



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

**Modelo clássico para explicação de fenômenos
relacionados a supercondutores**

Acadêmico: Luiz Matheus Dourado Sanches

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

Maringá, 28 de abril de 2022



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

Modelo clássico para fenômenos relacionados a supercondutores

TCC apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Daniel Gardelli, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmico: Luiz Matheus Dourado Sanches

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

Maringá, 28 de abril de 2022

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos ao prof. Dr. Daniel Gardelli pela orientação e por me apresentar uma maneira diferente de ver o mundo, me ensinando a ser muito mais crítico em relação à ciência.

Agradeço também, por todo apoio, incentivo e debates físicos, meus amigos Hygor, Alexandre, Ana, Hugo, Henrique, Nathan, Thais, Victoria.

Por, além de ter me dado muito suporte, ter me ajudado a organizar e expressar minhas ideias com maior formalidade ao escrever o trabalho, agradeço minha namorada Isadora.

Para encerrar, agradeço profundamente meus pais, Rosane e Luiz Carlos por tudo o que fizeram e estão fazendo por mim.

Resumo

Neste trabalho apresentamos dois tipos de eletrodinâmicas muito utilizadas para a explicação de fenômenos físicos e que divergem em seus resultados, a eletrodinâmica de Weber e o eletromagnetismo de Maxwell. Exibiu-se as explicações cuja literatura padrão apresenta os efeitos exclusivos de materiais supercondutores (modelo feito pelos irmãos London), que consiste em adicionar mais duas equações ao conjunto de equações conhecidas como equações de Maxwell e em seguida mostrou-se que com a eletrodinâmica de Weber, sem adicionar nada à teoria, conseguimos explicar com enorme satisfação os efeitos exclusivos de materiais supercondutores como o momento London e o efeito Meissner, chegando exatamente na equação que rege os efeitos cujo valores já foram verificados experimentalmente varias vezes, além de apresentar uma boa justificativa para a existência da profundidade de penetração London. Ao final do trabalho discutiu-se a importância e credibilidade de termos essa explicação clássica para o estado supercondutor da matéria e propôs-se, sem uma análise matemática apurada, o debate sobre a existência de um campo elétrico adicional, gerado pelo movimento das cargas no supercondutor, para um próximo trabalho.

Palavras chaves: Supercondutores, Efeito Meissner, Momento London, Eletrodinâmica de Weber, Eletromagnetismo, Equações de London

Sumário

Introdução	1
1 – Eletromagnetismo de Maxwell.....	2
2 – Força de Weber.....	4
3- Momento London	6
3.1- Dedução clássica para o momento London.....	6
3.2- Dedução do efeito London a partir da força de Weber	9
3.2.1- Casca cilíndrica rotacionando.....	9
4 – Efeito Meissner.....	15
4.1- Efeito Meissner pelos irmãos London	15
4.2- Deduzindo efeito Meissner a partir da força de Weber	18
4.2.1 – Duas cascas cilíndricas	18
4.2.2- Um modelo mais realístico	21
5- Profundidade de penetração de London	24
5.1- Explicando a penetração London a partir da força de Weber	24
6 – Considerações Finais	32
7-Referências.....	34

Introdução

A primeira vez na qual se reconheceu o efeito de supercondutividade foi no ano de 1911, em Leiden, H. Kammerlingh Onnes observou que ao esfriar uma amostra de mercúrio a 4,2 K, a resistência do material decrescia muito, tendendo a zero. Após isso várias ligas e materiais foram sendo descobertas como supercondutores por apresentar essa característica de resistência praticamente nula à determinada temperatura.

Considerando o efeito descrito acima pelas equações de Maxwell, tirava-se que a variação do campo magnético dentro do supercondutor deveria ser nula, o que implicaria que se já existisse campo magnético dentro do material, ao ser resfriado ao estado supercondutor, o material “petrificaria” esse campo dentro de si. Essa tese acabou por ser desmentida em 1933 quando W. Meissner e R. Ochsenfeld testaram isso experimentalmente e constataram que na verdade, independente da maneira de como o material for resfriado, a indução magnética dentro do supercondutor é nula, comportamento nomeado como efeito Meissner, que é uma característica fundamental para determinar o estado supercondutor de um material, ou seja, para uma explicação para a supercondutividade ser satisfatória, ela deve explicar este efeito de maneira natural.[13]

Muitas teorias foram criadas a fim de explicar o efeito Meissner, nos campos da termodinâmica, eletromagnetismo e mecânica quântica. Um modelo fenomenológico que foi bastante importante foi o modelo de London que adicionou mais duas equações ao conjunto de equações de Maxwell, com a finalidade de explicar o efeito Meissner. A teoria que é mais bem aceita hoje, mesmo apresentando algumas inconsistências e não conseguindo explicar muitas outras coisas sobre o estado supercondutor [9], é a teoria BCS que usa a mecânica quântica para explicar o efeito Meissner, as propriedades termodinâmicas e eletromagnéticas dos supercondutores.

Muitas bibliografias, assim como a referência [13], trazem a premissa: “a supercondutividade é essencialmente quanto-mecânica e não tem interpretação clássica simples”. Neste trabalho vamos expor a inconsistência desse argumento

e demonstrar que classicamente, temos uma interpretação, tanto do efeito Meissner quanto do momento London, e ainda apresentar o cálculo da profundidade de penetração London, utilizando apenas a eletrodinâmica de Weber e a segunda lei do movimento de Newton.

Nos dois primeiros capítulos, são apresentadas teorias eletrodinâmicas divergem tanto em suas filosofias quanto nos resultados matemáticos, porém ambas são utilizadas para a explicação dos fenômenos eletromagnéticos.

Logo depois, vamos apresentar fenômenos devido a propriedade do estado supercondutor da matéria (como momento London e efeito Meissner), e em seguida demonstrar que, utilizando a eletrodinâmica de Weber eles são naturalmente esclarecidos, diferentemente do caso quando utilizamos o eletromagnetismo clássico.

Por fim realizaremos a demonstração da profundidade de penetração London e discutiremos os resultados apresentados nos capítulos anteriores ressaltando a importância da força de Weber.

1 – Eletromagnetismo de Maxwell

Em 1820, com o experimento de Oersted, observou-se a interação de um fio com corrente elétrica e a agulha de uma bússola próxima a ele. A partir daí, diversas teorias foram criadas, algumas (como a de Ampère) defendendo que o magnetismo era um efeito puramente elétrico, outras dizendo o contrário, que o fio, ao ser ligado às extremidades de uma bateria, magnetizava-se, podendo, desta forma, interagir com a agulha magnetizada da bússola.

Maxwell, no entanto, pensava diferente dessas duas vertentes. Ele acreditava que fios com corrente elétrica geram campos magnéticos circulares em torno dessa corrente, e esse campo interagiria com outras correntes e cargas (misturando efeito elétrico e magnético), e em cima disso, criou a teoria do Eletromagnetismo, que basicamente pode ser resumido em quatro equações, conhecidas como Equações de Maxwell, e podem ser escritas na forma diferencial da seguinte forma [2,3]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (1.4)$$

Em que ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo, μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, \vec{E} é o campo elétrico, \vec{B} é o campo magnético e \vec{j} é a densidade de corrente elétrica.

E na forma integral as equações são

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int} \quad (1.5)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.6)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.7)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (1.8)$$

E quando quisermos calcular a força desses campos em uma carga q que tenha velocidade v , usamos a força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.9)$$

Importante lembrar, que embora essa teoria seja consistente em vários casos, em muitos outros ela não obedece a terceira lei de Newton [2,3].

2 – Força de Weber

Criada por Wilhelm Eduard Weber, essa teoria se resume em apenas uma força, de caráter puramente relacional, ou seja, dependente apenas da relação cinemática entre as partículas envolvidas. Sendo essas dependências a distância relativa entre as partículas 1 e 2, a velocidade relativa entre 1 e 2 e a aceleração relativa entre 1 e 2.

Assim ao estabelecer um referencial inercial S com origem O, consideraremos $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$ o vetor posição da partícula de carga q_1 , $\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$ o vetor posição da partícula de carga q_2 . Desta forma, os vetores velocidade e aceleração dessas duas partículas em relação ao referencial S serão: $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$, $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$, $\vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}$, $\vec{a}_2 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$.

A força de Weber é dada por: [2, 3]

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \quad (2.1)$$

Em que r é a distância entre as cargas dada por $r_{12} = r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, q_1 e q_2 são as cargas das partículas 1 e 2, ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo, c é uma constante $c = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}$ que relaciona as unidades eletromagnética e eletrostática da carga (tendo o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo), \dot{r} é a velocidade radial relativa e \ddot{r} é a aceleração relativa

Tanto \dot{r} quanto \ddot{r} podem ser escritos em notação vetorial,

$$\dot{r} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} \quad (2.2)$$

$$\ddot{r} = \frac{[(\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}) - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2] + (\hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12})}{r} \quad (2.3)$$

Sendo ($\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$) o vetor velocidade relativa entre as cargas, ($\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$) o vetor aceleração relativa entre as cargas e ($\hat{r}_{12} = \hat{r}$) o versor que indica a direção do vetor posição relativa ($\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$), podendo ser substituído por:

$$\hat{r} = \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r} . \quad (2.4)$$

Modificando a equação de Weber a partir das considerações acima e das equações 2.2; 2.3 e 2.4 obteremos sua forma com os termos dos vetores posição, velocidade e aceleração relativas entre as cargas q_1 e q_2 : [2, 3]

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right) \right] \quad (2.5)$$

Nota-se que quando não temos velocidade ou aceleração relativa entre as cargas, a força se reduz à força eletrostática de Coulomb.

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2}$$

Em toda extensão desse trabalho, estaremos considerando materiais neutros, então o primeiro representando a parte coulombiana da equação 2.5 será desconsiderado. De acordo com a referência [1] quando formos analisar o momento London, ao ser rotacionado mecanicamente as velocidades relativas do supercondutor em relação ao referencial adotado serão da ordem de metros por segundo, em outras partes do trabalho consideraremos elétrons de condução que vão adquirir velocidades de mesma magnitude, tendo assim $v_1 \ll c$ sendo $v_1 = |\vec{v}_1|$ e $v_2 \ll c$ sendo $v_2 = |\vec{v}_2|$, portanto as componentes dependentes das velocidades na força de Weber serão negligenciadas nos

cálculos por serem muito menores que a velocidade da luz. Então, a única componente da equação 2.2 que iremos considerar será apenas a componente da força de Weber dependente das acelerações \vec{a}_1 e \vec{a}_2 :

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12} \dot{\hat{r}}_{12} \cdot \vec{a}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2 c^2} = \frac{\mu_0 q_1 q_2 \dot{\hat{r}}}{4\pi r} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}) \quad (2.6)$$

Com μ_0 = permeabilidade magnética no vácuo.

3- Momento London

Previsto por Becker, London e outros, Momento London é um fenômeno causado quando rotacionamos um supercondutor. Ao ser rotacionado com velocidade angular (ω) o supercondutor gera um campo magnético no seu interior alinhado com o eixo de rotação e de valor

$$\vec{B} = -\frac{2m_e}{e} \vec{\omega}$$

Sendo m_e a massa do elétron e e a carga do elétron.

3.1- Dedução clássica para o momento London

Caso considerarmos um condutor perfeito, na ausência de campos externos e o colocarmos em rotação no período de t_0 até t_f , o corpo vai atingir uma velocidade angular $\omega(t)$ onde $\omega(t_f) = \omega_f$, seguindo [9,10] consideraremos os elétrons totalmente desprendidos dos íons, assim quando o condutor rodar, apenas a rede positiva terá movimento, sendo assim considerada uma corrente elétrica de cargas positivas e por sua vez gerando um campo magnético, por conta da velocidade angular ir aumentando até atingir um valor final, o campo magnético durante esse intervalo é variável, e de acordo com as equações de Maxwell a variação de um campo magnético gera um campo elétrico, e esse

campo elétrico (E) irá atuar nos elétrons livres, tendo esse uma direção azimutal indicado na figura abaixo.

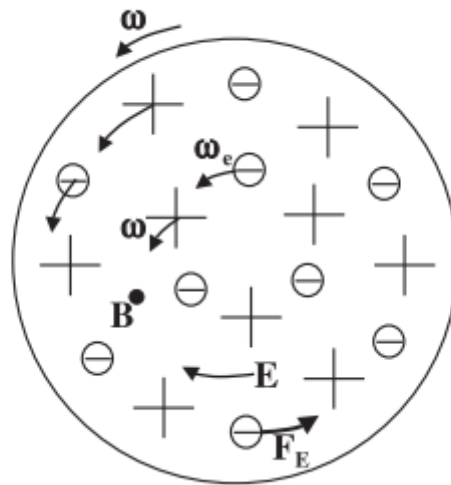


Figura 3.1: Corpo rodando com velocidade angular crescente ω no sentido anti-horário. O movimento das cargas positivas gera um campo magnético \mathbf{B} que aponta para fora da folha, e a variação desse campo \mathbf{B} produz um campo elétrico \mathbf{E} no sentido horário que faz os elétrons no interior do corpo sentirem uma força \mathbf{F}_E no sentido anti-horário. [9]

Segundo a equação (1.9) a força mostrada na figura, será aplicada nos elétrons livres e tem como ser calculada.

$$F_E = m_e \frac{dv}{dt} = e \cdot E \quad (3.1.1)$$

Sendo m_e a massa do elétron, v a velocidade azimutal dos elétrons e e a carga do elétron.

Vamos assumir que devido a forças de contato os elétrons dentro do volume vão se mover com velocidade angular ω_e muito próxima da velocidade da rede positiva $\omega(t)$, ao considerar $\omega_e = \omega(t) = \omega$ em quase todo o corpo a corrente elétrica nessa região vai ser zero, sendo diferente apenas perto da superfície onde estão os elétrons livres.

Sendo r a distância entre o centro do eixo e os elétrons livres e sabendo que $v = \omega \cdot r$, vamos ter que o campo aplicado nesses elétrons é

$$E = \frac{m_e}{e} \dot{\omega} r \quad (3.1.2)$$

Note que r não é derivado no tempo, pois apenas a região positiva perto dos elétrons livres que vai ser considerada como geradora desse campo, pelo motivo citado anteriormente.

Para calcular o campo elétrico a partir da variação de campo magnético que o originou, teremos que usar a equação 1.7, também conhecida como lei de Faraday-Lenz.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dessa força o campo a distância r nos será dado por [9]:

$$E = -\frac{1}{2} r \dot{B} \quad (3.1.3)$$

Comparando 3.1.3 e 3.1.2 vamos ter

$$\dot{B} = -\frac{2m_e}{e} \dot{\omega} \quad (3.1.4)$$

Integrando dos dois lados no intervalo de tempo definido no começo desta sessão teremos

$$B = -\frac{2m_e}{e} \omega_f$$

3.2- Dedução do efeito London a partir da força de Weber

3.2.1- Casca cilíndrica rotacionando

Consideraremos um supercondutor cilíndrico de comprimento infinito com o eixo central ao longo do eixo z com raio R_2 . A fim mostrar claramente quais são as cargas responsáveis por esse efeito e as forças resultantes atuando na carga teste, consideraremos uma única camada monoatômica de material supercondutor.

Como dito no capítulo 2, os materiais considerados serão todos neutro eletricamente, logo, ao considerar que a densidade de carga superficial da rede positiva do supercondutor é $\sigma_{2+} = \sigma_2 > 0$ então a densidade de carga superficial devido aos elétrons livres na superfície da casca é $\sigma_{2-} = -\sigma_2$. Vamos assumir que a rede positiva é a amostra macroscópica do supercondutor, então ao girar o supercondutor com velocidade angular Ω_2 essa será a velocidade angular da rede positiva, ou seja, $\Omega_2 = \Omega_{2+}$. Como num supercondutor a resistência vai a zero, vamos assumir que não há atrito entre os elétrons livres e a rede positiva, considerando esses inicialmente inerciais em relação ao referencial S, se movendo apenas depois, devido a rotação da parte positiva.

Em um intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = t_f$, rotacionamos o supercondutor em torno do eixo z com velocidade angular $\Omega_{2+}(t) = \Omega_{2+} \hat{z}$ até chegar em uma velocidade angular final $\Omega_{2+f} \hat{z}$ que vai se manter constante. A partir disso conseguimos calcular a força, segundo a equação de Weber, que a rede positiva faz nos elétrons livres num tempo t ($0 < t < t_f$) e assim calcular qual a velocidade angular adquirida por eles a partir da segunda lei de Newton.

Vamos considerar um elemento de carga fonte dq_2 da casca cilíndrica com densidade superficial de carga σ_2 e área da_2 . Com a finalidade de facilitar as contas para esse exemplo, utilizaremos coordenadas cilíndricas, ficando:

$$da_2 = R_2 d\varphi_2 dz_2 \quad (3.2.1.1)$$

$$dq_2 = \sigma_2 da_2 = \sigma_2 R_2 d\varphi_2 dz_2 \quad (3.2.1.2)$$

Em que φ é o angulo azimutal.

Com a o supercondutor rotacionando com $\Omega_2(t)\hat{z}$ os vetores posição velocidade e aceleração ganham as seguintes formas:

$$\vec{r}_2 = R_2\hat{\rho}_2 + z_2\hat{z} \quad (3.2.1.3)$$

$$\vec{v}_2 = R_2\Omega_2\hat{\phi}_2 \quad (3.2.1.4)$$

$$\vec{a}_2 = -R_2\Omega_2^2\hat{\rho}_2 + R_2\dot{\Omega}_2\hat{\phi}_2 \quad (3.2.1.5)$$

Em que $\hat{\rho}_2$, $\hat{\phi}_2$ e \hat{z} são os versores das coordenadas cilíndricas na localização de dq_2 e $\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt}$.

Tomaremos um elétron de condução pertencente a casca cilíndrica como carga teste q_1 localizada em $z = 0$, essa carga teste pode ter componentes de aceleração centrípeta e tangencial, porém vamos assumir que devido as forças de contato esse elétron permanece a uma distância $\rho_1 = R_2$, dessa forma $\dot{\rho}_1 = \ddot{\rho}_1 = 0$. Assim temos que ele só vai se movimentar na direção ϕ com velocidade angular $\omega_1(t)$, tendo seus vetores posição, velocidade e aceleração escritos da seguinte forma:

$$\vec{r}_1 = \rho_1\hat{\rho}_1 \quad (3.2.1.6)$$

$$\vec{v}_1 = \rho_1\omega_1\hat{\phi}_1 \quad (3.2.1.7)$$

$$\vec{a}_1 = -\rho_1\omega_1^2\hat{\rho}_1 + \rho_1\dot{\omega}_1\hat{\phi}_1 \quad (3.2.1.8)$$

Em que $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$

A situação acima é descrita pela figura (3.2.1.1)

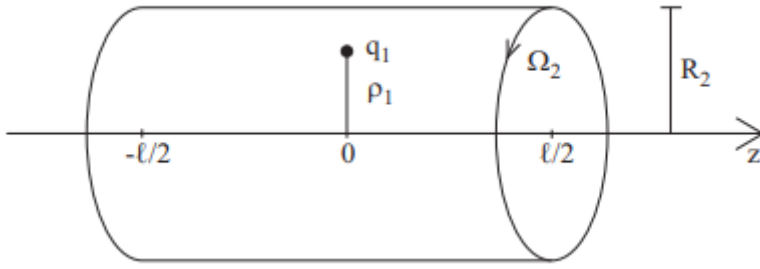


Figura 3.2.1: Partícula com carga q_1 a uma distância ρ_1 do eixo da casca cilíndrica de comprimento l e de raio R_2 rotacionando com velocidade angular $\Omega_2(t)$ em torno do eixo z .

Podemos calcular a força que dq_2 faz em q_1 a partir da equação 2.6. e ao integrar ao longo do eixo z e com o ângulo azimutal indo de 0 a 2π , teremos a força total que a casca cilíndrica faz na carga teste:

$$\vec{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 q_1 dq_2}{4\pi r} \hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \quad (3.2.1.9)$$

O cálculo para essa força já foi com $\rho_1 = R_2$ e $\dot{\Omega}_2 = 0$ já foi feito em [5], nos dando os seguintes resultados

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 q_1 \sigma_2 R_2 (\dot{\Omega}_2 - \dot{\omega}_1) \rho_1 \hat{\phi}_1}{2}, \text{ se } \rho_1 < R_2 \quad (3.2.1.10)$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 q_1 \sigma_2 R_2 (\dot{\Omega}_2 - \dot{\omega}_1) R_2 \hat{\phi}_1}{2}, \text{ se } \rho_1 = R_2 \quad (3.2.1.11)$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 q_1 \sigma_2 R_2 (\dot{\Omega}_2 - \dot{\omega}_1) R_2^2 \hat{\phi}_1}{2\rho_1}, \text{ se } \rho_1 > R_2 \quad (3.2.1.12)$$

Agora caso aplicamos a segunda lei de Newton, assumindo que o elétron só vai se mover na direção azimutal, como dito anteriormente, Teremos:

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 = m R_2 \dot{\omega}_1 \hat{\phi}_1 \quad (3.2.1.13)$$

Sendo \vec{F} a força resultante no elétron em questão, m a massa inercial do elétron que é $9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$.

Vamos fazer o cálculo da força para duas configurações que estão realizando força na carga teste e ao somar essas duas forças, igualaremos o resultado com a equação (3.2.1.11) a fim de achar a velocidade angular ω_1 que o elétron adquire. A primeira configuração é a rede positiva girando em torno do eixo z com velocidade angular $\Omega_{2+}(t)$ e a outra configuração é a rede de elétrons de condução que giram junto com a carga teste com velocidade angular igual a $\omega_{1-}(t)$. Chamaremos essas forças atuantes em $q_1 = -e < 0$ de $\vec{F}_{2+,-e}$ e $\vec{F}_{2-,-e}$.

As duas forças podem ser calculadas a partir do resultado (3.2.1.11), mas como na segunda configuração a rede de elétrons de condução se movem junto com a partícula teste $\dot{\Omega}_{2-} = \dot{\omega}_{1-}$ logo, $\vec{F}_{2-,-e} = 0$. Sendo assim a força resultante é dada por:

$$\vec{F} = \vec{F}_{2+,-e} + \vec{F}_{2-,-e} = \vec{F}_{2+,-e} + 0 \quad (3.2.1.14)$$

Ao pegar o resultado obtido e (3.2.1.11) utilizar em (3.2.1.13) comparando com (3.2.1.14), vamos obter:

$$mR_2\dot{\omega}_{1-}\hat{\varphi}_1 = -\frac{\mu_0q_1\sigma_2R_2(\dot{\Omega}_{2+}-\dot{\omega}_{1-})R_2\hat{\varphi}_1}{2} \quad (3.2.1.15)$$

Isolando $\dot{\omega}_{1-}$, sabendo que $q_1 = -e = -1.6 \times 10^{-19} C$ e utilizando $|m_{wc}| = \frac{\mu_0e\sigma_2R_2}{2} > 0$ que representa a grandeza da chamada massa eletromagnética Weberiana [5, 6], teremos:

$$\dot{\omega}_{1-} = \frac{|m_{wc}|}{m+|m_{wc}|}\dot{\Omega}_{2+} \quad (3.2.1.16)$$

A equação (3.2.1.16) nos mostra que $\dot{\omega}_{1-}$ é proporcional a $\dot{\Omega}_{2+}$ para qualquer tempo, portanto $\omega_{1-}(t)$ também é proporcional a $\Omega_{2+}(t)$ não importa como esta evolua no tempo, logo se assumirmos que tanto a casca quanto os elétrons estavam com velocidade angular zero no inicio e adquiriram determinada

velocidade angular final $\Omega_{2+}(t_f) = \Omega_{2+f}$ e $\omega_{1-}(t_f) = \omega_{1-f}$, temos que ω_{1-f} é proporcional a Ω_{2+f} , essa proporção sendo representada por:

$$\omega_{1-f} = \frac{|m_{wc}|}{m+|m_{wc}|} \Omega_{2+f} \quad (3.2.1.17)$$

Segundo [1] em qualquer material macroscópico nós temos a massa eletromagnética Weberiana muito maior que a massa inercial do elétron. Se formos considerar uma casca cilíndrica feita de nióbio de raio $R_2 = 0.1 \text{ m}$, $\sigma_2 \approx 2 \text{ C. m}^{-2}$, nos teremos $|m_{wc}| \approx 2 \times 10^{-25} \text{ kg}$ que tem ordem de grandeza 5 casas maior que a massa inercial do elétron, assim a equação (3.2.1.17) pode ser aproximada:

$$\omega_{1-f} \approx \left(1 - \frac{m}{|m_{wc}|}\right) \Omega_{2+f} \quad (3.2.1.18)$$

Disso concluímos que de acordo com a força de Weber, ao girar o supercondutor em determinado sentido as cargas positivas vão arrastar as cargas negativas neste mesmo sentido, porem devido a massa inercial do elétron, ele vai ficar um pouco pra trás da rede positiva. Como mostra a figura 3.2.1.2:

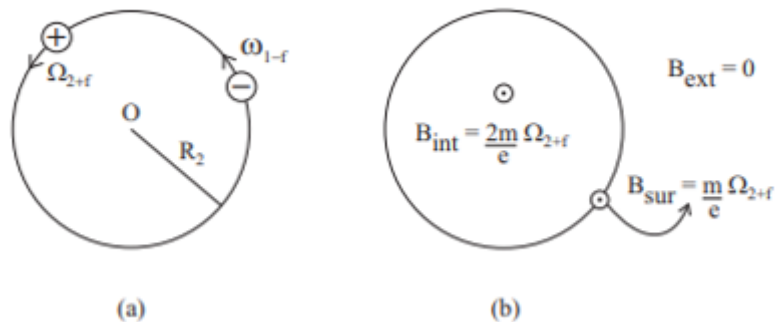


Figura 3.2.2: (a) Cargas positivas e negativas rotacionando em torno do eixo z com velocidades angulares Ω_{2+f} e ω_{1-f} respectivamente. (b) Mostra os campos magnéticos criados nas regiões interna, superficial e externa à casca a partir do movimento das cargas.

O valor do campo magnético a uma distância ρ gerado por um cilindro com velocidade angular constante e maior que zero (assim como no nosso exemplo) é dado por:

$$\vec{B}(\rho < R) = \vec{B}_{int} = \mu_0 R \sigma \Omega \hat{z} \quad (3.2.1.19)$$

$$\vec{B}(\rho = R) = \vec{B}_{sup} = \frac{\mu_0 R \sigma \Omega \hat{z}}{2} \quad (3.2.1.20)$$

$$\vec{B}(\rho > R) = \vec{B}_{ext} = 0 \quad (3.2.1.21)$$

Em que \vec{B}_{int} é o campo magnético interno a casca, \vec{B}_{ext} é o campo magnético externo a casca e \vec{B}_{sup} é o campo magnético na superfície.

Tendo a equação 3.2.1.19 podemos então calcular o campo magnético resultante dentro do cilindro. Relembrando que a casca positiva tem $\sigma = \sigma_{2+} > 0$ e rotaciona com velocidade angular Ω_{2+f} , e a casca negativa formada pelos elétrons livres tem $\sigma_{2-} = -\sigma_{2+}$ e velocidade angular ω_{1-f} .

Utilizando as equações (3.2.1.18), (3.2.1.19) e (3.2.1.20), e somando os resultados dos campos gerados pela casca positiva e negativa, temos: [1]

$$\vec{B}_{int} = \frac{2m}{e} \Omega_{2+f} \hat{z} \quad (3.2.1.22)$$

$$\vec{B}_{sup} = m \frac{\Omega_{2+f} \hat{z}}{e} \quad (3.2.1.23)$$

Isso conclui que o campo dentro de um supercondutor cilíndrico com as características apresentadas no começo dessa sessão, rotacionando com velocidade angular $\vec{\Omega}$ é $\vec{B} = \frac{2m}{e} \vec{\Omega}$, que é exatamente o valor do momento London já verificado muitas vezes [7] que nos fala que o campo magnético interno a um supercondutor em rotação será paralelo a sua velocidade angular.

4 – Efeito Meissner

Em 1933, medindo a distribuição do campo magnético fora de amostras de supercondutores [11], os físicos Walter Meissner e Robert Ochsenfeld observaram que, na presença de um campo magnético externo, o campo magnético dentro do supercondutor tende a zero, ou seja, é como se o supercondutor tentasse expulsar o campo magnético que iria penetrar em seu volume. Essa observação permitiu que olhássemos para os supercondutores não só como condutores perfeitos, mas também como materiais com uma propriedade única que acaba definindo o estado de supercondutor.

4.1- Efeito Meissner pelos irmãos London

O Efeito Meissner recebe uma explicação matemática de Fritz e Heinz London, onde estes mostram que a energia livre em um supercondutor pode ser minimizada desde que [12]:

$$\nabla^2 \vec{B} = \lambda_L^{-2} \vec{B} \quad (4.1.1)$$

Em que \vec{B} é o campo magnético e λ_L é a chamada profundidade de penetração London (coeficiente que será melhor trabalhado na sessão 5 deste trabalho).

Para chegar a essa equação iremos considerar a situação em um condutor perfeito, fazendo essa consideração, temos que os portadores de carga não sofrerão ação de forças retardadoras. Então quando estiverem na presença de um campo elétrico, irão se mover de acordo com a equação:

$$m_q \dot{v} = q\vec{E} \quad (4.1.2)$$

Sendo m_q a massa da carga que estaremos analisando e \dot{v} sua aceleração.

Ao considerar v a velocidade média das cargas, considerando n o número dessas cargas por unidade de volume, a densidade de corrente poderá ser escrita como:

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad (4.1.3)$$

Substituindo 4.1.3 em 4.1.2 teremos:

$$\dot{\vec{j}} = \left(\frac{nq^2}{m_q}\right)\vec{E} \quad (4.1.4)$$

Sendo $\dot{\vec{j}}$ a derivada temporal de \vec{j} . Tomando o rotacional na equação acima, considerando a equação (1.3) e supondo que os campos variem lentamente para $\nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{j}}$, vamos ficar com:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = -\left(\frac{nq^2}{m_q}\right)\dot{\vec{B}} \quad (4.1.5)$$

Em que $\dot{\vec{H}}$ é a derivada temporal de \vec{H} e $\dot{\vec{B}}$ é a derivada temporal de \vec{B} . Supondo $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ e a equação 1.2 vamos ficar com:

$$\nabla^2 \dot{\vec{B}} = \left(\frac{\mu_0 nq^2}{m_q}\right)\dot{\vec{B}} \quad (4.1.6)$$

E ao considerarmos essa equação para um condutor perfeito semi-infinito limitado em z e fazendo as suposições apresentadas na página 316 da ref. [13], teremos como resultado:

$$\dot{\vec{B}}_x = \dot{\vec{B}}_{x0} e^{-\sqrt{\left(\frac{\mu_0 nq^2}{m_q}\right)}z} \quad (4.1.7)$$

Se considerarmos essa equação para efeitos em um átomo, onde a carga seria um elétron e n correspondente a um elétron por átomo, vemos que $\sqrt{\left(\frac{\mu_0 nq^2}{m_q}\right)}$ esse valor é muito pequeno, e é equivalente a uma grandeza de comprimento, sendo da ordem de $10^{-8}m$ para essa situação. Dessa maneira, nosso conjunto de equações nos mostram que a variação do campo magnético no interior do condutor perfeito tende a zero, tendo um pequeno valor próximo a sua superfície, porem esse resultado n explica a exclusão do fluxo, só diria que o campo

magnético ficaria “petrificado” ali dentro. Porém o resultado nos dá uma ideia de como prosseguir, pois, se ao invés de descrever o comportamento de $\dot{\vec{B}}$ a equação descrevesse o comportamento de \vec{B} teríamos que a explicação para o efeito Meissner, pois assim o próprio campo magnético cairia exponencialmente, e não a sua variação em relação ao tempo.

Seguindo o raciocínio acima os irmãos London consideraram que a corrente total poderia ser dividida em 3 tipos diferentes [12;13], uma supercorrente $\vec{J}_S = \vec{J}_s$, uma corrente dissipativa \vec{J}_{diss} e uma corrente de deslocamento \vec{J}_{desl} . Seguindo os passos feitos na página 317 da ref. [13] vemos que para frequências menores que 10^{11} Hz as correntes \vec{J}_{diss} e \vec{J}_{desl} serão desprezíveis quando comparadas com a \vec{J}_s . Assim ao usar a equação 1.4, teremos:

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad (4.1.8)$$

Para conseguir uma equação que segue o raciocínio que achamos para $\dot{\vec{B}}$, porém agora para \vec{B} , London postulou:

$$\mu_0 \nabla \times \vec{J}_s = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \quad (4.1.9)$$

Sendo λ um coeficiente específico do supercondutor.

De maneira parecida ao que fizemos no passo da equação 4.1.5 para a equação 4.1.6, se combinarmos as equações 4.1.8 e 4.1.9 teremos como resultado:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

Que é a equação (4.1.1) citada no começo dessa sessão.

E da mesma forma que [13] resolveu a equação 4.1.6, é possível resolver a equação 4.1.1 tendo como resultado um campo magnético que cai exponencialmente em função da distância, penetrando até uma distância próxima a λ , que é a profundidade de penetração London.

$$B_x(z) = B_{x0} e^{-\frac{z}{\lambda}}$$

Resultado que condiz com o efeito Meissner, porem sendo necessário a postulação da equação 4.1.9.

4.2- Deduzindo efeito Meissner a partir da força de Weber

4.2.1 – Duas cascas cilíndricas

Primeiramente vamos considerar uma situação mais simples onde teremos duas cascas com apenas uma camada monoatômica concêntricas ao longo do eixo z, de comprimento infinito e raios R_1 e R_2 com $R_1 < R_2$. O cilindro de raio maior é um condutor normal de densidade de carga superficial $\sigma_{2+} = \sigma_2 > 0$ para a rede positiva e $\sigma_{2-} = -\sigma_2$ para a rede negativa de elétrons na superfície, ou seja, ele é neutro. A casca interior é um supercondutor também neutro de densidade superficial de carga positiva $\sigma_{1+} = \sigma_1 > 0$, e para a rede de elétrons livres $\sigma_{1-} = -\sigma_1$. Vamos considerar que inicialmente todas as cargas estão paradas em relação ao um referencial S adotado.

Nessa sessão estaremos interessados em calcular a força que uma corrente azimutal forçada na casca mais externa faria nos elétrons de condução da casca interna e a partir do movimento dos elétrons de condução, calcular o campo magnético total dentro das cascas assumindo que as redes positivas ficarão paradas, assim só os elétrons poderão se movimentar.

Consideramos então, uma fonte externa acelerando os elétrons da casca de raio R_2 , durante um intervalo de 0 segundos até t_f , se movendo em torno do eixo z com velocidade angular $\Omega_{2-}(t) = \Omega_{2-}(t)\hat{z}$, assim que chegar no tempo t_f a velocidade angular se mantem constante e igual a $\Omega_{2-f}\hat{z}$.

Para o cálculo das forças atuantes nessa situação desconsideraremos os termos Coulombiana e os termos dependente da velocidade relativa, por motivos

já discutidos na sessão 2 deste trabalho, nos sendo útil o cálculo a partir da equação 2.6.

Escolheremos como carga teste um elétron de condução de carga $q_1 = -e < 0$ e massa $m_1 = m > 0$ na superfície do supercondutor e em $z=0$ ou seja, sua localização será $(\rho_1, \varphi_1, z_1) = (R_1, \varphi_1, 0)$. No intervalo em que os elétrons no condutor normal estiverem sendo acelerada os elétrons do supercondutor também vão adquirir velocidade angular $\omega_{1-}(t)$, que calcularemos de maneira similar ao que fizemos na sessão 3.2.1. Para isso consideraremos quatro sistemas que poderão realizar força na carga teste, 1º) a parte positiva da casca de raio maior que não tem velocidade angular em relação ao referencial S, ou seja $\Omega_{2+} = 0$. 2º) a rede de elétrons que estão sendo acelerados pela fonte externa, com velocidade angular $\Omega_{2-}(t) = \Omega_{2-}(t)\hat{z}$. 3º) a rede positiva do supercondutor que já assumimos que ficara estacionaria durante todo o movimento portanto $\Omega_{1+} = 0$. 4º) o resto dos elétrons de condução da casca supercondutora, que terá $\omega_{1-}(t)$ como velocidade angular assim como nossa carga teste. Assim as forças calculadas para a primeira até o quarto sistema serão representadas respectivamente por: $\vec{F}_{2+,-e}, \vec{F}_{2-,-e}, \vec{F}_{1+,-e}, \vec{F}_{1-,-e}$.

Desta maneira utilizando as equações (3.2.1.10), (3.2.1.11) e (3.2.1.12), junto com a segunda lei de Newton, assumindo que devido as forças de contato nenhum elétron de condução sairá da distância $\rho_1 = R_2$, dessa forma $\dot{\rho}_1 = \ddot{\rho}_1 = 0$. Assim como foi feito para o momento London, calcularemos a força resultante na carga teste.

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 = m R_1 \dot{\omega}_{1-} \hat{\varphi}_1 = \vec{F}_{2+,-e} + \vec{F}_{2-,-e} + \vec{F}_{1+,-e} + \vec{F}_{1-,-e} \quad (4.2.1.1)$$

$$m \rho_1 \dot{\omega}_{1-} \hat{\varphi}_1 = -\frac{\mu_0}{2} q_1 \rho_1 [\sigma_2 R_2 (0 - \dot{\omega}_{1-}) - \sigma_2 R_2 (\dot{\Omega}_{2-} - \dot{\omega}_{1-}) + \sigma_1 \rho_1 (0 - \dot{\omega}_{1-}) - 0] \hat{\varphi}_1$$

$$(4.2.1.2)$$

Isolando $\dot{\omega}_{1-}$, tomando $\rho_1 = R_1$ utilizando os mesmos valores para a massa e carga do elétron utilizados na sessão 3.2.1. e $|m_{wc}| = \frac{\mu_0 e \sigma_1 R_1}{2} > 0$, sendo a massa eletromagnética Weberiana. Teremos:

$$\dot{\omega}_{1-} = -\frac{\sigma_2 R_2}{\sigma_1 R_1} \frac{\dot{\Omega}_{2-}}{1+m/|m_{wc}|} \quad (4.2.1.3)$$

Integrando essa última equação a fim de calcular $\omega_{1-}(t_f) = \omega_{1-f}$, chegamos em:

$$\omega_{1-f} \approx -\frac{\sigma_2 R_2}{\sigma_1 R_1} \left(1 - \frac{m}{|m_{wc}|}\right) \Omega_{2-f} \quad (4.2.1.4)$$

Em que $\frac{m}{|m_{wc}|} \ll 1$. Essa equação nos permite dizer que se $\sigma_2 = \sigma_1$ então a ω_{1-f} vai ser maior que Ω_{2-f} e com sentido contrario a Ω_{2-f} . Assim como mostra a figura 4.2.1.1

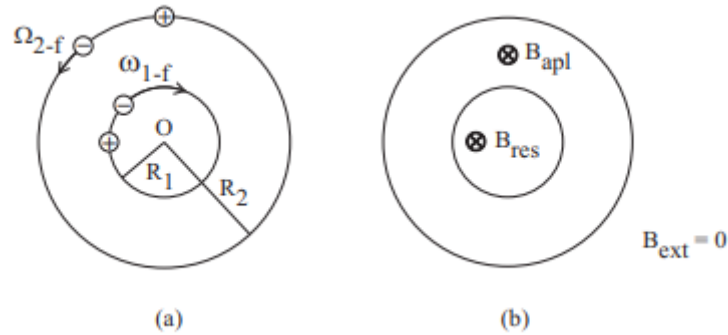


Figura 4.1: (a) cargas na casca externa acelerando tangencialmente até atingir uma velocidade angular igual Ω_{2-f} induzindo movimento nos elétrons do supercondutor que irão adquirir velocidade angular ω_{1-f} . (b) Campo magnético produzido pelo movimento dessas cargas.

Utilizando as equações (3.2.1.19), (3.2.1.20) e (3.2.1.21) e somando o vetor campo magnético resultante do movimento dos elétrons com velocidade angular Ω_{2-f} com o dos elétrons de velocidade angular ω_{1-f} vamos obter os seguintes valores [1]:

$$\vec{B}(\rho < R_1) = \vec{B}_{res} = \frac{m}{|m_{wc}|} \vec{B}_{apl} \quad (4.2.1.5)$$

$$\vec{B}(R_1 < \rho < R_2) = \vec{B}_{apl} = -\mu_0 R_2 \sigma_2 \Omega_{2-f} \hat{z} \quad (4.2.1.6)$$

$$\vec{B}(\rho > R_2) = \vec{B}_{ext} = 0 \quad (4.2.1.7)$$

Sendo \vec{B}_{apl} o campo magnético criado pela casca externa, \vec{B}_{res} o campo magnético resultante da soma dos dois campos (criados pelos elétrons do condutor e do supercondutor) e \vec{B}_{ext} o campo externo aos cilindros.

Percebemos por meio dessas contas que o campo magnético no interior de uma única camada cilíndrica monoatômica não será zero, mas a ordem de grandeza do campo “residual” vai ser muito menor do que a aplicada pela casca condutora. Se formos considerar uma casca cilíndrica feita de nióbio de raio $R_2 = 0.1 \text{ m}$, $\sigma_2 \approx 2 \text{ C.m}^{-2}$, nós teremos $|m_{wc}| \approx 2 \times 10^{-25} \text{ kg}$ e o modulo da razão entre os campos \vec{B}_{res} e \vec{B}_{apl} será aproximadamente $4.5 \times 10^{-6} \ll 1$. E essa ordem de grandeza é compatível com o efeito Meissner.

4.2.2- Um modelo mais realístico

Vamos considerar a configuração da figura 4.2.1.1, e vamos substituir o supercondutor original por três cascas cilíndricas infinitas e concêntricas de supercondutores, cada supercondutor tendo uma camada monoatômica de raios $R_{1a} < R_{1b} < R_{1c}$, centrados no eixo z. Essas cascas cilíndricas são rodeadas por uma casca resistiva de raio $R_2 > R_{1c}$. Sabendo que as cascas são neutras, chamaremos a densidade de carga superficial de cada uma será $\sigma_{1+a} > 0$ com $\sigma_{1-a} = -\sigma_{1+a}$, $\sigma_{1+b} > 0$ com $\sigma_{1-b} = -\sigma_{1+b}$, $\sigma_{1+c} > 0$ com $\sigma_{1-c} = -\sigma_{1+c}$ e $\sigma_{2+} = \sigma_2 > 0$ com $\sigma_{2-} = -\sigma_{2+}$.

Da mesma maneira que fizemos na sessão 4.2.1 faremos aqui, todas as partes positivas das cascas permanecerão inertes para o referencial S durante todo o experimento enquanto os elétrons da casca de raio R_2 serão acelerados por uma fonte externa adquirindo uma velocidade angular $\vec{\Omega}_{2-}(t) = \Omega_{2-}(t)\hat{z}$, num

intervalo de tempo de $0 < t < t_f$, e após esse intervalo a velocidade angular se antem constante e igual a Ω_{2-f} . Devido ao movimento dos elétrons do condutor, os elétrons livres dos supercondutores poderão adquirir velocidade angular, que será calculada de maneira similar a feita na sessão anterior, sendo essas velocidades ω_{1-a} , ω_{1-b} , ω_{1-c} .

Considerando nossa partícula teste um elétron de condução da casca 1b, de carga $q_1 = -e < 0$. Vão ter oito sistemas que poderão interagir com a carga teste, todas as redes (positivas e negativas) das cascas 1a, 1b, 1c e 2.

Para calcular a força total e depois achar as velocidades angulares utilizaremos as equações (3.2.1.10), (3.2.1.11) e (3.2.1.12), combinadas com a segunda lei de Newton, considerando apenas a componente azimutal, já que sempre assumimos que devido as forças de contato nenhum elétron de condução sairá da distância $\rho_1 = R_2$, dessa forma $\dot{\rho}_1 = \ddot{\rho}_1 = 0$. então teremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 e}{2} \left[\sigma_{1+a} \frac{R_{1a}^3}{R_{1b}} (0 - \dot{\omega}_{1-b}) - \sigma_{1+a} \frac{R_{1a}^3}{R_{1b}} (\dot{\omega}_{1-a} - \dot{\omega}_{1-b}) + \sigma_{1+b} R_{1b}^2 (0 - \dot{\omega}_{1-b}) - \right. \\ \left. \sigma_{1+b} R_{1b}^2 (\dot{\omega}_{1-b} - \dot{\omega}_{1-b}) + \sigma_{1+c} R_{1b} R_{1c} (0 - \dot{\omega}_{1-b}) - \sigma_{1+c} R_{1b} R_{1c} (\dot{\omega}_{1-c} - \dot{\omega}_{1-b}) + \right. \\ \left. \sigma_2 R_{1b} R_2 (0 - \dot{\omega}_{1-b}) - \sigma_2 R_{1b} R_2 (\dot{\Omega}_{2-} - \dot{\omega}_{1-b}) \right] = m R_{1b} \dot{\omega}_{1-b} \end{aligned} \quad (4.2.2.1)$$

Fazendo a cálculos parecidos com esse, porém considerando a partícula teste, um elétron de condução da casca 1^a e 1c, nós vamos obter também equações para $\dot{\omega}_{1-a}$ e $\dot{\omega}_{1-c}$. Vemos então que tanto estas duas quanto $\dot{\omega}_{1-b}$ são proporcionais a $\dot{\Omega}_{2-}$. [1] Integrando no intervalo de tempo determinado no começo da sessão obteremos os valores de ω_{1-af} , ω_{1-bf} , ω_{1-cf} , todos aproximados até primeira ordem em $\frac{m}{|m_{wc}|} \ll 1$, assim o valor final calculado para cada velocidade angular foi:

$$\omega_{1-af} = 0 \quad (4.2.2.2)$$

$$\omega_{1-bf} = -\frac{m}{|m_{wc2}|} \frac{\sigma_2}{\sigma_{1+b}} \frac{R_{1c}^2 R_2}{R_{1b}(R_{1c}^2 - R_{1b}^2)} \Omega_{2-f} \quad (4.2.2.3)$$

$$\omega_{1-cf} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_{1+c}} \frac{R_2}{R_{1c}} \left(1 - \frac{m}{|m_{wc1}|} \frac{R_{1c}^2}{(R_{1c}^2 - R_{1b}^2)} \right) \Omega_{2-f} \quad (4.2.2.4)$$

Em que $|m_{wc1}| = \frac{\mu_0 e \sigma_{1+c} R_{1c}}{2} > 0$ e $|m_{wc2}| = \frac{\mu_0 e \sigma_2 R_2}{2} > 0$ são as massas eletromagnéticas Weberianas para os cilindros de raios R_{1c} e R_2 , respectivamente.

Utilizando as equações (3.2.1.19), (3.2.1.20) e (3.2.1.21) e somando o vetor campo magnético resultante do movimento dos elétrons com velocidade angular Ω_{2-f} com o dos elétrons de velocidade angular ω_{1-f} vamos obter os seguintes valores [1]:

$$\vec{B}(\rho < R_1) = \vec{B}_{int} = 0 \quad (4.2.2.4)$$

$$\vec{B}(R_{1b} < \rho < R_{1c}) = \vec{B}_{res} = -\frac{2m\sigma_2 R_{1c} R_2 \Omega_{2-f} \hat{z}}{e\sigma_{1+c}(R_{1c}^2 - R_{1b}^2)} \quad (4.2.2.5)$$

$$\vec{B}(R_{1c} < \rho < R_2) = \vec{B}_{apl} = -\mu_0 R_2 \sigma_2 \Omega_{2-f} \hat{z} \quad (4.2.2.6)$$

Em que \vec{B}_{int} é o campo interno aos cilindros 1a e 1b, \vec{B}_{res} é o campo residual resultante da soma dos campos, sendo muito menor que o campo \vec{B}_{apl} , que é por sua vez, o campo aplicado pelo cilindro de raio R_2

Para melhor visualização temos a figura 4.2.2.1

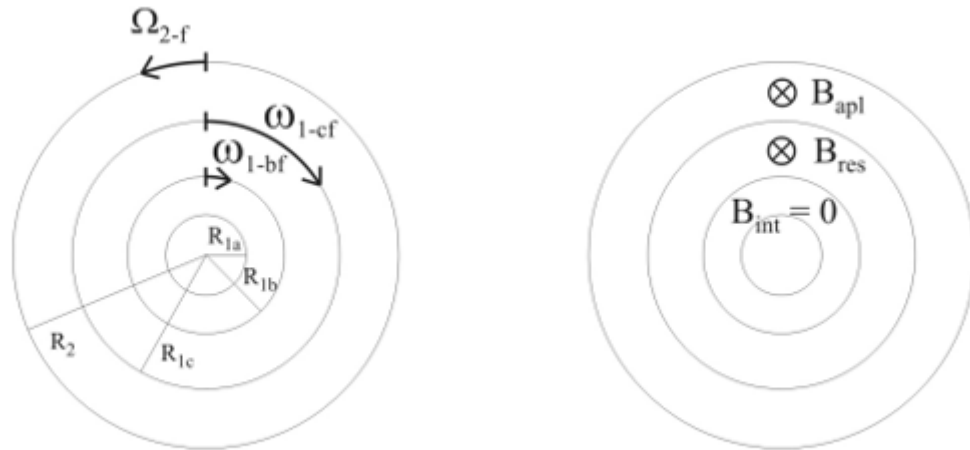


Figura 4.2: (a) representação qualitativa das velocidades angulares dos elétrons em cada casca. (b) Representação dos campos magnéticos em cada região entre as cascas.

5- Profundidade de penetração London

A profundidade de penetração London é a grandeza utilizada para caracterizar o quão fundo um campo magnético consegue penetrar em um supercondutor. A partir dessa distância (λ_L), o campo magnético dentro do supercondutor cai exponencialmente tendendo a zero.

5.1- Explicando a profundidade de penetração London a partir da força de Weber

Considerando o seguinte sistema: Um supercondutor cilíndrico oco com o eixo centrado no eixo z, de comprimento infinito espessura indo de R_i (raio interno) até R_o (raio externo) envolvido por um cilindro de material condutor normal de raio $R_2 > R_o$, também com eixo central no eixo z.

Tomamos então como carga teste um elétron do super condutor com distância ρ do eixo z, sendo ρ uma distância igual ou entre R_i e R_o , os elétrons da casca de raio R_2 serão acelerados por uma fonte externa adquirindo uma

velocidade angular $\vec{\Omega}_{2-}(t) = \Omega_{2-}(t)\hat{z}$, num intervalo de tempo de $0 < t < t_f$, e após esse intervalo a velocidade angular se antem constante e igual a Ω_{2-f} .
 Devido ao movimento dos elétrons do condutor, os elétrons livres do supercondutor poderão adquirir velocidade angular $\omega(\rho, t)$, que será calculada de maneira similar às velocidades anulares já calculadas nas sessões anteriores.

Para melhor visualização do sistema temos a figura 5.1.1

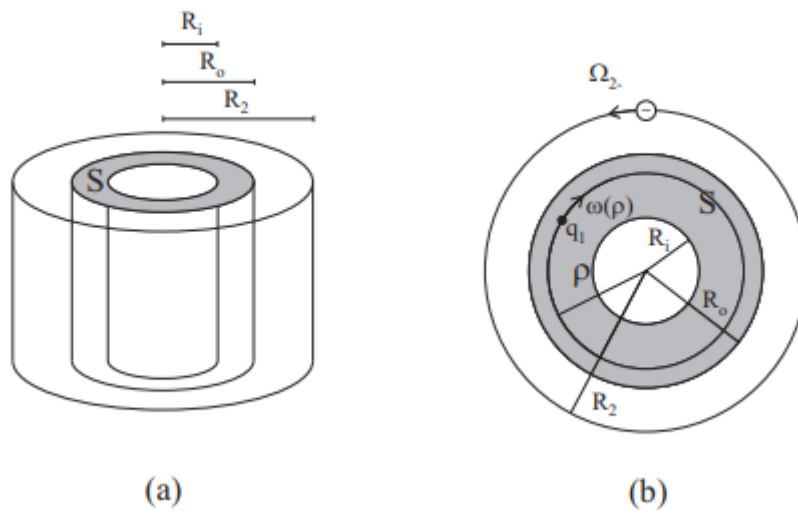


Figura 5.1: Um cilindro supercondutor S de raio interno R_i e raio externo R_o dentro de um cilindro de raio R_2 feito de material resistivo. (b) demonstração do movimento de um elétron de condu o do supercondutor a uma distância ρ do eixo z.

Vamos escolher R' como a variável de integra o da distância, sendo $R_i < R' < R_o$, desta maneira teremos 6 sistemas que poderão exercer força na carga teste. as cargas positivas e negativas do supercondutor na espessura de R_i até ρ , as cargas positivas e negativas no supercondutor de ρ até R_o e as cargas positivas e negativas do cilindro condutor externo.

Considerando todos os materiais neutros, e que as cargas positivas v o permanecer paradas em rela o ao referencial S. Chamaremos a densidade de carga superficial positiva do cilindro condutor de $\sigma_2 > 0$, e a parte negativa $\sigma_{2-} = -\sigma_2$. Já para o supercondutor a densidade de carga volumétrica será representada por $ne > 0$, para a parte positiva e $-ne$ para os negativos, em que n   um numero real e maior que zero, representando a densidade numérica de elétrons livres.

Vamos agora utilizar as equações (3.2.1.10), (3.2.1.11) e (3.2.1.12) nos 6 sistemas para calcular a força aplicada na carga teste.

Considerando primeiro as cargas da primeira parte, $R_i \leq R' \leq \rho$, como a parte positiva irá permanecer parada, vamos apenas considerar que as cargas positivas irão ter velocidade $\omega(R')$. Utilizando a equação 3.2.1.12 integrando no intervalo citado acima, a resultante da força azimutal produzida pelas cargas positivas e negativas dessa parte do supercondutor será:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\mu_0 e^2 n \hat{\phi}}{2\rho} \int_{R'=R_i}^{\rho} R'^3 [0 - \dot{\omega}(\rho)] dR' - \frac{\mu_0 e^2 n \hat{\phi}}{2\rho} \int_{R'=R_i}^{\rho} R'^3 [\dot{\omega}(R') - \dot{\omega}(\rho)] dR' \\ &= -\frac{\mu_0 e^2 n \hat{\phi}}{2\rho} \int_{R'=R_i}^{\rho} R'^3 \dot{\omega}(R') dR'\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Da mesma forma, porém agora com a equação 3.2.1.10, calcularemos a força das cargas positivas e negativas presentes no intervalo $\rho \leq R' \leq R_0$. O resultado é

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{\mu_0 e^2 n \rho \hat{\phi}}{2} \int_{R'=\rho}^{R_0} R' [0 - \dot{\omega}(\rho)] dR' - \frac{\mu_0 e^2 n \rho \hat{\phi}}{2} \int_{R'=\rho}^{R_0} R' [\dot{\omega}(R') - \dot{\omega}(\rho)] dR' \\ &= -\frac{\mu_0 e^2 n \rho \hat{\phi}}{2} \int_{R'=\rho}^{R_0} R' \dot{\omega}(R') dR'\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

Seguindo o raciocínio, o cálculo para a força realizada pelas cargas do condutor resistivo precisará da equação 3.2.1.10, lembrando que a velocidade angular dos elétrons acelerados pela fonte externa é $\Omega_{2-}(t)\hat{z}$, e que as densidades superficiais de carga da rede negativa e positiva são σ_{2-} e σ_2 . O resultado do cálculo será

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 e \sigma_2 \rho \hat{\phi}}{2} R_2 [0 - \dot{\omega}(\rho)] - \frac{\mu_0 e \sigma_2 \rho \hat{\phi}}{2} R_2 [\dot{\Omega}_{2-}(\rho) - \dot{\omega}(\rho)] = -\frac{\mu_0 e \sigma_2 \rho \hat{\phi}}{2} R_2 \dot{\Omega}_{2-}$$

(5.1.3)

Igualmente trabalhado nas sessões anteriores, estaremos usando a segunda lei de newton para achar a componente azimutal da força

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 = m \rho \dot{\omega}(\rho) \hat{\phi} \quad (5.1.4)$$

Somando todas as forças das redes (positivas e negativas) que atuam no nosso elétron teste e comparando com a segunda lei de newton, teremos:

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_0 e^2 n \hat{\phi}}{2 \rho} \int_{R'=R_i}^{\rho} R'^3 \dot{\omega}(R') dR' - \frac{\mu_0 e^2 n \rho \hat{\phi}}{2} \int_{R'=R_i}^{\rho} R' \dot{\omega}(R') dR' - \frac{\mu_0 e \sigma_2 \rho \hat{\phi}}{2} R_2 \dot{\Omega}_{2-} \\ & = m \rho \dot{\omega}(\rho) \hat{\phi} \end{aligned}$$

(5.1.5)

Para obter o valor de $\dot{\omega}(\rho)$, nós podemos obter uma equação diferencial utilizando [8, p. 44]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{R'=f(\rho)}^{R'=g(\rho)} F(\rho, R') dR' \\ & = \int_{R'=f(\rho)}^{R'=g(\rho)} \frac{\partial F(\rho, R')}{\partial \rho} dR' + \left\{ \frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho} F[\rho, g(\rho)] - \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} F[\rho, f(\rho)] \right\} \end{aligned}$$

(5.1.6)

Agora podemos definir uma grandeza λ_L , que é a chamada profundidade de penetração de London:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}} \quad (5.1.7)$$

Derivando a equação 5.1.5 duas vezes em função de ρ e fazendo o uso da 5.1.6 e da definição da profundidade de penetração London, vamos obter a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\lambda_L^2 \rho \frac{d^2 \dot{\omega}}{d\rho^2} + 3\lambda_L^2 \frac{d\dot{\omega}}{d\rho} - \rho \dot{\omega} = 0 \quad (5.1.8)$$

Chamando $u = \frac{\rho}{\lambda_L}$, e fazendo a mudança de variável $v(u) = u\dot{\omega}$. 5.1.8 pode ser reescrita como

$$u^2 v'' + v' - (u^2 + 1)v = 0 \quad (5.1.9)$$

Em que v' é a derivada primeira em relação a u e v'' é a derivada segunda em relação a u . Percebemos então que a equação 5.1.9 é uma função de Bessel modificada de ordem 1, a solução geral para esse tipo de equação é:[1]

$$v(u) = c_1 I_1(u) + c_2 K_1(u) \quad (5.1.10)$$

Onde $I_1(u)$ é a função de Bessel modificada de ordem 1, $K_1(u)$ é a função de Hankel de ordem 1, e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Devido aos limites estabelecidos nas integrais 5.1.5, precisamos integrar as funções de Bessel e de Hankel de $u = \frac{R_i}{\lambda_L}$ até $u = \frac{R_o}{\lambda_L}$, sabendo que os valores para λ_L são entre 50 e 500 nanômetros sabemos que $u \gg 1$ nos dois casos. Dito isso, conseguimos fazer uma aproximação para as funções de Hankel e Bessel devido seus comportamentos assintóticos.

$$I_\nu(u \gg 1) = \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \quad (5.1.11)$$

$$K_v(u \gg 1) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} e^{-u} \quad (5.1.12)$$

Nos limites adotados acima podemos escrever $\dot{\omega}$ como

$$\dot{\omega} = \frac{v(u)}{u} = \frac{c_1 I_1(u) + c_2 K_1(u)}{u} = \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^u}{u^{3/2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_2 \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} \approx c_3 \frac{e^u}{u^{3/2}} \quad (5.1.13)$$

Definindo $c_3 = \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}}$, apenas quando $u \gg 1$. E aplicando 5.1.13 em 5.1.5, vamos obter o valor para a constante

$$c_3 = -\frac{2|m_{wc2}|}{m} \sqrt{\frac{R_0}{\lambda_L}} e^{-R_0/\lambda_L} \dot{\Omega}_{2-} \quad (5.1.14)$$

Em que $|m_{wc}| = \frac{\mu_0 e \sigma_2 R_2}{2} > 0$ representando a grandeza da chamada massa eletromagnética Weberiana.

Vendo que $\dot{\omega}$ é proporcional a c_3 e que c_3 é proporcional a $\dot{\Omega}_{2-}$ podemos dizer que a velocidade angular $\omega(t)$ vai ser sempre proporcional a $\Omega_{2-}(t)$. Se considerarmos que no tempo $t=0$ todas as cargas estão paradas em relação ao referencial S, e integrar $\dot{\omega}$ de 0 até t_f , vamos achar o valor final de ω e ver como ele depende em função de ρ .

Integrando as funções (5.1.13) e (5.1.14) teremos.

$$\omega_f(\rho) = \frac{e^u}{u^{3/2}} \int_{t=0}^{t_f} c_3 = -\frac{2|m_{wc2}|}{m} \sqrt{\frac{R_0}{\lambda_L}} e^{-R_0/\lambda_L} \frac{e^{\rho/\lambda_L}}{(\rho/\lambda_L)^{3/2}} \Omega_{2-f} \quad (5.1.15)$$

Pela equação (3.2.1.19) sabemos que o campo magnético aplicado pela casca condutora resistiva é.

$$\vec{B}_{apl} = -\mu_0 R_2 \sigma_2 \Omega_{2-f} \hat{z} = \mu_0 \sigma_2 V_{2-d} \hat{z} \quad (5.1.16)$$

Em que V_{2-d} é a velocidade de deriva dos elétrons do cilindro condutor, sendo $V_{2-d} = R_2 \Omega_{2-f}$.

Desta maneira, substituindo os valores para massa Weberiana e organizando os termos, podemos escrever a velocidade angular final dos elétrons na camada mais externa do supercondutor como:

$$\omega_f(R_o) = -\frac{2|m_{wc2}| \lambda_L}{m R_o} \Omega_{2-f} = -\frac{\mu_0 e R_2 \sigma_2 \lambda_L}{m R_o} \Omega_{2-f} = -\frac{e \lambda_L |\vec{B}_{apl}|}{m R_o} \quad (5.1.17)$$

Tendo a equação 5.1.15, podemos calcular o valor da velocidade angular dos elétrons próximos a borda externa do supercondutor, considerando $\rho = R_o - d$ com $0 \leq d \leq R_o$. Assim a equação para essa consideração fica:

$$\omega_f(R_o - d) = \omega_f(R_o) e^{-d/\lambda_L} \quad (5.1.18)$$

Isso mostra que a corrente induzida vai aparecer apenas na superfície externa do supercondutor, caindo seu valor exponencialmente ao ir “entrando” dentro do cilindro.

Calculemos então o campo magnético em função da distância dentro do supercondutor, que será a soma do campo aplicado pelo condutor resistivo (equação 5.1.16) com o campo aplicado pela corrente induzida com velocidade angular demonstrada na equação 5.1.18. Para calcular esse campo faremos uma integral de ρ até R_o , para isso vamos considerar uma casca cilíndrica neutra de espessura dR' e raio indo de $\rho < R' < R_o$, com sua rede de cargas positivas paradas e a rede de cargas negativas com velocidade angular $\omega_f(R')$,

consideraremos também que a densidade superficial de carga desse cilindro será $\sigma = \pm neR'$, + para as cargas positivas e – para as negativas.

Para calcular o campo total, somaremos o campo aplicado pelo condutor, junto com o campo aplicado por esse cilindro de raio R' , utilizando novamente a equação (3.2.1.19). Dessa forma temos:

$$\vec{B}(\rho \leq R_o) = \vec{B}_{apl} - \mu_o ne \hat{z} \int_{R'=\rho}^{R_o} R' \omega_f(R') dR' \quad (5.1.19)$$

Considerando que $\rho \gg \lambda_L$, e integrando a equação acima, sabendo que $\omega_f(R')$ pode ser calculado por (5.1.15), ficamos com:

$$\vec{B}(\rho \leq R_o) = \vec{B}_{apl} \left[1 - e^{-\frac{R_o}{\lambda_L}} \left(e^{\frac{R_o}{\lambda_L}} - e^{\frac{\rho}{\lambda_L}} \sqrt{\frac{R_o}{\rho}} \right) \right] \quad (5.1.20)$$

Por fim, conseguimos calcular o campo magnético próximo à superfície do supercondutor a uma distância $\rho = R_o - d$ com $0 \leq d \leq R_o$, assim como proposto anteriormente. A equação para isto é dada por:

$$\vec{B}(R_o - d) = \vec{B}_{apl} e^{-d/\lambda_L} == -\mu_o R_2 \sigma_2 \Omega_{2-f} e^{-\frac{d}{\lambda_L}} \hat{z} \quad (5.1.21)$$

Essa última equação nos mostra que o campo magnético só vai ser significativo até uma distância λ_L da superfície do supercondutor após ultrapassar essa distância, o valor do campo decai na proporção de $1/e$, então a partir do ponto $d = \lambda_L$, o campo magnético dentro do supercondutor é desprezível, fato que se alia à explicação que demos para o efeito Meissner.

6 – Considerações Finais

Embora muitos materiais trazem que a supercondutividade não possui explicação clássica, esse tipo de interpretação existe caso consideremos a eletrodinâmica de Weber. Mostramos isso nesse trabalho quando chegamos exatamente na mesma equação para o campo magnético atribuído ao momento London, que foi verificado várias vezes experimentalmente. Também quando demonstramos o Efeito Meissner tanto em um modelo mais simples como também em um modelo mais realístico, onde neste conseguimos tirar que o campo no interior é realmente nulo, percebendo que a causa era por causa do campo magnético externo que faz com que o supercondutor gere correntes perpetuas na superfície do supercondutor que por si produzem um campo magnético que acaba cancelando o campo aplicado dentro do supercondutor. E por último atribuindo uma ótima explicação matemática para a profundidade de penetração London.

Todos esses efeitos foram explicados apenas fazendo considerações eletrodinâmicas coerentes, como a resistência do material tender a zero, e sem precisar postular nada como foi feito pelos irmãos London na sessão 4 desse trabalho na equação 4.1.9 quando eles se utilizaram da teoria eletromagnética clássica para seus cálculos.

Uma vantagem em usar a eletrodinâmica de Weber para a análise dos efeitos supercondutores é que, desse modo, a massa dos elétrons livres aparece naturalmente a partir do momento que fazemos a comparação com a segunda lei de Newton. Já nos artigos originais de London e Becker, a massa dessas cargas é introduzida *ad hoc*, ou seja, colocado com o único objetivo de legitimar ou defender uma teoria, sem levar em conta a compreensão lógica ou matemática, tanto na explicação para o momento London como também no efeito Meissner.

Mesmo mostrando as vantagens da eletrodinâmica de Weber, ela não está livre de críticas, porém para sistemas clássicos temos resultados extremamente satisfatórios.

Também vale ressaltar que as equações de London tomam como base o eletromagnetismo de Maxwell que não obedece a ação e reação em vários casos, o que é uma desvantagem teórica, tendo em vista que qualquer interação observada na natureza obedece a esse princípio.

Embora esteja além do escopo deste trabalho, acredito ser importante salientar que, por mais que a teoria London-BCS tenha alcançado sucesso na explicação de vários fenômenos, ela também não é livre de críticas, apresentando inconsistências com a medida do momento London (mostrado no capítulo 4 da ref. [9]) e também não explicando algumas características do momento London (mostrado no capítulo 5 da ref. [9]).

Trago também uma discussão para futuros trabalhos sobre uma das “características inexplicadas do momento London”, acredito que, embora a ref.[9] diga que provavelmente esta previsão esteja incorreta, exista sim um campo elétrico radial que sempre aponta para o eixo do giro (Capítulo 5 da ref. [9]) porém atribuiria a existência desse campo por conta de outro fator, dizendo que ele pode estar relacionado com os campos elétricos achados em [14, 15, 16] onde o campo elétrico adicional devido a uma corrente elétrica segundo a força de Weber, sempre aponta para a corrente independente do sentido que essa corrente está e caso considerarmos a velocidade de deriva do elétron como (7.1), então vemos que esse campo elétrico é também proporcional ao quadrado da velocidade angular das cargas vezes o raio da trajetória, assim como o proposto por [9] em seu capítulo 5 .

$$v_d = \frac{I}{\pi a^2 \cdot e \cdot n} \quad (7.1)$$

Em que e é a carga do elétron, n é o número de elétrons por metro cúbico, a é o raio do fio e I é a corrente elétrica.

Acrescento que esse efeito seria mais visível caso consideremos o modelo para o efeito Meissner, pois assim apenas as cargas negativas do supercondutor estariam em movimento, então o campo elétrico adicional seria devido à apenas um tipo de carga.

Obviamente precisaríamos de uma análise mais profunda tanto física quanto matematicamente para essa última situação para achar uma resposta satisfatória para a questão, porém isto está fora do objetivo deste trabalho, o qual era simplesmente propor uma explicação clássica para alguns fenômenos importantes relacionados aos supercondutores.

7-Referências

- [1] – A. K. T. Assis; M. Tajmar. Superconductivity with Weber’s Electrodynamics: the London Moment and the Meissner Effect. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, Volume 42, número 2, 2017
- [2] – A. K. T. Assis. Curso de Eletrodinâmica de Weber. Campinas: Instituto de Física “GLEB WATAGHIN” - Setor de Publicações, 1992.
- [3] – A. K. T. Assis. Eletrodinâmica de Weber: Teoria, aplicações e exercícios. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.
- [4] –M. Tajmar. Comment on “Nonlinearity of the field induced by a rotating superconducting shell”. *Physical Review B*, 76:186501, 2007. DOI: 10.1103/PhysRevB.76.186501.
- [5] –A. K. T. Assis. Circuit theory in Weber electrodynamics. *European Journal of Physics*, 18:241–246, 1997
- [6] – A. K. T. Assis and J. A. Hernandez. Magnetic energy and effective inertial mass of the conduction electrons in circuit theory. *Electromagnetic Phenomena*, 6:31–35, 2006.
- [7] –A. A. Verheijen et al. Measurement of the London moment in two high-temperature superconductors. *Nature*, 345:418–419, 1990.
- [8] –R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1977.
- [9] –J. E. Hirsch. The London moment: what a rotating superconductor reveals about superconductivity. *Physica Scripta*, 89:015806, 2014. DOI: 10.1088/0031-8949/89/01/015806.

- [10] – Becker, R., Heller, G. & Sauter, F. Über die Stromverteilung in einer supraleitenden Kugel. *Z. Physik* **85**, 772–787 (1933).
<https://doi.org/10.1007/BF01330324>
- [11] - Meissner, W., Ochsenfeld, R. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften* **21**, 787–788 (1933).
<https://doi.org/10.1007/BF01504252>
- [12] - F. London and H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 149:71–88, 1935. DOI: 10.1098/rspa.1935.0048.
- [13] – Livro que o gardelli me emprestou
- [14] - A. K. T. Assis; W. A. Rodrigues Jr.; A. J. Mania. The Electric Field Outside a Stationary Resistive Wire Carrying a Constant Current. *Foundations of Physics*, v. 29, n. 5, 1999.
- [15] - A. K. T. Assis. Can a Steady Current Generate an Electric Field? *Physics Essays*, v. 4, n. 1, 1991.
- [16] - W. F. Edwards; C. S. Kenyon; D. K. Lemon. Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents. *Physical Review D*, v. 14, n. 4, 15 de agosto de 1976.