o trajeto do raio de luz irá curvar-se para baixo (Figura 2.4(b1)).

Figura 2.4 – Ilustrações do Princípio de Equivalência. Para um observador olhando de fora, o comportamento da bola de tênis (a1) em uma nave acelerada é idêntico ao (a2) de uma bola de tênis sendo acelerada pela gravidade. Em (b) para uma luz:(b1) o caminho seguido por um raio de luz em uma nave acelerada é exatamente igual ao caminho seguido por um raio de luz (b2) sob o efeito de um campo gravitacional.



Fonte: a autora.

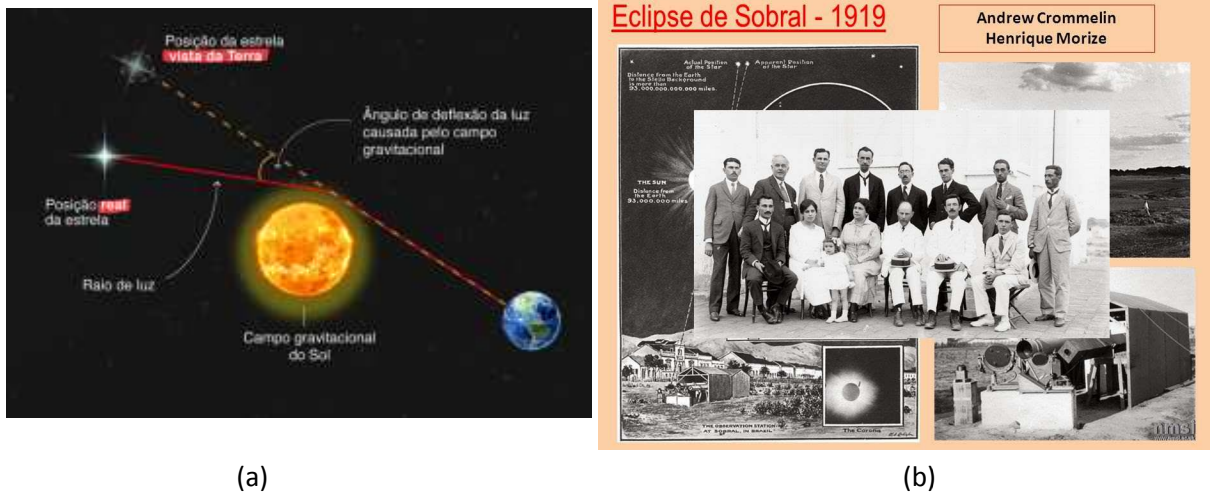
Portanto, o Princípio de Equivalência define: “*que forças inerciais e gravitacionais são equivalentes do ponto de vista físico, sendo impossível distingui-las experimentalmente.*”⁹

A observação da “curvatura” da luz leva a conclusão de que gravidade afeta as partículas da luz eletromagnética, os fótons. Em outras palavras, a luz sofre desvio quando sob ação de um campo gravitacional¹⁰. Esse fenômeno foi observado há 103 anos, em 29/05/1919, data na qual duas equipes estava de prontidão para observar um eclipse solar total, sendo uma equipe localizada em Sobral (CE) no Brasil e a outra na ilha de Príncipe na África. A condição climatológica necessária era céu limpo, sem nuvens. No Brasil esta situação foi possível e os registros foram bem claros, já na África estava parcialmente nublado e os resultados não foram tão bons. A Figura 2.5(a) apresenta uma imagem ilustrativa do desvio da luz ao passar perto do Sol, e em (b) da equipe no nordeste brasileiro.

⁹A única exceção a equivalência entre gravidade e aceleração são as forças de maré que faz com que objetos sejam esticados na presença de um campo gravitacional porque diferentes partes sentem diferentes forças. Tal efeito não pode ser causado pela aceleração.

¹⁰O desvio da luz é conhecido como lente gravitacional, causado pela deflexão da luz de uma estrela por outro corpo massivo. Esse efeito foi utilizado para comprovar a TRG.

Figura 2.5 – Ilustrações (a) do desvio da luz em Sobral (CE), e da (b) equipe expedicionária que participou deste importante registro.



Fonte: (a) <http://fisicaquanticaeclássicanavida.com/2020/12/17/viajando-no-tempo-pela-fisica/>; (b) <https://sergiortorres.blogspot.com/2014/12/fisica-moderna-da-relatividade-restrita.html>.

Apesar de parecer simples tal conclusão leva a consequências importantes. O Princípio de Fermat [4], um dos princípios fundamentais da óptica, estabelece que a luz viaja entre dois pontos pelo caminho que minimiza o tempo de viagem. No espaço euclidiano, ou plano, o menor caminho entre dois pontos é uma reta. Contudo, na presença de gravidade o caminho mais curto não é uma reta. Logo, o espaço é não euclidiano e a trajetória descrita é curvilínea.

2.5 Equações de Campo de Einstein

A gravitação passa a ser interpretada como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa ou energia. A equação dinâmica que descreve a forma como a matéria e a energia modificam a geometria do espaço-tempo corresponde a equação de campo de Einstein da equação (2.4),

$$\begin{array}{c}
 \text{Tensor de Ricci} \\
 \boxed{R_{\mu\nu}} \\
 \uparrow \\
 \boxed{R} \\
 \text{Escalar de Ricci}
 \end{array}
 - \frac{1}{2}
 \begin{array}{c}
 \text{Tensor da Métrica} \\
 \boxed{g_{\mu\nu}} \\
 \uparrow \\
 \boxed{R} \\
 \text{Escalar de Ricci}
 \end{array}
 = - \frac{8\pi G}{c^4}
 \begin{array}{c}
 \boxed{T_{\mu\nu}} \\
 \downarrow \\
 \text{Tensor Energia-Momento}
 \end{array}
 \quad (2.4)$$

Em seu formato matricial, a equação de campo (eq. (2.4)) é apresentada como [25],

$$\begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} R = - \frac{8\pi G}{c^4} \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

O tensor energia-momento descreve a atividade energética do Universo, fornece quantitativamente as densidades e os fluxos de energia e os momentos gerados pelas fontes que determinam a geometria do espaço tempo. Nas subseções a seguir será apresentada uma descrição do significado físico de cada termo destas equações. A referência [35] apresenta a dedução das equações de Einstein.

2.5.1 Lado Esquerdo - Curvatura

O lado esquerdo das equações de Einstein é dado pelo tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$), de modo que esse tensor pode ser escrito como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

O tensor $R_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Ricci, obtido contraindo o tensor de curvatura de Riemann. O tensor $g_{\mu\nu}$ é o tensor da métrica do espaço-tempo e faz, nas equações de Einstein, o papel de campo [4]. O termo R é o escalar de Ricci, ou curvatura escalar, obtido contraindo o tensor de Ricci, assim, associado ao tensor de Ricci e ao tensor da métrica. Em termos tensoriais, a curvatura escalar é igual ao traço do tensor de Ricci com relação ao tensor da métrica [21, 25].

2.5.2 Curvatura de Riemann

A gravitação é a manifestação da curvatura do espaço-tempo, tal curvatura é notada no desvio de uma geodésica por outra geodésica próxima [30]. Tomemos um grupo de geodésicas $P(\lambda, n)$, o parâmetro n distingue uma geodésica de outra. Para valores fixos de n , $P(\lambda, n)$ é uma geodésica com o parâmetro afim λ e vetor tangente, tal que

$$u = \frac{\partial P(\lambda, n)}{\partial \lambda}. \quad (2.7)$$

Sendo que $\nabla_u u = 0$. A separação entre dois pontos de mesmo valor de λ em geodésicas vizinhas é definida como

$$n \equiv \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (2.8)$$

A velocidade relativa de uma partícula na geodésica $n = 1$ em relação à geodésica $n = 0$ é dada por $\nabla_u n$. Consequentemente a aceleração relativa é dada por $\nabla_u \nabla_u n$ em um espaço plano. Para o espaço curvo temos, em notação de componente que

$$\frac{D^2 n^\rho}{d\lambda^2} + R_{\mu\sigma\nu}^\rho u^\mu n^\sigma n^\nu = 0. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) serve como definição do Tensor de Curvatura de Riemann, análogo a $K(x)$ de Gauss para n dimensões. Ela pode ser usada para derivar a expressão de componentes de Riemann em uma base de coordenadas:

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \langle dx^{\rho}, [\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}]e_{\mu} \rangle . \quad (2.10)$$

De forma que o tensor de Riemann é escrito em termos dos símbolos de Christoffel e suas derivadas,

$$R_{\mu\sigma\nu}^{\rho} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} . \quad (2.11)$$

Sobre o significado desse tensor, os últimos índices, $\sigma\nu$, são antissimétricos e definem localmente um plano, os primeiros índices definem uma matriz de rotação R_{μ}^{ρ} . A curvatura do espaço-tempo além de causar desvios na geodésica faz com que o transporte paralelo seja dependente da rota, o que faz com que as derivadas covariantes falhem em sua propriedade de comutação e previne a existência de um sistema de coordenadas de Lorentz global.

O Tensor de Curvatura de Riemann, $R_{\mu\sigma\nu}^{\rho}$, possui 256 componentes independentes, entretanto sua simetria faz com que esse número seja reduzido a 20 componentes. Tais simetrias são [32]:

$$R_{[\rho\mu][\sigma\nu]} = R_{[\sigma\nu][\rho\mu]}, \quad R_{[\rho\mu\sigma\nu]} = 0, \quad R_{\rho[\mu\sigma\nu]} = 0 . \quad (2.12)$$

Em equações que envolvem tensores podemos fazer as chamadas contrações, isto é, dividir tensores em partes menores que tenham interpretações físicas ou para explorar propriedades [28]. A partir do tensor de Riemann diversas outras formas de tensores de curvatura podem ser formadas por contração, entre eles o tensor de curvatura de Ricci e desse obtém-se o escalar de Ricci, como citado anteriormente, e será apresentado com mais detalhes na próxima subseção.

2.5.3 Tensor de Curvatura de Ricci e Escalar de Ricci

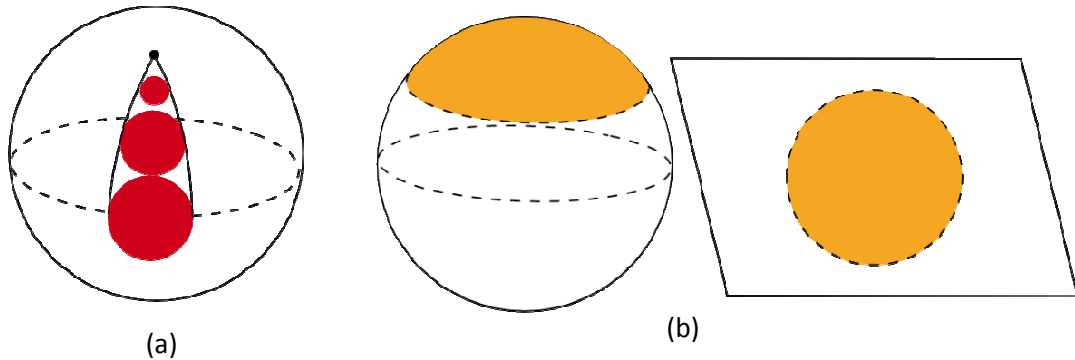
Ao contrair o primeiro e terceiro índices do Tensor de Riemann, temos o chamado Tensor de Ricci,

$$R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = R_{\mu\nu} . \quad (2.12)$$

O Tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, fornece como volumes mudam ao longo de geodésicas. Imagine uma superfície esférica 2D com um círculo sendo transportado entre duas geodésicas do equador até um dos polos, como apresentado na Figura 2.7 (a). Devido a curvatura da

superfície as geodésicas sofrem um desvio que as fazem convergir no polo. Conforme o círculo é transportado seu volume diminui. A variação do tamanho é dada pelo Tensor de Ricci.

Figura 2.7 – Ilustrações de: (a) Tensor de Ricci: círculo sendo transportado entre geodésicas, e (b) Escalar de Ricci: círculo de mesmo perímetro, mas áreas diferentes, desenhado na superfície de uma esfera e em um plano.



Fonte: adaptada de Eigenchris (2020).

Tomando a equação (2.12) calculando seu traço, isto é, aplicando a métrica inversa, obtemos o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad . \quad (2.13)$$

O escalar de Ricci, R , compara o volume de uma esfera em um espaço plano com o volume da mesma esfera em um espaço curvo, Figura 2.7(b). Novamente, consideremos um caso 2D. Um círculo sob um plano tem área $A = \pi r^2$, um círculo de mesmo perímetro sob um dos polos de uma esfera possui área $A > \pi r^2$. Essa diferença é computada pelo Escalar de Ricci.

2.6 Lado Direito - Tensor energia-momento

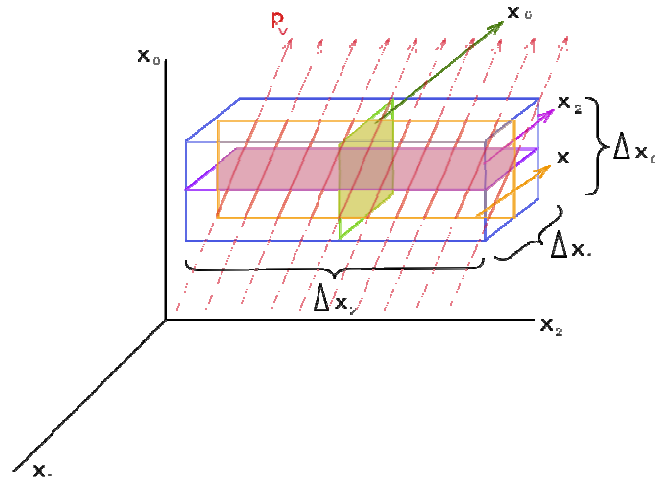
A parte de matéria e energia das equações de Einstein, Equação (2.4), é dada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, de modo que podemos representar as equações na forma compacta,

$$G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \quad , \quad (2.14)$$

em que, $k = 8\pi G/c^4$ é chamada de constante gravitacional de Einstein, sendo G a constante de gravitação universal e c é a velocidade da luz no vácuo.

O tensor de energia-momento fornece quantitativamente as densidades e os fluxos de energia e momento gerados pelas fontes presentes no espaço que determinarão a geometria do espaço-tempo [24, 36]. O tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ pode ser entendido como o fluxo do quadrimomento p_μ através de uma superfície x_ν constante, Figura 2.8.

Figura 2.8 – Representação esquemática de um fluxo de energia-momento através de três das quatro superfícies. As linhas vermelhas simbolizam linhas do Universo.



Fonte: a autora.

Tomemos a definição do momento linear para 4-dimensões

$$p_\nu = mu_\nu \quad (2.15)$$

Analisando a equação (2.15) para o fator $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, contido em u_ν , o fator de Lorentz,

referente a contração do espaço, apresentado nas transformações de Lorentz no início deste capítulo.

- Para $\gamma = 1$, considere que um observador esteja em um referencial inercial, bem como uma partícula por ele observada. Reescrevendo a equação acima em termos de energia. Consideremos a componente u_0 , definida como velocidade da luz c , logo temos:

$$p_0 = \frac{mc^2}{c} \quad (2.16)$$

Como $E = mc^2$, a eq. (2.16) fica escrita na forma:

$$p_0 = \frac{E}{c} \quad (2.17)$$

Assim, a componente temporal nos fornece informações sobre a energia, e se pode definir que:

$$\tilde{u} = u_\mu e^\mu, \text{ em que } u_\mu(c, 0, 0, 0) [\text{velocidade do observador}] ; \quad (2.18(a))$$

$$\tilde{p} = p_\mu e^\mu, \text{ em que } p_\mu = \left(\frac{E}{c}, 0, 0, 0\right) [\text{velocidade da partícula}] ; \quad (2.18(b))$$

$$-\tilde{p} \cdot \tilde{u} = -\eta^{\mu\nu} p_\mu u_\nu = -\eta^{00} p_0 u_0 = E \text{ [energia]} , \quad (2.18(c))$$

com $\eta^{\mu\nu}$ sendo a métrica de Minkowski. Por meio da relação (2.18(c)) podemos fixar que a energia é dada por, $E = -\tilde{p} \cdot \tilde{u}$.

- Para $\gamma > 1$. O observador permanece em um referencial estático, mas a partícula se move a uma velocidade u ,

$$u_\mu = (c, 0, 0, 0) [\text{velocidade do observador}] , \quad (2.19(a))$$

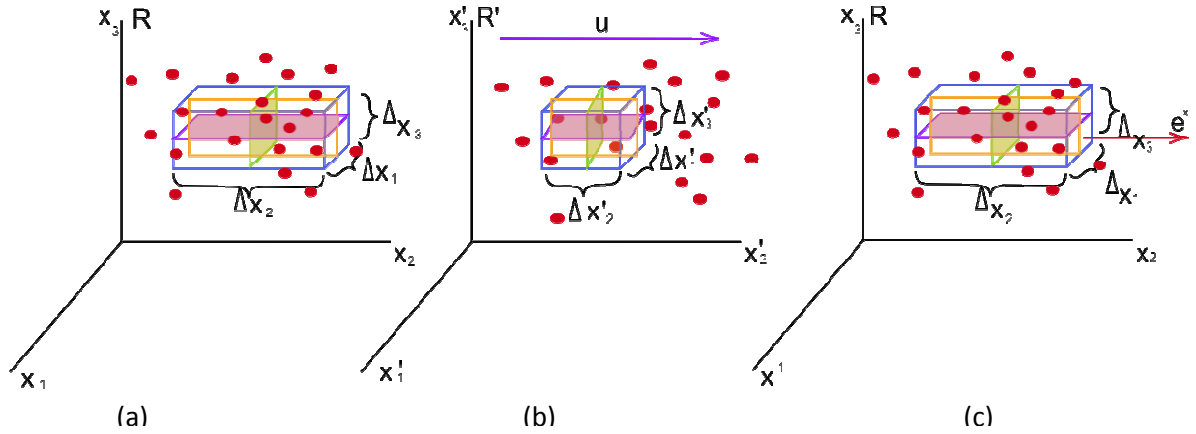
$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \gamma (c, u_1, u_2, u_3) [\text{velocidade da partícula}] . \quad (2.19(b))$$

Seguindo o mesmo processo realizado anteriormente, encontramos que a energia é dada por,

$$E = m_0 \gamma c^2. \quad (2.20).$$

Pensemos a mesma situação, mas para um conjunto de partículas idênticas que não interagem quando estáticas em um referencial inercial que se move com uma velocidade u em relação a um observador, como ilustrado na Figura 2.9.

Figura 2.9 – Representação de três dimensões das quatro dimensões do espaço-tempo. (a) conjunto de partículas e elemento de volume em um referencial estacionário, (b) conjunto de partículas e elemento de volume em um referencial que se move a velocidade, (c) elemento de volume em um referencial estático enquanto um conjunto de partículas se move a uma velocidade genérica v na direção x_2 .



Fonte: a autora.

Tomemos n como o número de partículas, V como o volume do elemento no referencial estático ($V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$), Figura 2.9 (a). Se compararmos a densidade numérica desse conjunto de partículas nos dois referenciais que se movem em relação um ao outro, temos que

$$N = \frac{n}{V} = \frac{n}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} (\text{referencial em repouso}) , \quad (2.21(a))$$

$$N' = \frac{n}{V'} = \frac{n}{\Delta x'_1 \Delta x'_2 \Delta x'_3} = \frac{\gamma n}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \text{ (referencial em movimento)}. \quad (2.21(b))$$

Note que o fator de Lorentz aparece pois quando em movimento ocorre a contração do elemento de volume (Figura 2.9(b)). Portanto, usando o mesmo elemento de volume e a 4-velocidade do conjunto de partícula para definir a densidade numérica quadridimensional,

$$N_\mu = \frac{n}{V} \gamma(c, u_1, u_2, u_3) \quad . \quad (2.22)$$

- A componente zero,

$$N_0 = \frac{n}{V} c \quad , \quad (2.23)$$

visto que para o referencial em repouso $\gamma = 1$. Logo para esse referencial:

$$-p \cdot N = -\eta^{00} p_0 N_0 = -\frac{E n}{c V} c = \frac{E n}{V} = \frac{E_{total}}{V} \quad . \quad (2.24)$$

- Tomemos a componente na direção x_2 . Sua densidade numérica é escrita na forma de

$$N_2 = \frac{n}{V} \gamma u_2 \quad . \quad (2.25)$$

Agora, imaginemos que as partículas se movem através de um volume V no referencial em repouso, como mostrado na Figura 2.9 (c). Algumas partículas irão atravessar a superfície perpendicular $\Delta x_1 \Delta x_3$,

$$N_2 = \frac{n}{V} \gamma u_2 = \frac{n}{V} \gamma \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{n}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \gamma \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{n \gamma}{\Delta A \Delta t} \quad . \quad (2.26)$$

Generalizando a equação acima temos que,

$$N_\mu = \frac{\text{número de partículas na direção } \mu \times \gamma}{(\text{unidade de área})(\text{unidade de tempo})} \quad . \quad (2.27)$$

Após essa introdução podemos definir o tensor de energia-momento para um conjunto de partículas em seu referencial em repouso:

$$T = \tilde{p} \otimes \tilde{N} \quad ; \quad (2.28(a))$$

$$T = m_0 \tilde{u} \otimes \frac{n}{V} \tilde{u} = m_0 \frac{n}{V} u_\mu e^\mu \otimes u_\nu e^\nu = \rho_0 u_\mu u_\nu e^\mu \otimes e^\nu \quad ; \quad (2.28(b))$$

$$T = T_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu \quad ; \quad (2.28(c))$$

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu \quad . \quad (2.28(d))$$

As componentes do tensor energia-momento descrevem como a energia e o momento fluem através do espaço-tempo.

- A componente T_{00} é a densidade de energia relativística;
- As componentes $T_{\mu 0}$ são a densidade da componente μ do momento, ou seja, é o fluxo por unidade de volume em um tempo constante;
- As componentes $T_{0\nu}$ são a energia por unidade de área por unidade de tempo na direção $\nu \neq 0$, isto é o fluxo de energia nas direções espaciais;
- As componentes $T_{\mu\nu}$ são o fluxo da componente μ do momento na direção ν , como uma tensão de cisalhamento; por fim
- As componentes $T_{\mu\mu}$ são o fluxo da componente μ na direção μ , nesse caso há uma força atuando sobre a área perpendicular, isto é pressão.

Os componentes do tensor energia-momento podem ser representados de maneira matricial, como mostra a equação (2.29),

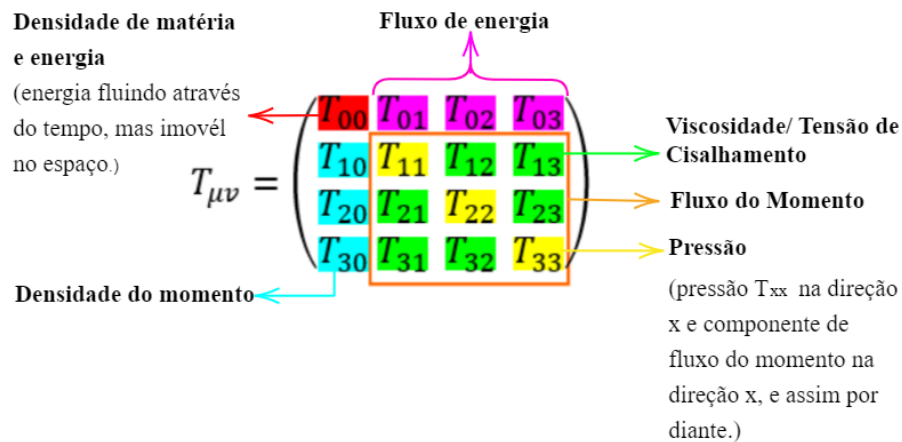
$$T_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \nu=0 & \nu=1 & \nu=2 & \nu=3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mu=0 \\ \mu=1 \\ \mu=2 \\ \mu=3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.29)$$

mostra qual componente do momento está sendo considerada (componente 0-energia, 1,2,3-momento em cada direção espacial) ← $T_{\mu\nu}$

$T_{\mu\nu}$ → mostra qual direção do espaço-tempo considerar (0-tempo, 1,2,3-direções espaciais)

O espaço-tempo contém um “rio de partículas” fluindo de 4-momentos. Cada partícula carrega seu 4-momento ao longo da sua linha do Universo, e muitas partículas, em muitas linhas do Universo, produzem um fluxo contínuo. Na Figura 2.10, está ilustrada a parte matricial da equação (2.29) indicando o que representa cada elemento.

Figura 2.10 – Ilustrando as componentes do Tensor Energia-Momento e seus significados.



Fonte: adaptada de Profound Physics (Disponível em: https://profoundphysics.com/general-relativity-for-dummies/#The_Mathematics_of_General_Relativity_Explained_Intuitively.)

Devido a presença de muitas partículas, o tratamento hidrodinâmico adequado é o de um fluido de partículas. O chamamos de fluido perfeito [30], quando caracterizado por um fluido ou gás que se move pelo espaço tempo com uma 4-velocidade u , que pode variar de evento para evento. Tal fluido exibe densidade de energia ρ e uma pressão isotrópica P no referencial em repouso de cada fluido.

Uma propriedade essencial do fluido perfeito é a ausência de condução térmica e tensão, correspondendo a viscosidade. O tensor energia-momento é definido como [32],

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(\eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) , \quad (2.30)$$

em que, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica Minkowski, substituída nas equações de Einstein pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. As funções ρ e P são, respectivamente, a densidade de massa-energia e pressão do fluido, medidos no referencial em repouso.

3

Dinâmica Cósmica

Neste capítulo apresentam-se os tópicos essenciais para o entendimento da dinâmica cósmica, a saber: Princípio Cosmológico, fator de escala e coordenadas comoveis, lei de Hubble e *redshift* (deslocamento para o vermelho) cosmológico. Em seguida, a partir das equações de Einstein será deduzida a equação de Friedman, equação da aceleração e equação do fluido perfeito.

3.1 Princípio Cosmológico

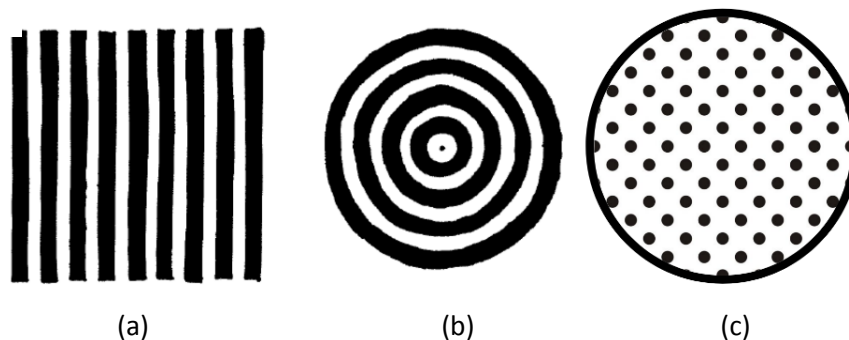
Na década de 30, Edward A. Milne (1896-1950) estabeleceu o argumento básico da Cosmologia moderna, o *princípio cosmológico* [2], o qual pode ser entendido como uma extensão do primeiro postulado de Einstein [3]. Para Milne, além das leis físicas, a descrição da estrutura do Universo, feita por observadores distintos, deve ser a mesma. Isto é, observadores diversos, que acompanham o movimento cosmológico, devem observar propriedades idênticas do Universo. Com isso em vista, podemos enunciar, formalmente, o *princípio cosmológico* como: o Universo é isotrópico e homogêneo em grandes escalas ($>100 \text{ Mpc}$) [1, 2, 3].

Entende-se homogêneo como a não existência de localização privilegiada no Universo, ou seja, há uma distribuição uniforme de matéria, pela qual devemos observar a mesma quantidade de galáxias, aglomerados e super aglomerados, qualquer que seja nossa localização.

Por isotrópico, entende-se que não há direção privilegiada no Universo, a aparência do Universo é a mesma em qualquer direção. O significado de isotropia fica evidente se imaginarmos uma sala de paredes infinitas e com uma lâmpada acesa ao centro. Há diversas regiões em que podemos encontrar o mesmo nível de luminosidade, entretanto há uma região em que a luminosidade é maior, exatamente onde a lâmpada está, ou seja, não há isotropia, pois existe uma região com maior luminosidade que as demais regiões. Portanto,

homogeneidade e isotropia não são iguais. A Figura 3.1 ilustra o (a) padrão somente homogêneo, em (b) somente isotrópico e (c) ambos os padrões homogêneo e isotrópico.

Figura 3.1 – Ilustrações representando o que seria um: (a) Padrão homogêneo, mas não isotrópico. (b) Padrão isotrópico, mas não homogêneo para um observador ao centro. (c) Padrão isotrópico e homogêneo.



Fonte: Ryden (2017).

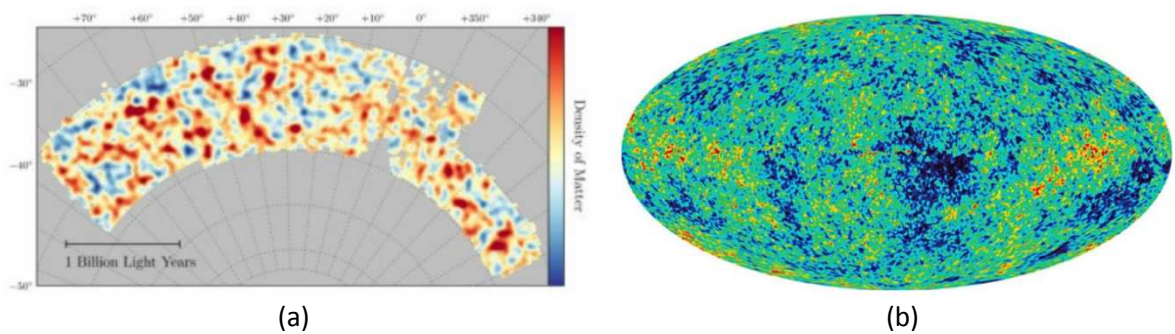
Há de se ressaltar que o princípio cosmológico é aplicado a grandes escalas! Essa é uma parte muito importante do princípio cosmológico. Se observarmos a vizinhança da nossa galáxia vemos que apesar do raio ser consideravelmente grande, cerca de 100.000 anos luz¹¹, Figura 3.2 (a), a Via Láctea é o objeto mais luminoso e massivo, o que faz com que ela defina uma direção preferencial, uma vez que é fácil determinarmos um vetor apontando para nossa galáxia. Além disso, a densidade de massa da nossa galáxia é bem maior que a densidade média do Universo.

A Figura 3.2 (d) mostra que até a escala de aproximadamente 100 milhões de anos-luz sempre há uma região de maior concentração de matéria, a qual, conseqüentemente, torna-se a direção privilegiada de atração. Podemos acompanhar a evolução de escala na sequência de representações da Figura 3.2 (a) a (d). É apenas quando atingimos um raio de 1 bilhão de anos-luz que podemos ver que uma distribuição uniforme de matéria (Figura 3.2(e)).

¹¹ Distância que um fóton percorre durante um ano. Em inglês *light-years*. A velocidade do fóton é de 300.000 km/s.

Diversas observações constaram a veracidade do princípio cosmológico para o Universo observável. Dentre estas temos o mapeamento do céu para determinação de galáxias (Figura 3.3(a)) e matéria escura e o mapeamento da Radiação Cósmica de Fundo (Figura 3.3(b)).

Figura 3.3 – Imagens de, (a) Mapa elaborado pelo *Dark Energy Survey* de distribuição de matéria escura. (b) Mapeamento da Radiação Cósmica de Fundo pela *WMAP Team NASA*.



Fonte: adaptada de Arantes (2017) e Nemiroff e Bornel (2003)

Resumidamente, o princípio cosmológico implica que não podemos estabelecer um centro absoluto para o Universo [3]. Portanto, não há razão para considerarmos que a visão do Universo a partir da Terra é privilegiada e a visão que temos da Terra é a mesma que temos se estivéssemos em qualquer outro lugar do Universo.

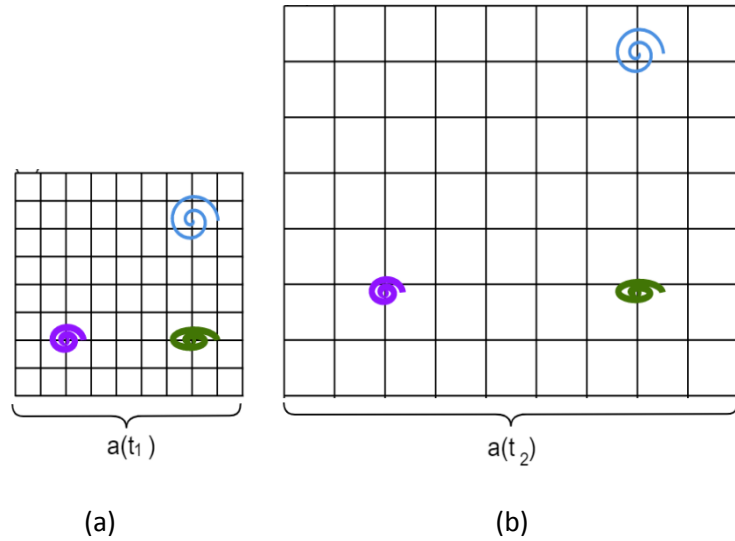
Além disso, a anisotropia, ou seja, a existência de uma direção privilegiada é necessária em pequenas escalas, sem ela não haveria a formação de planetas, estrelas, sistemas solares, entre outros.

3.2 Fator de escala e Coordenadas Comoveis

Em cosmologia, distância é uma grandeza dinâmica. Uma maneira de medir distâncias é por meio das coordenadas comoveis. Essas coordenadas são aquelas que se expandem na mesma taxa que o Universo. Podemos entendê-las como uma grade na qual as galáxias estão presas enquanto o Universo se expande, Figura 3.4. As variações nas escalas produzidas pela expansão, ou contração, do Universo podem ser “medidas” pelo fator de escala $a(t)$, definido como uma função dependente do tempo que parametriza a expansão do Universo por meio da distância entre galáxias,

$$a(t) \propto \text{distância intergaláctica.}$$

Figura 3.4 – Ilustração apresentando a evolução do fator de escala no tempo. As grades em preto são as coordenadas comoveis, note que as galáxias parecem estar “grudadas” a coordenada.



Fonte: a autora.

O valor do fator de escala é variável, então convenientemente o normalizamos como $a(t_0) = 1$. Por meio do fator de escala podemos expressar distâncias em diferentes épocas em termos de escala cósmica,

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0}, \quad (3.1)$$

em que, $R(t)$ é a distância entre duas galáxias em um dado tempo t e R_0 é a distância atual.

3.3 A Métrica de Robertson-Walker

A geometria Riemanianna sugere que o Universo pode ser finito e, ao mesmo tempo, não possuir limites, isto é, ele possui geometria curva. Considere a métrica de equação (1.12):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

em que ds é o elemento de linha do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo, e os índices μ e ν são 0, 1, 2 e 3, com 0 representando a coordenada temporal e os índices remanescentes representando as coordenadas espaciais. Podemos escrever que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2. \quad (3.2)$$

Sendo dl o elemento de linha espacial e dl^2 a parte espacial de métrica do espaço-tempo. Os primeiros modelos cosmológicos propunham um Universo de curvatura espacial

negativa. Assim o elemento de linha de uma superfície tridimensional plana é, pelo teorema de Pitágoras,

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad , \quad (3.3)$$

substituindo na equação (3.14), obtém-se a métrica de Minkowski [26, 27]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad . \quad (3.4)$$

Friedmann, em 1922, obteve uma solução das equações de Einstein para um Universo com curvatura espacial positiva constante. Ele supôs que o Universo era uma superfície tridimensional em uma quadri-esfera, sendo a equação da quadri-esfera dada por,

$$a^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad , \quad (3.5)$$

em que, a representa o raio do Universo modelado. O elemento de linha dl da quadri-esfera é dado por

$$dl^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad , \quad (3.6)$$

isolando $(x_0)^2$ na equação (3.5), temos que

$$dx_0^2 = a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad . \quad (3.7)$$

Assim,

$$dx_0 = \frac{\partial x_0}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_0}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_0}{\partial x_3} dx_3 \quad . \quad (3.8)$$

Como,

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{\sqrt{a^2 - \sum_{j=1, j \neq i}^3 x_j^2}} dx_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.9)$$

a equação(3.8) toma a forma de:

$$dx_0^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \quad . \quad (3.10)$$

Substituindo na equação (3.11), o elemento linha da quadri-esfera é dado por

$$dl^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad . \quad (3.11)$$

Tomemos as coordenadas de uma quadri-esfera qualquer de raio a :

$$x_1 = a \operatorname{sen} \chi \cos \theta, \quad x_2 = a \operatorname{sen} \chi \cos \theta \cos \phi, \quad x_3 = a \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad \text{e} \quad x_0 = a \cos \chi$$

Com $0 \leq \chi \leq \pi$, podemos escrever a equação (3.11) como,

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi d\Omega^2) \quad . \quad (3.12)$$

Considerando $\operatorname{sen} \chi = r$, se obtém que,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi \Rightarrow dr = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \chi} d\chi \Rightarrow d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} dr \quad . \quad (3.13)$$

Substituindo a equação (3.13) na equação (3.12) obtêm-se,

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.14)$$

sendo r é a coordenada comóvel. Substituindo a equação (3.14) na métrica,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (3.15)$$

A equação (3.15) é conhecida como métrica de Friedmann para o Universo fechado com curvatura espacial positiva constante.

Em 1924, Friedmann obteve soluções cosmológicas para um Universo aberto, ou seja, curvatura espacial negativa constante. Ele supôs que o Universo poderia ser uma superfície tridimensional de um quadri-hiperbolóide. A equação quadri-hiperbolóide é dada por,

$$-a^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (3.16)$$

Nesse caso a é apenas uma constante. O elemento de linha espacial é dado por:

$$dl^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (3.17)$$

Realizando os mesmos procedimentos feitos entre a equação (3.6) e (3.10) obtém-se que,

$$dl^2 = -\frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (3.18)$$

Tomemos as coordenadas de uma quadri-hiperbolóide qualquer temos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sinh \chi \cos \theta, \quad x_2 = a \sinh \chi \cos \theta \cos \phi, \\ x_3 &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \quad e \quad x_0 = a \cosh \chi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Com $0 \leq \chi \leq \pi$, podemos escrever a equação (3.19) como:

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2). \quad (3.20)$$

Para $\sinh \chi = r$, e lembrando que:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi \Rightarrow dr = \sqrt{1 - \sinh^2 \chi} d\chi \Rightarrow d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} dr. \quad (3.21)$$

Assim, obtém-se que:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.22)$$

em que, r é a coordenada comóvel. Assim, temos que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (3.23)$$

A equação (3.23) é chamada de métrica de Friedmann para um Universo aberto com curvatura espacial negativa constante. As métricas acima foram desenvolvidas de maneira

independente pelos matemáticos H. P. Robertson e A.G. Walker. Ambos desenvolveram uma expressão geral que englobava a métrica plana e as métricas de Friedmann. Para eles o Universo era uma hiper-superfície tridimensional de uma quadri-geometria que obedecia a expressão:

$$\frac{a^2}{k/R_0^2} = (k/R_0^2)x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 , \quad (3.24)$$

em que, R_0 é o raio de curvatura e k é a constante de curvatura, podendo assumir valores $k = 0, 1$ ou -1 .

- Para $k = 0$ tem-se uma superfície plana;
- Para $k = 1$, tem-se uma quadri-esfera e
- para $k = -1$, tem se uma quadri-hiperbolóide.

O elemento de linha espacial da quadri-geometria é:

$$dl^2 = k/R_0^2(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 . \quad (3.25)$$

Diferenciando-se a equação (3.25) e com um pouco de álgebra tem-se:

$$dl^2 = k/R_0^2 \left(\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{\sqrt{a^2 - k/R_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} \right)^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 . \quad (3.26)$$

Transformando para coordenadas esféricas:

$$x_1 = R \sin \theta \cos \varphi, x_2 = R \sin \theta \sin \varphi \text{ e } x_3 = R \cos \theta , \quad (3.27)$$

obtém-se que:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \sin \theta \cos \varphi dR + R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \theta \sin \varphi d\varphi; \\ dx_2 &= \sin \theta \sin \varphi dR + R \cos \theta \sin \varphi d\theta + R \sin \theta \cos \varphi d\varphi; \\ dx_3 &= \cos \theta dR - R \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Assim

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2 , \quad (3.28)$$

substituindo na equação (3.27), tem-se

$$dl^2 = \frac{(k/R_0^2)R^2}{a^2 - (k/R_0^2)R^2} dR^2 + dR^2 + R^2 d\Omega^2 . \quad (3.29)$$

Isto é,

$$dl^2 = \frac{a^2}{a^2 - (k/R_0^2)R^2} dR^2 + R^2 d\Omega^2 . \quad (3.30)$$

Considerando $R = ar$ e substituindo na equação, obtêm-se

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\Omega^2 \right] , \quad (3.31)$$

chamada de métrica de Robertson-Walker. Aqui generalizamos a para depender do tempo, $a(t)$. Em suma, Figura 3.4, ela descreve um Universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico, repleto de um fluido ideal com densidade e pressão dada pelas equações de Friedmann (Será apresentado na seção 3.5).

Figura 3.4 – Resumo da métrica de Robertson-Walker, incorporado Lematry e Friedmann.

Métrica de Robertson-Walker

A métrica de Robertson-Walker descreve um Universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico.

Descreve um universo repleto de um **fluido ideal** com densidade e pressão dada pelas equações de Friedmann.

A métrica FLRW é utilizada como primeira aproximação para o modelo cosmológico do universo a partir do Big Bang

Componente temporal = Tempo Cósmico

Componentes espaciais = Coordenadas Comoveis

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]$$

Fator de escala Curvatura Raio de Curvatura

0	+1	-1
plano	fechado	aberto

Fonte: Autora.

**Até 2003, as implicações teóricas das várias extensões do FLRW pareciam estar bem compreendidas e o objetivo é fazer estas consistentes com as observações do COBE e do WMAP. (Fonte: https://www.wikiwand.com/pt/M%C3%A9trica_de_Friedmann-Lema%C3%AAtre-Robertson-Walker)

Fonte: a autora, slides da defesa de TCC.

3.4 Lei de Hubble e *Redshift* Cosmológico

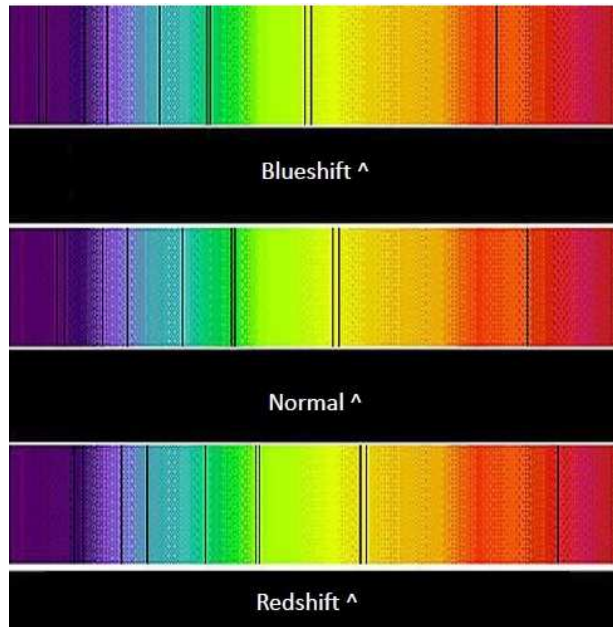
Quando ainda se imaginava um Universo estacionário a expectativa era a de que as galáxias podiam se mover de modo aleatório. Entretanto, foi observado por Edwin Hubble¹², com a assistência de Milton Humason, usando-se variáveis Cefeidas¹³ que a maioria das galáxias possuía um *redshift* (algumas *blueshift*). *Redshift* (*blueshift*) é o deslocamento do espectro de ondas eletromagnéticas em direção ao maior (menor) comprimento de onda, e

¹² Vestu Slipher foi o primeiro a calcular a velocidade com que Andrômeda de aproxima da Terra, bem como a velocidade de diversas galáxias, entretanto em 1910 galáxias eram chamadas de nebulosas espirais, interpretadas como sistemas solares em formação [5]. Em 1927, George Lemaître utilizou uma lista contendo 42 galáxias as quais o deslocamento do comprimento de onda havia sido calculado por Slipher e concluiu que as altas velocidades encontradas (muito acima da velocidade das estrelas da Via Láctea) poderiam ser resultado da expansão do Universo [1].

¹³ Variáveis cefeidas são estrelas super gigantes de alta luminosidade [$\bar{L} = 40.000L_{\odot}$ (luminosidade solar)] e luminosidade periodicamente variante [1].

assim diz que se desloca para o lado vermelho ou azul no caso do *blueshift*, em relação ao espectro normal (Figura 3.5).

Figura 3.5 – Imagem ilustrativa do deslocamento para o azul (*blueshift*), e para o vermelho (*redshift*) em relação ao espectro normal.



Fonte: <http://danielegasparri.blogspot.com/2014/06/proviamo-far-chiarezza-sul-redshift.html>

No caso de um Universo em expansão os “objetos” tendem a apresentar um desvio para maiores comprimentos de onda, portanto apresenta um *redshift*, esse pode ser resultante de três diferentes efeitos, a saber [42],

- efeito Doppler convencional (velocidade de recessão dos corpos),
- efeito Doppler gravitacional (variações do campo gravitacional entre o objeto emissor e receptor) e,
- a expansão da geometria do espaço-tempo.

Define-se matematicamente *redshift* pela equação

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_0} \quad , \quad (3.32)$$

em que, λ_o e λ_e são o comprimento de onda da luz observada e emitida, respectivamente. O valor de *redshift* ainda pode ser relacionado à distância que a outra galáxia se encontra do observador¹⁴, a essa relação dá-se o nome de Lei de Hubble, descrita como:

¹⁴ A princípio a Lei de Hubble pode parecer violar o princípio cosmológico, a referência [1] explora matematicamente o porquê de isso não ser verdade.

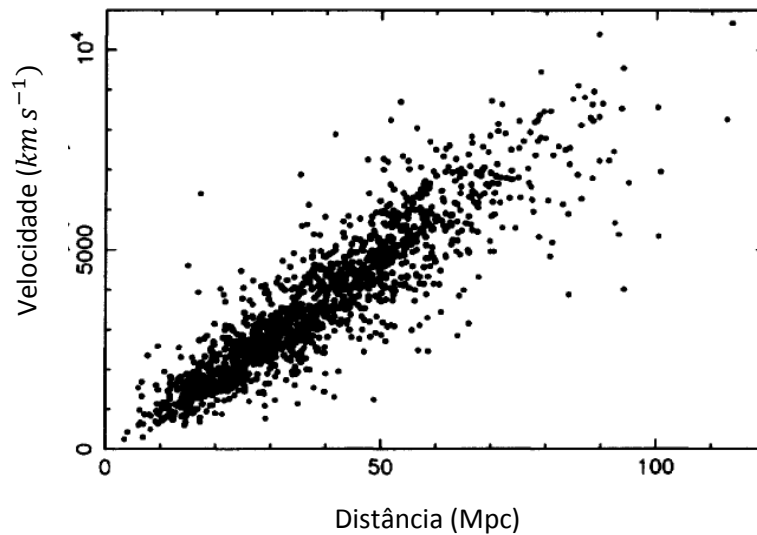
$$z = \frac{H_0}{c} r , \quad (3.33)$$

sendo H_0 a *constante de Hubble*. Interpretando-se a equação (3.33) como deslocamentos Doppler pode-se reescrever essa equação de modo que temos uma relação linear entre velocidade de afastamento das galáxias e distância, Figura 3.6:

$$v = H_0 r . \quad (3.34)$$

Nesse caso a constante de Hubble (H_0) pode ser calculada ao dividir velocidade por distância e sua unidade¹⁵ é $kms^{-1}Mpc^{-1}$.

Figura 3.6 – Gráfico da velocidade (km/s) versus a distância (Mpc) estimada de um conjunto de 1355 galáxias.



Fonte: Liddle (2003).

Se atualmente as galáxias estão se afastando, então isso implica que no passado elas estavam muito próximas, logo se não há forças externas que as faça acelerar ou desacelerar seu movimento relativo pode-se dizer que suas velocidades são constantes, e definidas pela equação (3.4), então o tempo passado desde o período no qual elas estavam em contato, ou muito próximas pode ser definido como,

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = H_0^{-1} . \quad (3.35)$$

Dá-se o nome de *tempo de Hubble* a t_0 , que define a idade atual do Universo, calculada como aproximadamente $(14,38 \pm 0,42)$ Giga anos [1], valor que condiz com a

¹⁵ 15 pc é a abreviatura de parsec, que é uma unidade de medida de comprimento para grandes distâncias de objetos astronômicos fora do sistema solar, e equivale aproximadamente a 3,26 anos luz ou 30,9 trilhões de quilômetros.

idade dos objetos astronômicos mais antigos já observados. Dessa forma, o tempo de Hubble guia naturalmente para um modelo *Big Bang* de evolução do Universo.

Visto que “objetos” com grandes valores de *redshift* aludem a um período no qual o Universo tinha um fator de escala pequeno, enquanto pequenos valores de *redshift* aludem a eras recentes¹⁶, podemos escrever uma relação entre *redshift* (z) e o fator de escala $a(t)$. Tomemos um sinal eletromagnético emitido por um objeto de coordenadas (r, θ, ϕ) , no instante t_e o primeiro pico é emitido, no instante $t_e + \delta t_e$ um segundo pico é emitido. Ambos são observados pelo observador de coordenadas $(0,0,0)$ no instante t_o e $t_o + \delta t_o$, respectivamente. O sinal de luz percorre uma geodésica nula ($ds^2 = 0$), onde θ e ϕ são constantes. Utilizando a métrica de Robertson-Walker (eq. 3.31) temos que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} = 0 \quad (3.36)$$

reescrevendo,

$$\frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} \quad (3.37)$$

Uma vez que $dr < 0$ para $dt > 0$, temos que:

$$\frac{cdt}{a(t)} = - \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} \quad (3.38)$$

Logo para o primeiro pico da radiação eletromagnética escreve-se,

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} \quad (3.39)$$

De maneira similar para o segundo pico,

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}} \quad (3.40)$$

Substituindo a equação (3.40) na equação(3.39),

$$\begin{aligned} \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} \quad , \\ \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{cdt}{a(t)} \\ \frac{c\delta t_e}{a(t_e)} &= \frac{c\delta t_o}{a(t_o)} \quad (3.41) \end{aligned}$$

Sendo $c\delta t_e = \lambda_e$ e $c\delta t_o = \lambda_o$, podemos reescrever a relação acima na forma de:

¹⁶ Para o tempo atual $z = 0$.

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} . \quad (3.42)$$

Isso implica que o comprimento de onda observado, em um Universo em expansão, terá comprimento de onda maior do que quando essa onda foi emitida por um fator igual a razão entre o fator de escala no tempo de emissão e observação. Pela definição de *redshift* dada pela equação (3.2) temos que:

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} , \quad (3.43)$$

que mede quanto o Universo expandiu entre os tempos de emissão e observação da radiação eletromagnética.

3.5 Equação de Friedmann

A equação de Friedmann é a equação que conecta o fator de escala $a(t)$, k , R_0 e $\varepsilon(t)$, e descreve a expansão do espaço em modelos homogêneos e isotrópicos. Considere uma métrica que descreva a geometria do nosso Universo. Tal métrica deve determinar o elemento de linha que descreve o espaço-tempo quadrimensional de um Universo que esteja de acordo com o princípio cosmológico, isto é, homogêneo e isotrópico. Esse elemento de linha é descrito pela métrica de Robertson-Walker, equação (3.31), em coordenadas esféricas,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (3.44)$$

Por conseguinte, seus coeficientes são:

$$g_{00} = c^2, \quad g_{11} = -a(t)^2 \frac{1}{1 - kr^2/R_0^2}, \quad g_{22} = -a(t)^2 r^2, \quad g_{33} = -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta.$$

Escritos de uma maneira generalizada,

$$g_{00} = c^2, \text{ e } g_{\mu\nu} = \begin{cases} -a(t)^2 \tilde{g}_{\mu\nu} & \text{se } \mu = \lambda \\ 0 & \text{se } \mu \neq \lambda \end{cases}. \quad (3.45)$$

Inicialmente encontraremos os *símbolos de Christoffel*, equação (1.36), a saber,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\nu} g_{\mu\sigma} + \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) .$$

Tem-se que se $\rho \neq \sigma$, então $g^{\rho\sigma} = 0$. Ao considerar, $\mu = 0, 1, 2, 3$; e $\nu = 0, 1, 2$ e 3 , sendo $(0, 1, 2, 3) = (t, r, \theta, \phi)$. Portanto, temos que os símbolos não nulos de Christoffel são¹⁷:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{(1 - kr^2/R_0^2)c^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right), & \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{a\dot{a}r^2}{c^2}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \sin^2\theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2\theta}{c^2}, & \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{krR_0^2}{1 - kr^2/R_0^2}, & \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta. \end{aligned}$$

O Tensor de Ricci e o seu Escalar juntos formam o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, associado com a parte métrica das equações de campo da Gravitação. Calculando o tensor de Ricci para a métrica, contraindo o tensor de Riemann (equação 2.11), $R^\rho_{\mu\rho\nu}$,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda. \quad (3.46)$$

Sendo que vamos considerar $\mu = \nu$, com $\mu = (0, 1, 2, 3)$ e $\nu = (0, 1, 2, 3)$, assim como $\rho = (0, 1, 2, 3)$ e $\lambda = (0, 1, 2, 3)$.

$$R_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right), \quad (3.47(a))$$

$$R_{11} = \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a}a}{c^2} + 2kR_0^2 \right) \frac{1}{(1 - kr^2/R_0^2)}, \quad (3.47(b))$$

$$R_{22} = \left(\frac{\ddot{a}a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} + \frac{2\dot{a}^2}{c^2} - kR_0^2 \right) r^2, \quad (3.47(c))$$

De maneira que R_{00} é a componente temporal e R_{11}, R_{22} e R_{33} são as componentes espaciais. Vamos calcular o escalar de Ricci, que por definição é a soma de cada termo do Tensor de Ricci multiplicado pelo tensor métrico em cada coordenada:

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_{00} g^{00} + R_{11} g^{11} + R_{22} g^{22} + R_{33} g^{33}, \quad (3.48)$$

¹⁷ Os cálculos de todos os símbolos de Christoffel estão disponíveis no Apêndice A.

$$R = -6 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right). \quad (3.49)$$

Falta calcularmos o Tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$. Esse tensor fornece o fluxo de energia e momento por uma hiper superfície que engloba as fontes de campo. Uma vez que o espaço-tempo de Robertson-Walker é governado pelo princípio cosmológico, ao considerarmos um fluido perfeito esse tensor [18] é representada pela equação (2.30), a saber:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} ,$$

em que $u^\mu = (-1,0,0,0)$ é a quadrivelocidade do fluido, ρ é a densidade de energia, p é sua pressão e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. O $T_{\mu\nu}$ quando escrito em sua forma T_ν^μ é uma matriz diagonal,

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p), \quad (3.50)$$

substituindo os tensores na equação de campo de Einstein, eq. (2.4),

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} , \quad (3.51)$$

as componentes não nulas são.

$$G_{00} = \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{3k}{R_0^2 a^2}, \quad (3.51(a))$$

$$G_{11} = \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} + 2kR_0^2 \right) \left(\frac{1}{1 - kr^2/R_0^2} \right), \quad (3.51(b))$$

$$G_{22} = \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) r^2, \quad (3.51(c))$$

$$G_{33} = \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) r^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (3.51(d))$$

Tomemos a componente temporal do tensor de Einstein,

$$\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{3k}{R_0^2 a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2; \quad (3.52(a))$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}, \quad (3.52(b))$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\varepsilon}{c^2} \right) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}. \quad (3.52(c))$$

Obtém-se a *Equação de Friedmann*,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2} . \quad (3.53)$$

Considerada uma das equações mais importantes da Cosmologia, pois nos informa sobre a taxa de expansão do Universo devido ao modelo que utilizamos. Para $H(t) = \dot{a}/a$, a equação de Friedmann pode ser reescrita na forma:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)} , \quad (3.54)$$

em que $H(t)$ corresponde ao parâmetro de Hubble, e $H(t_0) = H_0$ a constante de Hubble, ou ao parâmetro de Hubble para o presente momento. Portanto, a equação de Friedmann para o presente momento é,

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - \frac{kc^2}{R_0^2} . \quad (3.55)$$

Nesta forma a equação de Friedmann nos dá a relação entre a constante de Hubble, que nos informa a taxa de expansão do Universo, ε_0 , a densidade de energia atual e k/R_0^2 , a curvatura atual [16].

3.6 Equação da Aceleração e Equação do Fluido Perfeito

Ainda por meio da equação de campo de Einstein podemos deduzir a equação que nos dirá como o Universo acelera ou desacelera com o tempo. Faremos o mesmo processo para as componentes espaciais. Entretanto, teremos que reescrever cada componente de maneira que facilite sua soma, para tanto,

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = -\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} + 2kR_0^2, \quad (3.56(a))$$

$$\frac{G_{22}}{g_{22}} = -\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2, \quad (3.56(b))$$

$$\frac{G_{33}}{g_{33}} = -\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 . \quad (3.56(c))$$

Somando as componentes espaciais a fim de encontrar uma única expressão temos que,

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} + \frac{G_{22}}{\tilde{g}_{22}} + \frac{G_{33}}{\tilde{g}_{33}} = 3 \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) . \quad (3.57)$$

Igualando com a soma do lado esquerdo da equação de Einstein temos que:

$$3 \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) = -3 \frac{8\pi G}{c^4} P, \quad (3.58)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{a^2 R_0^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} P \quad (3.59)$$

Subtraindo a equação (3.59) da equação (3.58), temos que, para o lado esquerdo:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{a^2 R_0^2} - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) = \frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2}, \quad (3.60(a))$$

para o lado direito:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} P - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(\frac{P}{c^2} + \frac{\rho}{3} \right) = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(\frac{3P + \rho c^2}{3c^2} \right). \quad (3.60(b))$$

Unindo os dois resultados (equações (3.60 (a) e (b)), temos que:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P + \varepsilon). \quad (3.61)$$

Encontramos então a *equação da aceleração*,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{3P}{c^2} + \rho \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P + \varepsilon). \quad (3.62)$$

A equação (3.62) mostra que a pressão P está associada ao material que o Universo é composto. Para completar a equação de Friedmann precisamos de uma equação que mostre a evolução temporal da densidade ρ dos constituintes do Universo. Vamos obtê-la, multiplicando a equação de Friedmann por a^3 e a com relação ao tempo:

$$\begin{aligned} a^3 \times \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{R_0^2 a^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho \times a^3 \rightarrow \dot{a}^2 a \frac{1}{c^2} + \frac{ka}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3, \\ \frac{d \left(\dot{a}^2 a \frac{1}{c^2} + \frac{ka}{R_0^2} \right)}{dt} &= \frac{d \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3 \right)}{dt}, \\ \frac{1}{c^2} (2\dot{a}\ddot{a}a + \dot{a}^3) + \frac{k\dot{a}}{R_0^2} &= \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3 \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Agora, consideremos a equação espacial e a multipliquemos por $\dot{a}a^2$,

$$\begin{aligned} \dot{a}a^2 \times \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{2\ddot{a}}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{a^2 R_0^2} &= -\frac{8\pi G}{c^4} P \times \dot{a}a^2, \\ a^3 \frac{1}{c^2} + 2\dot{a}\ddot{a} \frac{1}{c^2} + \frac{k\dot{a}}{R_0^2} &= \left(-\frac{8\pi G}{c^4} P \right) \dot{a}a^2. \end{aligned}$$

A partir disso podemos comparar os lados direitos das equações

$$\begin{aligned} \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3 \right) &= \left(-\frac{8\pi G}{c^4} P \right) \dot{a}a^2, \\ \frac{(\rho \dot{a}^3)}{3} = \frac{-\dot{a}a^2 P}{c^2} &\rightarrow c^2(\rho \dot{a}^3) = -3\dot{a}a^2 P, \\ c^2(\rho \dot{a}^3) &= -P(\dot{a}^3). \end{aligned}$$

Substituindo a equação

$$\begin{aligned}
(c^2 \dot{\rho} a^3) &= -P(\dot{a}^3) \rightarrow (\varepsilon \dot{a}^3) = -w\varepsilon(\dot{a}^3), \\
(\varepsilon \dot{a}^3) + w\varepsilon(\dot{a}^3) &= 0 \rightarrow \frac{d\varepsilon a^3}{dt} + w\varepsilon \frac{da^3}{dt} = 0, \\
\dot{\varepsilon} a^3 + \dot{a}^3 \varepsilon + w\varepsilon \dot{a}^3 &= 0 \rightarrow \dot{\varepsilon} a^3 + \dot{a}^3 \varepsilon (1 + w) = 0, \\
\dot{\varepsilon} a^3 = -\dot{a}^3 \varepsilon (1 + w) &\rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{\dot{a}^3}{a^3} (1 + w) \rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{3\dot{a}a^2}{a^3} (1 + w), \\
\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{3\dot{a}}{a} (1 + w) &\rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{3\dot{a}}{a} (1 + w) = 0.
\end{aligned}$$

Consideremos $w = P/\varepsilon$

$$\dot{\varepsilon} + 3\varepsilon \left(1 + \frac{P}{\varepsilon}\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon} + 3\varepsilon \left(\frac{\varepsilon + P}{\varepsilon}\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0,$$

A equação de fluido¹⁸ é:

$$\dot{\varepsilon} + 3(\varepsilon + P) \frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.64)$$

A equação de Friedmann, a equação da aceleração e a equação da conservação da energia do fluido são essenciais para que compreendamos a dinâmica da expansão do Universo, mas ainda é preciso descrever a evolução temporal de seu conteúdo energético, isto é, a evolução de sua densidade de energia total

3.7 Evolução da Densidade de Energia

Ainda precisamos definir uma quarta equação para construirmos o conjunto de equações necessárias para descrever a evolução do Universo, chamada *equação de estado*. A equação de estado especifica a natureza dos constituintes do Universo, estabelecendo uma conexão direta entre Cosmologia e Física de Partículas [3]. Escrevemos a equação de estado na forma de

$$P = w\varepsilon, \quad (3.65)$$

sendo w é um parâmetro adimensional que caracteriza o constituinte de densidade ε . A partir da relação acima podemos formular a evolução da densidade de uma dada componente. Tomemos as equações (4.64) e (4.65), realizando uma simples integração temos que,

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,0} a^{-3(1+w)}. \quad (3.66)$$

¹⁸As referências [1, 16] chegam a estas equações por meio da mecânica Newtoniana. A referência [3] tem outra abordagem por meio do tensor de energia-momento. Dedução da equação Apêndice A.

Consideremos a componente mais matéria bariônica, devido à baixa densidade total do Universo ($\sim 10^{-27} \text{kg m}^{-3}$), vamos tomar a aproximação a um gás ideal governada pela equação de estado (eq. 3.65),

$$P = \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \varepsilon \quad , \quad (3.67)$$

em que, $\langle v^2 \rangle$ é a velocidade quadrática média das partículas do gás. Comparando as equações (3.66) e (3.67) obtém-se que $w = \langle v^2 \rangle / 3c^2$. Por se tratar de matéria não relativística ($v^2 \ll c^2$), logo $w = \langle v^2 \rangle / 3c^2 \approx 0$. Diz se então que a matéria bariônica não causa pressão e sua densidade de energia evolui segundo a equação,

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m,0} a^{-3} \quad . \quad (3.68)$$

Interpretando esse resultado temos que, em uma distribuição esférica, a densidade de matéria¹⁹ diminui com o raio do cubo, uma vez que o raio é diretamente proporcional ao fator de escala.

Agora tomemos a componente radiação (fótons e outras partículas relativísticas), para a qual $\langle v^2 \rangle / c^2 \approx 1$, logo $w_r \approx 1/3$, substituindo esse valor na equação (3.66) temos que a evolução da densidade de radiação é:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r,0} a^{-4} \quad . \quad (3.69)$$

Devido a expansão do espaço-tempo a densidade de radiação descrese com $\propto a^{-3}$, o fator extra é decorrente da proporcionalidade entre λ e o fator de escala, assim como a proporcionalidade em relação a energia dada por $E = hc/\lambda$.

Entretanto, apenas os termos de densidade de energia para matéria e radiação não são suficientes para causar uma expansão acelerada, como constatado em observações, portanto, precisamos inserir a *constante cosmológica* em nossas contas.

Em 1915, após a publicação do primeiro artigo em TGR, os astrônomos não possuíam evidências da expansão do Universo (também não se sabia da existência de outras galáxias além da nossa) [31], a falta de indícios conduziu a Einstein, e outras cientista da época, a conclusão de que o nosso Universo deveria ser estático, homogêneo e isotrópico. Entretanto

¹⁹A equação (3.68) considera tanto a matéria ordinária quanto a matéria escura. Fritz Zwicky (1898-1974), na década de 30, sugeriu a existência da matéria escura ao observar o aglomerado de Coma e notar que esse aglomerado deveria conter mais matéria do que a soma de matéria visível, visto que essa não gerava atração gravitacional suficiente para manter as galáxias unidas. Outra conclusão tirada foi que essa matéria desconhecida não interagia eletromagneticamente por não ser observável. Posteriormente, Vera Rubin (1928-2016) constatou, pelo estudo do problema da curva de rotação das galáxias, que ao extrapolar as curvas de rotação para regiões além do visível a velocidade tangencial de um dado objeto permanecia constante, o que significa que há presença de matéria. Conclui-se que a matéria escura é não relativística para melhor ajuste com dados observacionais. Mais informações históricas e trechos de trabalhos desenvolvidos pelos cientistas citados são expostos em [5].

um Universo estático composto por matéria mostrava-se problemático²⁰, uma vez que, supondo que tal Universo exista, seu destino era o colapso eminente devido a atração gravitacional.

Para corrigir esse problema Einstein atribuiu uma curvatura para o espaço vazio ao introduzir em suas equações de campo a constante cosmológica, Λ , assim a equação de Friedmann e equação da aceleração tomam a forma de

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.70)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P + \varepsilon) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.71)$$

Nessas condições, para um Universo estático $a(t) = a_0 = \text{constante}$, temos, pela equação da aceleração, que a constante cosmológica,

$$\Lambda = \frac{4\pi G \varepsilon_0}{c^2}. \quad (3.72)$$

Substituindo a equação (3.72) na equação de Friedmann (eq. (3.54)) obtém-se que,

$$kc^2 = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_0}{3c^2} + \frac{4\pi G \varepsilon_0}{3c^2} \right) R_0^2 a_0^2 = \frac{4\pi G \varepsilon_0}{c^2} R_0^2 a_0^2. \quad (3.73)$$

Como o lado direito da equação é positivo concluímos que $k = +1$, portanto, o Universo estático possui curvatura fechada e seu fator de escala é constante²¹ e dado por:

$$a_0 = \frac{c^2}{R_0 \sqrt{4\pi G \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (3.74)$$

O fator de escala destaca que o modelo de Einstein é instável, se $a(t = cte) > a_0$ o termo de Λ torna-se dominante nas equações para dinâmica o que causa expansão, se $a(t = cte) < a_0$ o termo de matéria torna-se dominante e o Universo colapsa. Se tomarmos que $a_0 = 1$ temos que o raio de curvatura desse Universo é [1],

$$R_0 = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}}. \quad (3.75)$$

Apesar de ter sido introduzida como uma contribuição da curvatura do espaço-tempo, através dos anos a constante cosmológica passou a ser considerada uma contribuição para a

²⁰Em um universo estático $a(t) = a_0 = 0$, pela equação de Friedmann e equação da aceleração tem-se que $\ddot{a} = \dot{a} = 0$ ou $\rho = 0$. No primeiro caso não há universo e no segundo caso o universo é vazio, o que contradiz nossa própria existência.

²¹A esse Universo dá-se o nome de Universo de Einstein [16].

densidade de energia e pressão do Universo²² [1,16]. De acordo com o princípio da incerteza Heisenberg o espaço vazio não é vazio e possui uma densidade de energia associada a ele, portanto a equação de Friedmann e da aceleração podem ser escritas sem o termo de constante cosmológica se considerarmos Λ como uma componente do Universo, logo temos que,

$$kc^2 = \left(\frac{8\pi G}{3c^2}\right)(\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda)R_0^2 a_0^2 ; \quad (3.76)$$

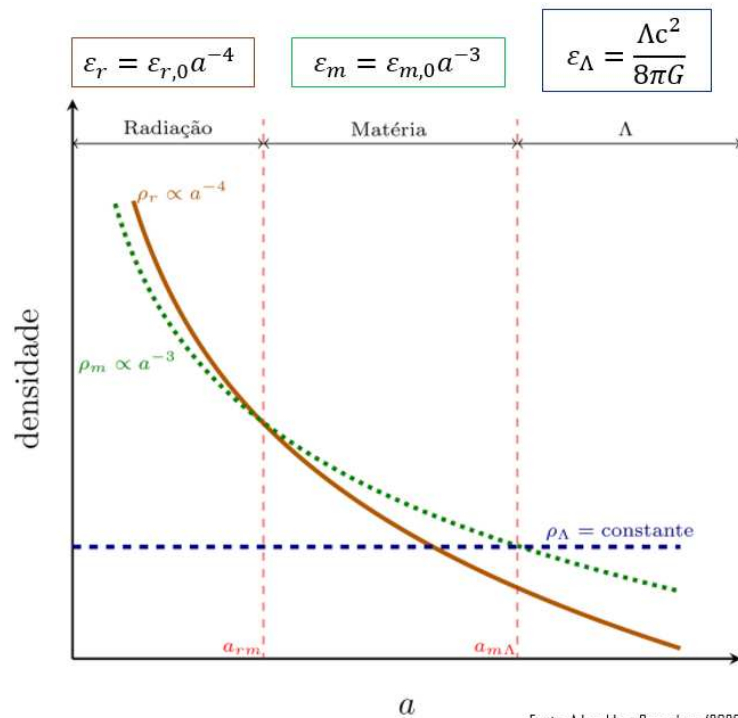
$$-\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon_m + \varepsilon_\Lambda + 3P_\Lambda) = 0 . \quad (3.77)$$

Substituindo a equação (3.77) na equação (3.76) temos que a densidade de energia para constante cosmológica é constante e igual a:

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} . \quad (3.78)$$

A evolução da densidade de energia em relação ao fator de escala pode ser vista na Figura 3.7. Nela observa-se que há momentos em que mais de uma componente, matéria e radiação, ou, matéria e constante cosmológica, contribuem igualmente para densidade de energia do Universo.

Figura 3.7 – Gráfico da evolução da densidade de energia de matéria, radiação e constante cosmológica (Λ).



Fonte: Aderaldo e Gonçalves (2020).

²² A constante cosmológica está ligada a densidade de energia do espaço vazio, também chamada de energia do vácuo [13].

Substituindo a equação (3.78) na equação (3.65) obtém-se,

$$P_{\Lambda} = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = -\varepsilon_{\Lambda} . \quad (3.79)$$

Logo, para $w = 1$ na equação (3.65), isso implica que para a constante cosmológica $\Lambda > 0$, a pressão é negativa. Se utilizarmos a interpretação newtoniana, em termos de força gravitacional, a constante cosmológica contribui com uma força repulsiva que “freia” a força gravitacional que levaria ao colapso. Com a descoberta da expansão do Universo por Hubble fez com que não houvesse a necessidade da constante cosmológica nas equações de Einstein. De tempos em tempos ela retorna as equações, uma vez que não há motivo para de fato retirá-la. Nos últimos anos, observações têm mostrado que a constante cosmológica está presente e domina a dinâmica do nosso Universo [16, 29].

Agora que temos a evolução de cada componente tomemos $k = 0$, isto é, um Universo espacialmente plano, a equação de Friedmann (eq. 3.54)) é reduzida a

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) . \quad (3.80)$$

Isolando $\varepsilon(t)$, temos que:

$$\varepsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H^2(t). \quad (3.81)$$

A equação (3.81) informa que para um dado valor do parâmetro de Hubble há uma densidade crítica $\varepsilon_c(t)$, para a qual o Universo possui curvatura plana.

Sabe-se atualmente o valor da constante de Hubble com uma certeza de 3%, a partir da equação (3.81) calcula-se que o valor atual da densidade crítica é $\varepsilon_{c,0} \cong (7,8 \pm 0,5) \times 10^{-10} \text{Jm}^{-3}$. Ryden [1] discorre que a densidade crítica atual é aproximadamente equivalente a um próton por 200 litros. Uma vez que a maior parte do volume do Universo é formada por “vazios” nos quais a densidade é extremamente baixa estima-se que, em média, para escalares maiores que 100Mpc , a densidade de energia média do Universo é aproximadamente a densidade crítica.

A partir da equação (3.81), pode-se determinar a curvatura do Universo,

- Se $\varepsilon(t) > \varepsilon_c(t)$, o Universo tem curvatura positiva ($k = +1$),
- se $\varepsilon(t) < \varepsilon_c(t)$, o Universo tem curvatura negativa ($k = -1$).

A equação (3.81) deve ser válida para o tempo atual, portanto,

$$\varepsilon_{c,0}(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 . \quad (3.82)$$

Geralmente, refere-se à densidade de energia a partir de um termo sem dimensão chamado *parâmetro de densidade*²³, definido como [1,3,16]:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)} \quad . \quad (3.83)$$

A partir disso, podemos reescrever a equação de Friedmann (equação (3.54)) em termos do parâmetro de densidade:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2 H^2(t)}. \quad (3.84)$$

Na Figura 3.8, apresenta-se um resumo desta última sessão.

Figura 3.8 – Resumo da sessão de Evolução da Densidade de Energia.

Evolução da Densidade de Energia

A evolução da densidade de Energia é dada pela equação geral:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,0} a^{-3(1+w)}$$

Densidade crítica:

$$\varepsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2$$

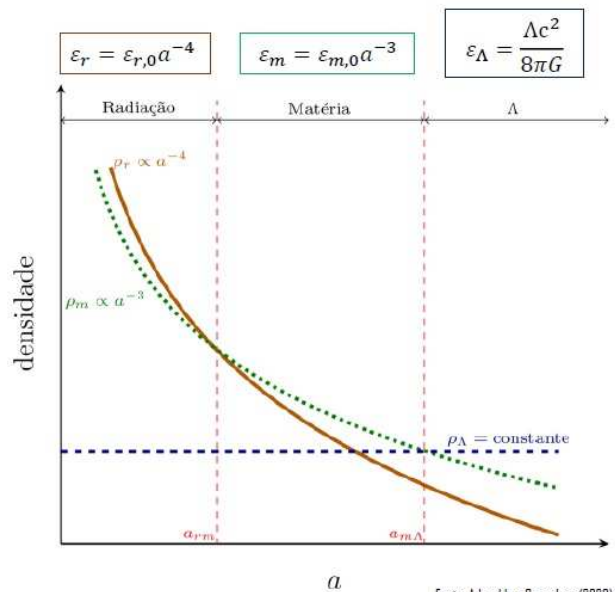
- Se $\varepsilon(t) > \varepsilon_c(t)$, o universo tem curvatura positiva ($k = +1$)
- Se $\varepsilon(t) < \varepsilon_c(t)$, o universo tem curvatura negativa ($k = -1$).

A densidade atual é dada por:

$$\varepsilon_{c,0}(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2$$

Parâmetro de densidade:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)}$$



Fonte: Aderaldo e Goncalves (2020).

Fonte: a autora, slides da defesa.

²³O valor atual da densidade de parâmetro, determinado por meio de dados observacionais, está entre 0,995 <math>\Omega_0 < 1,005</math>.

4

Modelos de Universo Cosmológico

Neste capítulo serão discorridos sobre modelos de Universo cosmológico se considerando as do tipo **homogêneo e isotrópico**. A relação entre densidade de energia $\varepsilon(t)$, pressão $P(t)$ e o fator de escala $a(t)$, é dada pelas equações de Friedmann (equação (3.54)), que informa sobre a taxa de expansão do Universo, fluido perfeito (equação (3.64)) que expressa a conservação matéria-energia, e a equação de estado (equação (3.65)) que especifica a natureza dos constituintes do Universo, a saber, respectivamente,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2(t)};$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\varepsilon + P) = 0;$$

$$P = w\varepsilon \quad (\text{em que, } w \approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2}).$$

A princípio, podemos resolver essas equações para encontrar a densidade de energia, pressão e fator de escala para qualquer tempo, passado e futuro. Entretanto, a evolução do Universo é complexa devido ao fato de que há diferentes componentes com diferentes equações de estado. Desta forma, nessa seção apresentaremos modelos de Universo Cosmológico e sua evolução temporal considerando a sua composição.

4.1 Universo Vazio: só curvatura

Proposto por Edward A. Milne em 1935, o conhecido *Universo de Milne* [4], é um modelo particularmente simples de Universo, no qual não há gravidade, radiação, matéria, constante cosmológica ou qualquer contribuição da densidade de energia ($\varepsilon = 0$).

Apesar de ser um Universo totalmente hipotético, pode ser considerada uma boa aproximação do real, se considerarmos um Universo o qual a densidade de energia é muito menor que a densidade crítica. Nessas condições, para ($\varepsilon = 0$), a equação de Friedmann (equação (3.54)) toma a forma,

$$(\dot{a})^2 = -\frac{kc^2}{R_0^2} \quad (4.1)$$

Para essa equação temos as possíveis soluções:

- $k = +1$ - Universo inconcebível, pois $(\dot{a})^2$ seria um número imaginário;
- $k = 0$ - Universo vazio, espacialmente plano e estático, pois $(\dot{a}) = 0$, $a(t) = 0$, que pode ser descrito pela métrica de Minkowski e tratado a partir da Relatividade Restrita;
- $k = -1$ - Universo vazio com curvatura negativa que se expande. Para o qual, substituindo na equação (4.1),

$$\dot{a} = \pm \frac{c}{R_0} . \quad (4.2)$$

Integrando a equação (4.2) em relação ao tempo,

$$\int a(t) dt = \pm \left(\frac{c}{R_0} \right) \int dt ,$$

$$a(t) = \frac{t}{t_0} , \quad (4.3)$$

com $t_0 = R_0/c$. Portanto, o fator de escala cresce linearmente com o tempo, nos dizendo que não há gravidade [8], $t_0 = H_0^{-1}$, não há nada que acelere, ou desacelere, a expansão ou contração, a idade do Universo é exatamente igual a constante de Hubble.

Imagine a realização de observações nesse Universo, para uma fonte luminosa distante, de *redshift* z , eq. (3.43), a luz que observada no momento presente tem $t = t_0$, com o tempo para o momento de emissão igual a $t = t_e$, podemos escrever [1, 4]:

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e} . \quad (4.4)$$

A partir da equação (4.4), ao isolar o tempo de emissão, obtém-se,

$$t_e = \frac{t_0}{1 + z} = \frac{H_0^{-1}}{1 + z} . \quad (4.5)$$

Ainda podemos encontrar a equação que permite calcular a distância a que essa fonte luminosa se encontra. Adotando a equação (3.39) da distância própria, distância entre dois pontos em determinado instante caso pudéssemos parar o tempo, tal que:

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt,$$

$$= c \int_{t_e}^{t_0} \frac{t_0}{t} dt = ct_0 \ln t \Big|_{t_e}^{t_0}$$

$$d_p(t_0) = ct_0 \ln \left(\frac{t_0}{t_e} \right) , \quad (4.6)$$

com $t_0 = H_0^{-1}$ e $z + 1 = t_0/t_e$, a equação (4.6) é reescrita como,

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \ln(z + 1) . \quad (4.7)$$

Analisando, para $z \ll 1$, temos que a distância própria, assim como visto pela Lei de Hubble, possui uma relação linear entre $d_p(t_0)$ e z ; para $z \gg 1$ a distância própria é proporcional a $\ln z$. Para o tempo de emissão dessa luz temos que,

$$d_p(t_e) = a(t_e) \int_0^r dr = a(t_e)r . \quad (4.8)$$

Empregando $a(t_0) = 1$ em $(1 + z) = 1/a(t_e)$, de maneira que,

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{1}{a(t_e)} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \\ \frac{a(t_e)}{a(t_0)} &= \frac{1}{1 + z}, \\ a(t_e) &= \frac{a(t_0)}{1 + z} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.8), obtém-se:

$$d_p(t_e) = \frac{a(t_0)}{1 + z} r . \quad (4.10)$$

Então, sendo $a(t_0)r = d_p(t_0)$:

$$d_p(t_e) = \frac{d_p(t_0)}{1 + z} , \quad (4.11)$$

substituindo a equação (4.11) em (4.7):

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{1 + z} \ln(z + 1) \quad (4.12)$$

Isto é, a distância própria de emissão é menor do que a distância própria de observação por um fator $1/(z + 1)$.

4.2 Modelos de uma só componente

Nosso Universo é composto por diferentes componentes: matéria bariônica ou não relativística, radiação e energia do vácuo. Entretanto, se estudarmos a sua evolução observa-se que houve épocas em que uma dessas fontes de matéria-energia foram dominantes comparadas as demais. Dessa forma, os Universos de uma componente podem ser entendidos como modelos apropriados para descrever a dinâmica de algumas fases do nosso Universo. Portanto, considere a equação de Friedmann (equação (3.54)),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

Tomemos $k = 0$, pois se observarmos nosso Universo, nesse momento, podemos considerá-lo plano [12]. A equação de Friedmann é reduzida a:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon . \quad (4.13)$$

Ao adotar $\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3-3w}$, obtemos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 a^{-(1+3w)} . \quad (4.14)$$

$$\dot{a} = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_0}{3c^2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1+3w}{2}}$$

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_0}{3c^2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1+3w}{2}}$$

$$\frac{da}{a^{-\frac{1+3w}{2}}} = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_0}{3c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (4.15)$$

Como,

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G \varepsilon_0}{3c^2}\right)^{\frac{1}{2}} , \quad (4.16)$$

a equação (4.15) torna-se,

$$\frac{da}{a^{-\frac{1+3w}{2}}} = H_0 dt . \quad (4.17)$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo, e empregando os limites a_0 a a , e t_0 a t , obtemos:

$$\left(\frac{2}{3+3w}\right) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3w+3}{2}} - \left(\frac{2}{3+3w}\right) = H_0(t - t_0).$$

Se considerarmos $a(t)$ para $t = 0$, então $a(0) = 0$ ²⁴. Assim,

$$\left(\frac{2}{3+3w}\right) = H_0 t_0 \quad (4.18)$$

$$H_0 t_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3w+3}{2}} - H_0 t_0 = H_0 t - H_0 t_0$$

$$t_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3w+3}{2}} = t .$$

Aplicando $a(t = t_0) = a_0 = 1$, o fator de escala é [1, 8]:

²⁴ A referência [19] comenta que em algum instante $t < t_0$ o fator de escala deve ter sido igual a zero.

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3w+3}}. \quad (4.19)$$

A idade atual do Universo, da equação (4.18), dependente da constante de Hubble, é [1, 3, 8]:

$$t_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)}. \quad (4.20)$$

Considerando que $w \neq -1$, temos que:

- Se $w > -1/3$, o Universo é mais novo que o tempo de Hubble.
- Se $w < -1/3$, o Universo é mais velho que o tempo de Hubble, o que é inconcebível.

Isolando ε_0 na equação (4.16) temos a equação que informa a evolução da densidade de energia,

$$\varepsilon_0 = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2. \quad (4.21)$$

Isolando H_0 na equação (4.20) e substituindo na equação (4.21), podemos reescrever a evolução da densidade de energia em termos do tempo de Hubble t_0 ,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{6\pi(1+w)^2} c^2 t_0^{-2}. \quad (4.22)$$

Generalizando a equação (4.22) para qualquer tempo, temos que:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}. \quad (4.23)$$

Escrevendo a equação (4.23) em termos de w , para isso substitui-se a equação (4.22) na Equação (4.23), e obtém-se,

$$\varepsilon(t) = \frac{c^2 t^{-2}}{6\pi G (1+w)^2}. \quad (4.24)$$

Ainda podemos reescrever a equação (4.24) para que ela dependa do sistema de Planck,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi(1+w)^2} \frac{E_p}{l_p^3} \left(\frac{t}{t_p}\right)^{\frac{2}{3+3w}}. \quad (4.25)$$

Em que, E_p é energia de Planck, l_p é comprimento de Planck e t_p é tempo de Planck. Em relação às observações que poderiam ser feitas nesse Universo, imaginem uma estrela muito distante como uma fonte de luz com um *redshift* z , de acordo com a equação (3.43),

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{\frac{2}{3+3w}}. \quad (4.26)$$

Logo, tempo de emissão da luz é expressa por,

$$t_e = \frac{2}{3(1+w)H_0} \frac{1}{(1+z)^{3(w+1)/2}} . \quad (4.27)$$

A partir disso podemos definir a distância própria²⁵, para o tempo atual em termos de H_0 e z , como:

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w} \left[1 - (1+z)^{-\frac{1+3w}{2}} \right]. \quad (4.28)$$

Assim, fica determinado que o corpo celeste mais distante que pode ser observado é aquele o qual a luz foi emitida a $t = 0$, quando o Universo foi criado. Nesse caso, a distância própria é chamada de horizonte [1]. Se aplicarmos na equação (4.28) o limite $z \rightarrow \infty$, temos o horizonte, isto é a distância máxima que o observador pode observar. Aqui a *distância do horizonte*, é expressa por,

$$d_{hor}(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w} . \quad (4.29)$$

Ao analisarmos a equação (4.29) para os valores conhecidos de w , temos que:

- Se $w > -1/3$ o horizonte é finito. Para $w = 0$ (um Universo plano dominado por matéria), ou $w = 1/3$ (Universo dominado pela radiação), constatamos que um observador só vê uma porção finita do Universo, conhecida como universo visível²⁶.
- Se $w < -1/3$ o horizonte é infinito e o Universo seria transparente. Isso significa que um observador na Terra, por exemplo, observaria qualquer ponto de Universo. Para os “objetos” muito distantes a informação chegaria com um *redshift* extremo.

Nas próximas subseções iremos analisar os Universos planos de uma única componente, a saber: só matéria (Universo de Einstein-de Sitter), só radiação (Era da radiação) e só a constante cosmológica Λ (Universo de Sitter).

4.2.1 Só matéria

O modelo de Einstein-de Sitter, por vezes chamado de modelo Friedmann de curvatura nula [9], ou Modelo Puro de Friedman [23], é considerado uma das primeiras soluções fisicamente possíveis das equações de Einstein para $\Lambda = 0$ [10], é um modelo de Universo dominado por matéria ($w = 0$) com curvatura zero ($k = 0$).

Nele a densidade de matéria é igual a densidade crítica [1], assim a geometria espacial é euclidiana (plana) e o Universo pode estar em expansão ou contração [9]. A partir da

²⁵Distância própria se refere à onde um objeto distante estaria a um momento de tempo cosmológico específico.

²⁶[6] define Universo visível como todos os pontos do espaço que tiveram tempo de enviar informações na forma de fótons, ou outra partícula relativística, para o observador.

equação (4.20), temos que a idade desse Universo, considerando a constante de Hubble, será de,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \sim 9,64 \cdot 10^9 \text{ anos.}$$

O valor encontrado é inferior a idade das estrelas mais antigas²⁷, que possuem idade superior a 10^9 anos. Assim, a idade encontrada, que se aproxima da idade calculada por [3] prova que o Universo de Einstein– de Sitter discorda das observações que temos do Universo. Empregando a equação (4.29) a distância do horizonte de eventos é dada por,

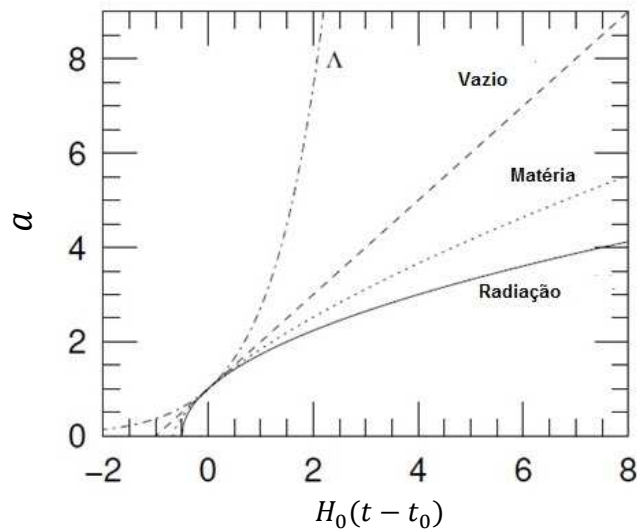
$$d_{hor}(t_0) = \frac{2c}{H_0} \sim 2,74 \cdot 10^{22} \text{ km} = 8,88 \cdot 10^8 \text{ parsecs.}$$

Pela equação (4.19), o fator de escala para um Universo plano com apenas matéria é [1, 13, 16]:

$$a_m(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.30)$$

Representado na Figura 4.1 pela linha pontilhada.

Figura 4.1 – Fator de escala versus tempo, para um Universo vazio em expansão, um Universo plano dominado por matéria, um universo plano dominado por radiação e um universo plano dominado pela constante cosmológica. Em $H_0(t - t_0) = 0$, temos que $t = t_0$.



Fonte: Ryden (2017).

Vemos que o Universo de Einstein-de Sitter é um Universo que se expande de maneira desacelerada [15], pois a expansão tende a parar quando $t \rightarrow \infty$. Se esse modelo representasse

²⁷A estrela mais antiga já observada (em 2007), HE 1523-0901, tem idade estimada em 13,2 bilhões de anos.

o estágio atual do nosso Universo, ao calcular a distância própria de uma fonte luz teríamos que para sua distância para o momento em que observamos os raios de luz é expressa por

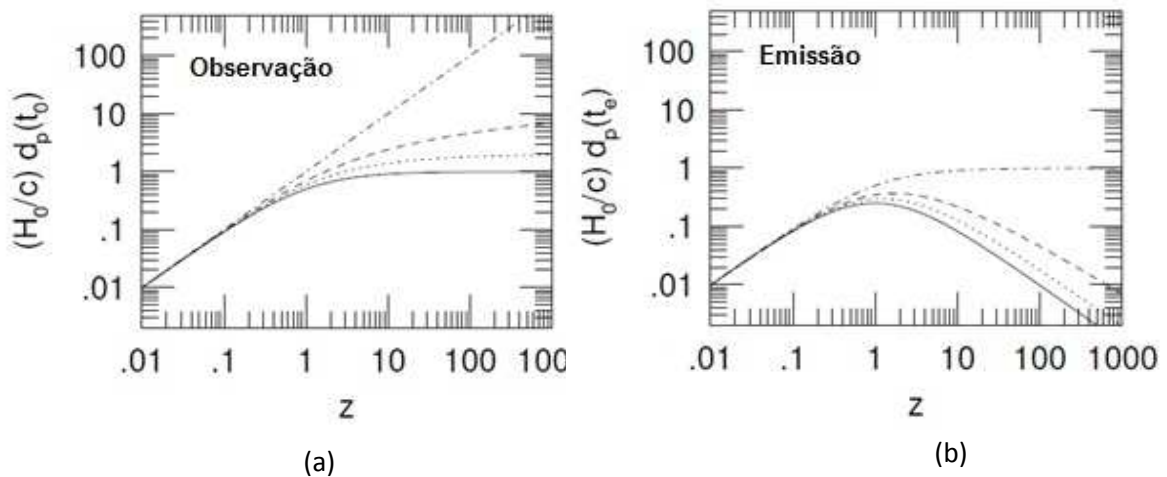
$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]. \quad (4.31)$$

Por outro lado, a distância própria no tempo de emissão,

$$d_p(t_e) = \frac{2c}{H_0(1+z)} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]. \quad (4.32)$$

A distância própria para o tempo de emissão é menor por um fator de $1/(1+z)$. As proper distance para objetos com um *redshift* z para um Universo composto por matéria são ilustradas na Figura 4.2 (a) e 4.2 (b) por uma linha pontilhada.

Figura 4.2 – Gráfico de $\frac{H_0}{c} d_p(t_0)$ versus z , distância própria de um “objeto” de *redshift* z , para o tempo em que a luz foi: (a) observada, e em (b) emitida.



Fonte: Ryden (2017).

4.2.2 Só radiação

Um Universo composto predominantemente por radiação ($w = 1/3$) é de extrema importância pois nos remete aos tempos primordiais, durante o qual a radiação era dominante, especificamente para tempos em que $a(t)/a(t_0) < 10^{-4}$ [22], isto é, qualquer modelo cosmológico que inicie em $t = 0$, com $a(0) = 0$, terá uma fase que será bem descrita pelo modelo de radiação dominante. Para esse Universo temos que a sua idade

$$t_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)} = \frac{1}{2H_0} \sim 7,23 \cdot 10^9 \text{anos.}$$

Assim como para o Universo de matéria dominante o valor encontrado é inferior a idade das estrelas mais antigas, que possuem idade superior a 10^9 anos. A *distância do horizonte* é exatamente igual a distância de Hubble,

$$d_{hor}(t_0) = \frac{c}{H_0} \sim 1,37 \cdot 10^{23} \text{ km.}$$

A partir da equação (4.19), $a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3w+3}}$, o fator de escala para um Universo plano com apenas radiação é [1, 13, 16]:

$$a_r(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} . \quad (4.33)$$

Representado na Figura 4.1 pela linha sólida. Assim, a *distância própria* de uma fonte de luz no tempo observado,

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = ct_0^{1/2} \left(2t^{\frac{1}{2}}\right) \Big|_{t_e}^{t_0} = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(z+1)} . \quad (4.34)$$

No momento de emissão a distância própria se reduz, por um fator de $1/(1+z)$, a,

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)^2} . \quad (4.35)$$

Na Figura 4.2 (a) e 4.2 (b) está apresentada a distância própria de “objetos” que sofreram um *redshift* z em um Universo de Matéria. Devido a importância desse modelo podemos fazer algumas suposições, assim como feito na referência [1]. Se considerarmos a equação (4.35) para a densidade de energia dependente, da energia, tempo e comprimento de Planck, em um Universo plano e dominado por radiação têm-se que,

$$\varepsilon_r(t) = \frac{3}{32\pi} \frac{E_p}{l_p^3} \left(\frac{t}{t_p}\right)^{-2} \sim 0,030 \frac{E_p}{l_p^3} \left(\frac{t}{t_p}\right)^{-2} , \quad (4.36)$$

que no limite $t \rightarrow 0$, encontramos que $\varepsilon_r \rightarrow \infty$, que significa, que no instante $t = 0$ a densidade de energia do nosso Universo era infinita. E, conforme afirmado por Barbara Ryder [1],

“...esse infinito não deve ser levado a sério, pois $t = 0$ é menor do que o tempo de Planck, sendo assim a Relatividade Geral não pode ser utilizada, pois precisamos levar em conta os efeitos quânticos que ocorriam no Universo para $t < t_p$. Para que pudéssemos explicar o nosso Universo para esse intervalo precisaríamos que uma gravitação quântica, que não existe ainda.” (Ryder, p. 96, tradução da autora).

4.2.3 Só constante cosmológica Λ

No início do século XX acreditava-se que o Universo era estático, mas quando aplicadas, a um Universo homogêneo e isotrópico, as equações de Einstein não permitem soluções estáticas [13]. Em 1919, Einstein propôs a constante cosmológica Λ para se obter uma solução estática, conhecido como modelo de Sitter, por Willem de Sitter (1872-1934) ter sido o pioneiro em seu estudo por volta de 1917 [1]. Para esse Universo temos que a idade é,

$$t_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)} = \frac{2H_0^{-1}}{3(1-1)} \rightarrow \infty.$$

Isso implica que um Universo composto apenas pela constante cosmológica não possui uma idade definida. A distância do horizonte é exatamente igual à distância de Hubble,

$$d_{hor}(t_0) = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \propto ct_0 \rightarrow \infty.$$

Analisando a equação de Friedmann, equação (3.54), para um Universo plano ($k = 0$) e contendo apenas Λ obtém-se que,

$$(\dot{a})^2 = \frac{8\pi G \varepsilon_\Lambda}{3c^2} a^2. \quad (4.37)$$

Respaldados nas equações (3.64) e (3.65) para $w = -1$, a densidade de energia

$$\varepsilon_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda,0} a^{-(3+3w)} = \varepsilon_{\Lambda,0}. \quad (4.38)$$

Portanto ε_Λ é constante, e como $H_0 = (8\pi G \varepsilon_\Lambda / 3c^2)^{1/2}$, então equação (4.37), recai em uma equação diferencial,

$$\dot{a} = H_0 a, \quad (4.39)$$

que possui como solução geral $a(t) = Ae^{H_0 t}$. Considerando que $a(t_0) = a_0 = 1$, o termo $A = e^{-H_0 t_0}$, portanto, o fator de escala para um Universo plano com apenas constante cosmológica é [1, 13, 16],

$$a_\Lambda(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (4.40)$$

O comportamento da equação (4.40) foi apresentado na Figura 4.1 pela linha pontilhada e tracejada.

Analisando esse comportamento e a própria equação (4.40) vemos que esse modelo de Universo se expande exponencialmente de maneira acelerada ($\ddot{a} > 0$). Essa condição indica uma pressão negativa, visto que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$. Além disso, vemos que esse modelo de Universo não possui idade definida. Ainda, analisando a equação (4.39), e reescrevendo-a na forma

$$H_0 = \frac{\dot{a}}{a} = H, \quad (4.41)$$

conclui-se também que não há tempo privilegiado nesse modelo de Universo.

Ainda, calculando a distância própria para o tempo de observação,

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{c}{H_0} [e^{H_0(t_e-t_0)} - 1]. \quad (4.42)$$

Em que,

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)}, \quad (4.43)$$

$$d_p(t_0) = \frac{c}{H_0} z. \quad (4.44)$$

Da mesma maneira, a distância própria para o tempo de emissão é:

$$d_p(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)}. \quad (4.45)$$

As distâncias próprias para “objetos” com um *redshift* z para um Universo composto por matéria são aquelas ilustradas na Figura 4.2 (a) e 4.2 (b) por uma linha pontilhada – tracejada.

A equação (4.45) mostra que para este modelo a distância própria do tempo de observação é diretamente proporcional a z , sendo este o único modelo no qual isso ocorre. Nos demais $d_p(t_0) \propto z$ para $z \ll 1$ [1, 8]. Se aplicarmos o limite $z \rightarrow \infty$ as equações (4.44) e (4.45), obtêm-se que, $d_p(t_0) \rightarrow \infty$, mas $d_p(t_e) \rightarrow c/H_0$. Nessas condições $d_p(t_0) \gg c/H_0$, isto é, fótons²⁸ observados foram emitidos em $d_p(t_e) \sim c/H_0$, se a fonte de luz estiver mais distante seus fótons não atingem o observador [1, 8, 13].

Ainda na Figura 4.2 (b) nota-se que para valores de *redshift* elevados têm uma distância própria menor, isso porque eles remetem a um tempo muito inicial na história do Universo, quando a distância entre a fonte luminosa e nós era bem menor.

A Figura 4.3 (a) e (b) apresentam um resumo das principais características e equações dos modelos apresentados até aqui, inclusive cada equação apresentada com o comportamento gráfico para melhor visualização.

²⁸ Fóton é a denominação dada em 1926 por Gilbert Lewis para uma partícula elementar mediadora da força eletromagnética, que possui spin 1 e se move com a velocidade da luz, é o quantum da radiação eletromagnética.

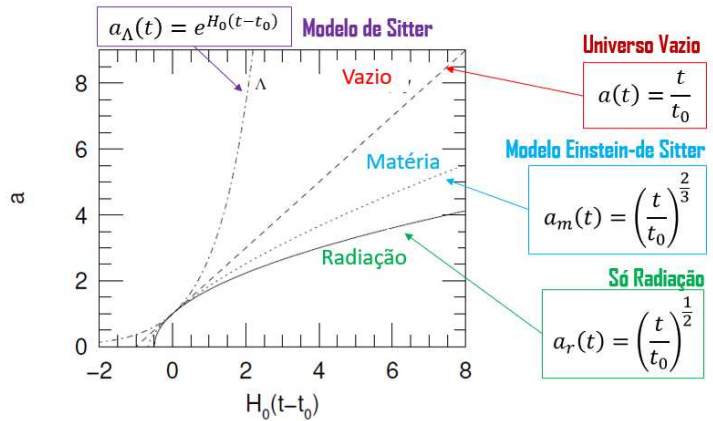
Figura 4.3 – Resumo das (a) informações e equações apresentadas para os modelos de Universo de uma só componente e vazio; (b) as equações e comportamentos gráficos das distâncias do horizonte (Horizonte do Universo) para os modelos do Universo citadas em (a).

Vazio	Matéria	Radiação	Constante Cosmológica
→ $k=+1$. Universo inconcebível. → $k=0$. Universo vazio, espacialmente plano e estático → $k=-1$. Universo vazio com curvatura negativa que se expande.	Dominado por matéria ($w = 0$) Curvatura zero ($k = 0$) Densidade de matéria = densidade crítica	Um universo composto predominantemente por radiação ($w = 1/3$) é de extrema importância pois nos remete aos tempos primordiais.	Uma das primeiras soluções para a equação de Einstein.

Para os modelos de 1 componente e $k = 0$, temos que:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3w+3}}$$

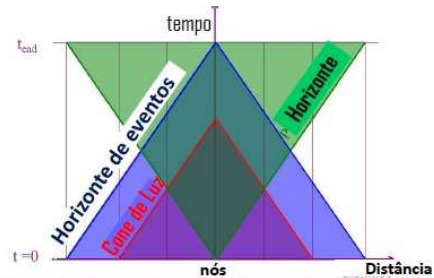
	$t_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)}$ (idade do Universo)
Matéria	$t_{m,0} = \frac{2}{3H_0} \sim 9,64 \cdot 10^9$ anos.
Radiação	$t_{r,0} = \frac{1}{2H_0} \sim 7,23 \cdot 10^9$ anos.
Constante Cosmológica	$t_{\Lambda,0} = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)} = \frac{2H_0^{-1}}{3(1-1)} \rightarrow \infty$.



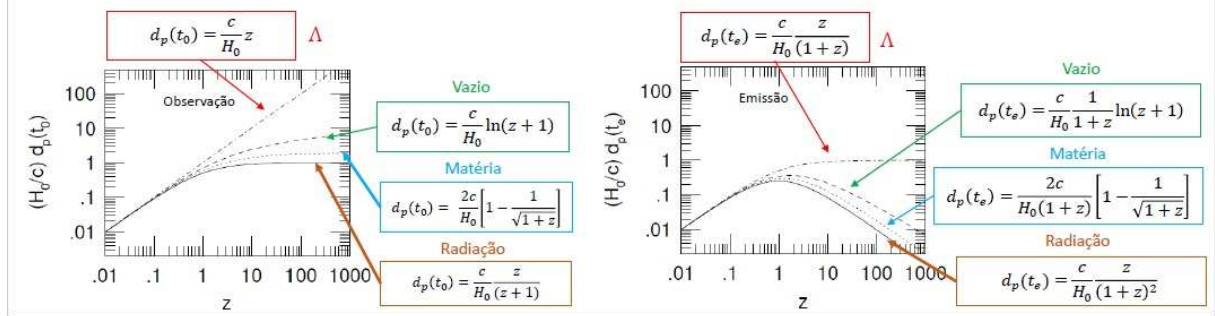
(a)

	$d_{hor}(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w}$ (Horizonte do Universo)
Matéria	$d_{hor}(t_0) = \frac{2c}{H_0} \sim 2,74 \cdot 10^{22}$ km.
Radiação	$d_{hor}(t_0) = \frac{c}{H_0} \sim 1,37 \cdot 10^{23}$ km.
Constante Cosmológica	$d_{hor}(t_0) = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \propto ct_0 \rightarrow \infty$.

Atual $45 \cdot 10^{23}$ km



Fonte: <https://physics.stackexchange.com/questions/70339/a-cosmological-horizon-at-the-hubble-radius>



(b)

Fonte: a autora, slides da defesa (2022).

4.3 Universos com múltiplas componentes

Os estágios intermediários entre uma época dominada por uma componente para uma época dominada por uma única outra componente são caracterizadas por possuírem duas

componentes, ou mais, de densidade de energia de mesma ordem. Vamos considerar a equação de Friedmann (equação (3.54)):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i \varepsilon_i(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2}.$$

Lembrando que, $(\dot{a}/a) = H(t)$, $H_0^2 = 8\pi G/3c^2$, e que podemos escrever a densidade de energia como a soma das densidades de energia de cada componente. A equação de Friedmann para o presente momento $H(t)=H_0$ e $a(t) = 1$,

$$H_0^2 = H_0^2 \varepsilon_0 - \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (4.46)$$

A equação (4.46) reescrita em termos da curvatura

$$\frac{k}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1),$$

ao substituí-la na equação de Friedmann para multicomponentes temos que:

$$\begin{aligned} H^2(t) &= H_0^2 \sum_i \varepsilon_i - \frac{1}{a(t)^2} H_0^2 (\Omega_0 - 1) \\ \frac{H^2(t)}{H_0^2} &= \sum_i \Omega_i - \frac{1}{a(t)^2} (\Omega_0 - 1). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para $\Omega_i = \Omega_{i,0} a^{-3(1+w)}$

$$\begin{aligned} \frac{H^2(t)}{H_0^2} &= \sum_i \frac{\Omega_i}{a^{-3(1+w)}} - \frac{1}{a(t)^2} (\Omega_0 - 1) \\ \frac{H^2(t)}{H_0^2} &= \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

em que, $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}$. Multiplicando os dois lados da equação acima por a^2 , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{a})^2}{H_0^{-2}} &= \frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + a^2 \Omega_{\Lambda,0} + (\Omega_0 - 1) \\ \frac{\dot{a}}{H_0} &= \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + a^2 \Omega_{\Lambda,0} + (\Omega_0 - 1) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ realizando as devidas integrações,

$$\int_0^a \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + a^2 \Omega_{\Lambda,0} + (\Omega_0 - 1) \right]^{\frac{-1}{2}} da = H_0 t. \quad (4.49)$$

A integral à esquerda, não possui solução analítica simples pois o primeiro termo do lado esquerdo diverge para $a = 0$. Entretanto, conforme Ryden [1], para valores dados de $\Omega_{m,0}$; $\Omega_{r,0}$; $\Omega_{\Lambda,0}$ ela pode ser solucionada numericamente.

4.3.1 Radiação + Matéria

Matéria e radiação são componentes que definitivamente compõem o nosso Universo. Entretanto houve uma época em que as componentes matéria e radiação tinham densidades iguais. Vimos no Capítulo 3, que suas densidades de energia variam de acordo com a regra $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,0} a^{-3(1+w)}$, portanto:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{c,0} \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad (4.50)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{c,0} \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \quad (4.51)$$

Se $\varepsilon_m = \varepsilon_r$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,0} \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 &= \varepsilon_{c,0} \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \\ \frac{a(t)}{a_0} &= \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Isolando $a(t)$ encontramos o fator de escala para o quando um Universo composto por apenas matéria e radiação possuía essas duas componentes em equilíbrio, logo:

$$a_{rm} = a(t_{rm}) = a_0 \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}. \quad (4.53)$$

Para $\Omega_{m,0} \sim 0,3$ e $\Omega_{r,0} \sim 8,4 \times 10^{-5}$, temos que:

$$\frac{a_{rm}}{a_0} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \sim 2,8 \cdot 10^{-4}.$$

Observe que $a_{rm} \ll a_0$. O momento de igualdade entre matéria e radiação ocorreu em uma época inicial na história do Universo. Se $a_{rm} > a(t)$ temos o período radiação-dominante; se $a_{rm} < a(t)$ temos o período matéria-dominante. Reescrevendo a equação de Friedmann para esse Universo (equação (3.54)),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i \varepsilon_i \quad \text{ou} \quad H^2(t) = H_0^2 \sum_i \varepsilon_i.$$

Logo,

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \quad (4.54)$$

Isolando $\Omega_{m,0}$ da equação (4.54) temos $\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} \frac{a_0}{a_{eq}}$. Substituindo essa relação na equação acima podemos reescrever a equação de Friedmann na forma de,

$$(\dot{a})^2 \frac{1}{H_0} = \Omega_{r,0} \left(\frac{1}{a_{rm}} \frac{a_0^4}{a} + \frac{a_0^4}{a^2} \right)$$

$$H_0 dt = \frac{ada}{a_0^2 \sqrt{\Omega_{r,0}}} \left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

integrando ambos os lados da equação acima,

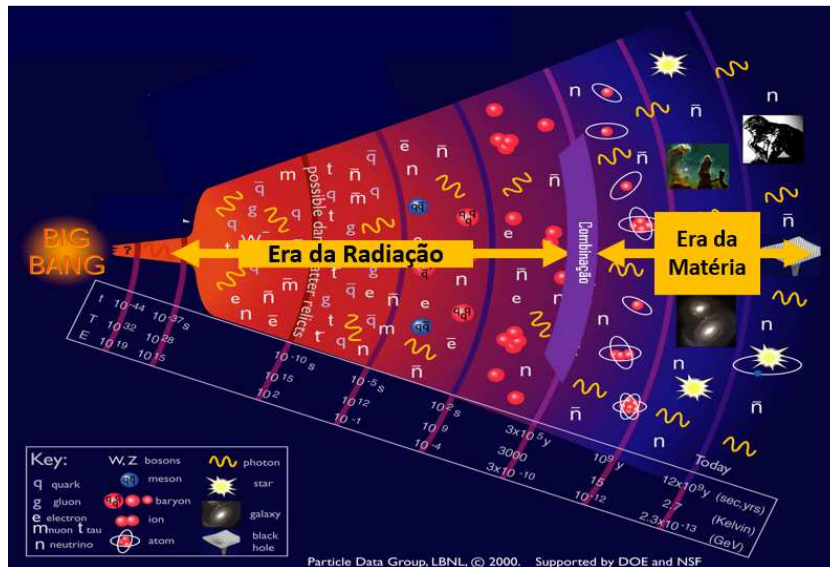
$$H_0 t = 4 \frac{(a_{rm}/a_0)^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.55)$$

A equação (4.55) pode ser utilizada para o cálculo da idade do Universo para quando este tinha a mesma densidade de matéria e radiação. Para isso, tomemos $a = a_{rm}$.

$$t_{rm} = \frac{4}{3H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{\Omega_{m,0}^2} \sim 47.000 \text{ anos.}$$

O Universo atual possui cerca de 14 bilhões de anos, logo o período de tempo no qual ele foi radiação-dominante é extremamente pequeno, Figura 4.4.

Figura 4.4 – Evolução do Universo em escala logarítmica na qual observa-se o estágio matéria dominante e radiação dominante desse Universo.



Fonte: <http://astronomiaweb.blogspot.com/2015/12/cual-es-la-teoria-del-big-bang.html>.

Em termos mais gerais consideremos novamente a equação (4.55):

- Para $a \ll a_{rm}$, ou, $a/a_{rm} \ll 1$. Utilizando a expansão binomial, temos que:

$$\left(1 + \frac{a}{a_{rm}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{a}{2a_{rm}} - \frac{a^2}{a_{rm}^2}, \quad (4.56)$$

a equação (4.55), resulta em:

$$a \approx \left(2\sqrt{\Omega_{r,0}}H_0t\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.57)$$

em que, $t \ll t_{rm}$, o fator de escala acima possui o mesmo comportamento $t^{\frac{1}{2}}$ que o Universo plano contendo apenas radiação.

- Para $a \gg a_{rm}$, ou, $a/a_{rm} \gg 1$, podemos desconsiderar os termos 1 da equação (4.55), o que resulta em:

$$a \approx \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m,0}}H_0t\right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.58)$$

que possui o mesmo comportamento $t^{\frac{3}{2}}$ que o Universo plano contendo apenas matéria.

4.3.2 Matéria + Curvatura

Mas e se o Universo de matéria dominante possuísse curvatura? Tomemos a equação de Friedmann para um Universo não plano, $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) + \frac{kc^2}{a(t)^2 R_0^2} \\ H^2(t) &= H_0^2 \varepsilon(t) + \frac{kc^2}{a(t)^2 R_0^2}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Lembrando que:

$$\frac{k}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (1 - \Omega_0) \quad (4.60)$$

substituindo na equação de Friedmann (eq. 354):

$$\begin{aligned} H^2(t) &= H_0^2 \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3} + \frac{c^2 H_0^2}{a^2 c^2} (1 - \Omega_0) \\ H^2(t) &= H_0^2 \left[\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{c,0} a^3} + \frac{1}{a^2} (1 - \Omega_0) \right] \\ \frac{H^2(t)}{H_0^2} &= \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

O Universo está em expansão, mas se ela cessasse teríamos $H(t) = 0$. Podemos reescrever a equação (4.61) como,

$$0 = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2} . \quad (4.62)$$

Note que o primeiro termo lado direito da equação (4.62) sempre será positivo. Portanto para que $H(t) = 0$, o segundo termo do lado direito da equação (4.62) é negativo ($\Omega_0 > 1$). Como a única componente desse Universo é a matéria, podemos reescrever $\Omega_0 = \Omega_{m,0}$. Tomemos a equação (4.61),

$$\frac{k}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (1 - \Omega_{m,0}) < 0 . \quad (4.63)$$

Sendo, $1 - \Omega_{m,0} = -\Omega_{k,0}$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{k}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (-\Omega_{k,0}) < 0 \Rightarrow \Omega_{k,0} = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2} < 0 \\ \therefore k = +1 \end{aligned} \quad (4.64)$$

Vamos considerar a equação do fluido, com $w = 0$,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3c^2} (\varepsilon + 3\varepsilon w) = -\frac{4\pi G}{3c^2} \varepsilon . \quad (4.65)$$

Note que $\ddot{a} < 0$, o que mostra que o Universo começará a se contrair. Portanto, um Universo contendo apenas matéria com curvatura positiva irá parar sua expansão em determinado momento e iniciará o processo de contração. Podemos a partir disso, calcular o tamanho máximo desse Universo, tomemos a equação (4.62) para $\Omega_0 = \Omega_{m,0}$,

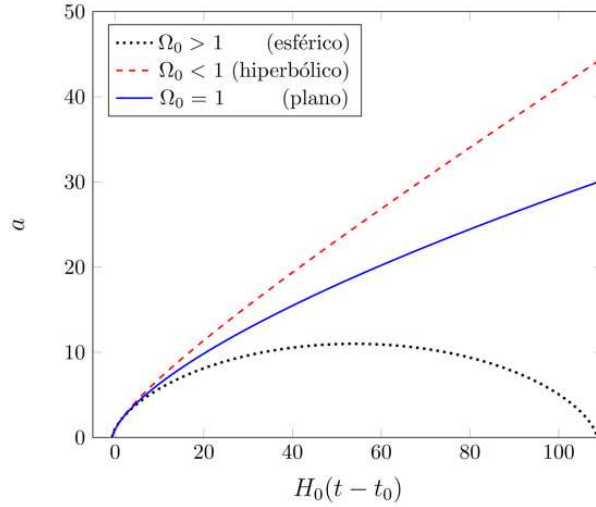
$$0 = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{(\Omega_{m,0} - 1)}{a^2}.$$

Isolando a temos que o fator de escala máximo para um Universo composto por matéria de curvatura positiva é,

$$a_{max} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1}. \quad (4.66)$$

O fator de escala pelo tempo é representado na Figura 4.5 pela linha preta-pontilhada, note que $a_{m\acute{a}x} \sim 10$. Representando a equação (4.30).

Figura 4.5 – Gráfico do fator de escala a versus $H_0(t - t_0)$ ou seja, o tempo, para Universos contendo apenas matéria. Linha contínua se refere ao universo espacialmente plano. Linha vermelha-tracejada se refere ao universo de curvatura negativa. Linha preta-pontilhada se refere ao Universo de curvatura positiva.



Fonte: Aderaldo e Gonçalves (2020).

Vamos considerar novamente a equação de Friedmann, na forma,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \frac{1}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{(\Omega_{m,0} - 1)}{a^2} \quad (4.67)$$

$$\frac{\dot{a}}{H_0^2} = \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a} - (\Omega_{m,0} - 1) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$H_0 dt = \frac{da}{\left[\frac{\Omega_{m,0}}{a} - (\Omega_{m,0} - 1) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.68)$$

Visto que $\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} < 0$ houve um tempo em que $a = 0$, portanto os limites de integração irão de 0 à a para o fator de escala e de 0 à t para o tempo.

$$\int_0^t H_0 dt = \int_0^a \frac{da}{\left[\frac{\Omega_{m,0}}{a} - (\Omega_{m,0} - 1) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^t H_0 dt = \int_0^a \frac{\sqrt{a} da}{\left[\frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)} - a \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Para $\alpha = \Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0} - 1)$

$$\int_0^t H_0 dt = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \int_0^a \frac{\sqrt{a} da}{[\alpha - a]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.69)$$

Introduzindo uma mudança de variáveis [10], de modo que:

$$a = \alpha \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos \theta)$$

$$da = \alpha \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$\sqrt{\alpha - a} = \sqrt{\alpha} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Fazendo a substituição na integral (equação (4.69)) temos que:

$$H_0 t = \frac{\alpha}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \int_0^\theta \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta.$$

Utilizando a relação trigonométrica: $\sin^2 \varphi = (1/2)(1 - \cos 2\varphi)$

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \frac{1}{2} \int_0^\theta (1 - \cos \theta) d\theta,$$

$$H_0 t = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta).$$

Temos que obter a equação parametrizada da solução para a equação de Friedmann,

$$a(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)} (1 - \cos \theta); \quad (4.70)$$

$$t(\theta) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta). \quad (4.71)$$

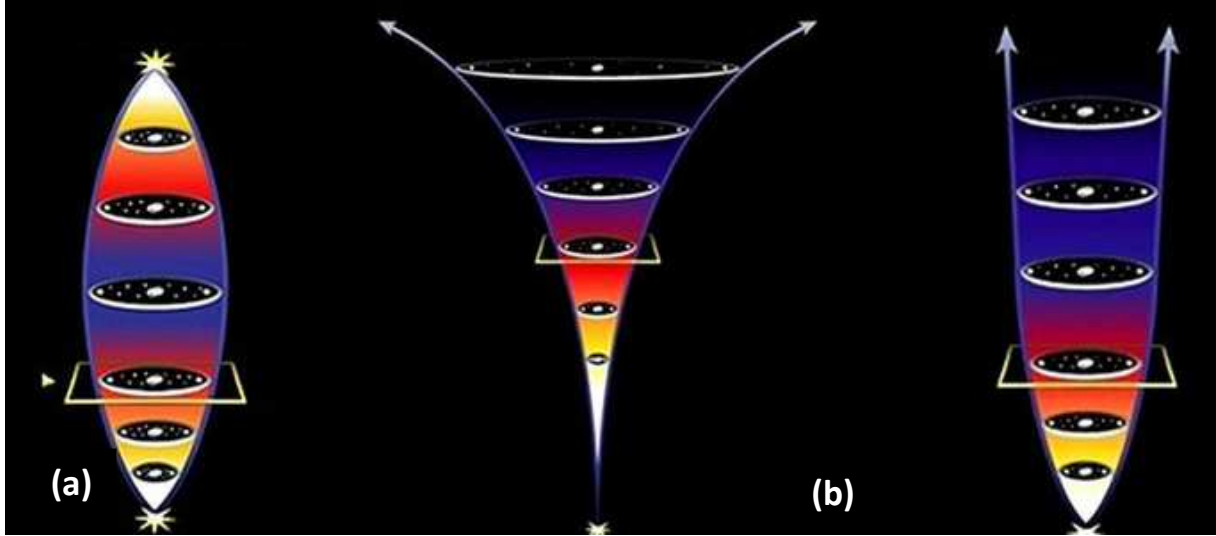
A evolução do fator de escala em relação ao tempo foi representada na Figura 4.5 pela linha preta-pontilhada, em que a equação (4.67) representou o seu valor máximo. Se quisermos calcular a idade desse Universo basta realizarmos algumas substituições, de maneira que a idade atual do Universo composto apenas por matéria com curvatura positiva é:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} \left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 1\right) - \frac{2}{\Omega_{m,0}} \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \right]. \quad (4.72)$$

Note que na equação (4.72) o parâmetro θ varia de 0 a 2π . Devido a forma paramétrica $a(\theta) = a$ e $t(\theta) = t$. Se $t(0) = 0$, então $a(0) = 0$, isto é $\theta = 0$ representa o momento da singularidade do *Big Bang*. Mas se $\theta = \pi$, $a(\pi) = 0$, ou seja, em um tempo futuro esse Universo colapsará em uma singularidade chamada de *Big Crunch* [1, 13, 17], Figura 4.6. O tempo entre a origem e colapso do Universo pode ser computado ao empregarmos $\theta = 2\pi$ na equação (4.72), tal que:

$$t_{crunch} = t(2\pi) = \frac{\pi \Omega_{m,0}}{H_0 (\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}}. \quad (4.73)$$

Figura 4.6 – Alguns dos possíveis destinos do Universo. (a) *Big Crunch* (grande colapso), Universo inicia com *Big Bang* e se expande até chegar um tamanho máximo a_{max} , então se contrai até colapsar. (b) *Big Chill* ou *Big Freeze*, Universo se expande para sempre resfriando isocronicamente.



Fonte: <https://www.astropt.org/2016/06/13/quarto-cenarios-para-o-fim-do-universo> , apud Image from [The Cosmic Perspective](#) by Jeffrey Bennett, Megan Donahue, Nicholas Schneider, and Mark Voit

A fase de contração, após a expansão atingir o seu máximo, é exatamente o reverso da fase de expansão [1]. Portanto esse Universo tem espaço, tempo finito e se encerrará como começou em um estado quente e denso. Vale ressaltar que a fase de contração é referida como o reverso da fase de expansão para um Universo homogêneo, com expansão adiabática ou com conservação da entropia.

Para o caso de Universo contendo apenas matéria com curvatura negativa, $k = -1$, a equação de Friedmann fica escrita na forma,

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{(\Omega_0 - 1)}{a^2}. \quad (4.74)$$

Diferentemente da equação para curvatura positiva (eq. 4.72), a equação (4.74) não vai a zero em nenhum momento t , isso implica em ambos os termos do lado direito da equação são positivos, $\Omega_{m,0} < 1$, portanto esse Universo não cessa sua expansão em um tempo futuro. Sendo $\Omega_{r,0} = \Omega_{\Lambda,0} = 0$ e $\Omega_{m,0} = \Omega_0$, reescrevemos a equação (4.74) na forma,

$$H_0 t = \int_0^a \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{m,0} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} da$$

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \int_0^a \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} + a}} da.$$

Utilizando o método da substituição para $\beta = \Omega_{m,0}/(1 - \Omega_{m,0})$, temos,

$$H_0 t = \frac{\beta}{(1 - \Omega_{m,0})^{1/2}} \int_0^a \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + \beta}} da. \quad (4.75)$$

Introduzindo uma mudança de variáveis [10], de forma que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta}{2} (\cosh \psi - 1) = \beta \sinh^2 \frac{\psi}{2}; \\ da &= \frac{\beta}{2} \sinh \psi d\psi = \beta \sinh \frac{\psi}{2} \cosh \frac{\psi}{2}; \\ \sqrt{a + \beta} &= \sqrt{\beta} \cosh \frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Temos que:

$$H_0 t = \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} \int_0^\theta \sinh^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) d\psi.$$

Utilizando a relação trigonométrica: $\sinh^2 \varphi = (1/2)(\cosh 2\varphi - 1)$

$$\begin{aligned} H_0 t &= \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} \frac{1}{2} \int_0^\theta (\cosh \psi - 1) d\psi, \\ H_0 t &= \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} (\sinh \psi - \psi). \end{aligned}$$

Escrevendo as soluções parametrizadas para a solução da equação de Friedmann:

$$a(\psi) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})} (\cosh \psi - 1); \quad (4.76)$$

$$t(\psi) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} (\sinh \psi - \psi). \quad (4.77)$$

A evolução do fator de escala pelo tempo foi representada na Figura 4.5 pela linha vermelha-tracejada. O parâmetro ψ vai de 0 a ∞ . Devido a forma paramétrica $a(\psi) = a$ e $t(\psi) = t$. Se $t(0) = 0$, então $a(0) = 0$, isto é $\theta = 0$ representa o momento da singularidade do *Big Bang*, assim como anteriormente.

Mas se $\psi = \pi$, $a(\pi) \rightarrow \infty$, ou seja, esse Universo se expandirá para sempre enquanto sua temperatura decai isocronicamente, a isso damos o nome de *Big Chill* [17, 1, 13], Figura 4.6. Além disso, nota-se que para os modelos de matéria dominante, para $\Lambda = 0$, a densidade dita o destino do Universo. Se a densidade é menor que a densidade crítica temos a expansão infinita, *Big Chill*, se a densidade é maior que a densidade crítica o Universo colapsa na singularidade que o criou, *Big Crunch*.

A idade desse Universo para o tempo presente pode ser calculada através da relação:

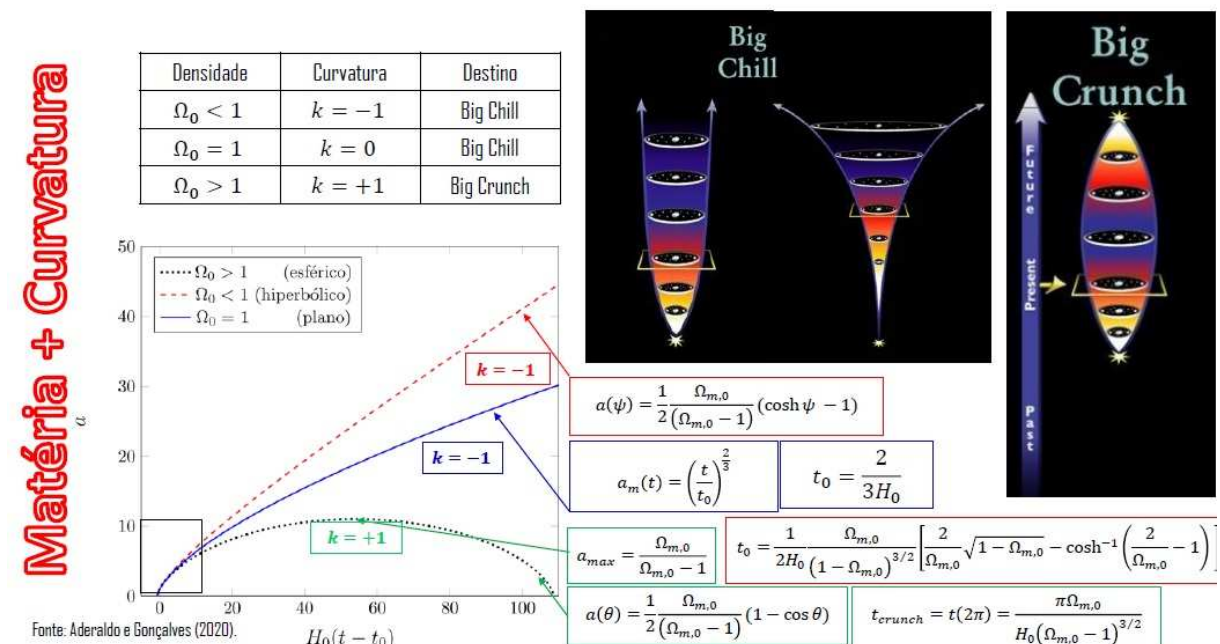
$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}} \left[\frac{2}{\Omega_{m,0}} \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} - \cosh^{-1} \left(\frac{2}{\Omega_{m,0}} - 1 \right) \right]. \quad (4.78)$$

Pela Figura 4.6 percebe-se que em tempos muito pequenos, as três possibilidades de curvatura para um Universo composto apenas por matéria apresentam um comportamento similar para o fator de escala. A partir de $t \sim t_0$ acentua-se a diferenciação entre as três curvas devido a diluição de matéria devido a expansão do Universo. Aderaldo e Gonçalves [3] discorrem que o Universo de curvatura negativa (hiperbólica) possui uma expansão similar ao Universo de Milne, tratado na subseção 2.1. Liddle [15] demonstra, uma vez que para $k = -1$ o termo $kc^2/a^2R_0^2$ cai mais lentamente se comparado com $\Omega_{m,0} \propto a^3$, portanto para valores de $a(t)$ arbitrariamente grandes o termo $kc^2/a^2R_0^2$ é dominante, conseqüentemente $a \propto t$. Quando esse último termo se torna dominante a expansão se torna mais rápida e a velocidade tende a tornar-se constante [3, 15, 13].

Para o caso de curvatura positiva não há diluição de matéria. Como visto a densidade nesse caso é maior que a densidade crítica, isto é, a quantidade de matéria é suficiente para que a atração gravitacional supere a expansão e inicie a contração.

Na Figura 4.7 apresenta-se um resumo sobre a seção 4.3.2.

Figura 4.7 – Resumo sobre da subseção do Modelo Cosmológico Matéria + Curvatura.



Fonte: a autora, slides da defesa (2022).

4.3.3 Modelo Λ CDM Plano

O Modelo Λ CDM Plano [16], ou modelo matéria + constante cosmológica [1], é um modelo plano composto por matéria, majoritariamente na forma de matéria escura fria²⁹, e constante cosmológica constante, considerado uma boa aproximação do nosso Universo no tempo presente.

Podemos escrever a equação de Friedmann da seguinte forma

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}) , \quad (4.79)$$

em que, $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ representa a contribuição da constante cosmológica para a densidade de energia e $\Omega_{m,0}/a^3$ representa a contribuição da matéria. O primeiro termo do lado direito é sempre positivo, entretanto o segundo termo pode assumir valores positivos ou negativos. Se positivo, $\Omega_{m,0} < 1$ e $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, temos o *Big Chill*. Se negativo, $\Omega_{m,0} > 1$ e $\Omega_{\Lambda,0} < 0$, a constante cosmológica negativa fornece uma força atrativa e esse Universo colapsa no *Big Crunch*.

Vamos considerar o primeiro caso para $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ e $\Omega_{m,0} > 1$. Temos que para dado momento $H(t) = 0$, devido a isso podemos encontrar o fator de escala máximo quando a expansão cessa:

$$0 = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}),$$

$$a_{m\acute{a}x} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3} . \quad (4.80)$$

Tomemos a equação de Friedmann,

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{1}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a} + a^2(1 - \Omega_{m,0})$$

$$da \frac{(a)^{1/2}}{(\alpha - a^3)^{1/2}} \left[\frac{1}{(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2}} \right] = H_0 dt . \quad (4.81)$$

Sendo $\alpha = \Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0} - 1)$. Quando $t = 0$, $a(0) = 0$, a equação (4.81) pode ser integrada de 0 à t , e de 0 à a :

$$H_0 t = \frac{1}{(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2}} \int_0^a \left(\frac{a}{\alpha - a^3} \right)^{1/2} da . \quad (4.82)$$

²⁹Matéria escura fria consiste em são partículas neutras que interagem muito fracamente entre si ou com a matéria bariônica, reagindo quase que exclusivamente à gravidade, chamadas WIMPs (sigla para *weakly interacting massive particles*, partículas massivas interagindo fracamente).

Introduzindo a mudança de variáveis,

$$a = \alpha^{1/3} \sin^{2/3} \theta$$

$$da = \frac{2}{3} \alpha^{1/3} \sin^{-1/3} \theta \cos \theta d\theta$$

$$(\alpha - a^3)^{1/2} = \alpha^{1/2} \cos \theta,$$

substituindo na equação (4.82) todos os termos são cancelados com exceção da constante $2/3$, portanto:

$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{1}{(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2}} \int_0^{[\sin^{-1}(a/a_{\max})^{3/2}]} 1 da$$

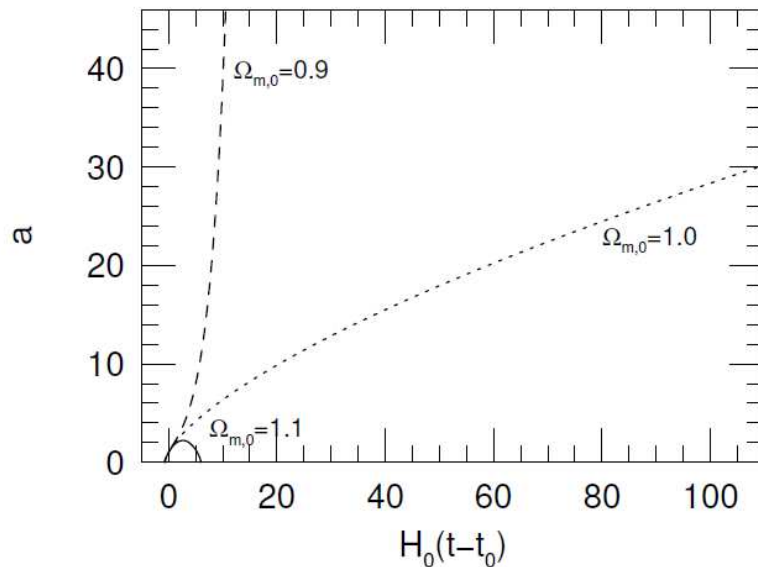
$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{1}{(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2}} \sin^{-1} \left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^{3/2}. \quad (4.83)$$

Portanto,

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3} \left[\sin \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} H_0 t \right) \right]^{2/3}. \quad (4.84)$$

Um gráfico de a versus t é confeccionado na Figura 4.8, o fator de escala acima é representado pela linha contínua.

Figura 4.8 – Fator de escala versus tempo para Universos planos contendo matéria e constante cosmológica. Linha pontilhada representa um universo $\Omega_{m,0} = 1$ e $\Omega_{\Lambda,0} = 0$. Linha sólida representa um Universo $\Omega_{m,0} = 1,1$ e $\Omega_{\Lambda,0} < 0$. Linha tracejada representa um Universo $\Omega_{m,0} = 0,9$ e $\Omega_{\Lambda,0} > 0$.



Fonte: Ryden (2017).

Se tomarmos o limite para esse Universo onde $a \ll a_{\max}$ pode-se usar a aproximação $\sin \theta \sim \theta$:

$$a(t) \approx \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (4.85)$$

Para o cálculo da idade desse Universo temos, a partir da equação (4.85),

$$t = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2}} \sin^{-1} \left(\frac{a}{a_{max}} \right)^{3/2}. \quad (4.86)$$

e quando ele colapsa, t_{crunch} ,

$$t_{crunch} = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{(\Omega_{m,0} - 1)^{1/2}}. \quad (4.87)$$

A força atrativa fornecida pela constante cosmológica negativa faz com que o tempo de vida desse Universo seja excepcionalmente curto como foi representada na Figura 4.8. Apesar das leis permitirem um Universo de Λ negativo ($\Lambda < 1$), o nosso Universo é composto por uma constante cosmológica positiva, $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, o que implica em $\Omega_{m,0} < 1$, devido a isso o lado direito da equação de Friedmann é sempre positivo e o destino desse Universo é o *Big Chill*.

Nesse caso, para determinado valor do fator de escala matéria e Λ contribuem igualmente para a densidade de energia do Universo, de maneira que,

$$\begin{aligned} \Omega_{m,0} \left(\frac{1}{a_{m\Lambda}} \right)^3 &= \Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}, \\ a_{m\Lambda} &= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 0,75. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Se $a < a_{m\Lambda}$ a componente dominante é a matéria, se $a > a_{m\Lambda}$ a componente dominante é a constante cosmológica, estudos [1, 25, 31] mostram que atualmente nosso Universo é dominado por Λ . Vamos dar uma olhada na equação de Friedmann completa,

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}), \\ \frac{da}{dt} &= H_0 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}) \right]^{1/2}, \\ dtH_0 &= \frac{1}{(1 - \Omega_{m,0})^{1/2}} \left(\frac{a}{\beta + a^3} \right)^{1/2} da, \end{aligned}$$

onde $\beta = \Omega_{m,0}/1 - \Omega_{m,0}$. Vamos integrar ambos os lados,

$$\int_0^t dtH_0 = \int_0^a \frac{1}{(1 - \Omega_{m,0})^{1/2}} \left(\frac{a}{\beta + a^3} \right)^{1/2} da.$$

Introduzindo novas variáveis [10], temos que:

$$\begin{aligned}
 a &= \beta^{1/3} \sinh^{2/3} \psi \\
 da &= \beta^{1/3} \frac{2}{3} \sinh^{-1/3} \psi \cosh \psi d\psi \\
 (\beta + a^3)^{1/2} &= \beta^{1/2} \cosh \psi \\
 H_0 t &= \int_0^{\sinh^{-1}(a/a_{max})^{3/2}} 1 d\psi.
 \end{aligned}$$

Por meio da relação $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, temos que:

$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \Omega_{m,0}} \ln \left[\left(\frac{a}{a_{max}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{max}} \right)^3} \right]. \quad (4.89)$$

Isolando o tempo encontramos que a idade atual desse Universo é,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{1 - \Omega_{m,0}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right] \sim 13,5 \times 10^9 \text{ anos}. \quad (4.90)$$

A idade do Universo Λ CDM plano é consistente com a idade dos objetos mais antigos já observados. Se quisermos saber a idade do Universo quando a densidade de matéria e Λ era idênticas podemos reescrever a equação

$$t_{\Lambda m} = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{1 - \Omega_{m,0}} \ln(1 + \sqrt{2}) \sim 10,1 \cdot 10^9 \text{ anos}. \quad (4.91)$$

Portanto faz cerca de $3,4 \cdot 10^9 \text{ anos}$ que o nosso Universo é dominado por Λ . O fator de escala para qualquer tempo em geral

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3} \left[\sinh \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t \right) \right]^{2/3}. \quad (4.92)$$

O gráfico de a versus t foi confeccionado na Figura 4.8, o fator de escala (equação 4.92) é representado pela linha tracejada. Adotando o limite para $a \ll a_{m\Lambda}$, de maneira que $\sinh x \sim x$, temos que,

$$a(t) \approx \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t. \quad (4.93)$$

Para $a \gg a_{m\Lambda}$,

$$a(t) \approx \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3} e^{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t}. \quad (4.94)$$

Observa-se que o modelo Λ CDM apresenta expansão acelerada, portanto, tomando a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3} + \varepsilon_{\Lambda,0} - 3P_{\Lambda} \right),$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H_0^2}{2} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - 2\Omega_{\Lambda,0} \right).$$

Quando $\left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - 2\Omega_{\Lambda,0}\right) < 0$ ocorre uma expansão acelerada, logo, se considerarmos o termo em parênteses temos que quando ele vai a zero ocorre o *crossover* entre desaceleração e aceleração. Para esse instante de tempo o fator de escala é

$$a_{acc} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} a_{\Lambda m} \sim 0,598. \quad (4.95)$$

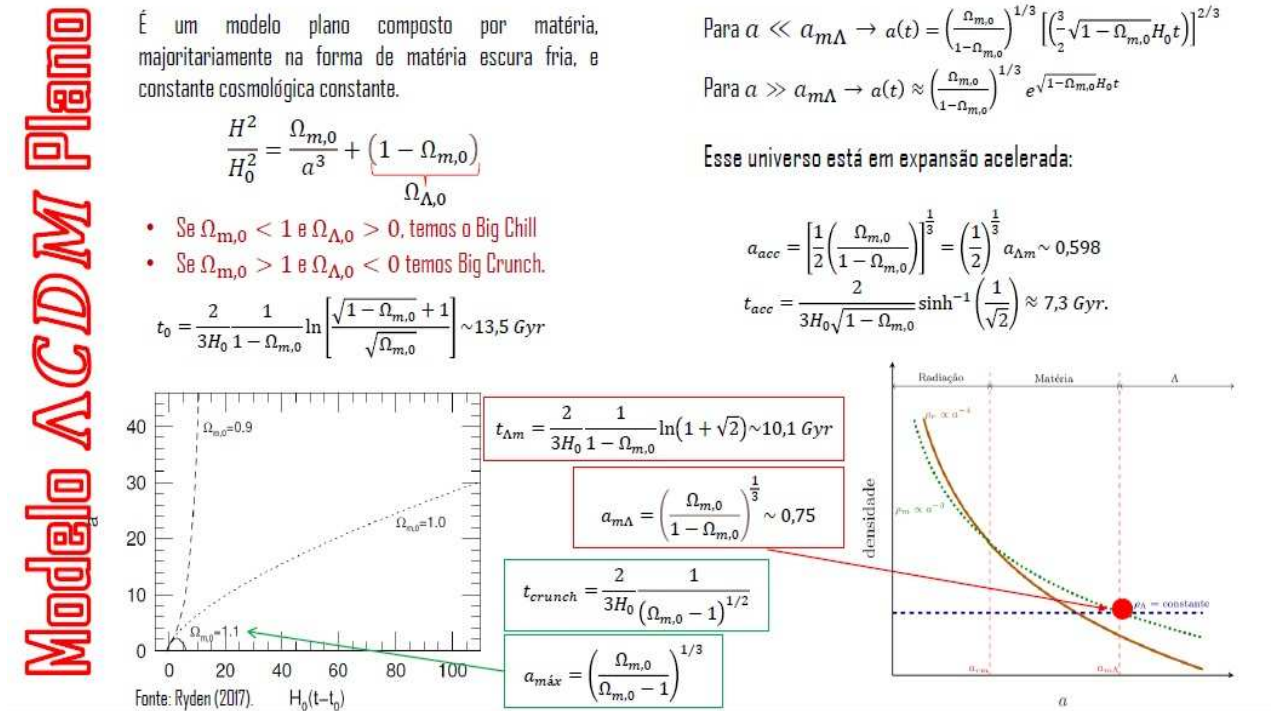
Isso ocorre pouco antes de Λ se tornar dominante. A idade que o Universo tinha quando a expansão se tornou acelerada era de,

$$t_{acc} = \frac{2}{3H_0\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 7,3 \times 10^9 \text{ anos}. \quad (4.96)$$

Dessa forma, de acordo com esse modelo, o Universo está em expansão acelerada por aproximadamente 6,2 bilhões de anos.

Na Figura 4.9 apresenta um resumo desta subseção 4.3.3.

Figura 4.9 – Resumo da subseção 4.3.3 – Modelo de Universo Cosmológico - Constante Cosmológica Matéria Escura Fria Plano.



Fonte: a autora, slides da defesa (2022).

4.3.4 Modelo Λ CDM com curvatura

Na subseção 4.3.3 discutimos que um Universo espacialmente plano com $\Omega_{m,0} > 1$ e $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ é espacialmente infinito, mas temporalmente finito. Por outro lado, um Universo plano com $\Omega_{m,0} \leq 1$ e $\Omega_{\Lambda,0} \geq 0$ é infinito espacialmente e temporalmente. Agora consideremos um Universo contendo matéria, constante cosmológica e curvatura. Ao escolher diferentes valores de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ temos uma variedade de comportamentos para a função $a(t)$. Escrevendo a equação de Friedmann para essas componentes temos que,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}. \quad (4.97)$$

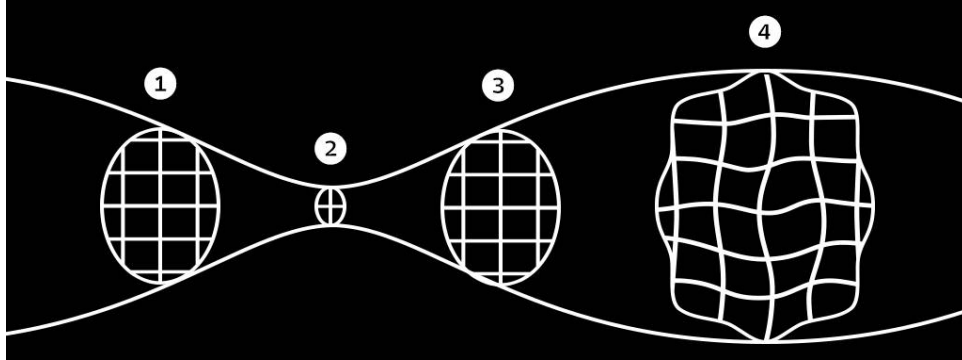
Sendo, $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}$. Se $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e $\Omega_{m,0} > 0$ o primeiro e terceiro termos são positivos; entretanto se $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} < 1$ todos os termos do lado direito são positivos, o que significa que esse Universo se expande para sempre, *Big Chill*; se $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$ o segundo termo é negativo e o Universo é positivamente curvo. Ademais, H^2 é positivo para pequenos valores de $a(t)$, quando esse Universo é matéria dominante e para grandes valores de $a(t)$, quando esse Universo a constante cosmológica Λ é dominante, e negativo para valores intermediários de $a(t)$. Visto que é fisicamente impossível que $H^2(t)$ seja negativo, há um intervalo proibido de valores para $a(t)$.

Analisando os Universos que apresenta valores medianos de $a(t)$:

- Suponhamos que $a(t) \gg 1$ e $H < 0$, isso significa que esse Universo se encontra em um estado dominado pela constante cosmológica Λ de baixa densidade e contraindo. Conforme esse Universo se contrai o segundo termo da equação torna-se dominante, o que faz com que a contração cesse em um fator de escala mínimo $a(t) = a(t)_{min} > 0$ e comece a expandir novamente. Denominado de *Big Bounce*, isto é, um Universo que se expande infinitamente, mas nunca teve *Big Bang*, Figura 4.10.
- Outra possibilidade que um Universo composto por matéria, constante cosmológica e curvatura apresenta, são os chamados Universos de Lemaître [1]. Tais Universos têm início em um estado matéria-dominante, que se expande, assim como visto na subseção 4.2.1, com $a \propto t^{\frac{2}{3}}$. Então entra em uma fase, chamada estágio *loitering*, em que $a(t)$ é quase constante por um longo período de tempo, se assimilando ao modelo

estático de Einstein [13]. Após essa fase a constante cosmológica torna-se dominante e esse Universo expande exponencialmente.

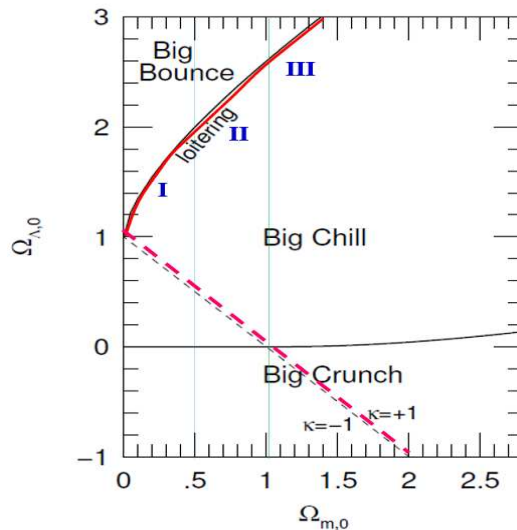
Figura 4.10 – Imagem ilustrativa d Universo *Big Bounce*. Esse pode ser entendido como um efeito sanfona simétrico, no qual o Universo contrai é um a_{min} e se expande até um a_{max} .



Fonte: <https://www.blogdobg.com.br/sem-big-bang-um-dos-maiores-fisicos-do-brasil-acredita-que-o-universo-nao-teve-comeco-e-nem-fim-sempre-existiu-e-pulsa-em-ciclos/>.

Na Figura 4.11, é apresentado um gráfico da expansão do Universo considerando somente a constante cosmológica versus somente a matéria. Quanto mais próximo da linha divisória *Big Chill – Big Bounce* maior o período em que esse Universo permanece em estágio *loitering*.

Figura 4.11 – Comportamento de Universo constante cosmológica versus matéria. A linha em vermelha representa o estágio *loitering*, limite entre *Big Bounce* e *Big Chill*. Os números romanos fazem referência as soluções Caso 1, Caso 2 e Caso 3 apresentadas para análise do limite estágio *loitering*. A linha tracejada em rosa representa a separação entre a região superior que possui curvatura positiva e a região inferior que possui curvatura negativa.



Fonte: Ryden (2017).

Vamos analisar mais detalhadamente o caso limite *Big Chill – Big Bounce*, ilustrada na parte superior do gráfico da Figura 4.11. Lembre-se para que o Universo permaneça

estático \dot{a} e \ddot{a} devem ser iguais a zero. Portanto, a equação de Friedmann (eq. (3.65)) e equação da aceleração (eq. (3.61)) tomam a forma de,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a_s^3} + \frac{\Omega_{k,0}}{a_s^2} + \Omega_{\Lambda_s} = 0, \quad (4.98(a))$$

$$\frac{\ddot{a}}{a_s} = \frac{1}{H_0} \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a_s^3} - 2\Omega_{\Lambda_s} \right) = 0. \quad (4.98(b))$$

Nas quais a_s é o fator de escala aproximadamente estático e Ω_{Λ_s} é o valor de Ω_{Λ_s} para dado $\Omega_{m,0}$. Isolando Ω_{Λ_s} nas duas equações (4.98 (a) e (b)) temos que,

$$\Omega_{\Lambda_s} = \frac{\Omega_{m,0}}{2a_s^3} = \frac{-\Omega_{k,0}}{3a_s^2}. \quad (4.99)$$

Isolando o termo a_s ,

$$a_s = -\frac{3\Omega_{m,0}}{2\Omega_{k,0}}, \quad (4.100)$$

substituindo a equação (4.100) na equação (4.99) temos [16],

$$\Omega_{\Lambda_s} = \frac{4}{27} \frac{(\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda_s} - 1)^3}{\Omega_{m,0}^2}. \quad (4.101)$$

Introduzindo a variável $x^3 = \Omega_{\Lambda_s}/4\Omega_{m,0}$, escrevemos a equação (4.101) como uma expressão cúbica,

$$x^3 + \frac{\Omega_{m,0} - 1}{\Omega_{m,0}} - \frac{3}{4}x = 0$$

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

em que, $p = -\frac{1}{4}$ e $q = \frac{1}{8} \frac{\Omega_{m,0}-1}{\Omega_{m,0}}$. Estamos interessados em soluções reais e positivas. Pelo

método de Cardano-Tartaglia [14] as soluções são dadas pelo discriminante,

$$\Delta = 4(p^3 + q^2) = \frac{1 - 2\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}^2}.$$

A teoria das equações diz que há 3 possíveis soluções para delta: $\Delta < 0$ e $\Omega_{m,0} > 1/2$, há três raízes reais distintas, $\Delta = 0$ e $\Omega_{m,0} = 1/2$, há três raízes reais, sendo pelo menos duas delas iguais, e $\Delta > 0$ e $\Omega_{m,0} < 1/2$, há uma raiz real e duas complexas conjugadas. Para raízes positivas e reais temos os seguintes casos:

- Caso 1 - Se $0 < \Omega_{m,0} \leq 1/2$

$$\Omega_{\Lambda_s} = 4\Omega_{m,0} \left\{ \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right] \right\}^3; \quad (4.102(a))$$

- Caso 2 - Se $1/2 \leq \Omega_{m,0} \leq 1$

$$\Omega_{\Lambda s} = 4\Omega_{m,0} \left\{ \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right] \right\}^3 ; \quad (4.102(b))$$

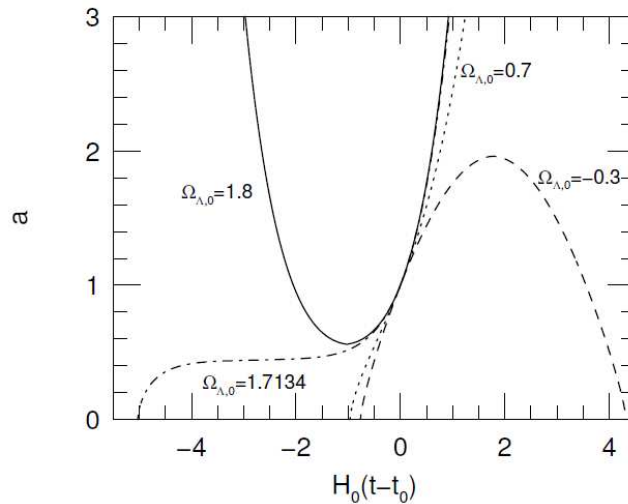
- Caso 3 - Se $\Omega_{m,0} > 1$

$$\Omega_{\Lambda s} = 4\Omega_{m,0} \left\{ \cos \left[\frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right] \right\}^3 . \quad (4.102(c))$$

A região na qual essas soluções são válidas são as que foram representadas na Figura 4.10, sendo a região I, II e III, referentes aos Casos 1, 2 e 3, respectivamente.

Ainda podemos ilustrar as possíveis expansões ou contrações para Universos compostos por matéria e constante cosmológica. A Figura 4.12 apresenta o gráfico de $a(t)$ vs. tempo. Cada um desses Universos possui o mesmo valor para o parâmetro de densidade da matéria ($\Omega_{m,0} \sim 0,31$), medido para $t = t_0$ e $a = 1$ [1]. Portanto esses modelos não podem ser diferenciados pela medida de $\Omega_{m,0}$ e constante de Hubble. Entretanto, devido a diferença de valores para $\Omega_{\Lambda,0}$ eles possuem destinos e passados muito diferentes.

Figura 4.12 – Gráfico do fator de escala $a(t)$ vs. tempo t para modelos de Universo contendo matéria e constante cosmológica.

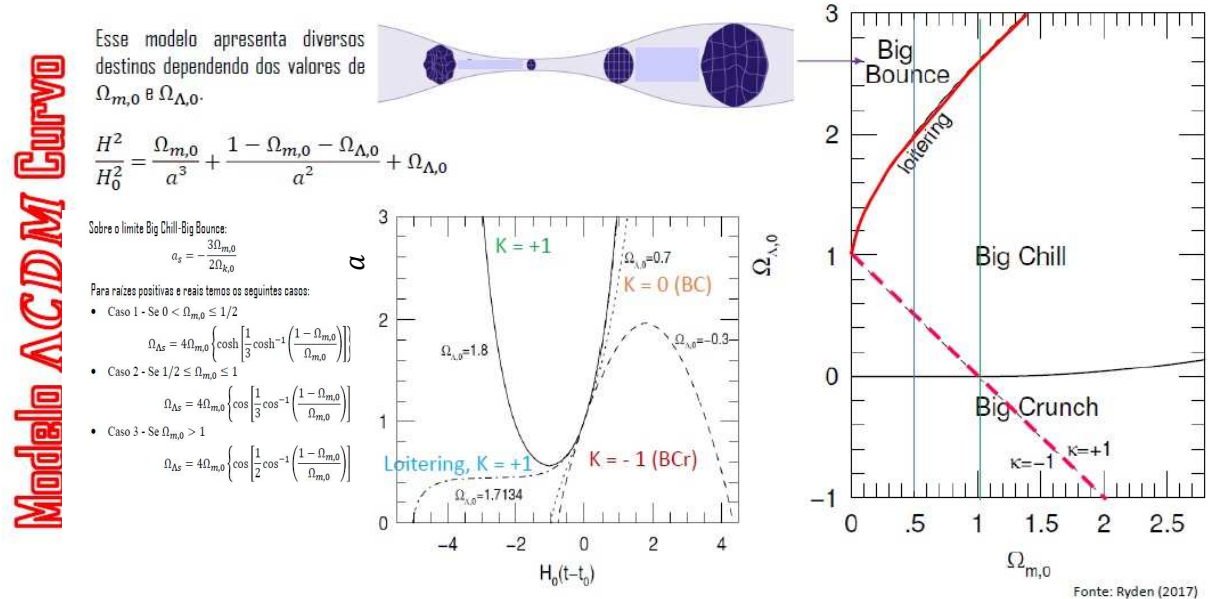


Fonte: Ryden (2017).

A linha pontilhada representa um Universo espacialmente plano que se expande exponencialmente para o infinito, seu destino é o *Big Chill*. A linha tracejada representa um Universo de curvatura negativa que se expande até um a_{max} e colapsa no *Big Crunch*. A linha pontilhada e tracejada representa um Universo *loitering*, e a linha sólida representa um Universo que está em um estado *Big Bounce*.

Na Figura 4.13 apresenta-se um resumo desta subseção.

Figura 4.13 – Resumo da subseção 4.3.4 – Modelo de Universo Cosmológico - Constante Cosmológica Matéria Escura Fria Curvo.



Fonte: a autora, slides da defesa (2022).

4.3.5 Modelo *Benchmark*

O Modelo de *Benchmark*, também chamado de Modelo de Concordância, é um modelo plano, composto por radiação, matéria e constante cosmológica, adotado a partir de dados observacionais atuais [1].

A radiação consiste de fótons e neutrinos. Os fótons são provenientes da radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Teoricamente, a densidade de energia da radiação de fundo do neutrino é 68,1% da radiação de fundo em micro-ondas, se os neutrinos forem relativísticos. A matéria é parcialmente composta por matéria bariônica e por matéria não bariônica na forma de matéria escura. Os valores de densidade de energia para as componentes citadas podem ser vistos na Tabela 4.1. A referência [19] apresenta os mesmos dados de maneira mais precisa, os mesmos foram coletados pelo Planck 2018³⁰.

Tabela 4.1 – Parâmetros medidos para o Modelos de *Benchmark*.

Lista de ingredientes	
Fótons	$\Omega_{\gamma,0} = 5,0 \times 10^{-5}$
Neutrinos	$\Omega_{\nu,0} = 3,4 \times 10^{-5}$
Radiação total	$\Omega_{\gamma,0} = 8,4 \times 10^{-5}$

³⁰ Planck é a missão da ESA para observar a primeira luz no Universo. Ele foi projetado para obter imagens das anisotropias de temperatura e polarização do Campo de Radiação Cósmica de Fundo em todo o céu, com sensibilidade e resolução angular sem precedentes. Planck está testando teorias do universo primitivo e a origem da estrutura cósmica e fornecendo uma importante fonte de informações relevantes para muitas questões cosmológicas e astrofísicas. O desenvolvimento científico da missão é dirigido pelo Planck Science Team.

Matéria Bariônica	$\Omega_{bar,0} = 0,04$	
Matéria negra não bariônica	$\Omega_{dm,0} = 0,26$	
Total de Matéria	$\Omega_{m,0} = 0,30$	
Constante Cosmológica Λ	$\Omega_{\Lambda,0} \approx 0,70$	
Épocas Importantes		
Radiação-matéria	$a_{rm} = 2,8 \times 10^{-4}$	$t_{rm} = 4,7 \times 10^4 \text{ anos}$
Matéria- Λ	$a_{m\Lambda} = 0,75$	$t_{m\Lambda} = 9,8 \text{ G anos}$
Atual	$a_0 = 1$	$t_0 = 13,5 \text{ G anos}$

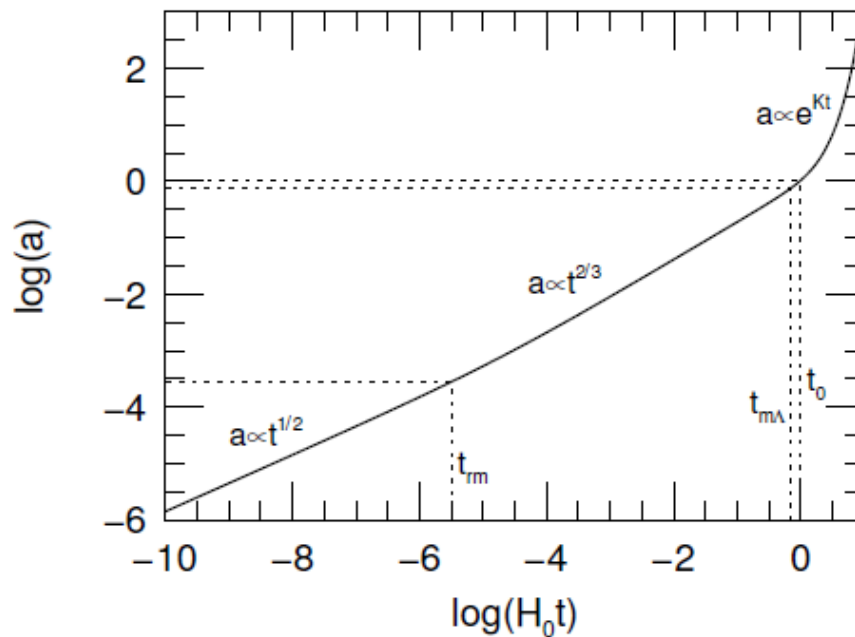
Fonte: Ryden (2017).

Com os valores medidos de $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ o fator de escala pode ser computado a partir da equação de Friedmann na forma de eq. (4.49):

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{(1 - \Omega_0)}{a^2}.$$

No gráfico da Figura 4.14 podemos ver como ocorre as transições entre as épocas em que radiação-dominante, matéria-dominante e lambda-dominante. Nota-se que a mudança entre fases não abrupta. Além disso, de acordo com esse gráfico a “pouco tempo” entra-se na fase em que a constante cosmológica Λ é dominante.

Figura 4.14 – Gráfico do fator de escala em função do tempo. As linhas pontilhadas representam os períodos de igualdade entre as componentes desse Universo.



Fonte: Ryden (2017).

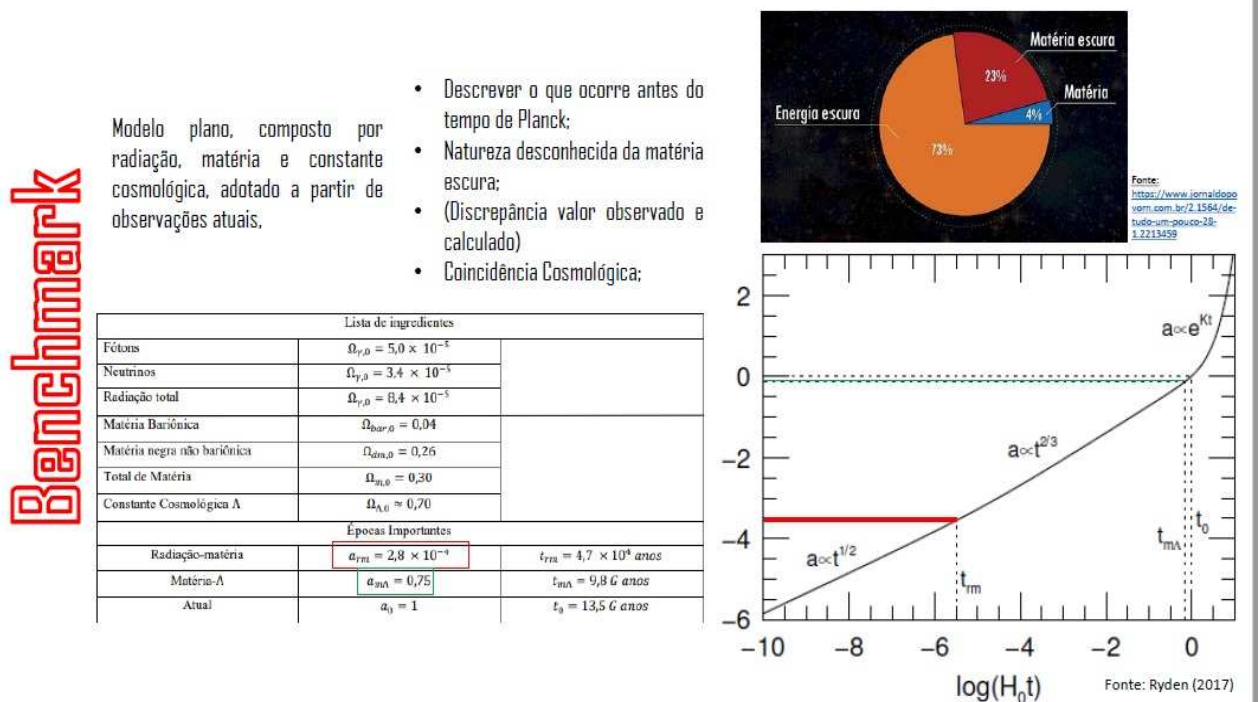
Apesar de o Modelo *Benchmark*, ou Modelo Padrão, ser bem sucedido em explicar as propriedades observadas, ele possui problemas não resolvidos, dentre eles, não é explicado ainda o que aconteceu antes do tempo de Planck, é de acordo entre os cientistas que para isso uma nova teoria deve ser desenvolvida capaz de agregar conhecimentos de Relatividade Geral e Quântica [37].

Além disso, de acordo com Marcela Carena [38], diretora de relações internacionais do Fermilab, o principal laboratório de física de partículas dos Estados Unidos, o modelo não fornece nenhuma explicação sobre a matéria escura ou energia escura, apenas para 4% da composição do Universo. Ainda, não explica a assimetria entre quantidade de matéria e antimatéria encontrada no Universo.

Outro ponto que intriga a comunidade científica é a chamada Coincidência cósmica: o fato de existir um valor aproximado entre a densidade de energia do vácuo (a energia fundamental de um certo volume de espaço “vazio” [40]), e a densidade de matéria no Universo atual.

Na Figura 4.15, apresenta-se um resumo da subseção 4.3.5 – do Modelo de Concordância (*Benchmark*)

Figura 4.15– Resumo da subseção 4.3.5– Modelo de Universo Cosmológico – *Benchmark* (Modelo de Concordância)



Fonte: a autora, slides da defesa.

Considerações Finais

Neste trabalho fez-se uma abordagem direcionada ao estudo de alguns modelos de Universo Cosmológico a partir de tópicos essenciais à Cosmologia. Sendo esse um estudo acadêmico centrado no livro da autora Barbara Ryden [1]. As demais referências foram leituras complementares, para o entendimento e que pudesse atingir ao objetivo.

Assim, foi apresentado de maneira mais geral tópicos relacionados a Relatividade Geral, Princípio de Equivalência, Equação de Einstein, além da Métrica de Robertson-Walker, bem como a dedução das equações responsáveis pela dinâmica cósmica, a saber: equação de Friedmann, equação da Aceleração e equação do Fluido Perfeito. Além de conteúdos essenciais à compreensão de modelos cosmológicos, como: Princípio Cosmológico, Lei de Hubble, fator de escala e coordenadas comoveis. E, foram abordados diversos modelos cosmológicos de Universo, alguns apenas hipotéticos, mas todos importantes para o entendimento de como se deu a evolução do nosso próprio Universo.

Foi mostrado que para prever um possível futuro do Universo é importante conhecermos a constante de Hubble – que nos dá a taxa de expansão do Universo, fator de escala, e densidade de energia – que permite determinar a geometria espacial do Universo.

Sobre os Universos de uma só componente, esses nos permitem compreender de maneira simplificada as características e evolução do Universo em épocas nas quais uma das componentes foi dominante sobre as demais.

Muitos modelos foram e são propostos ao longo da história, limitados muitas vezes pela tecnologia e desenvolvimento científico do período, mas todos buscam explicar com os dados observacionais obtidos. A compreensão completa da matemática e conceitos relacionados a temática é digno de anos de pesquisa e estudo, o que não foi a presente pretensão. Observou-se que nesse ramo da pesquisa, inclui-se os físicos teóricos, astrofísicos, astrônomos, cosmólogos, e de que tudo somente terá validade com resultados experimentais.

A Cosmologia mostra-se como um campo proeminente dentro das pesquisas atuais, visto que há diversos projetos de pesquisa internacional que reúnem cientistas de diversos lugares do planeta, como a *Dark Matter Survey* referenciada no trabalho. E apesar de muitos terem a ideia de que não há mais o que se descobrir ou explorar dentro de Ciências, a Cosmologia mostra, paradoxalmente, que é possível ter muito conhecimento sobre algo, visto

que sabemos as porcentagens exatas de composição do Cosmos, mas pouco sabemos sobre 75% de sua constituição (matéria e energia escura).

Um relato pessoal que eu vivenciei no decorrer do estudo e da redação desta monografia, foi que utilizando referências de língua inglesa, é difícil traduzir alguns termos em nossa língua, e de que algumas palavras não são realmente a de uma tradução literal, como por exemplo, “line worlds” que refere-se a linha do Universo e não de mundo. Assim, alguns termos não foram traduzidos, pois a tradução nos pareceu inadequada. Além disso, em algumas partes do presente trabalho parece ter sido mantida uma descrição traduzida conforme o original, mas, a forma de redação não difere muito de autor para autor, o que dificulta escrever com minhas próprias palavras, pois a minha pesquisa está no sentido acadêmico de aprendizagem. Portanto aos que desejarem citar alguma parte do texto, verifiquem e citem o texto original, apud a esse se assim o desejar.

Referências

- [1] RYDEN, B. S. **Introduction to Cosmology**. Cambridge University Press. 2ed. p. 264. New York, NY, 2017.
- [2] de SOUZA, R. E. **Introdução à Cosmologia**. Editora da Universidade de São Paulo (Edusp). 2004, p. 328. São Paulo. Disponível em: <https://bit.ly/3kFKTw8>. Acesso em: 25 set. 2021.
- [3] ADERALDO, V.S., GONÇALVES, V. P. **Uma introdução à evolução do Universo segundo sua geometria e composição**. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2020. Disponível em: <https://bit.ly/3AMxcRN>. Acesso em: 25 set. 2021.
- [4] RINDLER, W. **Relativity: Special, General and Cosmological**. Oxford University Press Inc. 2ed., p. 423, New York, NY, 2007.
- [5] BARTUSIAK, M. **Archives of the Universe: 100 discoveries that transformed our understanding of the Cosmos**. Vintage Books Edition. 1ed, p. 695. New York, NY, 2006.
- [6] BENNETT, J; DONAHUE, M.; SCHENEIDER, N.; VOIT, M. **The Cosmic Perspective: stars, galaxies and cosmology**. Pearson Education. 8 ed., p. 723, Boston, MA, 2017.
- [7] NORTON, J. **How Einstein found his field equations: 1912-1915**. University of California Press. 2016.
- [8] SARMA, A. J. **Introduction to Cosmology**. (Notas de aula da disciplina de introdução a Cosmologia da DePaulUniversity, Spring Semester). 2012. Disponível em: <https://bit.ly/3b4whkt>. Acesso em: 15 out. 2021.
- [9] BEZERRA, R. L. **Estudo dos Modelos Cosmológicos e suas Previsões para o futuro do Universo**. Monografia: Universidade Católica de Brasília. 2016, p. 25.
- [10] WEINBERG, D. H. **Single Component and Multi-component Universes**. Class Notes: Ohio University. 2017. Disponível: <https://www.astronomy.ohio-state.edu/weinberg.21/index.html>.
- [11] GUEDES, L. L. S. **Princípio Cosmológico: Homogeneidade e Isotropia**. Astronomia Blog. 2007. Disponível em: <https://bit.ly/39E5HOj>. Acesso em: 25 set. 2021.
- [12] SUSSKIND, L; FRIEDMAN, A. **The Theoretical Minimum: Special Relativity and Classical Field Theory**. Kinokuniya Books, v. 3. 2018.
- [13] BERGSTROM, L.; GOOBAR, A. **Cosmology and Particle Astrophysics**. Praxis Publishing. 2ed, p. 375, Chichester, Reino Unido, 2004.
- [14] LIMA, E. L. **A equação do Terceiro Grau**. Matemática Univrsitária, n. 5, p. 9 – 23. 1987.

- [15] LIDDLE, A. **An Introduction to Modern Cosmology**. Wiley Editorial. 2 ed., p. 189. Chicester, Inglaterra. 2003.
- [16] ELGARROY, O. **AST4220: Cosmology I**. Disponível em: <https://studylib.net/doc/11454774/ast4220--cosmology-i-%C3%B8ystein-elgar%C3%B8y>.
- [17] MORAES, C. A. M. **Tópicos de Relatividade Geral**. Monografia: Universidade Estadual de Maringá. 2016
- [18] MOTA C. E. **As equações de Friedmann**. Monografia: Universidade Federal de Campinas. 2015. p – 63.
- [19] TAMARA, D. SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA. **Astrophysical Constraintson Fundamental Physics**. XLI ENPFC. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=oMGFdI31NKU>.
- [20] WAGA, I. **Cem anos de descobertas em cosmologia e novos desafios para o século XXI**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 1, p. 157-173. 2005.
- [21] VIGLIONI, A.; SOARES, D. **Observações sobre as soluções clássicas da equação de Friedmann**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 4. 2011.
- [22] ROOS, M. **IntroductiontoCosmology**. John Wiley and Sons LTD. West Sussex, Inglaterra. 2003.
- [23] CUZINATTO, R. R. **Modelos de Universo e Equação de Estado na Cosmologia**. Dissertação: Instituto de Física Teórica: Universidade Estadual Paulista. 2002.
- [24] SOARES, D. **O universo estático de Einstein**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 1. 2012.
- [25] SOARES, D. **Os fundamentos físico-matemáticos a cosmologia relativística**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 3. 2013
- [26] SOARES, D. **Espaço e espaço-tempo nas teorias relativistas**. 2013. Disponível em: <http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/esptmp/esptmp.htm>.
- [27] DELBEM, N. F. **Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos**. Dissertação: Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho. 2010.
- [28] CAROLL, S. **Spacetime and Geometry**. Adilson Wesey by Pearson. 2004.
- [29] ROVELLI, C. **General Relativity: The Essentials**. Cambridge University Press. 2021.
- [30] W. MISNER, C; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. W. H. Freeman and Company, Estados Unidos da América. 1973.
- [31] GUTH, A. **The Cosmological Constant**. Class Notes - Physics Department: Massachusetts Institute of Technology. 2018.

- [32] WALD, R. M. **General Relativity**. The University of Chicago Press. 1984.
- [33] PELICER, M. R. **Cálculo Tensorial e Relatividade Geral**. Monografia: Universidade Estadual de Maringá. 2016.
- [34] EIGENCHRIS. Canal no Youtube. Playlist de Vídeo-Aula: disponível em <<https://www.youtube.com/c/eigenchris>>. Acesso em: 11/01/2022.
- [35] CATTANI, M. **Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um curso de Graduação**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 20, n. 1, 1998.
- [36] TEREK, I. **Um mini-curso sobre Tensores**. Disponível em: <file:///C:/Users/PADRAO/Documents/Bacharel/TCC/Refer%C3%A2ncias/tensores.pdf>. Acesso em: 04 maio 2022.
- [37] **Problemas com o Modelo Padrão**. Disponível em: encurtador.com.br/pqyCQ. Acesso em: 04 maio 2022.
- [38] PIVETTA, M. **Além do Modelo Padrão**: entrevista com Marcela Carena. Revista FAPESP. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/alem-do-modelo-padrao/>. Acesso em: 04 maio 2022.
- [40] Santos, A. C. (organizador). Núcleo Interativo de Astronomia. **Os problemas da Constante Cosmológica e da Coincidência Cósmica**. Disponível em: http://vintage.portaldoastronomo.org/tema_pag.php?id=25&pag=2. Acesso em: 04 maio de 2022.
- [41] MacCallum, M. A.H., **Inhomogeneous and anisotropic cosmologies**, em The Origin of Structure in the Universe, Edited by: E. Gunzig and P. Nardone, NATO ASI SERIES, SERIES C: MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES – vol. 393, SPRINGER-VERLAG, pp 131–159, 1993.
- [42] Miranda, W. L. A. **A radiação Cósmica de Fundo e a Interação entre Energia e Matéria Escuras**. Universidade Federal da Bahia. Tese: Instituto de Física. 2017. Disponível em: <https://www.martinsfontespaulista.com.br/a-radiacao-cosmica-de-fundo-e-a-interacao-entre-energia-e-materia-escuras-938284/p>. Acesso em: 20 janeiro 2022.

APÊNDICE A

Desenvolvimento de equações do Capítulo 3 – Dinâmica Cósmica

Tomemos uma métrica que descreva a geometria do nosso universo, tal métrica deve determinar o elemento de linha que descreve o espaço-tempo quadridimensional de um Universo que acorde com o princípio cosmológico, isto é, homogêneo e isotrópico. Esse elemento de linha é descrito pela métrica de Robertson-Walker em coordenadas esféricas,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]$$

Assim, seus coeficientes são:

$$g_{00} = c^2, \quad g_{11} = -a(t)^2 \frac{1}{1 - kr^2/R_0^2}, \quad g_{22} = -a(t)^2 r^2, \quad g_{33} = -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Onde,

$$g_{00} = c^2 \text{ e } g_{\mu\nu} = \begin{cases} -a(t)\tilde{g}_{\mu\nu} \text{ se } \mu = \lambda \\ 0 \text{ se } \mu \neq \lambda \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Inicialmente encontraremos os *símbolos de Christoffel*, dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} = \delta_\rho^\sigma \quad (\text{A.2})$$

Portanto, dada a equação (A.1), temos que se $\rho \neq \sigma$, então $g^{\rho\sigma} = 0$. Ao considerar, $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$, sendo $(0, 1, 2, 3) = (t, r, \theta, \phi)$, e utilizando a equação (A.2) calculamos que:

→ Se $\rho = \sigma = 0$

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_\nu g_{\mu 0} + \partial_\mu g_{\nu 0} - \partial_0 g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.3})$$

A. Se $\mu = 0$ e $\nu = 1, 2, 3$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{01}) = \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{00} + \partial_0g_{20} - \partial_0g_{02}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_2g_{00} = 0 \quad (A.6)$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{00} + \partial_0g_{30} - \partial_0g_{03}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_3g_{00} = 0 \quad (A.7)$$

B. Se $\mu = 1$ e $\nu = 1,2,3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{10} + \partial_1g_{10} - \partial_0g_{11}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{11} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial t}{c^2}\left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2}\right) = +\frac{a\dot{a}}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{10} + \partial_1g_{20} - \partial_0g_{12}) = 0 \quad (A.9)$$

$$\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{10} + \partial_1g_{30} - \partial_0g_{13}) = 0 \quad (A.10)$$

C. Se $\mu = 2$ e $\nu = 1,2,3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{20} + \partial_2g_{20} - \partial_0g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{22} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial t}{c^2}(-a^2r^2) = +\frac{a\dot{a}r^2}{c^2} \end{aligned} \quad (A.11)$$

$$\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{20} + \partial_2g_{30} - \partial_0g_{12}) = 0 \quad (A.12)$$

D. Se $\mu = 3$ e $\nu = 1,2,3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{30} + \partial_3g_{30} - \partial_0g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{33} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial t}{c^2}(-a^2r^2\sin^2\theta) = +\frac{a\dot{a}r^2\sin^2\theta}{c^2} \end{aligned} \quad (A.13)$$

→ Se $\rho = \sigma = 1$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\nu g_{\mu 1} + \partial_\mu g_{\nu 1} - \partial_1 g_{\mu\nu}) \quad (A.14)$$

A. Se $\mu = 0$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{01} + \partial_0g_{01} - \partial_1g_{00}) = 0 \quad (A.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{11} + \partial_1g_{01} - \partial_1g_{10}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0g_{11} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\partial_t\left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\left(\frac{-2a\dot{a}}{1 - kr^2/R_0^2}\right) = \frac{\dot{a}}{a} \end{aligned} \quad (A.16)$$

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{01} + \partial_0g_{21} - \partial_1g_{02}) = 0 \quad (A.17)$$

$$\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{01} + \partial_0g_{31} - \partial_1g_{03}) = 0 \quad (A.18)$$

B. Se $\mu = 1$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\partial_r\left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)(-a^2)\left[\frac{2krR_0^2}{(1 - kr^2/R_0^2)^2}\right] = \frac{krR_0^2}{1 - kr^2/R_0^2}\end{aligned}\quad (A.19)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{12}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\partial_\theta\left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2}\right) = 0\end{aligned}\quad (A.20)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{11} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{13}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_3 g_{11} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\partial_\phi\left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2}\right) = 0\end{aligned}\quad (A.21)$$

C. Se $\mu = 2$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\partial_r(-a^2 r^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)(-a^2)(2r) = \\ &= -r\left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2}\right)\end{aligned}\quad (A.22)$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{21} + \partial_1 g_{31} - \partial_1 g_{23}) = 0 \quad (A.23)$$

D. Se $\mu = 3$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)\partial_r(-a^2 r^2 \sin^2\theta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - kr^2/R_0^2}{-a^2}\right)(-a^2)(2r \sin^2\theta) \\ &= -r\left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2}\right)\sin^2\theta\end{aligned}\quad (A.24)$$

→ Se $\rho = \sigma = 2$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\nu g_{\mu 2} + \partial_\mu g_{\nu 2} - \partial_2 g_{\mu\nu}) \quad (A.25)$$

A. Se $\mu = 0$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{00}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_\theta \left(\frac{1}{c^2} \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{01}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{02}) = \frac{1}{2} g^{22} \partial_0 g_{22} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_t (-a^2 r^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) (-2a\dot{a})(r^2) = \frac{\dot{a}}{a} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{32} - \partial_2 g_{03}) = 0 \quad (\text{A.29})$$

B. Se $\mu = 1$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = -\frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{11} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_\theta \left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_r (-a^2 r^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) (-a^2)(2r) = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{13}) = 0 \quad (\text{A.32})$$

C. Se $\mu = 2$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{21}) = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_r (-a^2 r^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) (-a^2)(2r) = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = \frac{1}{2} g^{22} \partial_2 g_{22} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_\theta (-a^2 r^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{32} - \partial_2 g_{23}) = \frac{1}{2} g^{22} \partial_3 g_{22} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2} \right) \partial_\phi (-a^2 r^2 \sin^2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

D. Se $\mu = 3$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{02} - \partial_2 g_{30}) = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{31}) = 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{32} + \partial_3g_{22} - \partial_2g_{32}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_3g_{22} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2}\right)\partial_\phi(-a^2r^2) = 0\end{aligned}\quad (A.38)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{32} + \partial_3g_{32} - \partial_2g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2g_{33} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2}\right)\partial_\theta(-a^2r^2\sin^2\theta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2}\right)(-a^2r^2)(2\cos\theta\sin\theta) \\ &= -\cos\theta\sin\theta\end{aligned}\quad (A.39)$$

→ Se $\rho = \sigma = 3$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_\nu g_{\mu 3} + \partial_\mu g_{\nu 3} - \partial_3 g_{\mu\nu}) \quad (A.40)$$

A. Se $\mu = 0$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{03} + \partial_0g_{03} - \partial_3g_{00}) = 0 \quad (A.41)$$

$$\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{03} + \partial_0g_{13} - \partial_3g_{01}) = 0 \quad (A.42)$$

$$\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{03} + \partial_0g_{23} - \partial_3g_{02}) = 0 \quad (A.43)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{03} + \partial_0g_{33} - \partial_3g_{03}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_0g_{33} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)\partial_t(-a^2r^2\sin^2\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)(r^2\sin^2\theta)(-2a\dot{a}) = \frac{\dot{a}}{a}\end{aligned}\quad (A.44)$$

B. Se $\mu = 1$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{13} + \partial_1g_{13} - \partial_3g_{11}) = -\frac{1}{2}g^{33}\partial_3g_{11} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi\left(\frac{-a^2}{1 - kr^2/R_0^2}\right) = 0\end{aligned}\quad (A.45)$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{13} + \partial_1g_{23} - \partial_3g_{12}) = 0 \quad (A.46)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{13} + \partial_1g_{33} - \partial_3g_{13}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1g_{33} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)\partial_r(-a^2r^2\sin^2\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)(-a^2)(2r\sin^2\theta) \\ &= \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (A.47)$$

C. Se $\mu = 2$ e $\nu = 0,1,2,3$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) = -\frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{22} = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{23}) = \frac{1}{2} g^{33} \partial_2 g_{33} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\theta (-a^2 r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) (-a^2 r^2) (2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= -\cot \theta \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

D. Se $\mu = 3$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) = \frac{1}{2} g^{33} \partial_3 g_{33} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi (-a^2 r^2 \sin^2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Portanto, temos que os símbolos não nulos de Christoffel são:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{(1 - kr^2/R_0^2)c^2} & \Gamma_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) & \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{22}^0 = \frac{a\dot{a}r^2}{c^2} & \Gamma_{33}^1 = -r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \sin^2 \theta & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta}{c^2} & \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{krR_0^2}{1 - kr^2/R_0^2} & \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \\ & & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \end{array}$$

O Tensor de Ricci e o Escalar de Ricci juntos formam o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, associado com a parte métrica das equações de campo da Gravitação. Calculando o tensor de Ricci para a métrica, a partir da definição do tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \quad (\text{A.51})$$

Sendo que vamos considerar $\mu = \nu$, com $\mu = (0, 1, 2, 3)$ e $\nu = (0, 1, 2, 3)$, assim como $\rho = (0, 1, 2, 3)$ e $\lambda = (0, 1, 2, 3)$.

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{00}^\lambda + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\lambda \quad (\text{A.52})$$

$\lambda = 0$	$\partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0 - \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0$
$\lambda = 1$	$\partial_1 \Gamma_{00}^1 - \partial_0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{01}^\rho \Gamma_{\rho 0}^1$
$\lambda = 2$	$\partial_2 \Gamma_{00}^2 - \partial_0 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 - \Gamma_{02}^\rho \Gamma_{\rho 0}^2$
$\lambda = 3$	$\partial_3 \Gamma_{00}^3 - \partial_0 \Gamma_{00}^3 + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3 - \Gamma_{03}^\rho \Gamma_{\rho 0}^3$
	$-\partial_0 \Gamma_{01}^1 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{01}^\rho \Gamma_{\rho 0}^1 - \Gamma_{02}^\rho \Gamma_{\rho 0}^2 - \Gamma_{03}^\rho \Gamma_{\rho 0}^3$

$\rho = 0$	$-\Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3$
$\rho = 1$	$-\Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3$
$\rho = 2$	$-\Gamma_{01}^2 \Gamma_{20}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{03}^2 \Gamma_{20}^3$
$\rho = 3$	$-\Gamma_{01}^3 \Gamma_{30}^1 - \Gamma_{02}^3 \Gamma_{30}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3$
	$= -\partial_0 \Gamma_{01}^1 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_0 \Gamma_{01}^1 - \partial_0 \Gamma_{02}^2 - \partial_0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3 \\
&= -\partial_t \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \partial_t \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \partial_t \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\
&= -3 \partial_t \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \right) - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2
\end{aligned}$$

$$R_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) \quad (\text{A.53})$$

$$R_{11} = \partial_\lambda \Gamma_{11}^\lambda - \partial_1 \Gamma_{11}^\lambda + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\lambda \quad (\text{A.54})$$

$\lambda = 0$	$\partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0 - \Gamma_{10}^\rho \Gamma_{\rho 1}^0$
$\lambda = 1$	$\partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1$
$\lambda = 2$	$\partial_2 \Gamma_{11}^2 - \partial_1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 - \Gamma_{12}^\rho \Gamma_{\rho 1}^2$
$\lambda = 3$	$\partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3 - \Gamma_{13}^\rho \Gamma_{\rho 1}^3$
	$-\partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^\rho \Gamma_{\rho 1}^0 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 - \Gamma_{12}^\rho \Gamma_{\rho 1}^2 + \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3 - \Gamma_{13}^\rho \Gamma_{\rho 1}^3$
$\rho = 0$	$-\Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3$
$\rho = 1$	$-\Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3$
$\rho = 2$	$-\Gamma_{10}^2 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3$
$\rho = 3$	$-\Gamma_{10}^3 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$
	$-\partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= \partial_t \left[\frac{\dot{a}a}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} \right] - \partial_r \left(\frac{1}{r} \right) - \partial_r \left(\frac{1}{r} \right) + \left[\frac{\dot{a}a}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} \right] \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \left[\frac{2kR_0^2 r}{(1 - kr^2/R_0^2)} \right] \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{2}{r^2} \\
&= \frac{\ddot{a}a + \dot{a}^2}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} + \frac{2}{r^2} + \frac{\dot{a}^2}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} + \frac{2kR_0^2}{(1 - kr^2/R_0^2)} - \frac{2}{r^2} \\
R_{11} &= \frac{2\dot{a}^2}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} + \frac{\ddot{a}a}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} + \frac{2kR_0^2}{(1 - kr^2/R_0^2)} \quad (\text{A.55})
\end{aligned}$$

$$R_{22} = \partial_\lambda \Gamma_{22}^\lambda - \partial_2 \Gamma_{22}^\lambda + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\lambda \quad (\text{A.56})$$

$\lambda = 0$	$\partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0 - \Gamma_{20}^\rho \Gamma_{\rho 2}^0$
$\lambda = 1$	$\partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{21}^\rho \Gamma_{\rho 2}^1$
$\lambda = 2$	$\partial_2 \Gamma_{22}^2 - \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 - \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2$
$\lambda = 3$	$\partial_3 \Gamma_{22}^3 - \partial_2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3 - \Gamma_{23}^\rho \Gamma_{\rho 2}^3$
	$+ \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{20}^\rho \Gamma_{\rho 2}^0 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{21}^\rho \Gamma_{\rho 2}^1 + \Gamma_{22}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3 - \Gamma_{23}^\rho \Gamma_{\rho 2}^3$
$\rho = 0$	$-\Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3$
$\rho = 1$	$-\Gamma_{20}^1 \Gamma_{12}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3$
$\rho = 2$	$-\Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3$
$\rho = 3$	$-\Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$
	$\partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$

$$\begin{aligned}
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= \partial_t \left(\frac{a\dot{a}r^2}{c^2} \right) - \partial_\theta (\cot \theta) + \partial_r \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \right] + \left(\frac{a\dot{a}r^2}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \left(\frac{a\dot{a}r^2}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \\
&\quad + \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \right] \left[\frac{krR_0^2}{(1 - kr^2/R_0^2)} \right] + \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \right] \left(\frac{1}{r} \right) - \left(\frac{a\dot{a}r^2}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r} \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \right] - \cot^2 \theta \\
&= \frac{\dot{a}^2 r^2 + \ddot{a} a r^2}{c^2} + \frac{3kr^2}{R_0^2} + \frac{2\dot{a}^2 r^2}{c^2} - kr^2 R_0^2 - \frac{\dot{a}^2 r^2}{c^2} \\
R_{22} &= \frac{\ddot{a} a r^2}{c^2} + \frac{3kr^2}{R_0^2} + \frac{2\dot{a}^2 r^2}{c^2} - kr^2 R_0^2 \quad (\text{A.57})
\end{aligned}$$

$$R_{33} = \partial_\lambda \Gamma_{33}^\lambda - \partial_3 \Gamma_{33}^\lambda + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\lambda \quad (\text{A.58})$$

$\lambda = 0$	$\partial_0 \Gamma_{33}^0 - \partial_3 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0 - \Gamma_{30}^\rho \Gamma_{\rho 3}^0$
$\lambda = 1$	$\partial_1 \Gamma_{33}^1 - \partial_3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{31}^\rho \Gamma_{\rho 3}^1$
$\lambda = 2$	$\partial_2 \Gamma_{33}^2 - \partial_3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 - \Gamma_{32}^\rho \Gamma_{\rho 3}^2$
$\lambda = 3$	$\partial_3 \Gamma_{33}^3 - \partial_3 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3 - \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 3}^3$
	$= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{30}^\rho \Gamma_{\rho 3}^0 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 1}^1 - \Gamma_{31}^\rho \Gamma_{\rho 3}^1 + \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 2}^2 - \Gamma_{33}^\rho \Gamma_{\rho 3}^2$
$\rho = 0$	$-\Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^2$

$\rho = 1$	$-\Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^2$
$\rho = 2$	$-\Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^2$
$\rho = 3$	$-\Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^2$
	$\partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$

$$\begin{aligned}
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= \partial_t \left[\frac{a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right] + \partial_r \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \sin^2 \theta \right] + \partial_\theta (-\cos \theta \sin \theta) + \left(\frac{a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \\
&+ \left(\frac{a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \sin^2 \theta * \frac{kr^2 R_0^2}{(1 - kr^2/R_0^2)} \right] + \left[- \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \sin^2 \theta \right] \\
&\quad - \left[\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right) \right] - \frac{1}{r} \left[-r \left(1 - \frac{kr^2}{R_0^2} \right) \sin^2 \theta \right] + \cos \theta \\
&= \frac{\dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta}{c^2} + \frac{\ddot{a} a r \sin^2 \theta}{c^2} - \sin^2 \theta + \frac{kr^2 \sin^2 \theta}{R_0^2} + \frac{2kr^2 \sin^2 \theta}{R_0^2} + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&\quad - kr^2 R_0^2 \sin^2 \theta + \frac{\dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \\
R_{33} &= r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a} a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) \tag{A.59}
\end{aligned}$$

Vamos calcular o escalar de Ricci, que por definição é a soma de cada termo do Tensor de Ricci multiplicado pelo tensor métrico em cada coordenada:

$$\begin{aligned}
R &= R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_{00} g^{00} + R_{11} g^{11} + R_{22} g^{22} + R_{33} g^{33} \tag{A.60} \\
&= -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) \frac{1}{c^2} + \left[\frac{1}{1 - kr^2/R_0^2} \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a} a}{c^2} + 2kR_0^2 \right) \left(-\frac{1 - kr^2/R_0^2}{a^2} \right) \right] \\
&\quad + \left[r^2 \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a} a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) \left(-\frac{1}{a^2 r^2} \right) \right] \\
&\quad + \left[r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a} a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) \left(-\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) \right] \\
&= -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \frac{2kR_0^2}{a^2} - \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{3k}{R_0^2 a^2} + \frac{kR_0^2}{a^2} - \frac{2}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) \\
&\quad - \frac{3k}{R_0^2 a^2} + \frac{kR_0^2}{a^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \frac{6}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) - \frac{6k}{R_0^2 a^2} \\
R &= -6 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) \tag{A.61}
\end{aligned}$$

Falta calcularmos o Tensor Energia-Momento $T_{\mu\nu}$. Esse tensor fornece o fluxo de energia e momento por uma hiper superfície que engloba as fontes de campo. Uma vez que o espaço-tempo de Robertson-Walker é governado pelo princípio cosmológico, ao considerarmos um fluido perfeito esse tensor pode ser definido como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (A.62)$$

Onde $U^\mu = (-1,0,0,0)$ é a quadrivelocidade do fluido, ρ é a densidade de energia, p é sua pressão e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. O $T_{\mu\nu}$ quando escrito em sua forma T_ν^μ é uma matriz diagonal:

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho c^2, p, p, p) \quad (A.63)$$

Substituindo os tensores na equação de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (A.64)$$

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} \quad (A.65)$$

$$-\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left[-6 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) \right] = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{3k}{R_0^2 a^2}$$

$$G_{00} = \frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{3k}{R_0^2 a^2} \quad (A.66)$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} \quad (A.67)$$

$$= \frac{2\dot{a}^2}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} + \frac{\ddot{a}a}{c^2(1 - kr^2/R_0^2)} + \frac{2kR_0^2}{(1 - kr^2/R_0^2)}$$

$$- \frac{1}{2} \left[-6 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) \right] \left(-\frac{a^2}{1 - kr^2/R_0^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a}a}{c^2} + 2kR_0^2 \right) \left(\frac{1}{1 - kr^2/R_0^2} \right) + \left(-\frac{3\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3\dot{a}^2}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) \left(\frac{1}{1 - kr^2/R_0^2} \right)$$

$$G_{11} = \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} + 2kR_0^2 \right) \left(\frac{1}{1 - kr^2/R_0^2} \right) \quad (A.68)$$

$$G_{22} = R_{22} - \frac{1}{2} R g_{22} \quad (A.69)$$

$$= \frac{\ddot{a}ar^2}{c^2} + \frac{3kr^2}{R_0^2} + \frac{2\dot{a}^2 r^2}{c^2} - kr^2 R_0^2 - \frac{1}{2} \left[-6 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) \right] (-a^2 r^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a}a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) r^2 + \left(-\frac{3\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3\dot{a}^2}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) r^2 \\
G_{22} &= \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) r^2 \tag{A.70}
\end{aligned}$$

$$G_{33} = R_{33} - \frac{1}{2} R g_{33} \tag{A.71}$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a}a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) - \frac{1}{2} \left[-6 \left(\frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) \right] (-a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \\
&= \left(\frac{2\dot{a}^2}{c^2} + \frac{\ddot{a}a}{c^2} + \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) r^2 + \left(-\frac{3\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3\dot{a}^2}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) r^2 \text{sen}^2 \theta \\
G_{33} &= \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \right) r^2 \text{sen}^2 \theta \tag{A.72}
\end{aligned}$$

Tomemos a componente temporal do tensor de Einstein:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{3k}{R_0^2 a^2} &= \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} \\
\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}
\end{aligned}$$

Conseguimos então obter a **Equação de Friedmann**:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} \tag{A.73}$$

Considerada uma das equações mais importantes da Cosmologia, pois nos informa sobre o tamanho da expansão do Universo devido ao modelo que utilizamos. Feito isso, faremos o mesmo processo para as componentes espaciais. Entretanto, teremos que reescrever cada componente de maneira que fiquem iguais, para tanto:

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} = -\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} + 2kR_0^2 \tag{A.74}$$

$$\frac{G_{22}}{g_{22}} = -\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \tag{A.75}$$

$$\frac{G_{33}}{g_{33}} = -\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} - kR_0^2 \tag{A.76}$$

Somando as componentes espaciais a fim de encontrar uma única expressão temos que:

$$\frac{G_{11}}{g_{11}} + \frac{G_{22}}{\tilde{g}_{22}} + \frac{G_{33}}{\tilde{g}_{33}} = 3 \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) \quad (\text{A.78})$$

Igualando com a soma do lado esquerdo da equação de Einstein temos que:

$$3 \left(-\frac{\dot{a}^2}{c^2} - \frac{2\ddot{a}a}{c^2} - \frac{3k}{R_0^2} \right) = -3 \frac{8\pi G}{c^4} P \quad (\text{A.79})$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{a^2 R_0^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} P \quad (\text{A.80})$$

Combinando (A.80) com (A.73), de modo a fazer uma expressão menos a outra temos que, para o lado esquerdo:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{a^2 R_0^2} - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{R_0^2 a^2} \right) = \frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} \quad (\text{A.81})$$

Para o lado direito:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} P - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(\frac{P}{c^2} + \frac{\rho}{3} \right) = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(\frac{3P + \rho c^2}{3c^2} \right) \quad (\text{A.82})$$

Unindo os dois resultados, temos que:

$$\frac{2\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\frac{3P + \rho c^2}{3c^2} \right) \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left(\frac{3P + \rho c^2}{c^2} \right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{c^2} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left(\frac{3P + \varepsilon}{c^2} \right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} (3P + \varepsilon)$$

Encontramos então a **Equação da Aceleração**:

$$\frac{\ddot{a}}{a^2} = \frac{4\pi G}{3} \left(\frac{3P}{c^2} + \rho \right) \quad (\text{A.84})$$

Para completar a equação de Friedmann precisamos de uma equação que mostre a evolução temporal da densidade ρ dos constituintes do universo. Vamos obtê-la, multiplicando a equação de Friedmann por a^3 e a com relação ao tempo:

$$a^3 \times \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{R_0^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho \times a^3 \rightarrow \dot{a}^2 a \frac{1}{c^2} + \frac{ka}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3 \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{d \left(\dot{a}^2 a \frac{1}{c^2} + \frac{ka}{R_0^2} \right)}{dt} = \frac{d \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3 \right)}{dt} \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{1}{c^2} (2\dot{a}\ddot{a}a + \dot{a}^3) + \frac{k\dot{a}}{R_0^2} = \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3 \right) \quad (\text{A.87})$$

Agora, consideremos a equação espacial e a multipliquemos por $\dot{a}a^2$:

$$\dot{a}a^2 \times \frac{\dot{a}^2}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{2\ddot{a}}{a^2} \frac{1}{c^2} + \frac{k}{a^2 R_0^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} P \times \dot{a}a^2 \quad (\text{A.88})$$

$$a^3 \frac{\dot{a}^3}{c^2} + 2\ddot{a}\dot{a} \frac{1}{c^2} + \frac{k\dot{a}}{R_0^2} = \left(-\frac{8\pi G}{c^4} P\right) \dot{a}a^2 \quad (\text{A.89})$$

A partir disso podemos comparar os lados direitos das equações:

$$\left(\frac{8\pi G}{3c^2} \rho a^3\right) = \left(-\frac{8\pi G}{c^4} P\right) \dot{a}a^2 \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{(\rho \dot{a}^3)}{3} = \frac{-\dot{a}a^2 P}{c^2} \rightarrow c^2(\rho \dot{a}^3) = -3\dot{a}a^2 P \quad (\text{A.91})$$

$$c^2(\rho \dot{a}^3) = -P(\dot{a}^3) \quad (\text{A.92})$$

Substituindo a equação:

$$(c^2 \rho \dot{a}^3) = -P(\dot{a}^3) \rightarrow (\varepsilon \dot{a}^3) = -w\varepsilon(\dot{a}^3) \quad (\text{A.93})$$

$$(\varepsilon \dot{a}^3) + w\varepsilon(\dot{a}^3) = 0 \rightarrow \frac{d\varepsilon a^3}{dt} + w\varepsilon \frac{da^3}{dt} = 0 \quad (\text{A.94})$$

$$\dot{\varepsilon}a^3 + \dot{a}^3\varepsilon + w\varepsilon\dot{a}^3 = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon}a^3 + \dot{a}^3\varepsilon(1+w) = 0 \quad (\text{A.95})$$

$$\dot{\varepsilon}a^3 = -\dot{a}^3\varepsilon(1+w) \rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{\dot{a}^3}{a^3}(1+w) \rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{3\dot{a}a^2}{a^3}(1+w) \quad (\text{A.96})$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -\frac{3\dot{a}}{a}(1+w) \rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(1+w) = 0 \quad (\text{A.97})$$

Consideremos $w = P/\varepsilon$

$$\dot{\varepsilon} + 3\varepsilon \left(1 + \frac{P}{\varepsilon}\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \rightarrow \dot{\varepsilon} + 3\varepsilon \left(\frac{\varepsilon + P}{\varepsilon}\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (\text{A.98})$$

Assim a equação do fluido perfeito é:

$$\dot{\varepsilon} + 3(\varepsilon + P) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (\text{A.99})$$