



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Cálculo da Força do Universo e da Energia de Repouso Relativística com Tópicos Adicionais

Acadêmico: Leonardo Campelo Rodrigues

Orientador: Daniel Gardelli

Maringá, 12 de maio de 2022



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Cálculo da Força do Universo e da Energia de Repouso Relativística com Tópicos Adicionais

TCC apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Daniel Gardelli, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Leonardo Campelo Rodrigues

Orientador: Daniel Gardelli

Maringá, 12 de maio de 2022

Sumário

Resumo	iv
Introdução	1
1 Cálculo da Energia Potencial Gravitacional de Weber	3
1.1 Circunferência/Partícula	3
1.1.1 Comentários iniciais	3
1.1.2 Cálculo de i_1	8
1.1.3 Cálculo de i_2	11
1.1.4 Cálculo de i_3	18
1.1.5 Cálculo de i_4	21
1.1.6 Cálculo de i_5	22
1.1.7 Resultado Final	22
1.2 Casca Esférica/Partícula	23
1.2.1 Preparação	23
1.2.2 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Casca Esférica	28
1.2.3 Cálculo da Partícula no Interior de Uma Casca Esférica	33
1.3 Esfera Maciça/Partícula	35
1.3.1 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante	35
1.3.2 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante	37
1.3.3 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante	39
2 Cálculo da Força Gravitacional de Weber	41
2.1 Circunferência/Partícula	41
2.1.1 Comentários Iniciais	41
2.1.2 Cálculo de I_1	45
2.1.3 Cálculo de I_2	45
2.1.4 Cálculo de I_3	49
2.1.5 Resultado Final	52
2.2 Casca Esférica/Partícula	52
2.2.1 Comentários Iniciais	52
2.2.2 Cálculo da Partícula no Interior de Uma Casca Esférica	54
2.2.3 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Casca Esférica	56
2.3 Esfera Maciça/Partícula	60
2.3.1 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante	60
2.3.2 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante	61
2.3.3 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante	62
2.3.4 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante	64
2.3.5 Cálculo da Partícula no Interior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante	66

3	Dedução da Mecânica Clássica e Energia de Repouso	69
3.1	Modelos Cosmológicos	69
3.1.1	Comentários Iniciais	69
3.1.2	Modelo Cosmológico I	69
3.1.3	Modelo Cosmológico II	70
3.2	Condições Cosmológicas	71
3.2.1	Força Completa Sobre Uma Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça	71
3.2.2	A Primeira Condição Cosmológica	71
3.2.3	A Segunda Condição Cosmológica	73
4	Referenciais Não Inerciais	76
4.1	Tratamento Clássico	76
4.2	Tratamento Relacional	77
5	Análise de Artigos	82
5.1	Análise do Artigo Sobre a Curvatura da Luz	82
5.2	Análise do Artigo das Interações Tipo Weberianas	83
6	Tópicos Adicionais	84
6.1	A Constante da Gravitação de Newton	84
6.2	A Constante de Hubble	85
6.3	A Variação da Constante de Hubble e a Idade do Universo	85
6.4	Variação das Grandezas Cosmológicas	87
6.5	Viagem Interestelar	89
	Conclusão	90
A	Soluções dos P_j	92
A.1	O cálculo de $[s^j]_S$ dentro e fora da casca	97
A.2	Cálculo dos P_j	98
A.2.1	Cálculo de P_1 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	98
A.2.2	Cálculo de P_2 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	98
A.2.3	Cálculo de P_3 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	99
A.2.4	Cálculo de P_4 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	99
A.2.5	Cálculo de P_5 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	100
A.2.6	Cálculo de P_6 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	100
A.2.7	Cálculo de P_7 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	101
A.2.8	Cálculo de P_8 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	101
A.2.9	Cálculo de P_9 no Interior e no Exterior da Casca Esférica	102
A.2.10	Cálculo de P_{10} no Interior e no Exterior da Casca Esférica	102
A.2.11	Cálculo de P_{11} no Interior e no Exterior da Casca Esférica	102
A.2.12	Cálculo de P_{12} no Interior e no Exterior da Casca Esférica	103
A.3	Todos termos expostos em uma lista	103
B	Velocidade Radial Relativa e Aceleração Radial Relativa	105
B.1	Determinação de \dot{r}_{12}	105
B.2	Determinação de \ddot{r}_{12}	106

C	Cálculo dos F_j	107
C.1	Cálculo de F_1	107
C.2	Cálculo de F_2	107
C.3	Cálculo de F_3	108
C.4	Cálculo de F_4	109
C.5	Cálculo de F_5	109
	Referências Bibliográficas	110

Resumo

A mecânica relacional vem alcançando grandes patamares ao mesmo tempo que poucos a conhecem. Grandes críticas foram feitas por artigos importantes [1,2] acerca de sua adequação para a curvatura da luz quando usamos a expressão de weber com $\xi = 6$. Porém nenhuma análise minuciosa de suas premissas foi realizada até então e poucos são aqueles que possuem conhecimento acerca de como deduzir as expressões da interação entre casca esférica e partícula a partir da força weberiana gravitacional, algo essencial tanto para oferecer respostas aos artigos citados acima como para aprimorar seu domínio sobre a Mecânica Relacional. Portanto o presente trabalho procura solucionar esses problemas assim como dá um passo adiante assumindo a possibilidade de um universo em expansão e suas consequências. Encontramos que seria necessário que a constante de Hubble, a qual dá a taxa dessa expansão, deveria ser mais (universo em expansão), ou menos (universo em contração), a raiz quadrada de 2 vezes a velocidade da luz dividida pelo raio do universo observável, para que seja possível deduzir a energia de repouso relativística. Uma relação que é satisfeita usando os seus valores mais aceitos atualmente pelo menos em suas ordens de grandezas.

Palavras chave: Mecânica Relacional, relações cosmológicas, teoria dos grandes números de Dirac, universo em expansão, lei de Hubble-Lemaître, dedução da Mecânica Clássica, energia de repouso relativística, interações tipo weberianas, forças fictícias, modelos cosmológicos, curvatura da luz, viagem interestelar.

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo principal o de oferecer aos estudantes dessa teoria física [3] dicas de como realizar os cálculos tão essenciais para a mecânica relacional, ou seja, da energia potencial e força entre casca esférica e partícula. O motivo dessa importância é o de que, a partir deste resultado, pretende-se deduzir a força inercial do universo sobre a partícula, assim como a energia de interação. E, com esse último conhecimento, mostra-se que as equações newtonianas tanto em referenciais inerciais, como em não inerciais, podem ser deduzidas desde que certas condições cosmológicas sejam satisfeitas.

Essa conclusão impressionante, que parte da força de weber gravitacional entre partículas, é ao mesmo tempo difícil de obter. Procuramos diminuir essa complicação, sugerindo as alternativas mais amigáveis para a execução desta ação. Para a energia de interação levamos em consideração todos os movimentos possíveis da casca esférica, com a adição de uma taxa de expansão/contração da mesma em relação ao seu centro. Enquanto que para o cálculo da força ignoramos qualquer tipo de movimento rotativo da casca esférica, tendo em vista que as complicações sobrecarregarão o presente trabalho sem grande justificativas.

Entretanto o leitor terá em mãos o caminho claro que deverá seguir caso deseje adicionar a rotação na casca esférica. Além disso, analisaremos o modelo cosmológico do universo finito sugerido por Assis e as consequências que esse modelo carrega para obter os efeitos que foram expostos em seu livro [3]. Outro modelo é sugerido para resolver alguns dos problemas encontrados pela análise anterior, utilizando de princípios guias para tal, como por exemplo, a noção de que a força é uma interação entre corpos, e que portanto não pode depender de referenciais a não ser que seja o referencial que esteja exercendo essa força.

Uma minuciosa discussão acerca da interpretação da mecânica relacional em torno das chamadas forças fictícias que surgem nos referenciais não inerciais e o que caracteriza-os será apresentada. Artigos [1,2] que pretendem verificar a correspondência das equações desta teoria física para com o mundo externo também foram criticados, justamente reconhecendo suas premissas falsas, abrindo espaço para futuros entusiastas determinarem as conclusões verdadeiras e justificadas.

Como foi dito no segundo parágrafo desta singela introdução, adicionamos a possibilidade de expansão/contração da casca esférica. O objetivo desse acréscimo é o de demonstrar que a energia de repouso da partícula pode ser ajustada sem que a precessão do periélio do mercúrio seja necessariamente afetada. Pois, sem a expansão ou contração, a energia de repouso é única se fixarmos a constante ξ que aparece na força e energia de weber, resultando em $-\frac{1}{2}mc^2$ se usarmos seu valor necessário para obtermos a precessão do mercúrio de acordo com os dados experimentais, o qual é dado pela equação $\xi = 6$.

Tópicos adicionais serão apresentações nas seções ‘Constante da Gravitação de Newton’, ‘Constante de Hubble’, ‘A Variação da Constante de Hubble e a idade do universo’ e ‘Viagem Interestelar’. Nas quais analisaremos a adequação das condições cosmológicas necessárias para a obtenção da energia de repouso da relatividade especial de Einstein e para retornarmos à mecânica clássica, com os valores encontrados e mais aceitos atualmente, assim como impactos

na velocidade de uma nave que esteja realizando viagens interestelares, ou seja, em locais em que a resultante das forças externas à nave, com exceção da força inercial, é nula.

Tendo em vista que esse é o único trabalho atual sobre a mecânica relacional que expõe toda a técnica necessária e amigável, iniciando da energia e força gravitacional weberiana entre partículas, até a expressão para a interação entre esfera maciça com densidade de massa constante e uma partícula, com a partícula em qualquer posição em relação ao centro da esfera maciça, acreditamos que muito será adicionado aos interessados na mecânica relacional.

Esse feito foi obtido anteriormente apenas para alguns casos particulares [4–6] e sempre tendo como plano de fundo algum referencial em específico, normalmente no centro da esfera maciça, o que não ocorre em nosso trabalho, no qual usamos a própria geometria do problema para resolver as integrais.

Também é original deste trabalho a possibilidade de expansão da esfera maciça e portanto de um universo em expansão, conforme a lei de Hubble-Lemaître, e suas consequências. A dedução da relação bastante conhecida de que a idade atual do universo é dada pelo inverso da constante de Hubble [7] foi também deduzida supondo a velocidade da luz constante no tempo, também só pode ser encontrada aqui.

Ao mesmo tempo, este é o único trabalho que responde às críticas da adequação da mecânica relacional para com a curvatura da luz, demonstrando suas falhas e deixando o caminho para a obtenção correta da deflexão da luz nas mãos de estudos futuros, seja numericamente ou procurando por uma solução analítica da equação que de fato modela o caso em questão.

Capítulo 1

Cálculo da Energia Potencial Gravitacional de Weber

1.1 Circunferência/Partícula

1.1.1 Comentários iniciais

A energia potencial gravitacional de Weber entre partículas é dada por:

$$U_{12} = -H_g \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right)$$

Na qual H_g é uma constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas das partículas 1 e 2 respectivamente, r_{12} é a distância entre elas, ξ é um constante que terá futuramente o valor de 6, pois este é o valor necessário para deduzir a precessão correta do periélio do mercúrio, c é a velocidade da luz e \dot{r}_{12} é a derivada temporal da distância entre as partículas, também chamada de velocidade radial relativa.

Ela foi proposta por Assis realizando uma analogia para com a energia eletrodinâmica de Weber [8]:

$$U_{12} = H_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right)$$

A energia de Weber entre cargas elétricas acima foi obtida mediante inúmeras experiências realizadas por Weber. Uma discussão detalhada deste processo pode ser encontrado principalmente em recentes trabalhos de Assis [9–12]. É interessante perceber que essa energia é perfeitamente relacional pois é a mesma em todos os referenciais e apenas depende das relações que as partículas possuem entre si, para um prova matemática disso ver [3]. A analogia realizada por Assis se demonstra bastante útil como poderá ser visto no decorrer do trabalho.

Desejamos calcular, na próxima subseção, a energia potencial gravitacional da expressão acima entre uma partícula e uma casca esférica, a qual possui qualquer tipo de movimento linear e/ou rotativo, mas para isso iremos usar como passo intermediário o cálculo da energia potencial entre uma circunferência e uma partícula quando esta última está contida na reta perpendicular ao plano da circunferência e que passa pelo centro dela.

Pois devido à simetria da casca esférica é possível a cada instante do tempo dividir ela em vários anéis formados pelo corte dela por planos perpendiculares à reta que une o centro da casca esférica com a partícula, de tal forma que quando a distância entre cada corte tende a zero teremos que cada parte da casca, assim dividida, contribuirá conforme a energia dada por uma

circunferência e partícula no caso descrito acima. Restando apenas um processo de integração para chegar ao resultado desejado da próxima subseção.

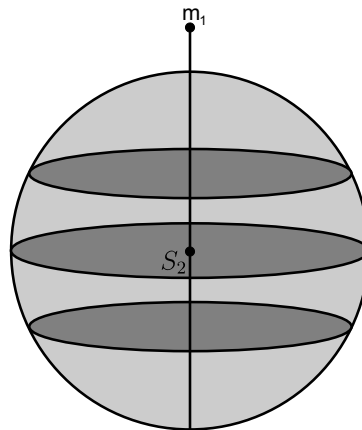


Figura 1.1: Casca Esférica e Planos Perpendiculares.

Na Figura 1.1, S_2 representa o centro da casca esférica e m_1 a partícula. É nítido a partir do que pode ser visto da figura acima que é sempre possível, em qualquer instante do tempo, formar a reta que passa pelo centro da casca e pela partícula de tal forma que planos perpendiculares à essa reta interseccionam a casca formando anéis.

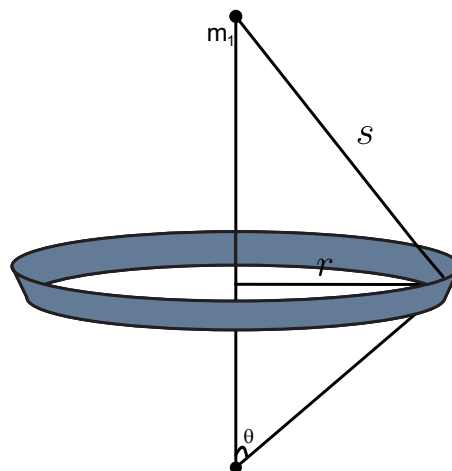


Figura 1.2: Um dos anéis formados pelos cortes.

Quando a distância entre os cortes tende a zero, o anel (Ver Figura 1.2 acima) pode ser imaginado como uma circunferência (Ver Figura 1.3 abaixo). Por esse motivo, imaginando o caso acima entre circunferência e partícula teremos que a distância entre a partícula e qualquer ponto da circunferência não depende de m_2 , mesmo quando adicionamos à circunferência a possibilidade de possuir um termo de expansão/contração que será descrito logo abaixo, e será por esse motivo denotado por s (Ver Figura 1.3 abaixo).

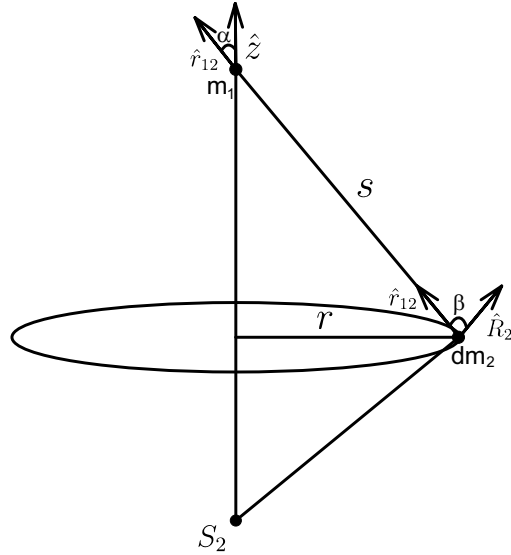


Figura 1.3: Ângulos α e β .

Da Figura 1.3 acima observasse que a distância s , e os ângulos α e β são os mesmos para todos os elementos de massa dm_2 da circunferência. Como cada parte da circunferência cria uma energia potencial dada pela simples substituição de m_2 por dm_2 na expressão acima, em que dm_2 representa o elemento de massa da circunferência, então ao integrarmos essa última por toda a circunferência concluiremos que:

$$U_{1C} = \int_C -H_g \frac{m_1 dm_2}{s} \left(1 - \xi \frac{\dot{r}_{12}^2}{2c^2} \right) = \frac{-H_g m_1}{s} \left(\int_C dm_2 - \frac{\xi}{2c^2} \int_C \dot{r}_{12}^2 dm_2 \right)$$

Assumiremos por todo o trabalho, como foi feito logo acima, que ξ e c não são função de m_2 , assim como m_1 e H_g . Definindo:

$$I_1 = \int_C \dot{r}_{12}^2 dm_2 \quad (1.1)$$

A energia potencial de uma circunferência e uma partícula no caso simétrico descrito acima será retornada via:

$$U_{1C} = \frac{-H_g m_1}{s} \left(M_2 - \frac{\xi}{2c^2} I_1 \right) \quad (1.2)$$

Se a circunferência possui velocidade \vec{V}_2 e aceleração linear \vec{A}_2 ao mesmo tempo que rotaciona em torno de algum eixo dado com velocidade angular \vec{W}_2 , juntamente com uma componente de expansão/contração radial em relação a um ponto S_2 também contido na reta perpendicular ao plano da circunferência e que passa pelo centro dela, o qual será o centro geométrico da casca esférica no futuro, ou seja, uma componente do tipo $\vec{V}_{2exp} = \dot{R}_2 \hat{R}_2$, no qual \hat{R}_2 (Ver Figura 1.3 acima) é o vetor unitário com origem S_2 e orientado em direção ao elemento de massa dm_2 , no qual \dot{R}_2 retornará a velocidade com que essa expansão ocorre. Então a velocidade da partícula 2 pertencente à circunferência será:

$$v_2 = \vec{V}_2 + \vec{W}_2 \times \vec{R}_2 + \dot{R}_2 \hat{R}_2$$

Definindo ainda \vec{V}_1 como a velocidade da partícula 1, portanto $v_1 = \vec{V}_1$, e sabendo que (Ver Apêndice B):

$$\dot{r}_{12} = \vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12}$$

No qual $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Teremos a seguinte relação para o quadrado da velocidade radial relativa:

$$\dot{r}_{12}^2 = (\vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 = ((\vec{V}_1 - \vec{V}_2 - \vec{W}_2 \times \vec{R}_2 - \dot{R}_2 \hat{R}_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 = ((\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \hat{r}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} - \dot{R}_2 (\hat{R}_2 \cdot \hat{r}_{12}))^2$$

Denotando:

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

E definido β como o ângulo entre os vetores \hat{R}_2 e \hat{r}_{12} (Ver Figura 1.3):

$$\cos \beta = \hat{R}_2 \cdot \hat{r}_{12}$$

Chegamos a:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{12}^2 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} - \dot{R}_2 \cos \beta)^2 = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 \\ &\quad - 2\dot{R}_2 \cos \beta (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12}) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta \\ &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 \\ &\quad - 2\dot{R}_2 \cos \beta (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12}) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta \end{aligned}$$

Substituindo essa relação na integral de I_1 (1.1) e retirando das integrais todos os elementos que independem de dm_2 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_C \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{R}_2 \cos \beta (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12}) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta \right] dm_2 \\ &= \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 - 2 \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 + \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \\ &\quad - 2\dot{R}_2 \cos \beta \left(\int_C \vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} dm_2 - \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 \right) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta \int_C dm_2 \end{aligned}$$

Definindo:

$$i_1 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \quad (1.3)$$

$$i_2 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 \quad (1.4)$$

$$i_3 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \quad (1.5)$$

$$i_4 = \int_C \vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} dm_2 \quad (1.6)$$

$$i_5 = \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 \quad (1.7)$$

A expressão de I_1 é dada de uma maneira mais agradável:

$$I_1 = i_1 - 2i_2 + i_3 - 2\dot{R}_2 \cos \beta (i_4 - i_5) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta M_2 \quad (1.8)$$

Imagine, inicialmente, a rotação acontecendo ao redor de uma reta que intercepta a reta perpendicular ao plano da circunferência, aquela já declarada que possui a propriedade de passar pelo centro dela, no ponto S_2 a uma distância k do centro (Ver Figura 1.4 abaixo), de tal forma que o vetor \vec{R}_2 fosse dado por \vec{R}'_2 . Essa condição imaginada por ser ilustrada pela seguinte imagem:

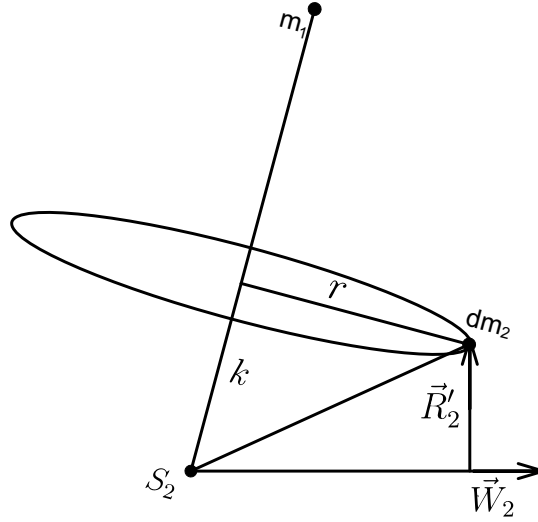


Figura 1.4: Rotação acontecendo na situação imaginada.

Assim que essa condição não for satisfeita podemos expressar o vetor \vec{R}_2 como sendo a soma de \vec{R}'_2 com o vetor \vec{R}_o (Ver figura 1.5 abaixo), quando este último tem sua origem no eixo de rotação generalizada e termina na rotação imaginada no parágrafo acima cujo módulo é igual à distância entre esse dois eixos, ou seja, teremos:

$$\vec{R}_2 = \vec{R}'_2 + \vec{R}_o \quad (1.9)$$

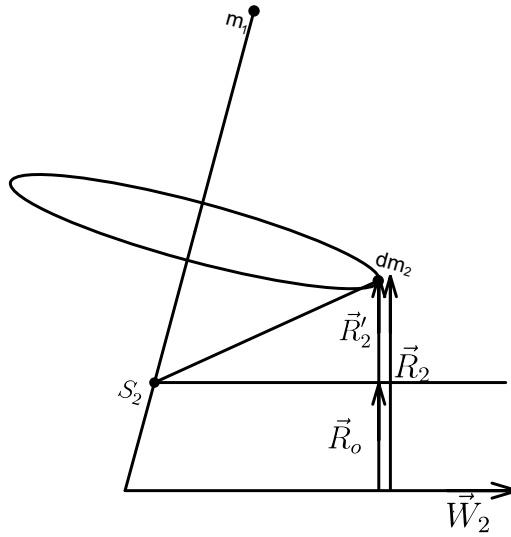


Figura 1.5: Rotação por qualquer eixo.

Substituindo a equação 1.9 na integral de i_2 , ou seja, na equação 1.4:

$$\begin{aligned} i_2 &= \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times (\vec{R}'_2 + \vec{R}_o)) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2 + \vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \\ &= \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 + \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \end{aligned}$$

Definindo:

$$h_1 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \quad (1.10)$$

$$h_2 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \quad (1.11)$$

i_2 pode ser oferecida por:

$$i_2 = h_1 + h_2 \quad (1.12)$$

Substituindo a equação 1.9 na integral de i_3 , ou seja, em 1.5:

$$\begin{aligned} i_3 &= \int_C ((\vec{W}_2 \times (\vec{R}'_2 + \vec{R}_o)) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2 + \vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \\ &= \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12} + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \\ &= \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \\ &= \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 + 2 \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 + \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \end{aligned}$$

Definindo:

$$h_3 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \quad (1.13)$$

$$h_4 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \quad (1.14)$$

$$h_5 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \quad (1.15)$$

Então a integral de i_3 pode ser dada por:

$$i_3 = h_3 + 2h_4 + h_5 \quad (1.16)$$

Tendo esquematizado e definido todas as integrais que precisam ser resolvidas para a satisfação de nosso fim passaremos daqui em diante para as suas resoluções de fato.

1.1.2 Cálculo de i_1

Para calcularmos i_1 que foi definida na subseção anterior, definiremos o vetor unitário \hat{z} como aquele dado na direção da reta perpendicular ao plano da circunferência e que contém o centro dela que vai do centro até a partícula, assim podemos formar a base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{z})$, sendo \hat{i} um vetor unitário na direção de $\vec{W}_{2\perp}$ (Ver Figura 1.6 abaixo), ou seja, na direção do vetor decorrente da decomposição de \vec{W}_2 em uma componente paralela ao vetor \hat{z} , chamado de $\vec{W}_{2\parallel}$, e outra em uma direção perpendicular a \hat{z} , chamado de $\vec{W}_{2\perp}$, respeitando a relação $\vec{W}_2 = \vec{W}_{2\parallel} + \vec{W}_{2\perp}$. O \hat{j} será então definido como aquele único vetor unitário que torna a base descrita acima ortonormal e positivamente orientada (Perpendicular ao plano do papel e orientado para dentro do papel).

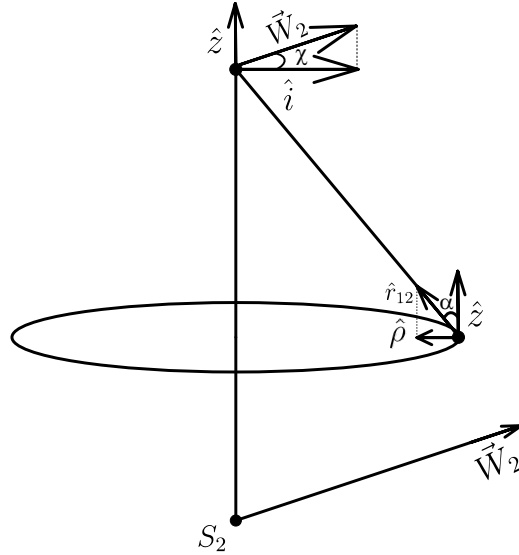


Figura 1.6: Base vetorial admitida.

Veja que o vetor \hat{i} é perpendicular ao vetor \hat{z} conforme explicado acima. Se denotarmos o ângulo entre \hat{i} e \hat{w} por χ , reforçando que \hat{w} é um vetor unitário na direção de \vec{W}_2 , assim como ν como sendo o ângulo entre \hat{i} e $\hat{\rho}$ (Ver Figura 1.7 abaixo), lembrando que $\hat{\rho}$ é um vetor unitário dado na direção de $\vec{r}_{12\perp}$. Então:

$$\begin{aligned}\hat{r}_{12} &= \vec{r}_{12\parallel} + \vec{r}_{12\perp} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \hat{\rho} \\ \hat{\rho} &= \cos \nu \hat{i} + \sin \nu \hat{j}\end{aligned}$$

Portanto o vetor unitário \hat{r}_{12} será:

$$\hat{r}_{12} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j} \quad (1.17)$$

Já a componente $(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})$ contida em vários dos i_j pode ser obtida usando a equação acima:

$$\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = \vec{V}_{12} \cdot (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j})$$

Por fim:

$$\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \quad (1.18)$$

Já o seu quadrado:

$$\begin{aligned}(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 &= (\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}))^2 \\ &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [\sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})] \\ &\quad + [\sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})]^2\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [\sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})] \\ &+ \sin^2 \alpha \cos^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + 2 \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2\end{aligned} \quad (1.19)$$

Substituindo a relação acima na integral de i_1 (1.3) que é:

$$i_1 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2$$

Teremos:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \int_C \left[\cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [\sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})] \right. \\
 &+ \left. \sin^2 \alpha \cos^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + 2 \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \right] dm_2 \\
 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \int_C dm_2 + 2 \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \left[\sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \int_C \cos \nu dm_2 \right. \\
 &\quad \left. + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \sin \nu dm_2 \right] + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 \int_C \cos^2 \nu dm_2 \\
 &+ 2 \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \cos \nu \sin \nu dm_2 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \int_C \sin^2 \nu dm_2
 \end{aligned}$$

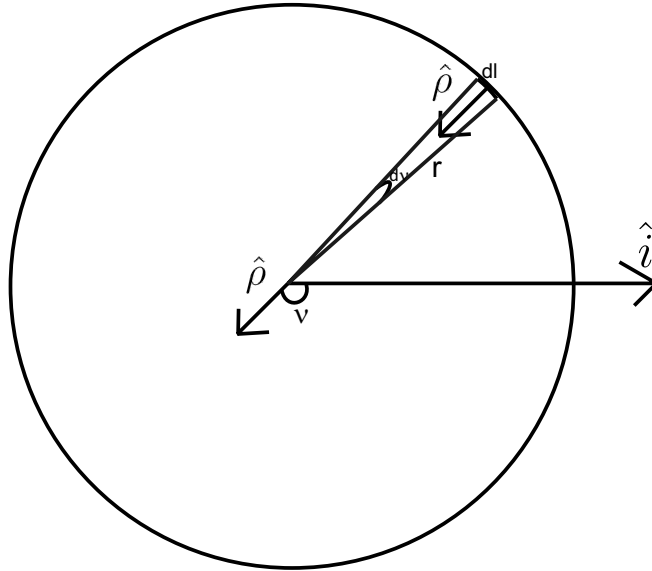


Figura 1.7. Visão no plano perpendicular ao eixo z .

Da Figura 1.7 acima é possível perceber que para uma circunferência de densidade uniforme $\lambda = \frac{M_2}{2\pi r} = \frac{dm_2}{dl}$, mas como $dl = r d\nu$ então $dm_2 = \frac{M_2}{2\pi} d\nu$. Sabendo que a região de integração faz ν variar de 0 até 2π , é fácil perceber que apenas algumas integrais serão diferentes de zero:

$$i_1 = \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 \int_C \cos^2 \nu dm_2 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \int_C \sin^2 \nu dm_2$$

Como essas últimas integrais serão recorrentes no decorrer dessa seção faremos definições para elas:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_C \cos^2 \nu dm_2 = \frac{M_2}{2\pi} \int_C \cos^2 \nu d\nu = \frac{M_2}{2} \\
 F_2 &= \int_C \sin^2 \nu dm_2 = \frac{M_2}{2\pi} \int_C \sin^2 \nu d\nu = \frac{M_2}{2}
 \end{aligned}$$

$$i_1 = \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 \frac{M_2}{2} + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \frac{M_2}{2}$$

Usaremos por fim a seguinte relação

$$\begin{aligned} \vec{V}_{12} &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})\hat{z} \\ \vec{V}_{12} \cdot \vec{V}_{12} &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \\ \vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \end{aligned}$$

Teremos então:

$$i_1 = \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \quad (1.20)$$

Restando o cálculo dos outros i_j , que serão resolvidos logo em seguida.

1.1.3 Cálculo de i_2

Preparação

Para determinarmos i_2 precisamos resolver h_1 e h_2 , os quais são dados por:

$$\begin{aligned} h_1 &= \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \\ h_2 &= \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2 \end{aligned}$$

Sabendo disso partiremos para a determinação dos termos contidos nessas integrais. Da subseção anterior temos (1.18):

$$\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})$$

Restando apenas as outras duas partículas das integrais. Do que foi discutido até o momento (Ver Figura 1.6) é possível concluir que:

$$\begin{aligned} \vec{W}_2 &= W_2 \hat{w} = \vec{W}_{2\parallel} + \vec{W}_{2\perp} = W_2 \sin \chi \hat{z} + W_2 \cos \chi \hat{i} \\ \hat{w} &= \sin \chi \hat{z} + \cos \chi \hat{i} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ao mesmo tempo se r for o raio da circunferência e l for a distância do ponto de interseção das retas descritas acima até o plano de rotação do elemento de massa da circunferência em consideração então (Ver Figura 1.8 abaixo):

$$\vec{R}'_2 = -l\hat{w} + k\hat{z} + r(-\hat{\rho}) \quad (1.22)$$

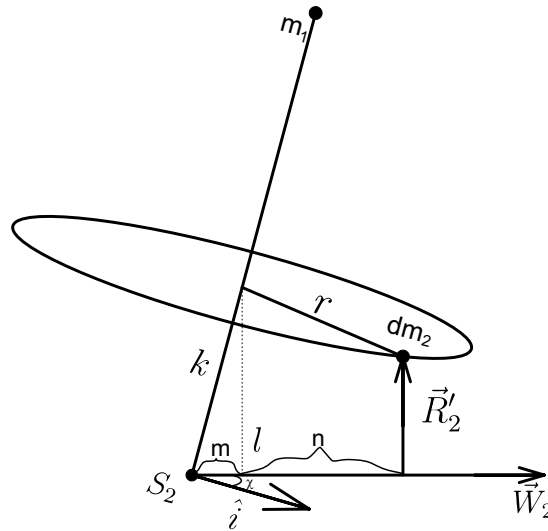


Figura 1.8. Visão Geral das distâncias definidas.

Se m é a distância do ponto de interseção das retas anteriormente declaradas até o ponto de interseção entre a reta que passa pelo centro da circunferência e que é perpendicular ao vetor \hat{w} com a reta determinada por este mesmo vetor, e sendo n a distância entre esse último ponto e ponto de interseção da reta determinada por \hat{w} e o plano de rotação, então é claro que $l = m + n$ (Ver Figura 1.8 acima). A distância m é relativamente simples de obter, sendo seu valor dado por $m = k \sin \chi$ (Ver Figura 1.9 abaixo). Basta perceber o triângulo retângulo explicitado abaixo:

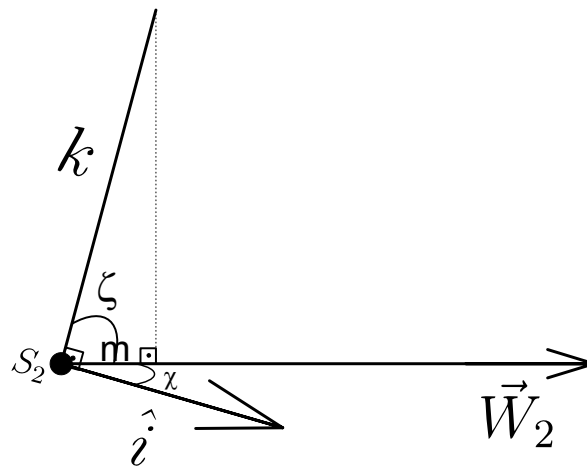


Figura 1.9. Triângulo formado com lado k .

Sabendo que $\zeta + \chi = \frac{\pi}{2}$, então $\cos \zeta = \sin \chi$, mas ao mesmo tempo $\cos \zeta = \frac{m}{k}$, logo $m = k \sin \chi$. Quanto à n , sendo seu valor dado por $n = -r \cos \nu \cos \chi$, é necessário perceber que ele será dado pela distância entre dois planos. O primeiro dele é o plano de rotação enquanto que o segundo é o plano paralelo a esse e que contém o centro da circunferência. Portanto ele nada mais é que a componente de $-r\hat{\rho}$ na direção de \vec{W}_2 (Ver figura 1.10 abaixo).

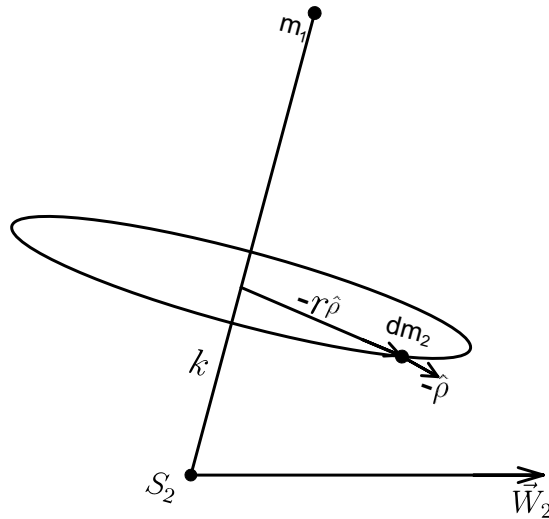


Figura 1.10. Visualização do vetor $-r\hat{\rho}$

Como esse vetor está no plano da circunferência, então ele possui duas componentes, uma na direção \hat{i} e outra na direção \hat{j} . Mas como a direção de \hat{j} é ortogonal à direção de \vec{W}_2 então sua contribuição será nula para a distância desejada. Tomando a componente na direção \hat{i} do vetor $-r\hat{\rho}$:

$$(-r\hat{\rho} \cdot \hat{i})\hat{i} = -r \cos \nu \hat{i}$$

A visualização deste vetor está dado na Figura 1.11 abaixo:

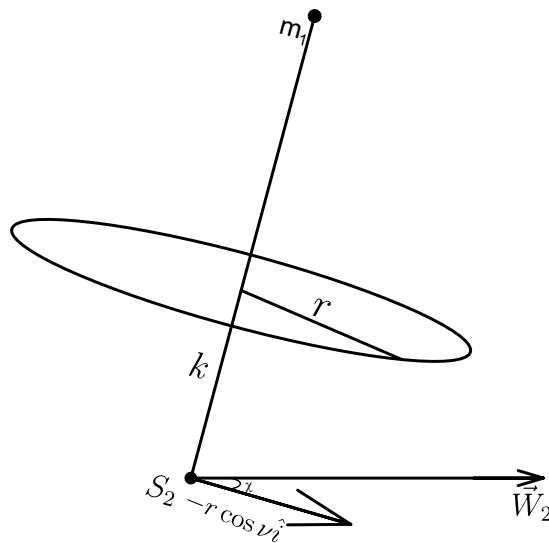


Figura 1.11. Visualização do vetor $-r \cos \nu \hat{i}$

Desta, o que nos importa é sua projeção na direção de \vec{W}_2 , já que é ali que n está, portanto:

$$n = (-r \cos \nu \hat{i} \cdot \hat{w}) = -r \cos \nu \cos \chi$$

Detido de todas essas informações podemos expressar \vec{R}_2 na base escolhida substituindo todas as relações encontradas acima para os valores de n , l e k na equação 1.22:

$$\begin{aligned} \vec{R}_2 &= -(k \sin \chi - r \cos \nu \cos \chi)(\sin \chi \hat{z} + \cos \chi \hat{i}) + k \hat{z} - r(\cos \nu \hat{i} + \sin \nu \hat{j}) \\ &= -(k \sin \chi - r \cos \nu \cos \chi) \sin \chi \hat{z} - (k \sin \chi - r \cos \nu \cos \chi) \cos \chi \hat{i} \\ &+ k \hat{z} - r \cos \nu \hat{i} - r \sin \nu \hat{j} = (-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \hat{i} \\ &- r \sin \nu \hat{j} + (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \hat{z} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\vec{R}_{2'} = (-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \hat{i} - r \sin \nu \hat{j} + (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \hat{z} \quad (1.23)$$

Partindo para o cálculo de $(\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'})$:

$$\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'} = (W_2 \hat{w} \times \vec{R}_{2'}) = W_2 (\hat{w} \times \vec{R}_{2'})$$

Substituindo a relação de $\vec{R}_{2'}$ dada logo acima, assim como a relação dada pela equação 1.21, teremos:

$$\begin{aligned} \vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'} &= W_2 \left[\sin \chi \hat{z} + \cos \chi \hat{i} \right] \times \left[(-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \hat{i} \right. \\ &\quad \left. - r \sin \nu \hat{j} + (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \hat{z} \right] \\ &= W_2 \left\{ (-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) (\sin \chi \hat{z} + \cos \chi \hat{i}) \times \hat{i} \right. \\ &\quad \left. - r \sin \nu (\sin \chi \hat{z} + \cos \chi \hat{i}) \times \hat{j} + (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) (\sin \chi \hat{z} + \cos \chi \hat{i}) \times \hat{z} \right\} \\ &= W_2 \left\{ (-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \sin \chi (\hat{z} \times \hat{i}) \right. \\ &\quad \left. - r \sin \nu (\sin \chi (\hat{z} \times \hat{j}) + \cos \chi (\hat{i} \times \hat{j})) + (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \cos \chi (\hat{i} \times \hat{z}) \right\} \\ &= W_2 \left\{ (-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \sin \chi \hat{j} \right. \\ &\quad \left. - r \sin \nu (-\sin \chi \hat{i} + \cos \chi \hat{z}) - (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \cos \chi \hat{j} \right\} \\ &= W_2 \left\{ \left[(-k \sin \chi \cos \chi + r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \sin \chi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (-k \sin^2 \chi + r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \cos \chi \right] \hat{j} + r \sin \nu \sin \chi \hat{i} - r \sin \nu \cos \chi \hat{z} \right\} \\ &= W_2 \left\{ \left[(r \cos \nu \cos^2 \chi - r \cos \nu) \sin \chi - (r \cos \nu \cos \chi \sin \chi + k) \cos \chi \right] \hat{j} \right. \\ &\quad \left. + r \sin \nu \sin \chi \hat{i} - r \sin \nu \cos \chi \hat{z} \right\} \\ &= W_2 \left\{ r \sin \nu \sin \chi \hat{i} - (r \cos \nu \sin \chi + k \cos \chi) \hat{j} - r \sin \nu \cos \chi \hat{z} \right\} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'} = W_2 \left\{ r \sin \nu \sin \chi \hat{i} - (r \cos \nu \sin \chi + k \cos \chi) \hat{j} - r \sin \nu \cos \chi \hat{z} \right\} \quad (1.24)$$

Basta agora determinar $((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12})$ por meio dos passos matemáticos abaixo, lembrando que de (1.17):

$$\hat{r}_{12} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}$$

Podemos concluir, juntando as duas equações acima, que:

$$\begin{aligned}
 ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12}) &= \left[W_2(r \sin \nu \sin \chi \hat{i} - (r \cos \nu \sin \chi + k \cos \chi) \hat{j} - r \sin \nu \cos \chi \hat{z}) \right] \\
 &\quad \cdot \left[\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j} \right] = W_2 \left[r \sin \nu \sin \chi \sin \alpha \cos \nu (\hat{i} \cdot \hat{i}) \right. \\
 &\quad \left. - (r \cos \nu \sin \chi + k \cos \chi) \sin \alpha \sin \nu (\hat{j} \cdot \hat{j}) - r \sin \nu \cos \chi \cos \alpha (\hat{z} \cdot \hat{z}) \right] \\
 &= W_2 \left[r \sin \nu \sin \chi \sin \alpha \cos \nu - (r \cos \nu \sin \chi + k \cos \chi) \sin \alpha \sin \nu - r \sin \nu \cos \chi \cos \alpha \right] \\
 &= W_2 \left[r \sin \nu \sin \chi \sin \alpha \cos \nu - r \cos \nu \sin \chi \sin \alpha \sin \nu \right. \\
 &\quad \left. - k \cos \chi \sin \alpha \sin \nu - r \sin \nu \cos \chi \cos \alpha \right] \\
 &= W_2 \left[-k \cos \chi \sin \alpha \sin \nu - r \sin \nu \cos \chi \cos \alpha \right] = -W_2 \cos \chi \left[k \sin \alpha + r \cos \alpha \right] \sin \nu
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12}) = -W_2 \cos \chi \left[k \sin \alpha + r \cos \alpha \right] \sin \nu$$

Observando a Figura 1.12:

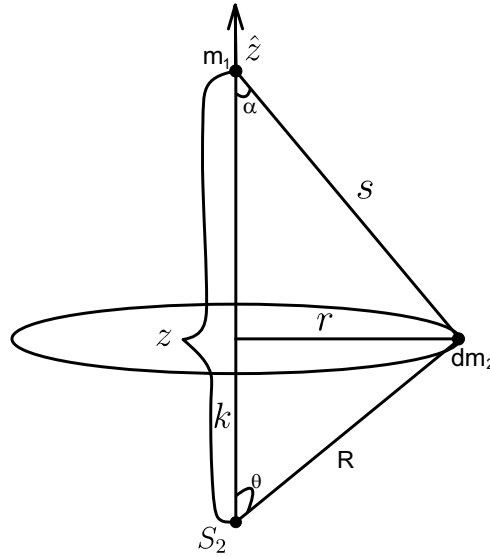


Figura 1.12. Triângulos formados.

Fica claro que podemos usar:

$$\begin{aligned}
 r &= s \sin \alpha \\
 k &= z - s \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Concluimos:

$$\begin{aligned}
 ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12}) &= -W_2 \cos \chi \left[(z - s \cos \alpha) \sin \alpha + s \sin \alpha \cos \alpha \right] \sin \nu \\
 &= -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \sin \nu
 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12}) = -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \sin \nu \quad (1.25)$$

Logo, olhando para a integral de h_1 o seu termo interno será simplesmente:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12}) &= \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right] \\ &\quad \cdot (-W_2 \cos \chi z \sin \alpha \sin \nu) \\ &= -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \nu + \sin \alpha \cos \nu \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right] \end{aligned}$$

Para citá-la futuramente:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_{2'}) \cdot \hat{r}_{12}) &= -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \nu \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \nu \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Restando apenas o termo da integral de h_2 , lembrando de \hat{r}_{12} :

$$\hat{r}_{12} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}$$

Um passo intermediário é:

$$(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12} = \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \quad (1.27)$$

Do qual o termo interno será melhor expresso, unindo a equação acima e a equação 1.18:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) &= \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right] \cdot \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \cdot \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] \\ &+ \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \cdot \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] \\ &= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\quad + \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \\ &\quad + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &\quad + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\quad + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \end{aligned}$$

Para melhor visualização:

$$\begin{aligned} (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12} &= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\quad + \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \\ &\quad + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &\quad + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\quad + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Vamos agora calcular o valor de h_1 e h_2 usando as manipulações realizadas acima para facilitar sua resolução nas próximas subseções.

Cálculo de h_1

Substituindo a relação (1.26) na integral de h_1 :

$$\begin{aligned} h_1 &= \int_C \left(-W_2 \cos \chi z \sin \alpha \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \nu + \sin \alpha \cos \nu \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right] \right) dm_2 \\ &= -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \int_C \sin \nu dm_2 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \int_C \cos \nu \sin \nu dm_2 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \sin^2 \nu dm_2 \right] \end{aligned}$$

Novamente várias serão nulas, restando apenas:

$$\begin{aligned} h_1 &= -W_2 \cos \chi z \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \sin^2 \nu dm_2 = -W_2 \cos \chi z \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) F_2 \\ &= -W_2 \cos \chi z \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \frac{M_2}{2} \\ &= -W_2 \cos \chi z \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \frac{M_2}{2} = z \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot (-W_2 \cos \chi \hat{j})) \frac{M_2}{2} \end{aligned}$$

Por fim desejamos utilizar a seguinte identidade:

$$\hat{j} = \hat{z} \times \hat{i}$$

Da qual podemos simplificar:

$$\begin{aligned} -W_2 \cos \chi \hat{j} &= -W_2 \cos \chi (\hat{z} \times \hat{i}) = (\hat{z} \times -W_2 \cos \chi \hat{i}) = (\hat{z} \times -\vec{W}_{2\perp}) = (\vec{W}_{2\perp} \times \hat{z}) \\ &= ((\vec{W}_2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})\hat{z}) \times \hat{z}) = \vec{W}_2 \times \hat{z} - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})\hat{z} \times \hat{z} = \vec{W}_2 \times \hat{z} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$-W_2 \cos \chi \hat{j} = \vec{W}_2 \times \hat{z} \quad (1.29)$$

Substituindo esse resultado acima:

$$h_1 = (\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) z \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \quad (1.30)$$

Finalizando assim o cálculo de h_1 restando o cálculo de h_2 para finalmente obter i_2 .

Cálculo de h_2

Substituindo o último resultado da preparação (eq. 1.28) na integral de h_2 :

$$h_2 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2$$

Teremos:

$$\begin{aligned} h_2 &= \int_C \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \right. \\ &+ \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \\ &+ \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &+ \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\left. + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] dm_2 \end{aligned}$$

Podemos ver novamente que várias integrais se anulam, sobrando apenas:

$$\begin{aligned}
h_2 &= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) M_2 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \int_C \cos^2 v dm_2 \\
&+ \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \int_C \sin^2 v dm_2 = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) M_2 \\
&+ \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \frac{M_2}{2} + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \frac{M_2}{2}
\end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\vec{V}_{12} = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}$$

E:

$$\vec{W}_2 \times \vec{R}_o = ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \hat{i} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \hat{j} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \hat{z}$$

Fica claro que:

$$\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})$$

Ou melhor:

$$\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})$$

Podemos usar a relação acima para simplificar a equação de h_2 encontrada até o momento para que ela fique conforme:

$$\begin{aligned}
h_2 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos^2 \alpha M_2 \\
&+ \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \tag{1.31}
\end{aligned}$$

Basta agora substituir o que foi encontrado na expressão de i_2 que possui h_1 e h_2 definido na preparação para facilitar a sua determinação.

Resultado Final

Desse modo, relembando que:

$$i_2 = h_1 + h_2$$

Então, das equações (1.30) e (1.31) vamos concluir que:

$$\begin{aligned}
i_2 &= (\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) z \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos^2 \alpha M_2 \\
&+ \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \tag{1.32}
\end{aligned}$$

1.1.4 Cálculo de i_3

Preparação

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
i_3 &= h_3 + 2h_4 + h_5 \\
h_3 &= \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2
\end{aligned}$$

$$h_4 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12} dm_2$$

$$h_5 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2$$

Reutilizando as conclusões das subseções anteriores (1.25):

$$((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 = W_2^2 \cos^2 \chi z^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \nu \quad (1.33)$$

Assim como, da equação 1.27:

$$\begin{aligned} ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 &= \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \right. \\ &+ \left. \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right]^2 = \left[\cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right. \\ &\left[\sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] \\ &+ \left[\sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right]^2 \\ &= \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\quad + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &+ \sin^2 \alpha \cos^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 + 2 \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &\quad + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 &= \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \\ &\quad + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &+ \sin^2 \alpha \cos^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 + 2 \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \\ &\quad + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2 \end{aligned}$$

Por último temos o termo interno de h_4 , que pode ser obtido juntando 1.25 e 1.27:

$$\begin{aligned} ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12} &= -W_2 \cos \chi z \sin \nu \sin \alpha \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] \\ &= -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \nu \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \nu \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] \end{aligned}$$

Cálculo de h_3

Lembrando de:

$$h_3 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2$$

Então da preparação dessa subseção retiramos que:

$$\begin{aligned} h_3 &= \int_C W_2^2 \cos^2 \chi z^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \nu dm_2 \\ &= \sin^2 \alpha W_2^2 \cos^2 \chi z^2 \int_C \sin^2 \nu dm_2 = W_2^2 \cos^2 \chi z^2 \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \end{aligned}$$

Das seguinte relação:

$$\begin{aligned} W_2^2 \cos^2 \chi &= \vec{W}_{2\perp} \cdot \vec{W}_{2\perp} = (\vec{W}_2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})\hat{z}) \cdot (\vec{W}_2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})\hat{z}) \\ &= \vec{W}_2^2 - 2(\vec{W}_2 \cdot ((\vec{W}_2 \cdot \hat{z})\hat{z})) + (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2 = \vec{W}_2^2 - 2(\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2 + (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2 \\ &= \vec{W}_2^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$W_2^2 \cos^2 \chi = \vec{W}_2^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2$$

Então:

$$h_3 = (\vec{W}_2^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2) z^2 \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \quad (1.34)$$

Cálculo de h_4

Lembrando de h_4 :

$$h_4 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12}) dm_2$$

E usando o que foi obtida na preparação desta subseção:

$$\begin{aligned} h_4 &= \int_C -W_2 \cos \chi z \sin \alpha \left[\cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \nu \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \nu \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \right] dm_2 \end{aligned}$$

É fácil visualizar que em virtude de várias das integrais serem nulas:

$$\begin{aligned} h_4 &= -W_2 \cos \chi z \sin^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) \int_C \sin^2 \nu dm_2 \\ &= \sin^2 \alpha z ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (-W_2 \cos \chi \hat{j})) \frac{M_2}{2} \end{aligned}$$

Lembrando que (1.29):

$$-W_2 \cos \chi \hat{j} = \vec{W}_2 \times \hat{z}$$

Determinamos:

$$h_4 = ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) \sin^2 \alpha z \frac{M_2}{2} \quad (1.35)$$

Cálculo de h_5

Lembrando de h_5 :

$$h_5 = \int_C ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12})^2 dm_2 \quad (1.36)$$

Usando o seu termo interno deduzido na preparação:

$$\begin{aligned} h_5 &= \int_C \left[\cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) + \sin^2 \alpha \cos^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin \alpha \cos \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j}) + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2 \right] dm_2 \end{aligned}$$

Novamente o resultado final será dada por:

$$\begin{aligned}
h_5 &= \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 M_2 + \sin^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 \int_C \cos^2 v dm_2 \\
&+ \sin^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2 \int_C \sin^2 v dm_2 \\
&= \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 M_2 + \sin^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 \frac{M_2}{2} + \sin^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2 \frac{M_2}{2}
\end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned}
\vec{W}_2 \times \vec{R}_o &= ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})\hat{i} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})\hat{j} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})\hat{z} \\
(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 &= ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2 + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 = ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{i})^2 + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{j})^2$$

Podemos usar a relação acima para simplificar a expressão de h_5 :

$$h_5 = \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 M_2 + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \quad (1.37)$$

Resultado Final

Como:

$$i_3 = h_3 + 2h_4 + h_5$$

A integral de i_3 será por esse motivo, usando 1.34, 1.35 e 1.37, dada por:

$$\begin{aligned}
i_3 &= (\vec{W}_2^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2) z^2 \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) \sin^2 \alpha z \frac{M_2}{2} \\
&+ \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 M_2 + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2}
\end{aligned} \quad (1.38)$$

1.1.5 Cálculo de i_4

Lembrando que:

$$i_4 = \int_C \vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} dm_2$$

E da equação 1.18:

$$\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})$$

Então:

$$\begin{aligned}
i_4 &= \int_C \left(\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right) dm_2 \\
&= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \int_C dm_2 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \int_C \cos \nu dm_2 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \sin \nu dm_2 \\
&= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) M_2
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$i_4 = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) M_2 \quad (1.39)$$

1.1.6 Cálculo de i_5

Lembrando que:

$$i_5 = \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2$$

E (1.9):

$$\vec{R}_2 = \vec{R}'_2 + \vec{R}_o$$

Portanto:

$$\begin{aligned} i_5 &= \int_C (\vec{W}_2 \times (\vec{R}'_2 + \vec{R}_o)) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 + \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 \\ &= \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \int_C \hat{r}_{12} dm_2 \end{aligned}$$

Calculando a última integral por meio de 1.17:

$$\hat{r}_{12} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \int_C \hat{r}_{12} dm_2 &= \int_C (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}) dm_2 \\ &= \cos \alpha \hat{z} \int_C dm_2 + \sin \alpha \hat{i} \int_C \cos \nu dm_2 + \sin \alpha \hat{j} \int_C \sin \nu dm_2 \\ &= \cos \alpha \hat{z} M_2 \end{aligned}$$

Para calcular a primeira integral basta usar 1.25:

$$((\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12}) = -W_2 \cos \chi z \sin \nu \sin \alpha$$

Pois daí:

$$\begin{aligned} \int_C (\vec{W}_2 \times \vec{R}'_2) \cdot \hat{r}_{12} dm_2 &= \int_C -W_2 \cos \chi z \sin \nu \sin \alpha dm_2 \\ &= -W_2 z \sin \alpha \cos \chi \int_C \sin \nu dm_2 = 0 \end{aligned}$$

Por fim:

$$i_5 = ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos \alpha M_2 \quad (1.40)$$

1.1.7 Resultado Final

O resultado de I_1 será 1.8:

$$I_1 = i_1 - 2i_2 + i_3 - 2\dot{R}_2 \cos \beta (i_4 - i_5) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta M_2$$

Substituindo os resultados das subseções acima (1.20,1.32,1.38,1.39,1.40):

$$\begin{aligned} I_1 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \\ &- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) z \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos^2 \alpha M_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \\
& + (\vec{W}_2^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2) z^2 \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \\
& + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) \sin^2 \alpha z \frac{M_2}{2} \\
& + \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 M_2 + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \\
& - 2\dot{R}_2 \cos \beta \left(\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) M_2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos \alpha M_2 \right) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta M_2
\end{aligned}$$

Para obter a expressão da energia potencial entre a circunferência e a partícula 1 na condição de simetria assumida basta substituir o valor acima na expressão abaixo ??:

$$U_{1C} = \frac{-H_g m_1}{s} \left(M_2 - \frac{\xi}{2c^2} I_1 \right) \quad (1.41)$$

Porém como o cálculo da circunferência é apenas um passo a ser utilizado para alcançar nosso objetivo final não iremos simplificar a expressão e nem realizar essa substituição. O máximo que faremos será rearranjar I_1 para facilitar cálculos futuros:

$$\begin{aligned}
I_1 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \cos^2 \alpha M_2 + \frac{1}{2} (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \sin^2 \alpha M_2 \\
&- 2 \left[\frac{1}{2} (\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) z \sin^2 \alpha M_2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos^2 \alpha M_2 \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \sin^2 \alpha M_2 \right] \\
&+ \frac{1}{2} (\vec{W}_2^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2) z^2 \sin^2 \alpha M_2 + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \hat{z})) \sin^2 \alpha z M_2 \\
&+ \cos^2 \alpha ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 M_2 + \frac{1}{2} \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \sin^2 \alpha M_2 \\
&- 2\dot{R}_2 \cos \beta \left((\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cos \alpha M_2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \cos \alpha M_2 \right) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta M_2
\end{aligned}$$

1.2 Casca Esférica/Partícula

1.2.1 Preparação

A energia potencial entre uma casca esférica e uma partícula é dada pela integração da expressão entre circunferência e partícula no caso abordado na subseção anterior, porém os extremos de integração dependem da localização da partícula, pois no interior a variável s terá mínimo e máximo respectivamente dados por $R_2 - z$ e $R_2 + z$ (Ver Figura 1.13). Enquanto que no exterior os extremos análogos serão $z - R_2$ e $z + R_2$ (Ver Figura 1.14).

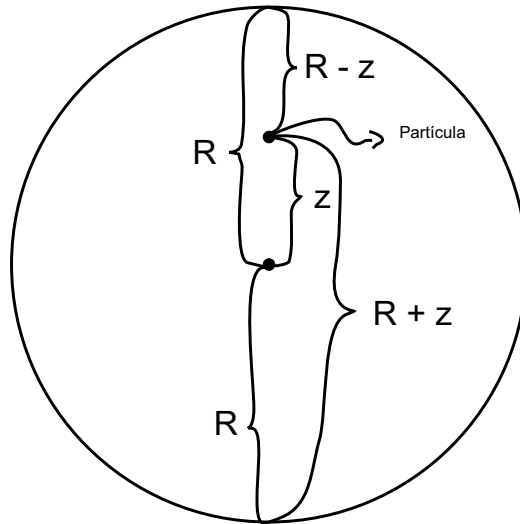


Figura 1.13. Partícula no interior.

É possível compreender que o elemento de massa mais próximo no caso acima está à $R - z$ e o mais longe à $R + z$.

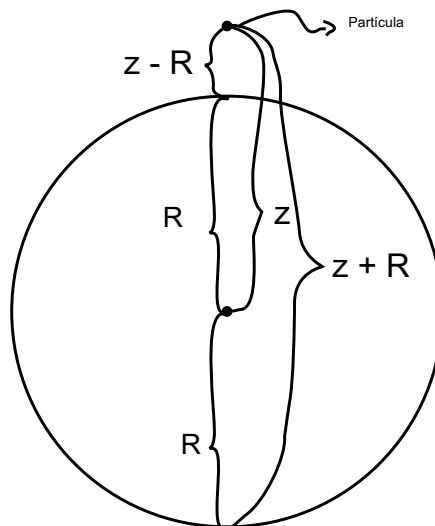


Figura 1.14. Partícula no exterior.

É possível compreender que o elemento de massa mais próximo está à $z - R$ e o mais longe à $z + R$ no exterior. Trocando na expressão da energia potencial entre circunferência e partícula (1.2) o termo M_2 por dM_2 e realizando o processo de integração é possível perceber que teremos como resultado final uma relação da seguinte forma:

$$U_{1S} = -H_g m_1 \left(\int_S \frac{dM_2}{s} - \frac{\xi}{2c^2} I'_1 \right) \quad (1.42)$$

O termo I'_1 foi definido, para facilitar a exposição dos passos matemáticos, como:

$$\begin{aligned}
I'_1 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \frac{1}{2} \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 \\
&- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 \right. \\
&+ \left. \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \frac{1}{2} \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 \right] \\
&+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{1}{2} \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 \\
&+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \frac{1}{2} \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 \\
&- 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \int_S \frac{\cos \alpha \cos \beta}{s} dM_2 + \dot{R}_2^2 \int_S \frac{\cos^2 \beta}{s} dM_2
\end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_S \frac{dM_2}{s} \\
P_2 &= \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 \\
P_3 &= \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 = \int_S \frac{dM_2}{s} - \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 = P_1 - P_2 \\
P_4 &= \int_S \frac{\cos \alpha \cos \beta}{s} dM_2 \\
P_5 &= \int_S \frac{\cos^2 \beta}{s} dM_2
\end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}
I'_1 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 P_2 + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \frac{1}{2} P_3 \\
&- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} P_3 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) P_2 \right. \\
&+ \left. \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \frac{1}{2} P_3 \right] \\
&+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{1}{2} P_3 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} P_3 \\
&+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 P_2 + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \frac{1}{2} P_3 \\
&- 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) P_4 + \dot{R}_2^2 P_5
\end{aligned}$$

Os cálculos das integrais acima foram expostos no Apêndice A para não sobrecarregar o texto com mais contas, tornando-o mais fluído e compreensível, aconselhamos que o apêndice A seja lido numa segunda leitura ou após o término do texto principal. Para fora da casca esférica temos:

$$P_{1e} = \int_S \frac{dM_2}{s} = \frac{M_2}{z}$$

$$P_{2e} = \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 = \frac{M_2}{3z^3} (3z^2 - 2R_2^2)$$

$$P_{3e} = \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 = \frac{2R_2^2}{3z^3} M_2$$

$$P_{4e} = -\frac{R_2}{3z^2} M_2$$

$$P_{5e} = \frac{M_2}{3z}$$

Enquanto que no interior teremos:

$$P_{1i} = \int_S \frac{dM_2}{s} = \frac{M_2}{R_2}$$

$$P_{2i} = \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 = \frac{M_2}{3R_2}$$

$$P_{3i} = \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 = \frac{2M_2}{3R_2}$$

$$P_{4i} = -\frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z$$

$$P_{5i} = \frac{M_2}{R_2^3} \left[R_2^2 - \frac{2}{3} z^2 \right]$$

O leitor atento poderá perceber que no intervalo de integração o sinal do vetor unitário com origem no centro da circunferência e orientado em direção à partícula \hat{z} não é constante. Como é possível ver a partir das três configurações diferenciáveis abaixo, nas imagens \hat{z}' é o vetor unitário com origem em S_2 e orientado em direção à partícula, usado para dar uma referência:

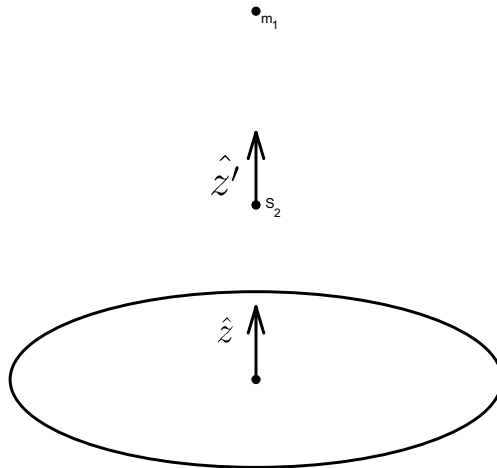


Figura 1.15. Configuração 1.

Vendo a Figura 1.15 acima podemos perceber que o centro da casca esférica está entre a circunferência dM_2 e a partícula m_1 . Nessa configuração o vetor \hat{z} aponta na mesma direção que \hat{z}' .

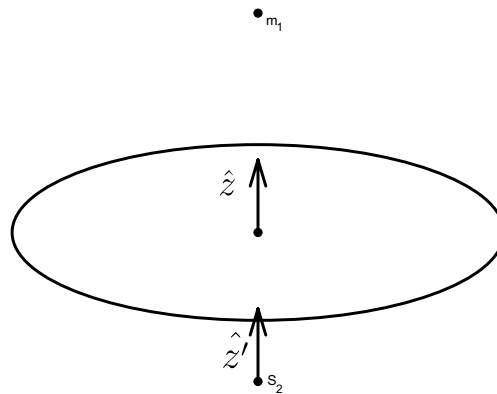


Figura 1.16. Configuração 2.

Vendo a Figura 1.16 entenderemos que a circunferência dM_2 está entre o centro da casca esférica e a partícula m_1 . Nessa configuração novamente o vetor \hat{z} aponta na mesma direção que \hat{z}' .

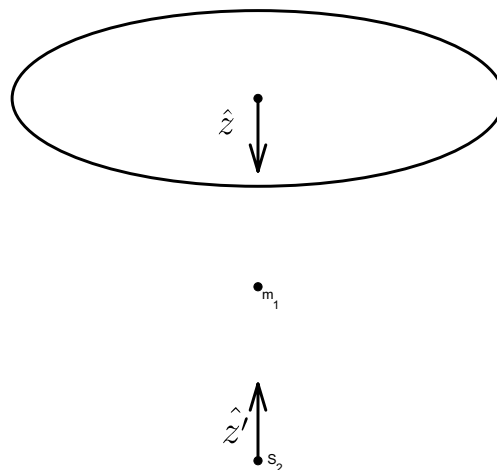


Figura 1.17. Configuração 3.

Na configuração da Figura 1.17 a partícula m_1 está entre o centro da casca esférica e a circunferência dM_2 . Agora o vetor \hat{z} aponta na direção contrária que \hat{z}' .

É possível ver que enquanto \hat{z}' não altera durante o processo de integração \hat{z} muda, o que impossibilita em tese, considerar $\hat{z}' = \hat{z}$, ou seja, desprezar as dificuldades apresentadas acima e considerar que a partir da retirada de \hat{z} da integral ele passará a representar \hat{z}' . Isso impossibilitaria a retirada deste vetor das integrais, tornando falso nosso passo matemático não explícito durante a determinação de I_1' . Essa realidade não é sequer mencionada no Typler [13] durante o cálculo da força gravitacional newtoniana que uma casca esférica exerce sobre uma partícula em seu interior.

O motivo para isso é o de que o resultado final não é alterado para as relações e igualdades oferecidas neste trabalho. A justificativa não será apresentada nesse trabalho, tendo em vista que é relativamente extensa, pois teríamos que analisar cada uma das identidades usadas nas

três configurações possíveis, abrir o intervalo de integração em partes substituindo seus valores correspondente a cada um deles e realizar as simplificações necessárias em todas as integrais.

O leitor rigoroso poderá verificar por conta própria analisando os valores de k , r , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \theta$ e \hat{z} durante todo o intervalo de integração para cada uma das integrais e executar as ações descritas acima. O resultado será o mesmo e é possível demonstrá-lo mas também é maçante. Acreditamos que essa escolha não diminuirá a segurança que o leitor terá sobre a validade das passagens seguintes, caso ele venha a estudar um pouco acerca do que foi afirmado acima.

1.2.2 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Casca Esférica

Substituindo os valores das integrais obtidas no Apêndice A para o caso da partícula no exterior da casca esférica, teremos que I'_{1e} será dado por:

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3z^3} (3z^2 - 2R_2^2) + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2 \\
&- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{M_2}{3z^3} (3z^2 - 2R_2^2) \right. \\
&+ \left. \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2 \right] \\
&+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2 \\
&+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3z^3} (3z^2 - 2R_2^2) + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2 \\
&+ 2\dot{R}_2 ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{R_2}{3z^2} M_2 + \dot{R}_2^2 \frac{M_2}{3z}
\end{aligned}$$

Colocando termos em evidência e rearranjando:

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{1}{3z^2} (3z^2 - 2R_2^2) + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \frac{R_2^2}{3z^2} \right. \\
&- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{R_2^2}{3z^2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{1}{3z^2} (3z^2 - 2R_2^2) \right. \\
&+ \left. \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \frac{R_2^2}{3z^2} \right] \\
&+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{R_2^2}{3z^2} + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{R_2^2}{3z^2} \\
&+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{1}{3z^2} (3z^2 - 2R_2^2) + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \frac{R_2^2}{3z^2} \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{2R_2^2}{3z^2} + \vec{V}_{12}^2 \frac{R_2^2}{3z^2} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \right. \\
&- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{R_2^2}{3z^2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{2R_2^2}{3z^2} \right. \\
&+ \left. \left. \vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \frac{R_2^2}{3z^2} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{R_2^2}{3z^2} \right] \right. \\
&+ \left. \vec{W}_2^2 z^2 \frac{R_2^2}{3z^2} - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \frac{R_2^2}{3z^2} + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{R_2^2}{3z^2} \right. \\
&+ \left. ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{2R_2^2}{3z^2} + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \frac{R_2^2}{3z^2} - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \right. \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{R_2^2}{z^2} + \vec{V}_{12}^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \right. \\
&- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) + \vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \right] \frac{R_2^2}{3z^2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \\
&- (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{R_2^2}{z^2} \left. \right] + \vec{W}_2^2 z^2 \frac{R_2^2}{3z^2} - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \\
&+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{2R_2^2}{3z^2} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{R_2^2}{z^2} \\
&+ (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \frac{R_2^2}{3z^2} + \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{R_2^2}{z^2} + \vec{V}_{12}^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \right. \\
&- 2(\vec{V}_{12} \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{z}) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))) \frac{R_2^2}{3z^2} - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \\
&+ 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{R_2^2}{z^2} + \vec{W}_2^2 z^2 \frac{R_2^2}{3z^2} - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \\
&+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{2R_2^2}{3z^2} - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{R_2^2}{z^2} + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \frac{R_2^2}{3z^2} \\
&+ \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right. \\
&+ \frac{R_2^2}{z^2} \left[-(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + \frac{1}{3} \vec{V}_{12}^2 - \frac{2}{3} (\vec{V}_{12} \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{z}) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))) \right. \\
&+ 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) + \frac{1}{3} \vec{W}_2^2 z^2 - \frac{1}{3} (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \\
&+ \left. \left. \frac{2}{3} ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) - 3((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 + \frac{1}{3} (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \right] \right. \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot \vec{V}_{12} - \hat{z} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \right]^2 \right. \\
&+ \frac{R_2^2}{3z^2} \left[-3(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + 3 \cdot 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z} - 3((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right. \\
&+ \vec{V}_{12}^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \\
&+ \left. \vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \right] \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right]^2 \right. \\
&+ \frac{R_2^2}{3z^2} \left[-3 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z} + ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \right. \\
&+ \vec{V}_{12}^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \\
&+ \left. \vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \right] \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right]^2 + \frac{R_2^2}{3z^2} \left[-3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right]^2 \right. \right. \\
&+ (\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \\
&+ \left. \left. \vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \right] \right. \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

É possível simplificar ainda mais a expressão acima percebendo a seguinte igualdade:

$$\vec{W}_2 = (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})\hat{z} + (\vec{W}_2 \cdot \hat{i})\hat{i}$$

Pois tomando o produto vetorial pelo lado direito com o vetor \hat{z} :

$$\vec{W}_2 \times \hat{z} = (\vec{W}_2 \cdot \hat{i})\hat{i} \times \hat{z} = -(\vec{W}_2 \cdot \hat{i})\hat{j}$$

$$(\vec{W}_2 \times \hat{z})^2 = (\vec{W}_2 \cdot \hat{i})^2$$

Mas como:

$$(\vec{W}_2)^2 = (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2 + (\vec{W}_2 \cdot \hat{i})^2$$

$$(\vec{W}_2 \cdot \hat{i})^2 = (\vec{W}_2)^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2$$

Substituindo essa última relação na expressão que efetuamos o produto vetorial:

$$(\vec{W}_2 \times \hat{z})^2 = (\vec{W}_2)^2 - (\vec{W}_2 \cdot \hat{z})^2$$

Por fim basta multiplicar ambos os lados por z^2 :

$$z^2(\vec{W}_2 \times \hat{z})^2 = \vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 = (\vec{W}_2 \times \vec{z})^2$$

Essa componente está contida na penúltima linha de I'_{1e} dada logo acima, logo usando-a chegamos a:

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right]^2 + \frac{R_2^2}{3z^2} \left[-3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right] \right]^2 \right. \\
&+ \left. (\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) + (\vec{W}_2 \times \vec{z})^2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \right] \\
&+ \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right]^2 + \frac{R_2^2}{3z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 \right. \right. \\
&- \left. \left. 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right] \right]^2 + \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\hat{z} \cdot (-(\vec{W}_2 \times \vec{z})) = 0$$

Então:

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{z}) - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right]^2 + \frac{R_2^2}{3z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 \right. \right. \\
&- \left. \left. 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{z}) - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right] \right]^2 + \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_{1e} &= \frac{M_2}{z} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 + \frac{R_2^2}{3z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 \right. \right. \\
&- \left. \left. 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right] \right]^2 + \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

Agora que sabemos o valor de I'_{1e} restará a sua substituição na expressão da energia potencial entre casca esférica e partícula (1.42):

$$U_{1Se} = -H_g m_1 \left(P_{1e} - \frac{\xi}{2c^2} I'_{1e} \right)$$

Para que possamos na seção ‘Esfera Maciça/Partícula’ determinar a energia entre esfera maciça e partícula.

Resultado Final

Para a energia entre uma casca esférica contendo expansão/contração radial com uma partícula no seu exterior teremos:

$$\begin{aligned}
U_{1S} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left\{ \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \right. \\
&+ \frac{R_2^2}{3z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \\
&+ \left. \left. \dot{R}_2 \frac{2R_2}{3z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + \frac{\dot{R}_2^2}{3} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{1S} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \\
& - \frac{\xi}{6c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \\
& \left. + \frac{\xi}{6c^2} \left[-2\dot{R}_2 \frac{R_2}{z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) - \dot{R}_2^2 \right] \right) \quad (1.43)
\end{aligned}$$

Ver Figura 1.18 abaixo para ter uma visualização do caso estudado nesta subseção:

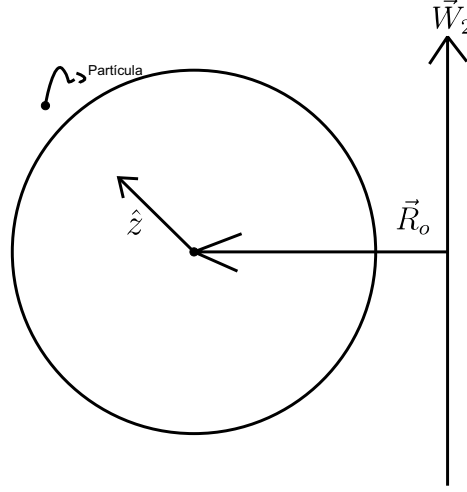


Figura 1.18. Casca Esférica e Partícula no exterior.

Restando apenas o caso em que partícula está no interior, que será resolvido logo adiante. É possível perceber também que ignorando os termos de expansão:

$$\begin{aligned}
U_{1S} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \\
& - \frac{\xi}{6c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \left. \right)
\end{aligned}$$

Podemos ver que no caso em a casca esférica não rotaciona:

$$U_{1S} = -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 - \frac{\xi}{6c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[\vec{V}_{12}^2 - 3(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \right] \right)$$

Temos exatamente o mesmo resultado que aquele obtido por Assis [3] em seu apêndice B para uma casca sem rotação mas com movimento linear. Pro caso em que ela não tem movimento linear mas rotaciona em torno de algum eixo que passa pelo seu centro:

$$\begin{aligned}
U_{1S} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z}) \right]^2 - \frac{\xi}{6c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z})^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z}) \right]^2 \right] \right)
\end{aligned}$$

Novamente sendo precisamente igual ao resultado obtido por Assis no mesmo apêndice mas agora para um casca com rotação em torno de seu centro e sem movimento linear.

1.2.3 Cálculo da Partícula no Interior de Uma Casca Esférica

A Figura 1.19 abaixo faz referência ao caso desta subseção, ou seja, do caso em que a partícula está no interior da casca esférica. Partindo então para o cálculo de I'_{1i} , substituindo os resultados obtidos no Apêndice A:

$$\begin{aligned}
 I'_{1i} &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3R_2} + (\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2) \frac{1}{2} \frac{2M_2}{3R_2} \\
 &- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} \frac{2M_2}{3R_2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{M_2}{3R_2} \right. \\
 &+ \left. \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \frac{1}{2} \frac{2M_2}{3R_2} \right] \\
 &+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{1}{2} \frac{2M_2}{3R_2} + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{1}{2} \frac{2M_2}{3R_2} \\
 &+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3R_2} + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \frac{1}{2} \frac{2M_2}{3R_2} \\
 &+ 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z + \dot{R}_2^2 \frac{M_2}{R_2^3} \left[R_2^2 - \frac{2}{3} z^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I'_{1i} &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3R_2} + \vec{V}_{12}^2 \frac{M_2}{3R_2} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3R_2} \\
 &- 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{M_2}{3R_2} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \frac{M_2}{3R_2} \right. \\
 &+ \left. \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z}) \right] \frac{M_2}{3R_2} \right] \\
 &+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{M_2}{3R_2} + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{M_2}{3R_2} \\
 &+ ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \frac{M_2}{3R_2} + \left[(\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 - ((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot \hat{z})^2 \right] \frac{M_2}{3R_2} \\
 &+ 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z + \dot{R}_2^2 \frac{M_2}{R_2^3} \left[R_2^2 - \frac{2}{3} z^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I'_{1i} &= \vec{V}_{12}^2 \frac{M_2}{3R_2} - 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{M_2}{3R_2} + \vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \frac{M_2}{3R_2} \right] \\
 &+ \left[\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 \right] \frac{M_2}{3R_2} + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) \frac{M_2}{3R_2} + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \frac{M_2}{3R_2} \\
 &+ 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z + \dot{R}_2^2 \frac{M_2}{R_2^3} \left[R_2^2 - \frac{2}{3} z^2 \right]
 \end{aligned}$$

Usando a relação dita na subseção passada, ou seja:

$$\vec{W}_2^2 z^2 - (\vec{W}_2 \cdot \vec{z})^2 = (\vec{W}_2 \times \vec{z})^2$$

E colocando em evidência $\frac{M_2}{3R_2}$:

$$\begin{aligned}
 I'_{1i} &= \frac{M_2}{3R_2} \left\{ \vec{V}_{12}^2 - 2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) + \vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \right] \right. \\
 &+ (\vec{W}_2 \times \vec{z})^2 + 2((\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \cdot (\vec{W}_2 \times \vec{z})) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)^2 \\
 &+ \left. 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{z}{R_2} + 3 \frac{\dot{R}_2^2}{R_2^2} \left[R_2^2 - \frac{2}{3} z^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$I'_{1i} = \frac{M_2}{3R_2} \left\{ \vec{V}_{12}^2 - 2 \left[\vec{V}_{12} \cdot ((\vec{W}_2 \times \vec{z}) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)) \right] + ((\vec{W}_2 \times \vec{z}) + (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 \right. \\ \left. + 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{z}{R_2} + 3\dot{R}_2^2 - 2\dot{R}_2^2 \frac{z^2}{R_2^2} \right\}$$

$$I'_{1i} = \frac{M_2}{3R_2} \left\{ \vec{V}_{12}^2 - 2 \left[\vec{V}_{12} \cdot (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o)) \right] + (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 \right. \\ \left. + 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{z}{R_2} + 3\dot{R}_2^2 - 2\dot{R}_2^2 \frac{z^2}{R_2^2} \right\}$$

$$I'_{1i} = \frac{M_2}{3R_2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o)))^2 \right. \\ \left. + 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{z}{R_2} + 3\dot{R}_2^2 - 2\dot{R}_2^2 \frac{z^2}{R_2^2} \right\}$$

Restando sua substituição na expressão da energia potencial entre casca esférica e partícula para determinar a energia potencial entre casca esférica e partícula no interior.

Resultado Final

Realizando a substituição da expressão obtida no final da subseção passada na expressão da energia potencial desejada:

$$U_{1S} = -H_g m_1 \left(P_{1i} - \frac{\xi}{2c^2} I'_{1i} \right) \\ U_{1S} = -H_g m_1 \left(\frac{M_2}{R_2} - \frac{\xi}{2c^2} \frac{M_2}{3R_2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o)))^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2\dot{R}_2([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{z}{R_2} + 3\dot{R}_2^2 - 2\dot{R}_2^2 \frac{z^2}{R_2^2} \right\} \right) \\ U_{1S} = -H_g m_1 \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o)))^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2\frac{\dot{R}_2}{R_2}([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) + 3\dot{R}_2^2 - 2\frac{\dot{R}_2^2}{R_2^2} z^2 \right\} \right) \quad (1.44)$$

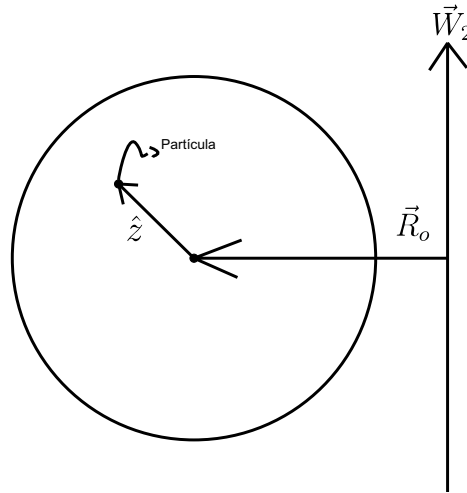


Figura 1.19. Casca Esférica e Partícula no interior.

É possível ver que ignorando o termo de expansão teríamos:

$$U_{1S} = -\frac{H_g m_1 M_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ \left(\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o)) \right)^2 \right\} \right)$$

Para uma casca esférica sem rotação:

$$U_{1S} = -\frac{H_g m_1 M_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \vec{V}_{12}^2 \right)$$

Correspondendo ao valor obtido por Assis para um casca esférica sem expansão e sem rotação com partícula em seu interior. Quando a casca esférica não possui movimento lineares e rotaciona em torno de seu centro:

$$U_{1S} = -\frac{H_g m_1 M_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left(\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z} \right)^2 \right)$$

Novamente temos uma igualdade entre o resultado de Assis e o nosso para o caso escolhido.

1.3 Esfera Maciça/Partícula

1.3.1 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante

A energia potencial entre uma esfera maciça e uma partícula quando a partícula está no exterior da esfera maciça (Ver Figura 1.20) será dada pela integração da energia entre casca esférica e partícula, novamente, quando essa última está fora da casca (Ver equação 1.43), portanto, supondo que \dot{R}_2 não depende do elemento de massa dM_2 e integrando a expressão da energia potencial entre casca esférica e partícula no exterior:

$$\begin{aligned} U_{1B} &= \int_B -\frac{H_g m_1 dM_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \\ &\quad - \frac{\xi}{6c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{6c^2} \left[-2\dot{R}_2 \frac{R_2}{z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) - \dot{R}_2^2 \right] \right) \\ U_{1B} &= -\frac{H_g m_1}{z} \left(\int_B dM_2 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \int_B dM_2 \right. \\ &\quad - \frac{\xi}{6c^2} \frac{1}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \int_B R_2^2 dM_2 \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{6c^2} \left[-2\dot{R}_2 \frac{1}{z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \int_B R_2 dM_2 - \dot{R}_2^2 \int_B dM_2 \right] \right) \end{aligned}$$

A integral em R_2^2 pode ser resolvida via:

$$\int_B R_2^2 dM_2 = \int_0^{R_2} R_2^2 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi \rho_2 \int_0^{R_2} R_2^4 dR_2 = 4\pi \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} \frac{R_2^5}{5} = \frac{3}{5} M_2 R_2^2$$

Já a integral em R_2 será:

$$\int_B R_2 dM_2 = \int_0^{R_2} R_2 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi \rho_2 \int_0^{R_2} R_2^3 dR_2 = 4\pi \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} \frac{R_2^4}{4} = \frac{3}{4} M_2 R_2$$

Logo:

$$\begin{aligned} U_{1B} &= -\frac{H_g m_1}{z} \left(M_2 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 M_2 \right. \\ &\quad - \frac{\xi}{6c^2} \frac{1}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \frac{3}{5} M_2 R_2^2 \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{6c^2} \left[-2\dot{R}_2 \frac{1}{z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) \frac{3}{4} M_2 R_2 - \dot{R}_2^2 M_2 \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{1B} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \\ &\quad - \frac{\xi}{10c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{6c^2} \left[-\frac{3}{2} \dot{R}_2 \frac{R_2}{z} ([\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o)] \cdot \hat{z}) - \dot{R}_2^2 \right] \right) \end{aligned}$$

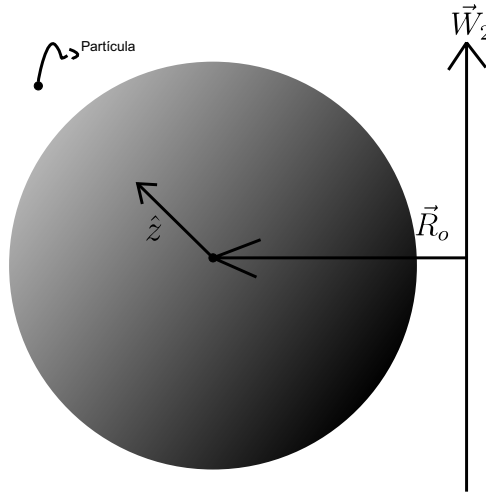


Figura 1.20. Esfera Maciça e Partícula no exterior.

A expressão acima é para qualquer caso, mas para uma esfera maciça sem expansão:

$$\begin{aligned} U_{1B} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi}{10c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_{12} - \vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times (\vec{z} + \vec{R}_o))) \right]^2 \right] \right) \end{aligned}$$

E sem rotação:

$$U_{1B} = -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 - \frac{\xi}{10c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[\vec{V}_{12}^2 - 3(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \right] \right)$$

Assis não chegou a realizar cálculos para este caso, portanto é um resultado original de nosso trabalho. Olhando para o caso em que a esfera maciça não tem movimentos lineares mas rotaciona em torno de seu eixo:

$$U_{1B} = -\frac{H_g m_1 M_2}{z} \left(1 - \frac{\xi}{2c^2} \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z}) \right]^2 \right) - \frac{\xi}{10c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left[(\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z})^2 - 3 \left[\hat{z} \cdot (\vec{V}_1 - \vec{W}_2 \times \vec{z}) \right]^2 \right]$$

Partiremos agora para o cálculo da energia potencial entre uma esfera maciça e uma partícula no centro quando a expansão se dá de forma constante por toda a esfera maciça.

1.3.2 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante

Para determinar a energia potencial entre uma esfera maciça e uma partícula no centro (Ver Figura 1.21), precisamos fazer $z = 0$ na expressão da energia potencial entre casca esférica e partícula no interior (1.44), ou seja, determinando a expressão no caso em que a partícula está no centro da casca esférica teremos:

$$U_{1S} = -H_g m_1 \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 + 3\dot{R}_2^2 \right\} \right)$$

Integrando ela até um certo raio R_2 , supondo que a esfera maciça possui densidade volumétrica de massa uniforme, teremos:

$$U_{1B} = \int_B -H_g m_1 \frac{dM_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 + 3\dot{R}_2^2 \right\} \right)$$

$$U_{1B} = -H_g m_1 \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 + 3\dot{R}_2^2 \right\} \right) \int_B \frac{dM_2}{R_2}$$

Usando:

$$dM_2 = 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2$$

A integral ficará:

$$\int_B \frac{dM_2}{R_2} = 4\pi \rho_2 \int_B R_2 dR_2 = 4\pi \rho_2 \left[\frac{R_2^2}{2} \right]_0^{R_2} = 2\pi \rho_2 R_2^2$$

Logo:

$$U_{1B} = -H_g m_1 2\pi \rho_2 R_2^2 \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 + 3\dot{R}_2^2 \right\} \right)$$

A expressão de cima será aquela usada para analisar a energia potencial que o universo gera em uma partícula no centro dele, para isso trocaremos $\rho_2 \rightarrow \rho_u$, $R_2 \rightarrow R_u$ e $\dot{R}_2^2 \rightarrow \dot{R}_u^2$, por fim colocaremos em evidência $\frac{\xi}{3c^2}$ e rearranjaremos alguns termos:

$$U_{1B} = -m_1 \frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2} \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{2} \dot{R}_u^2 - \frac{1}{2} (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 \right)$$

Definiremos para facilitar a manipulação:

$$\Phi = \frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}$$

Determinando:

$$U_{1B} = -m_1 \Phi \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{2} \dot{R}_u^2 - \frac{1}{2} (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 \right) \quad (1.45)$$

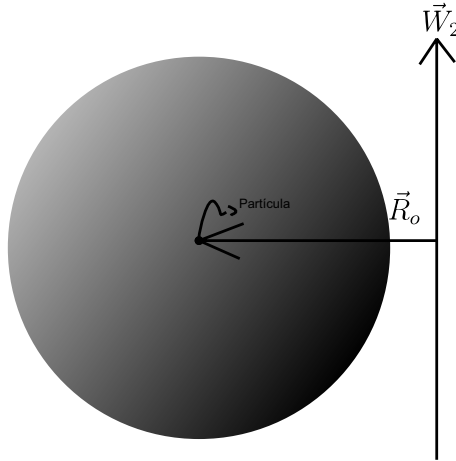


Figura 1.21. Esfera Maciça e Partícula no centro.

Se a esfera maciça não expande e não tem rotação então:

$$U_{1B} = -m_1 \Phi \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \right)$$

Que equivale ao resultado por Assis [3] na seção 17.6.5 para este caso. Já quando a esfera maciça rotaciona em torno de seu eixo:

$$U_{1B} = -m_1 \Phi \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \right)$$

Tendo o mesmo resultado que do caso anterior, pois a parte da rotação só não anulará caso a rotação ocorra por um eixo que não passa pelo centro da esfera maciça, que é o mesmo que dizer que o eixo não passa pela partícula já que ela está no centro da esfera maciça.

O resultado diverge daquele obtido por Assis para esse caso pois ele centra a esfera maciça no referencial e razão pela qual ele assim fez está explicada na seção 3.1.2. Assis centrou a esfera na origem do referencial que está analisando a partícula, mas ao fazer isso não poderia ter realizado a integração de 0 à R_u sem abrir o intervalo de integração usando as expressões correspondentes a cada intervalo.

O resultado final não retornaria às expressões da mecânica clássica. Além disso teríamos expressões que não seriam invariante por transformada de Galileu ao passarmos de um referencial para outro pois teríamos, a cada mudança de referencial, uma nova esfera centrada no outro referencial para seguir seu modo de raciocínio utilizado.

Não pretendemos nos estender aqui criticando suas escolhas pois a seção 3.1.2 foi feita justamente para isso. E por esse motivo passaremos ao caso da esfera maciça expandindo conforme a lei de Hubble.

1.3.3 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante

Dados experimentais indicam que a expansão do universo segue a Lei de Hubble-Lemaître [7], ou seja:

$$\dot{R}_2 = H_o R_2$$

Dessa forma \dot{R}_2 não pode mais ser considerada independente do elemento de massa dM_2 . Disso concluíse que, ao substituirmos a relação acima na expressão da energia potencial durante a integração efetuada na subseção passada teremos, para o caso de uma esfera maciça e partícula no centro (Ver Figura 1.22 abaixo):

$$U_{1B} = \int_B -H_g m_1 \frac{dM_2}{R_2} \left(1 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 + 3\dot{R}_2^2 \right\} \right)$$

$$U_{1B} = -H_g m_1 \left(\int_B \frac{dM_2}{R_2} - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 \int_B \frac{dM_2}{R_2} + 3 \int_B \dot{R}_2^2 \frac{dM_2}{R_2} \right\} \right)$$

Já sabemos que:

$$\int_B \frac{dM_2}{R_2} = 4\pi\rho_2 \int_B R_2 dR_2 = 4\pi\rho_2 \left[\frac{R_2^2}{2} \right]_0^{R_2} = 2\pi\rho_2 R_2^2$$

Restando:

$$\int_B \dot{R}_2^2 \frac{dM_2}{R_2} = \int_B H_o^2 R_2^2 \frac{4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2}{R_2} = 4\pi\rho_2 H_o^2 \int_B R_3^2 dR_2 = 4\pi\rho_2 H_o^2 \frac{1}{4} R_2^4 = 2\pi\rho_2 H_o^2 \frac{1}{2} R_2^4$$

Logo:

$$U_{1B} = -H_g m_1 \left(2\pi\rho_2 R_2^2 - \frac{\xi}{6c^2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 2\pi\rho_2 R_2^2 + 2\pi\rho_2 H_o^2 \frac{3}{2} R_2^4 \right\} \right)$$

A expressão de cima será aquela usada para analisar a energia potencial que o universo gera em uma partícula no centro dele, para isso trocaremos $\rho_2 \rightarrow \rho_u$, $R_2 \rightarrow R_u$ e $\dot{R}_2 \rightarrow \dot{R}_u$, por fim colocaremos em evidência $\frac{\xi}{3c^2}$ e rearranjaremos alguns termos:

$$U_{1B} = -\frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2} m_1 \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{1}{2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 + H_o^2 \frac{3}{2} R_u^2 \right\} \right)$$

Lembrando de:

$$\Phi = \frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}$$

Temos:

$$U_{1B} = -\Phi m_1 \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{4} H_o^2 R_u^2 - \frac{1}{2} \left\{ (\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o))^2 \right\} \right) \quad (1.46)$$

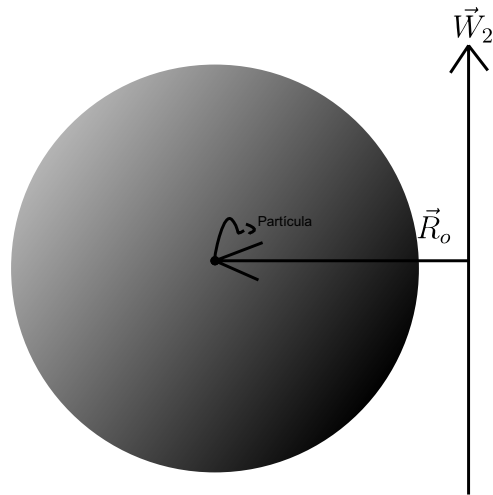


Figura 1.22. Esfera Maciça e Partícula no centro.

Assim como no caso da expansão constante, se ignoramos a parte da expansão e comparamos com os casos trabalhos por Assis chegamos às mesmas semelhanças para o caso sem rotação. Mas com rotação caímos no mesmo problema no qual a rotação precisa acontecer fora do centro da partícula para que o termo rotacional permaneça presente na equação. Uma resposta pra essa divergência foi apresentada na seção 3.1.2.

Capítulo 2

Cálculo da Força Gravitacional de Weber

2.1 Circunferência/Partícula

2.1.1 Comentários Iniciais

Antes de tudo é necessário deixar claro que nessa seção reutilizamos as mesmas letras que foram usadas na seção anterior para realizar definições tendo como fim o de simplificar as expressões e permitir uma resolução por partes. Como são seções distintas acreditamos que não é difícil evitar a confusão entre as diferentes definições. Dito isso, o leitor deve recorrer a essa seção sempre que houver uma ambiguidade.

A força de weber gravitacional que uma partícula 2 exerce sobre 1 pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{21} = -H_g m_1 m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} + \frac{H_g m_1 m_2 \xi}{2c^2} \frac{\dot{r}_{12}^2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} - \frac{H_g m_1 m_2 \xi}{c^2} \frac{r_{12} \ddot{r}_{12} \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

Na qual H_g é uma constante gravitacional, m_1 e m_2 são as massas das partículas 1 e 2 respectivamente, r_{12} é a distância entre elas, ξ é um constante que terá futuramente o valor de 6, pois este é o valor necessário para deduzir a precessão correta do periélio do mercúrio, c é a velocidade da luz e \dot{r}_{12} é a derivada temporal da distância entre as partículas também chamada de velocidade radial relativa, \ddot{r}_{12} é a derivada segunda temporal da distância relativa das partículas, também chamada de aceleração radial relativa e \hat{r}_{12} é um vetor unitário dado na direção da linha reta que une as partículas orientado para a partícula 1 com origem em 2.

Como é uma força bastante extensa iremos definir três funções vetoriais \vec{F}_{21N} , \vec{F}_{21V} e \vec{F}_{21A} :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21N} &= -H_g m_1 m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \\ \vec{F}_{21V} &= \frac{H_g m_1 m_2 \xi}{2c^2} \frac{\dot{r}_{12}^2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \\ \vec{F}_{21A} &= -\frac{H_g m_1 m_2 \xi}{c^2} \frac{r_{12} \ddot{r}_{12} \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \\ \vec{F}_{21} &= \vec{F}_{21N} + \vec{F}_{21V} + \vec{F}_{21A}\end{aligned}$$

O termo \vec{F}_{21N} é semelhante à força gravitacional newtoniana, e por esse motivo recebeu o subíndice N , o termo \vec{F}_{21V} é diferenciada das demais em virtude de envolver apenas a velocidade radial relativa entre os pontos materiais e por isso recebeu seu subíndice V , o subíndice A foi usado para caracterizar a força \vec{F}_{21A} pois ela é a única que contém apenas a aceleração radial relativa.

Como já foi argumentado nas seções que envolvem o cálculo da energia potencial, é interessante executar o cálculo da força entre partícula e circunferência quando a partícula está contida em algum ponto da reta perpendicular ao plano da circunferência e que passa pelo centro dela para obter posteriormente a interação entre uma casca esférica e uma partícula.

Contendo esse objetivo em vista, a força que cada parte da circunferência exerce sobre a partícula 1 é dada pelas equações acima com a simples substituição de m_2 por dm_2 e se somarmos a contribuição que cada parte da circunferência exerce sobre a partícula 1, ou seja, recorreremos ao processo de integração, teremos no final as seguintes expressões para as forças entre a circunferência e a partícula 1:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{C1N} &= \int_C -H_g m_1 dm_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \\ \vec{F}_{C1V} &= \int_C \frac{H_g m_1 dm_2 \xi}{2c^2} \frac{\dot{r}_{12}^2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \\ \vec{F}_{C1A} &= \int_C -\frac{H_g m_1 dm_2 \xi}{c^2} \frac{r_{12} \ddot{r}_{12} \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\end{aligned}$$

Sabendo que para o caso assumido r_{12} é o mesmo para todos os elementos de massa dm_2 , definiremos seu valor como s , o retiraremos de todas as integrais e suporemos H_g , m_1 , ξ e c não sendo função de m_2 :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{C1N} &= -\frac{H_g m_1}{s^2} \int_C \hat{r}_{12} dm_2 \\ \vec{F}_{C1V} &= \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2 s^2} \int_C \dot{r}_{12}^2 \hat{r}_{12} dm_2 \\ \vec{F}_{C1A} &= -\frac{H_g m_1 \xi}{c^2 s} \int_C \ddot{r}_{12} \hat{r}_{12} dm_2\end{aligned}$$

As integrais remanescentes serão denotadas conforme abaixo para facilitar a exposição dos cálculos:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_C \hat{r}_{12} dm_2 \\ I_2 &= \int_C \dot{r}_{12}^2 \hat{r}_{12} dm_2 \\ I_3 &= \int_C \ddot{r}_{12} \hat{r}_{12} dm_2\end{aligned}$$

Fazendo com que:

$$\vec{F}_{C1N} = -\frac{H_g m_1}{s^2} I_1 \quad (2.1)$$

$$\vec{F}_{C1V} = \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2 s^2} I_2 \quad (2.2)$$

$$\vec{F}_{C1A} = -\frac{H_g m_1 \xi}{c^2 s} I_3 \quad (2.3)$$

Mas para resolvermos as integrais acima precisamos conhecer os termos \dot{r}_{12} , \ddot{r}_{12} , os quais são dados por (Ver Apêndice B):

$$\begin{aligned}\dot{r}_{12} &= \vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12} \\ \ddot{r}_{12} &= \frac{\vec{v}_{12}^2}{r_{12}} - \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} + \hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}\end{aligned}$$

E para determinar seus valores precisamos conhecer obviamente \vec{v}_{12} e \vec{a}_{12} . Definindo \vec{v}_1 como a velocidade da primeira partícula e \vec{v}_2 a velocidade da segunda partícula, então os termos anteriores respeitam as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{12} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{a}_{12} &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2\end{aligned}$$

Como foi dito na introdução, para a força ignoraremos todo e qualquer tipo de movimento rotativo da circunferência, logo caso ela possua velocidade linear \vec{V}_2 , aceleração linear \vec{A}_2 juntamente com uma componente de expansão/contração $\vec{V}_{2exp} = \dot{R}_2 \hat{R}_2$, e se denotarmos \vec{V}_1 e \vec{A}_1 para a velocidade e a aceleração da partícula 1 respectivamente, então:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{V}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{V}_2 + \dot{R}_2 \hat{R}_2 \\ \vec{a}_1 &= \vec{A}_1 \\ \vec{a}_2 &= \vec{A}_2 + \ddot{R}_2 \hat{R}_2\end{aligned}$$

Permitindo obter o fim desejado:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{12} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{v}_{12} &= \vec{V}_1 - \vec{V}_2 - \dot{R}_2 \hat{R}_2 \\ \vec{a}_{12} &= \vec{A}_1 - \vec{A}_2 - \ddot{R}_2 \hat{R}_2\end{aligned}$$

Fazendo as seguintes definições:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 - \vec{V}_2 &= \vec{V}_{12} \\ \vec{A}_1 - \vec{A}_2 &= \vec{A}_{12}\end{aligned}$$

Podemos reescrever \vec{v}_{12} e \vec{a}_{12} de uma forma um pouco mais agradável:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{12} &= \vec{V}_{12} - \dot{R}_2 \hat{R}_2 \\ \vec{a}_{12} &= \vec{A}_{12} - \ddot{R}_2 \hat{R}_2\end{aligned}$$

Restando apenas executar a substituição de tais relações em \dot{r}_{12} e \ddot{r}_{12} :

$$\begin{aligned}\dot{r}_{12} &= (\vec{V}_{12} - \dot{R}_2 \hat{R}_2) \cdot \hat{r}_{12} = \vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - \dot{R}_2 (\hat{R}_2 \cdot \hat{r}_{12}) \\ \ddot{r}_{12} &= \frac{(\vec{V}_{12} - \dot{R}_2 \hat{R}_2) \cdot (\vec{V}_{12} - \dot{R}_2 \hat{R}_2)}{r_{12}} - \frac{(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - \dot{R}_2 (\hat{R}_2 \cdot \hat{r}_{12}))^2}{r_{12}} + \hat{r}_{12} \cdot (\vec{A}_{12} - \ddot{R}_2 \hat{R}_2)\end{aligned}$$

Enquanto a velocidade radial relativa é razoavelmente simples, a aceleração radial já não é bem assim. Em virtude disso lembraremos de $(\hat{R}_2 \cdot \hat{r}_{12}) = \cos \beta$ e abriremos as expressões para que ao no momento em que ocorrer a substituição em I_2 e I_3 sejamos rapidamente capazes de simplificá-la. Os passos matemáticos estarão explicitados abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{r}_{12} &= \vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - \dot{R}_2 \cos \beta \\ \ddot{r}_{12} &= \frac{\vec{V}_{12}^2 - 2\dot{R}_2 (\hat{R}_2 \cdot \vec{V}_{12}) + \dot{R}_2^2}{r_{12}} - \left(\frac{(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 - 2\dot{R}_2 \cos \beta (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{r_{12}} \right) \\ &+ \hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12} - \ddot{R}_2 \cos \beta \\ &= \frac{\vec{V}_{12}^2}{r_{12}} - \frac{2\dot{R}_2 (\hat{R}_2 \cdot \vec{V}_{12})}{r_{12}} + \frac{\dot{R}_2^2}{r_{12}} - \frac{(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2}{r_{12}} + \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})}{r_{12}} - \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{r_{12}} \\ &+ \hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12} - \ddot{R}_2 \cos \beta\end{aligned}$$

Como em I_2 temos \dot{r}_{12}^2 será útil realizar essa operação antes de substituí-la na integral:

$$\dot{r}_{12}^2 = \left(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} - \dot{R}_2 \cos \beta \right)^2 = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})\dot{R}_2 \cos \beta + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta$$

Substituindo os dois membros determinados acima nas integrais I_2 e I_3 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_C \dot{r}_{12}^2 \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 - 2(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})\dot{R}_2 \cos \beta + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta \right] \hat{r}_{12} dm_2 \\ &= \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 \hat{r}_{12} dm_2 - 2\dot{R}_2 \cos \beta \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta \int_C \hat{r}_{12} dm_2 \end{aligned}$$

Executando as seguintes definições:

$$i_1 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.4)$$

$$i_2 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.5)$$

A expressão de I_2 se torna simplesmente:

$$I_2 = i_1 - 2\dot{R}_2 \cos \beta i_2 + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta I_1 \quad (2.6)$$

Quanto a I_3 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_C \ddot{r}_{12} \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C \left[\frac{\vec{V}_{12}^2}{r_{12}} - \frac{2\dot{R}_2(\hat{R}_2 \cdot \vec{V}_{12})}{r_{12}} + \frac{\dot{R}_2^2}{r_{12}} - \frac{(\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2}{r_{12}} \right. \\ &+ \left. \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})}{r_{12}} - \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{r_{12}} + \hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12} - \ddot{R}_2 \cos \beta \right] \hat{r}_{12} dm_2 \\ &= \left[\frac{\vec{V}_{12}^2}{s} \int_C \hat{r}_{12} dm_2 - \frac{2\dot{R}_2}{s} \int_C (\hat{R}_2 \cdot \vec{V}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 + \frac{\dot{R}_2^2}{s} \int_C \hat{r}_{12} dm_2 - \frac{1}{s} \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 \hat{r}_{12} dm_2 \right. \\ &+ \left. \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta}{s} \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 - \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{s} \int_C \hat{r}_{12} dm_2 + \int_C (\hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 \right. \\ &\left. - \ddot{R}_2 \cos \beta \int_C \hat{r}_{12} dm_2 \right] \end{aligned}$$

Reaproveitando as integrais definidas anteriormente e definido agora as seguintes integrais:

$$i_3 = \int_C (\hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.7)$$

$$i_4 = \int_C (\hat{R}_2 \cdot \vec{V}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.8)$$

É possível reescrever I_3 de uma forma bastante amigável em comparação com o que tínhamos até o momento:

$$I_3 = \frac{\vec{V}_{12}^2}{s} I_1 - \frac{2\dot{R}_2}{s} i_4 + \frac{\dot{R}_2^2}{s} I_1 - \frac{1}{s} i_1 + \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta}{s} i_2 - \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{s} I_1 + i_3 - \ddot{R}_2 \cos \beta I_1 \quad (2.9)$$

2.1.2 Cálculo de I_1

Da subseção 1.1.2 temos a equação 1.17:

$$\hat{r}_{12} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}$$

E como $dm_2 = \frac{M_2}{2\pi} d\nu$, podemos prosseguir na resolução da integral de I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_C \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}) \frac{M_2}{2\pi} d\nu \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left(\cos \alpha \hat{z} \int_C d\nu + \sin \alpha \hat{i} \int_C \cos \nu d\nu + \sin \alpha \hat{j} \int_C \sin \nu d\nu \right) \end{aligned}$$

Após a retirada das funções dependentes apenas de α do interior da integral, já que este ângulo é o mesmo para todo e qualquer elemento de massa, e observando os extremos de integração, os quais são 0 e 2π , teremos que as duas últimas integrais serão nulas, concluindo que:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{M_2}{2\pi} \hat{z} \cos \alpha \int_C d\nu = \frac{M_2}{2\pi} \hat{z} \cos \alpha 2\pi = M_2 \cos \alpha \hat{z} \\ I_1 &= M_2 \cos \alpha \hat{z} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Restando a integral de I_2 e I_3 .

2.1.3 Cálculo de I_2

Cálculo de i_1

Da subseção 1.1.2 temos que (1.19):

$$\begin{aligned} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [\sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})] \\ &+ \sin^2 \alpha \cos^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + 2 \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \end{aligned}$$

Logo, substituindo na integral de i_1 (2.4):

$$\begin{aligned} i_1 &= \int_C \left(\cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [\cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})] \right. \\ &+ \sin^2 \alpha \cos^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + 2 \sin^2 \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \\ &\left. + \sin^2 \alpha \sin^2 \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \right) \hat{r}_{12} dm_2 \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 \int_C \hat{r}_{12} dm_2 + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \int_C \cos \nu \hat{r}_{12} dm_2 \\ &+ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2] + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 \int_C \cos^2 \nu \hat{r}_{12} dm_2 \\ &+ 2 \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \cos \nu \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \int_C \sin^2 \nu \hat{r}_{12} dm_2 \end{aligned}$$

Executando as seguintes definições:

$$F_1 = \int_C \cos \nu \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.11)$$

$$F_2 = \int_C \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.12)$$

$$F_3 = \int_C \cos^2 \nu \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.13)$$

$$F_4 = \int_C \cos \nu \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.14)$$

$$F_5 = \int_C \sin^2 \nu \hat{r}_{12} dm_2 \quad (2.15)$$

É possível simplificar a expressão anterior:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 I_1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) F_1 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) F_2] \\ &+ \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 F_3 + 2 \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) F_4 + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 F_5 \end{aligned}$$

Decidimos expor os cálculos dos F_j no apêndice C para diminuir a quantidade de cálculos do texto principal, melhorando a compreensão e leitura dos leitores. Aconselhamos que esse apêndice seja lido no final da leitura completa do texto principal ou numa segunda leitura.

Usando o que foi demonstrado no apêndice C:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 \cos \alpha \hat{z} + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{i} \\ &+ (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{j}] + \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 \frac{M_2}{2} \cos \alpha \hat{z} + 2 \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \vec{0} \\ &+ \sin^2 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 \frac{M_2}{2} \cos \alpha \hat{z} \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos^3 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 \hat{z} + 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j}] \\ &+ \cos \alpha \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \hat{z} [(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2] \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$\vec{V}_{12} = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}$$

É possível concluir que:

$$\vec{V}_{12} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j}$$

Assim como:

$$\vec{V}_{12}^2 = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2$$

$$\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i})^2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})^2$$

Substituindo tais identidades:

$$\begin{aligned} i_1 &= \cos^3 \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2 M_2 \hat{z} + 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) [\vec{V}_{12} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}] \\ &+ \cos \alpha \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \hat{z} [\vec{V}_{12}^2 - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z})^2] \end{aligned}$$

Basta então usar $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, simplificar o máximo possível e inverter a ordem do produto escalar entre os vetores para obter uma expressão no molde apresentado no livro de Assis:

$$\begin{aligned}
i_1 &= \cos^3 \alpha (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 M_2 \hat{z} + 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \frac{M_2}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) [\vec{V}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z}] \\
&+ \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \frac{M_2}{2} \hat{z} \left[\vec{V}_{12}^2 - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \right] \\
&= \cos^3 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} + (\cos \alpha M_2 - \cos^3 \alpha M_2) [(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z}] \\
&+ \left(\cos \alpha \frac{M_2}{2} - \cos^3 \alpha \frac{M_2}{2} \right) \left[\vec{V}_{12}^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \\
&= \cos^3 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} + \cos \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \cos \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \\
&- \cos^3 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \cos^3 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \\
&+ \cos \alpha \frac{M_2}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \cos \alpha \frac{M_2}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \cos^3 \alpha \frac{M_2}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \cos^3 \alpha \frac{M_2}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \\
&= \cos^3 \alpha M_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{1}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \\
&+ \cos \alpha M_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{1}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \\
&= \cos^3 \alpha M_2 \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \\
&+ \cos \alpha M_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right]
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
i_1 &= \cos^3 \alpha M_2 \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \\
&+ \cos \alpha M_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Cálculo de i_2

Lembrando da equação da integral de i_2 obtida até o momento (2.5):

$$i_2 = \int_C (\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2$$

Somando ao conhecimento da seção 1.1.2 (1.18):

$$\vec{V}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j})$$

Temos:

$$i_2 = \int_C \left[\cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) + \sin \alpha \cos \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) + \sin \alpha \sin \nu (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \right] \hat{r}_{12} dm_2$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \int_C \hat{r}_{12} dm_2 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \int_C \cos \nu \hat{r}_{12} dm_2 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \int_C \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 \\
&= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) I_1 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) F_1 + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) F_2 \\
&= \cos \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) M_2 \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{i} + \sin \alpha (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{j} \\
&= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \cos^2 \alpha M_2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha M_2 + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha M_2 \\
&= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \cos^2 \alpha M_2 + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha M_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j} \right]
\end{aligned}$$

Usando:

$$(\vec{V}_{12} \cdot \hat{i}) \hat{i} + (\vec{V}_{12} \cdot \hat{j}) \hat{j} = \vec{V}_{12} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}$$

Assim como:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

A integral pode ser melhorada:

$$\begin{aligned}
i_2 &= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \cos^2 \alpha M_2 + \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \alpha) M_2 \left[\vec{V}_{12} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \right] \\
&= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \cos^2 \alpha M_2 + \frac{1}{2} M_2 \left[\vec{V}_{12} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \right] - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha M_2 \left[\vec{V}_{12} - (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \right] \\
&= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \cos^2 \alpha M_2 + \frac{1}{2} \vec{V}_{12} M_2 - \frac{1}{2} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} M_2 - \frac{1}{2} \vec{V}_{12} \cos^2 \alpha M_2 + \frac{1}{2} (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \cos^2 \alpha M_2 \\
&= (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} M_2 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} M_2 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha M_2 \right]
\end{aligned}$$

Ou ainda:

$$i_2 = (\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} M_2 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} M_2 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha M_2 \right] \quad (2.17)$$

Resultado Final de I_2

Lembrando da integral de I_2 (eq 2.6):

$$I_2 = i_1 - 2\dot{R}_2 \cos \beta i_2 + \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta I_1$$

Disso segue que, usando (2.16, 2.17 e 2.10):

$$\begin{aligned}
I_2 &= \cos^3 \alpha M_2 \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \\
&+ \cos \alpha M_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \\
&- 2\dot{R}_2 \cos \beta \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} M_2 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} M_2 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha M_2 \right] \right] \\
&+ \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta M_2 \cos \alpha \hat{z}
\end{aligned}$$

Rearranjando para futuras integrações:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \cos^3 \alpha M_2 \\
&+ \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \cos \alpha M_2 \\
&- 2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta M_2 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} \cos \beta M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 \right] \right] \\
&+ \dot{R}_2^2 \cos^2 \beta M_2 \cos \alpha \hat{z}
\end{aligned}$$

Restando somente o cálculo de I_3 que será obtidos nas subseções seguintes.

2.1.4 Cálculo de I_3

Lembrando de I_3 , ou seja, da equação 2.9:

$$I_3 = \frac{\vec{V}_{12}^2}{s} I_1 - \frac{2\dot{R}_2}{s} i_4 + \frac{\dot{R}_2^2}{s} I_1 - \frac{1}{s} i_1 + \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta}{s} i_2 - \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{s} I_1 + i_3 - \dot{R}_2 \cos \beta I_1$$

Percebemos que apenas i_3 e i_4 precisam ser calculadas.

Cálculo de i_3

Dos comentários iniciais (2.7):

$$i_3 = \int_C (\hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2$$

$$\hat{r}_{12} = \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}$$

Calculando o termo contido na integral de i_3 :

$$\hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12} = (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}) \cdot \vec{A}_{12}$$

$$\hat{r}_{12} \cdot \vec{A}_{12} = \cos \alpha (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \sin \alpha \cos \nu (\hat{i} \cdot \vec{A}_{12}) + \sin \alpha \sin \nu (\hat{j} \cdot \vec{A}_{12})$$

A integral então se resume a:

$$\begin{aligned}
i_3 &= \int_C (\cos \alpha (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \sin \alpha \cos \nu (\hat{i} \cdot \vec{A}_{12}) + \sin \alpha \sin \nu (\hat{j} \cdot \vec{A}_{12})) \hat{r}_{12} dm_2 \\
&= \cos \alpha (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \int_C \hat{r}_{12} dm_2 + \sin \alpha (\hat{i} \cdot \vec{A}_{12}) \int_C \cos \nu \hat{r}_{12} dm_2 + \sin \alpha (\hat{j} \cdot \vec{A}_{12}) \int_C \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 \\
&= \cos \alpha (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) I_1 + \sin \alpha (\hat{i} \cdot \vec{A}_{12}) F_1 + \sin \alpha (\hat{j} \cdot \vec{A}_{12}) F_2
\end{aligned}$$

Usando os valores de F_1 e F_2 calculados no apêndice C:

$$\begin{aligned}
i_3 &= \cos \alpha (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) M_2 \cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha (\hat{i} \cdot \vec{A}_{12}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{i} + \sin \alpha (\hat{j} \cdot \vec{A}_{12}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{j} \\
&= \cos^2 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} + \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} \left[(\hat{i} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{i} + (\hat{j} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{j} \right]
\end{aligned}$$

Usando:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{12} &= (\vec{A}_{12} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{A}_{12} \cdot \hat{j})\hat{j} + (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z})\hat{z} \\ \vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z})\hat{z} &= (\vec{A}_{12} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\vec{A}_{12} \cdot \hat{j})\hat{j}\end{aligned}$$

Podemos simplificar:

$$i_3 = \cos^2 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} + \sin^2 \alpha \frac{M_2}{2} [\vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}]$$

Basta agora usar:

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\ i_3 &= \cos^2 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} + (1 - \cos^2 \alpha) \frac{M_2}{2} [\vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}] \\ &= \cos^2 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} + \frac{M_2}{2} [\vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}] - \cos^2 \alpha \frac{M_2}{2} [\vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}] \\ &= \cos^2 \alpha M_2 (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} + \frac{M_2}{2} [\vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}] - \cos^2 \alpha \frac{M_2}{2} [\vec{A}_{12} - (\vec{A}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z}] \\ &= \frac{1}{2} [\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z}] M_2 + \left[\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \right] \cos^2 \alpha M_2\end{aligned}$$

Por fim:

$$i_3 = \frac{1}{2} [\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z}] M_2 + \left[\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \right] \cos^2 \alpha M_2 \quad (2.18)$$

Cálculo de i_4

Da definição de i_4 (2.8):

$$i_4 = \int_C (\hat{R}_2 \cdot \vec{V}_{12}) \hat{r}_{12} dm_2$$

É primeiramente preciso perceber que, se definirmos θ como o ângulo entre \hat{R}_2 e \hat{z} , e lembrando que β é o ângulo entre \hat{R}_2 e \hat{r}_{12} :

$$\begin{aligned}\hat{R}_2 &= \cos \theta \hat{z} + \cos \beta \hat{r}_{12} = \cos \theta \hat{z} + \cos \beta [\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}] \\ &= (\cos \theta + \cos \beta \cos \alpha) \hat{z} + \cos \beta \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \cos \beta \sin \alpha \sin \nu \hat{j}\end{aligned}$$

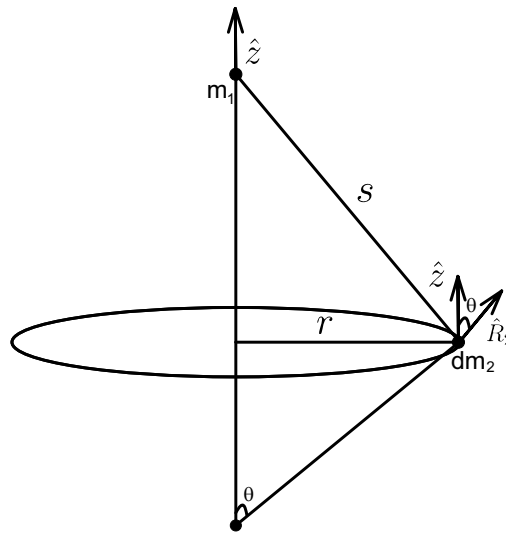


Figura 2.1: Ângulo θ .

Da Figura 2.1 acima é possível perceber que o ângulo θ é o mesmo para todo elemento de massa dm_2 , portanto podemos retirá-lo da integral. Disso segue que:

$$\begin{aligned}
i_4 &= \int_C \left[(\cos \theta + \cos \beta \cos \alpha) \hat{z} + \cos \beta \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \cos \beta \sin \alpha \sin \nu \hat{j} \right] \cdot \vec{V}_{12} \hat{r}_{12} dm_2 \\
&= (\cos \theta + \cos \beta \cos \alpha) (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \int_C \hat{r}_{12} dm_2 + \cos \beta \sin \alpha (\hat{i} \cdot \vec{V}_{12}) \int_C \cos \nu \hat{r}_{12} dm_2 \\
&+ \cos \beta \sin \alpha (\hat{j} \cdot \vec{V}_{12}) \int_C \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 = (\cos \theta + \cos \beta \cos \alpha) (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) I_1 \\
&+ \cos \beta \sin \alpha (\hat{i} \cdot \vec{V}_{12}) F_1 + \cos \beta \sin \alpha (\hat{j} \cdot \vec{V}_{12}) F_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_4 &= (\cos \theta + \cos \beta \cos \alpha) (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) M_2 \cos \alpha \hat{z} \\
&+ \cos \beta \sin \alpha (\hat{i} \cdot \vec{V}_{12}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{i} + \cos \beta \sin \alpha (\hat{j} \cdot \vec{V}_{12}) \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{j} \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 + \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \\
&+ (\hat{i} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{i} \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2 + (\hat{j} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{j} \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2 \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 + \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \\
&\quad + \left(\vec{V}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \right) \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2 \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 + \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \\
&\quad + \vec{V}_{12} \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2 - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2 \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 + \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2) \\
&\quad + \vec{V}_{12} \frac{1}{2} \cos \beta \sin^2 \alpha M_2 \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 + \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta (1 - \cos^2 \alpha) M_2) \\
&\quad + \vec{V}_{12} \frac{1}{2} \cos \beta (1 - \cos^2 \alpha) M_2 \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 + \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta M_2 + \frac{1}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \\
&\quad + \vec{V}_{12} \left(\frac{1}{2} \cos \beta M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 \right) \\
&= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta M_2 + \frac{3}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \\
&\quad + \vec{V}_{12} \left(\frac{1}{2} \cos \beta M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 \right)
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
i_4 &= (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta M_2 + \frac{3}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \\
&\quad + \vec{V}_{12} \left(\frac{1}{2} \cos \beta M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 \right) \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Resultado Final de I_3

Da definição de I_3 (2.9)

$$I_3 = \frac{\vec{V}_{12}^2}{s} I_1 - \frac{2\dot{R}_2}{s} i_4 + \frac{\dot{R}_2^2}{s} I_1 - \frac{1}{s} i_1 + \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta}{s} i_2 - \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{s} I_1 + i_3 - \ddot{R}_2 \cos \beta I_1$$

Substituindo os resultados as integrais dos i_{js} (2.16, 2.17, 2.18, 2.19 e 2.10):

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{\vec{V}_{12}^2}{s} M_2 \cos \alpha \hat{z} - \frac{2\dot{R}_2}{s} \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} (\cos \theta \cos \alpha M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta M_2 + \frac{3}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2) \right. \\ &+ \left. \vec{V}_{12} \left(\frac{1}{2} \cos \beta M_2 - \frac{1}{2} \cos \beta \cos^2 \alpha M_2 \right) \right] + \frac{\dot{R}_2^2}{s} M_2 \cos \alpha \hat{z} - \frac{1}{s} \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right. \\ &- \left. (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \cos^3 \alpha M_2 + \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \cos \alpha M_2 \left. \right] \\ &+ \frac{2\dot{R}_2 \cos \beta}{s} \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \alpha M_2 - \frac{1}{2} M_2 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} M_2 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha M_2 \right] \right] \\ &- \frac{\dot{R}_2^2 \cos^2 \beta}{s} M_2 \cos \alpha \hat{z} + \frac{1}{2} \left[\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right] M_2 + \left[\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \right] \cos^2 \alpha M_2 \\ &- \ddot{R}_2 \cos \beta M_2 \cos \alpha \hat{z} \end{aligned}$$

2.1.5 Resultado Final

Será então suficiente substituir os resultados acima na expressão da força apresentada abaixo, porém como o objetivo principal desse trabalho está centrado na expressão da força entre esfera maciça e partícula, não iremos efetuar esse ato.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{C1} &= \vec{F}_{C1N} + \vec{F}_{C1V} + \vec{F}_{C1A} \\ \vec{F}_{C1N} &= -\frac{H_g m_1}{s^2} I_1 \\ \vec{F}_{C1V} &= \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2 s^2} I_2 \\ \vec{F}_{C1A} &= -\frac{H_g m_1 \xi}{c^2 s} I_3 \end{aligned}$$

Partiremos ao cálculo da força entre casca esférica e partícula.

2.2 Casca Esférica/Partícula

2.2.1 Comentários Iniciais

Reproduzindo as suposições e ações do cálculo da energia potencial gravitacional entre casca esférica e partícula teremos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{S1N} &= -H_g m_1 I'_1 \\ \vec{F}_{S1V} &= \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2} I'_2 \\ \vec{F}_{S1A} &= -\frac{H_g m_1 \xi}{c^2} I'_3 \end{aligned}$$

No qual:

$$\begin{aligned}
I'_1 &= \hat{z} \int_S \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
I'_2 &= \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \int_S \frac{\cos^3 \alpha}{s^2} dM_2 \\
&+ \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \int_S \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
&- 2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 - \frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 \right] \right. \\
&+ \left. \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 - \frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 \right] \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \int_S \frac{\cos^2 \beta \cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
I'_3 &= \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \int_S \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2 - 2\dot{R}_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \int_S \left(\frac{\cos \theta \cos \alpha}{s^2} dM_2 - \frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 \right) \right. \\
&+ \left. \frac{3}{2} \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 + \vec{V}_{12} \left(\frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 - \frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 \right) \right] \\
&+ \dot{R}_2^2 \hat{z} \int_S \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2 - \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \int_S \frac{\cos^3 \alpha}{s^2} dM_2 \\
&+ \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \int_S \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
&+ 2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 - \frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 \right] \right. \\
&+ \left. \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 - \frac{1}{2} \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 \right] \right] - \dot{R}_2^2 \hat{z} \int_S \frac{\cos^2 \beta \cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
&+ \frac{1}{2} \left[\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right] \int_S \frac{dM_2}{s} + \left[\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \right] \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 \\
&- \ddot{R}_2 \hat{z} \int_S \frac{\cos \beta \cos \alpha}{s} dM_2
\end{aligned}$$

Observando a seção 1.2.1:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_S \frac{dM_2}{s} \\
P_2 &= \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 \\
P_3 &= \int_S \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 = \int_S \frac{dM_2}{s} - \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 = P_1 - P_2 \\
P_4 &= \int_S \frac{\cos \alpha \cos \beta}{s} dM_2 \\
P_5 &= \int_S \frac{\cos^2 \beta}{s} dM_2
\end{aligned}$$

E definido agora as seguintes integrais:

$$P_6 = \int_S \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2$$

$$\begin{aligned}
P_7 &= \int_S \frac{\cos^3 \alpha}{s^2} dM_2 \\
P_8 &= \int_S \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 \\
P_9 &= \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 \\
P_{10} &= \int_S \frac{\cos^2 \beta \cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
P_{11} &= \int_S \frac{\cos \theta \cos \alpha}{s^2} dM_2 \\
P_{12} &= \int_S \frac{\cos \beta \cos \alpha}{s} dM_2
\end{aligned}$$

Podemos determinar que:

$$I'_1 = \hat{z}P_6$$

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \left[\frac{5}{2}(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})\vec{V}_{12} - \frac{1}{2}\vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] P_7 + \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})\vec{V}_{12} + \frac{1}{2}\vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2}(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] P_6 \\
&- 2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2}P_8 - \frac{1}{2}P_9 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2}P_9 - \frac{1}{2}P_8 \right] \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} P_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_3 &= \vec{V}_{12}^2 \hat{z} P_6 - 2\dot{R}_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} P_{11} - \frac{1}{2}P_9 + \frac{3}{2}P_8 \right] + \vec{V}_{12} \left(\frac{1}{2}P_9 - \frac{1}{2}P_8 \right) \\
&+ \dot{R}_2^2 \hat{z} P_6 - \left[\frac{5}{2}(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})\vec{V}_{12} - \frac{1}{2}\vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] P_7 \\
&+ \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})\vec{V}_{12} + \frac{1}{2}\vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2}(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] P_6 \\
&+ 2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2}P_8 - \frac{1}{2}P_9 \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2}P_9 - \frac{1}{2}P_8 \right] \right] - \dot{R}_2^2 \hat{z} P_{10} \\
&+ \frac{1}{2} \left[\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right] P_1 + \left[\frac{3}{2}(\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2}\vec{A}_{12} \right] P_2 - \dot{R}_2 \hat{z} P_4
\end{aligned}$$

2.2.2 Cálculo da Partícula no Interior de Uma Casca Esférica

Para o caso da partícula no interior (Ver Figura 2.2) as integrais de I'_{ji} serão, substituindo seus valores correspondentes encontrados no Apêndice A, iguais a:

$$I'_{ii} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
I'_{2i} &= -2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3}{2} \left[-\frac{M_2}{3R_2^2} \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{M_2}{R_2^2} \right] \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1}{2} \left[-\frac{M_2}{R_2^2} \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{M_2}{3R_2^2} \right] \right] \right] \\
I'_{3i} &= -2\dot{R}_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(-\frac{M_2}{3R_2^2} - \frac{1-M_2}{2R_2^2} + \frac{3-M_2}{2 \cdot 3R_2^2} \right) + \vec{V}_{12} \left(\frac{1-M_2}{2R_2^2} - \frac{1-M_2}{2 \cdot 3R_2^2} \right) \right] \\
&+ 2\dot{R}_2 \left[(\vec{V}_{12} \cdot \hat{z}) \hat{z} \left[\frac{3-M_2}{2 \cdot 3R_2^2} - \frac{1-M_2}{2R_2^2} \right] + \vec{V}_{12} \left[\frac{1-M_2}{2R_2^2} - \frac{1-M_2}{2 \cdot 3R_2^2} \right] \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right] \frac{M_2}{R_2} + \left[\frac{3}{2}(\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2}\vec{A}_{12} \right] \frac{M_2}{3R_2} - \dot{R}_2 \hat{z} \frac{-1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$I'_{1i} = \vec{0}$$

$$I'_{2i} = \frac{2M_2}{3R_2^2} \dot{R}_2 \vec{V}_{12}$$

$$I'_{3i} = -2\dot{R}_2 \left[-\frac{M_2}{3R_2^2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \frac{M_2}{3R_2^2} \vec{V}_{12} \right] - \frac{2M_2}{3R_2^2} \dot{R}_2 \vec{V}_{12} + \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2} \vec{A}_{12} + \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} \ddot{R}_2 \vec{z}$$

É possível simplificar ainda mais I'_{3i} :

$$I'_{3i} = \frac{2M_2}{3R_2^2} \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} + \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2} \vec{A}_{12} + \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} \ddot{R}_2 \vec{z}$$

Lembrando que:

$$\vec{F}_{S1} = \vec{F}_{S1N} + \vec{F}_{S1V} + \vec{F}_{S1A}$$

$$\vec{F}_{S1N} = -H_g m_1 I'_1$$

$$\vec{F}_{S1V} = \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2} I'_2$$

$$\vec{F}_{S1A} = -\frac{H_g m_1 \xi}{c^2} I'_3$$

A força no interior da casca esférica será:

$$\vec{F}_{S1} = \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2} \frac{2M_2}{3R_2^2} \dot{R}_2 \vec{V}_{12} - \frac{H_g m_1 \xi}{c^2} \left[\frac{2M_2}{3R_2^2} \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} + \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2} \vec{A}_{12} + \frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} \ddot{R}_2 \vec{z} \right]$$

$$= -\frac{H_g \xi m_1 M_2}{3R_2 c^2} \left\{ \vec{A}_{12} + \frac{\dot{R}_2}{R_2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{\ddot{R}_2}{R_2} \vec{z} \right\}$$

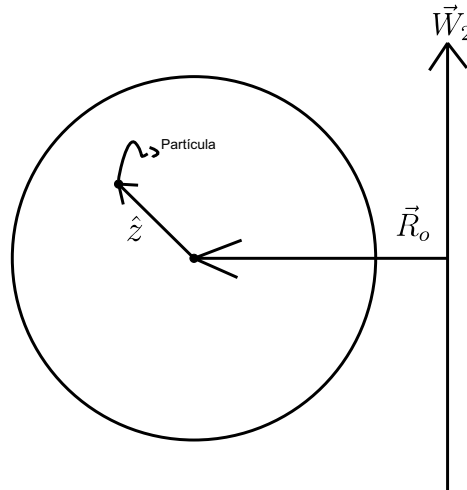


Figura 2.2: Casca Esférica e Partícula no interior.

Fazendo a expansão ser nula:

$$\vec{F}_{S1} = -\frac{H_g \xi m_1 M_2}{3R_2 c^2} \vec{A}_{12}$$

Que está condizente com a expressão oferecida e encontrada por Assis em seu livro [3] no Apêndice B quando a casca não possui movimentos rotativos. Que é o caso assumido acima, pois foi o que assumimos antes de realizarmos os cálculos da força. O leitor pode recorrer ao cálculo deste caso mais geral lembrando os métodos usados na seção do cálculo da energia potencial weberiana pois lá está possibilidade não foi desconsiderada.

2.2.3 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Casca Esférica

Para o caso da partícula no exterior (Ver Figura 2.3) as integrais de I'_{je} serão, substituindo seus valores correspondentes encontrados no Apêndice A, iguais a:

$$I'_{1e} = \hat{z} \frac{M_2}{z^2}$$

$$I'_{2e} = \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \frac{M_2}{z^4} \left[z^2 - \frac{2}{3} R_2^2 \right] \\ + \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \frac{M_2}{z^2} + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{4R_2^2 z^2} \left[z^2 + \frac{1}{3} R_2^2 \right]$$

$$I'_{3e} = \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} - 2\dot{R}_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \frac{M_2}{2R_2 z^3} \left[-z^2 + \frac{1}{3} R_2^2 \right] \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} - \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{4R_2^2 z^2} \left[z^2 + \frac{1}{3} R_2^2 \right] \\ - \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \right] \frac{M_2}{z^4} \left[z^2 - \frac{2}{3} R_2^2 \right] \\ + \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \right] \frac{M_2}{z^2} \\ + \frac{1}{2} \left[\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right] \frac{M_2}{z} + \left[\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \right] \frac{M_2}{3z^3} \left[3z^2 - 2R_2^2 \right] - \ddot{R}_2 \hat{z} \frac{-R_2}{3z^2} M_2$$

Simplificando:

$$I'_{1e} = \frac{M_2}{z^2} \hat{z}$$

$$I'_{2e} = \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{z^4} \frac{2}{3} R_2^2 \right] - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{z^4} \frac{2}{3} R_2^2 \right] - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{z^4} \frac{2}{3} R_2^2 \right] \\ + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \frac{M_2}{z^2} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{4R_2^2 z^2} \left[z^2 + \frac{1}{3} R_2^2 \right]$$

$$I'_{3e} = \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} - 2\dot{R}_2 \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[-\frac{M_2}{2R_2 z} + \frac{M_2 R_2}{6z^3} \right] \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{4R_2^2} - \frac{M_2}{12z^2} \right] \\ - \left[\frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{z^4} \frac{2}{3} R_2^2 \right] - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{z^4} \frac{2}{3} R_2^2 \right] - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2}{z^4} \frac{2}{3} R_2^2 \right] \right] \\ + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \frac{M_2}{z^2} + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \frac{M_2}{z^2} \\ + \frac{1}{2} \left[\vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right] \frac{M_2}{z} + \left[\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} - \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \right] \left[\frac{M_2}{z} - \frac{2R_2^2 M_2}{3z^3} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2 M_2}{3z^2} \hat{z}$$

Continuando:

$$I'_{2e} = (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{5M_2}{2z^2} - \frac{5M_2 R_2^2}{3z^4} - \frac{3M_2}{2z^2} \right] - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{2M_2 R_2^2}{3z^4} - \frac{M_2}{z^2} \right] \\ - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{2M_2 R_2^2}{3z^4} - \frac{M_2}{z^2} \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{4R_2^2} \left[1 + \frac{R_2^2}{3z^2} \right]$$

$$I'_{3e} = \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[\frac{M_2}{R_2 z} - \frac{M_2 R_2}{3z^3} \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{11M_2}{12z^2} - \frac{M_2}{4R_2^2} \right] \\ - \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{5M_2}{2z^2} - \frac{5M_2 R_2^2}{3z^4} - \frac{3M_2}{2z^2} \right] - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{2M_2 R_2^2}{3z^4} - \frac{M_2}{z^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{M_2 R_2^2}{z^4} - \frac{M_2}{z^2} + 2\frac{M_2}{z^2} \right] \right] + \vec{A}_{12} \frac{M_2}{2z} - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \frac{M_2}{2z} \\ + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \left[\frac{3M_2}{2z} - \frac{R_2^2 M_2}{z^3} \right] - \vec{A}_{12} \left[\frac{M_2}{2z} - \frac{R_2^2 M_2}{3z^3} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2 M_2}{3z^2} \hat{z}$$

Por fim:

$$I'_{2e} = (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{5M_2 R_2^2}{3z^4} \right] + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2M_2 R_2^2}{3z^4} \right] \\ + \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{M_2 R_2^2}{3z^4} \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{4R_2^2} \left[1 + \frac{R_2^2}{3z^2} \right]$$

$$I'_{3e} = \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[\frac{M_2}{R_2 z} - \frac{M_2 R_2}{3z^3} \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{11M_2}{12z^2} - \frac{M_2}{4R_2^2} \right] - \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{5M_2 R_2^2}{3z^4} \right] \right. \\ \left. + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2M_2 R_2^2}{3z^4} \right] - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[2\frac{M_2}{z^2} - \frac{2M_2 R_2^2}{3z^4} \right] \right] + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \left[\frac{M_2}{z} - \frac{R_2^2 M_2}{z^3} \right] \\ + \vec{A}_{12} \left[\frac{R_2^2 M_2}{3z^3} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2 M_2}{3z^2} \hat{z}$$

Lembrando que:

$$\vec{F}_{S1} = \vec{F}_{S1N} + \vec{F}_{S1V} + \vec{F}_{S1A} \\ \vec{F}_{S1N} = -H_g m_1 I'_1 \\ \vec{F}_{S1V} = \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2} I'_2 \\ \vec{F}_{S1A} = -\frac{H_g m_1 \xi}{c^2} I'_3$$

Então a força no exterior da casca será:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{S1} = & -H_g m_1 \frac{M_2}{z^2} \hat{z} + \frac{H_g m_1 \xi}{2c^2} \left\{ (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{5M_2}{3z^4} R_2^2 \right] + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2M_2}{3z^4} R_2^2 \right] \right. \\
& + \left. \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{3z^4} R_2^2 \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{M_2}{4R_2^2} \left[1 + \frac{R_2^2}{3z^2} \right] \right\} - \frac{H_g m_1 \xi}{c^2} \left\{ \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[\frac{M_2}{R_2 z} - \frac{M_2 R_2}{3z^3} \right] \right. \\
& + \left. \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{11M_2}{12z^2} - \frac{M_2}{4R_2^2} \right] - \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[\frac{M_2}{z^2} - \frac{5M_2}{3z^4} R_2^2 \right] \right. \right. \\
& + \left. (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2M_2}{3z^4} R_2^2 \right] - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[2 \frac{M_2}{z^2} - \frac{2M_2}{3z^4} R_2^2 \right] \right. \\
& \left. \left. + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \left[\frac{M_2}{z} - \frac{R_2^2 M_2}{z^3} \right] + \vec{A}_{12} \left[\frac{R_2^2 M_2}{3z^3} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2 M_2}{3z^2} \hat{z} \right\}
\end{aligned}$$

Basta organizar e colocar em evidência alguns termos:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{S1} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \hat{z} - \frac{\xi}{2c^2} \left\{ (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[1 - \frac{5}{3z^2} R_2^2 \right] + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] \right. \right. \\
& + \left. \left. \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{1}{3z^2} R_2^2 \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \frac{1}{4R_2^2} \left[z^2 + \frac{R_2^2}{3} \right] \right\} + \frac{\xi}{c^2} \left\{ \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[\frac{z}{R_2} - \frac{R_2}{3z} \right] \right. \right. \\
& + \left. \left. \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{11}{12} - \frac{z^2}{4R_2^2} \right] - \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[1 - \frac{5}{3z^2} R_2^2 \right] + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[2 - \frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] \right] + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \left[z - \frac{R_2^2}{z} \right] + \vec{A}_{12} \left[\frac{R_2^2}{3z} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2}{3} \hat{z} \right\}
\end{aligned}$$

De tal forma que:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{S1} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \hat{z} + \frac{\xi}{c^2} \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[1 - \frac{5}{3z^2} R_2^2 \right] - \frac{1}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{1}{3z^2} R_2^2 \right] - \frac{1}{2} \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{z^2}{4R_2^2} + \frac{1}{12} \right] + \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[\frac{z}{R_2} - \frac{R_2}{3z} \right] \right. \\
& + \left. \left. \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{11}{12} - \frac{z^2}{4R_2^2} \right] - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[1 - \frac{5}{3z^2} R_2^2 \right] - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[2 - \frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \left[z - \frac{R_2^2}{z} \right] + \vec{A}_{12} \left[\frac{R_2^2}{3z} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2}{3} \hat{z} \right\}
\end{aligned}$$

Continuando:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{S1} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \hat{z} + \frac{\xi}{c^2} \left\{ -\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \left[1 - \frac{5}{3z^2} R_2^2 \right] - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \left[\frac{2}{3z^2} R_2^2 \right] \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \left[\frac{R_2^2}{z^2} - 2 \right] + \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left[\frac{z}{R_2} - \frac{R_2}{3z} \right] + \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{11}{12} - \frac{z^2}{4R_2^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{4R_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{12} \right] \right. \\
& \left. \left. + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \left[z - \frac{R_2^2}{z} \right] + \vec{A}_{12} \left[\frac{R_2^2}{3z} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2}{3} \hat{z} \right\}
\end{aligned}$$

É possível melhorar ainda mais:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{S1} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \hat{z} + \frac{\xi}{c^2} \left\{ -\frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} + (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} \frac{5R_2^2}{2z^2} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} \frac{R_2^2}{z^2} \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} \frac{R_2^2}{z^2} + \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \frac{z}{R_2} - \dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \frac{R_2}{3z} + \dot{R}_2^2 \hat{z} \left[\frac{7}{8} - \frac{3z^2}{8R_2^2} \right] \\ & \left. \left. + (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} z - (\hat{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \frac{R_2^2}{z} + \vec{A}_{12} \left[\frac{R_2^2}{3z} \right] + \ddot{R}_2 \frac{R_2}{3} \hat{z} \right\} \right\}\end{aligned}$$

Pois daí:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{S1} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\ & + \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \\ & \left. + \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(\frac{z}{R_2} - \frac{R_2}{3z} \right) - \frac{3\dot{R}_2^2 z^2}{8R_2^2} \hat{z} + \frac{\ddot{R}_2 R_2}{3} \hat{z} \right] \right\}\end{aligned}$$

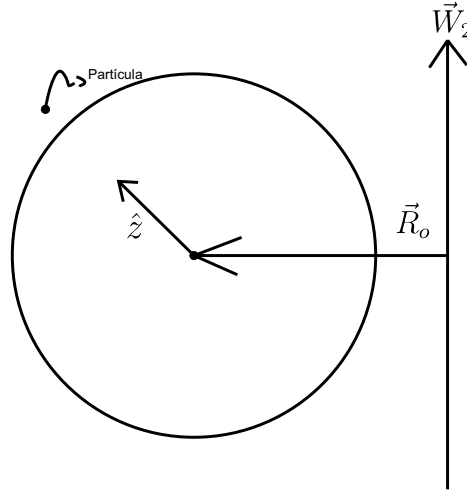


Figura 2.3: Casca Esférica e Partícula no exterior.

Se desprezarmos os termos expansivos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{S1} = & -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) \right] \hat{z} \right. \\ & \left. + \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \right\}\end{aligned}$$

Retornando o mesmo resultado que aquele dado por Assis no caso da casca esférica sem rotação.

2.3 Esfera Maciça/Partícula

2.3.1 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante

No centro de uma esfera maciça (Ver Figura 2.4) todas as divisões da esfera maciça em casca esféricas terá como único resultado casca esférica e partícula no interior, mas agora com a partícula exatamente no centro, portanto, fazendo $z = 0$ na força entre casca esfera e partícula no interior, trocando M_2 por dM_2 e integrando durante todo o intervalo correspondente à esfera maciça:

$$\vec{F}_{B1} = \int_B -\frac{H_g \xi m_1 dM_2}{3R_2 c^2} \left\{ \vec{A}_{12} - \frac{\dot{R}_2}{R_2} \vec{V}_{12} \right\}$$

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left\{ \vec{A}_{12} \int_B \frac{dM_2}{R_2} - \dot{R}_2 \vec{V}_{12} \int_B \frac{dM_2}{R_2^2} \right\}$$

Lembrando:

$$dM_2 = 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2$$

Então:

$$\int_B \frac{dM_2}{R_2^2} = \int_B \frac{4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2}{R_2^2} = 4\pi \rho_2 \int_B dR_2 = 4\pi \rho_2 R_2$$

E usando:

$$\int_B \frac{dM_2}{R_2} = 2\pi \rho_2 R_2^2$$

Concluimos:

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left\{ \vec{A}_{12} 2\pi \rho_2 R_2^2 - \dot{R}_2 \vec{V}_{12} 4\pi \rho_2 R_2 \right\}$$

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{2\pi H_g \rho_2 \xi R_2^2}{3c^2} m_1 \left\{ \vec{A}_{12} - 2 \frac{\dot{R}_2}{R_2} \vec{V}_{12} \right\}$$

Sabendo que pretendemos usar a expressão para calcular a força inercial:

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2} m_1 \left\{ \vec{A}_{12} - 2 \frac{\dot{R}_u}{R_u} \vec{V}_{12} \right\}$$

Da definição:

$$\Phi = \frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}$$

$$\vec{F}_{B1} = -\Phi m_1 \left\{ \vec{A}_{12} - 2 \frac{\dot{R}_u}{R_u} \vec{V}_{12} \right\}$$

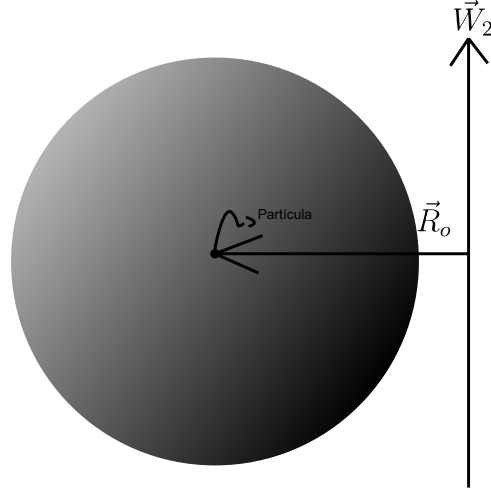


Figura 2.4: Esfera Maciça e Partícula no centro.

Novamente, desprezando a parte de expansão:

$$\vec{F}_{B1} = -\Phi m_1 \vec{A}_{12}$$

Sendo precisamente igual à expressão da seção 17.6.1 de [3] para a força no centro de uma esfera maciça sem rotação.

2.3.2 Cálculo da Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante

No centro de uma esfera maciça (Ver Figura 2.5) todas as divisões da esfera maciça em casca esféricas terá como único resultado casca esférica e partícula no interior, mas agora com a partícula exatamente no centro, portanto, fazendo $z = 0$ na força entre casca esfera e partícula no interior, trocando M_2 por dM_2 e integrando durante todo o intervalo correspondente à esfera maciça:

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left(\vec{A}_{12} \int_B \frac{dM_2}{R_2} - \vec{V}_{12} \int_B \frac{\dot{R}_2}{R_2^2} dM_2 \right)$$

Como a expansão segue a lei de Hubble-Lemaître:

$$\dot{R}_2 = H_o R_2$$

Logo:

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left(\vec{A}_{12} \int_B \frac{dM_2}{R_2} - \vec{V}_{12} \int_B \frac{H_o R_2}{R_2^2} dM_2 \right)$$

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left(\vec{A}_{12} \int_B \frac{dM_2}{R_2} - H_o \vec{V}_{12} \int_B \frac{dM_2}{R_2} \right)$$

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left(\vec{A}_{12} 2\pi \rho_2 R_2^2 - H_o \vec{V}_{12} 2\pi \rho_2 R_2^2 \right)$$

$$\vec{F}_{B1} = -\frac{2\pi H_g \rho_2 \xi R_2^2}{3c^2} m_1 \left(\vec{A}_{12} - H_o \vec{V}_{12} \right)$$

$$\vec{F}_{B1} = -\Phi m_1 \left(\vec{A}_{12} - H_o \vec{V}_{12} \right)$$

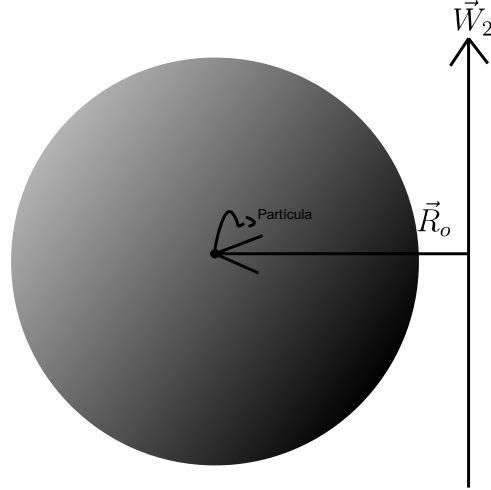


Figura 2.5: Casca Esférica e Partícula no centro.

Novamente, se ignorarmos a parcela correlacionado com a expansão, ou seja, H_o , teremos o mesmo resultado que Assis chegou para a força no centro de uma esfera maciça que não rotaciona.

2.3.3 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Constante

No exterior de uma esfera maciça (Ver Figura 2.6) todas as divisões da esfera em cascas terá como resultado único casca esférica partícula no exterior, logo usando a força entre casca esfera e partícula no exterior, trocando M_2 por dM_2 e integrando durante todo o intervalo correspondente à esfera maciça:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= \int_B -\frac{H_g m_1 dM_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(\frac{z}{R_2} - \frac{R_2}{3z} \right) - \frac{3\dot{R}_2^2 z^2}{8R_2^2} \hat{z} + \frac{\ddot{R}_2 R_2}{3} \hat{z} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} \int_B dM_2 \right. \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \int_B R_2^2 dM_2 \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(z \int_B \frac{dM_2}{R_2} - \frac{1}{3z} \int_B R_2 dM_2 \right) - \frac{3\dot{R}_2^2 z^2}{8} \hat{z} \int_B \frac{dM_2}{R_2^2} + \frac{\ddot{R}_2}{3} \hat{z} \int_B R_2 dM_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Lembrando das integrais já resolvidas nas seções anteriores:

$$\int_B \frac{dM_2}{R_2} = \frac{3}{2} \frac{M_2}{R_2}$$

$$\int_B \frac{dM_2}{R_2^2} = 3 \frac{M_2}{R_2^2}$$

$$\int_B R_2^2 dM_2 = \frac{3}{5} M_2 R_2^2$$

$$\int_B R_2 dM_2 = \frac{3}{4} M_2 R_2$$

Então:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} M_2 \right. \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \frac{3}{5} M_2 R_2^2 \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(\frac{3}{2} \frac{M_2}{R_2} - \frac{1}{3z} \frac{3}{4} M_2 R_2 \right) - \frac{3 \dot{R}_2^2 z^2}{8} \hat{z} \frac{M_2}{R_2} + \frac{\ddot{R}_2}{3} \hat{z} \frac{3}{4} M_2 R_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

Disso segue que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{3}{10} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \frac{3}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(\frac{3z}{2R_2} - \frac{R_2}{4z} \right) - \frac{9 \dot{R}_2^2 z^2}{8 R_2^2} \hat{z} + \frac{\ddot{R}_2 R_2}{4} \hat{z} \right] \right\} \end{aligned}$$

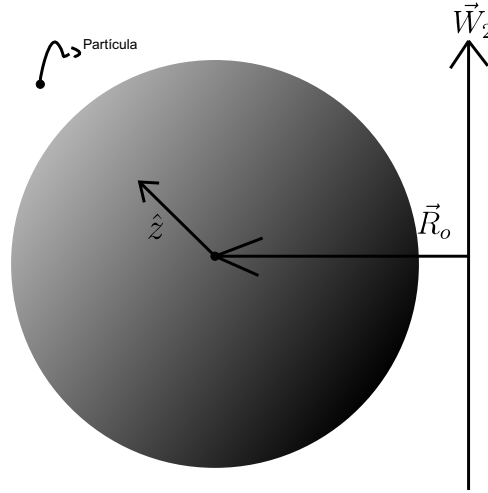


Figura 2.6: Esfera Maciça e Partícula no exterior.

Anulando as parcelas expansivas:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{3}{10} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \frac{3}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Assis não chegou a calcular tal força, impossibilitando uma comparação, sendo por esse motivo um resultado original de nosso trabalho.

2.3.4 Cálculo da Partícula no Exterior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante

No exterior de uma esfera maciça (Ver Figura 2.7) todas as divisões da esfera em cascas terá como resultado única casca esférica partícula no exterior, logo usando a força entre casca esfera e partícula no exterior, trocando M_2 por dM_2 e integrando durante todo o intervalo correspondente à esfera maciça:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B1} &= \int_B -\frac{H_g m_1 dM_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(\frac{z}{R_2} - \frac{R_2}{3z} \right) - \frac{3\dot{R}_2^2 z^2}{8R_2^2} \hat{z} + \frac{\ddot{R}_2 R_2}{3} \hat{z} \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1}{z^2} \left\{ \left[\int_B dM_2 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 \int_B dM_2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \int_B dM_2 \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \int_B dM_2 + \frac{7}{8} \int_B \dot{R}_2^2 dM_2 \right) \right] \hat{z} \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \int_B R_2^2 dM_2 \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(z \int_B \frac{\dot{R}_2}{R_2} dM_2 - \frac{1}{3z} \int_B \dot{R}_2 R_2 dM_2 \right) - \frac{3z^2}{8} \hat{z} \int_B \frac{\dot{R}_2^2}{R_2^2} dM_2 + \frac{1}{3} \hat{z} \int_B \ddot{R}_2 R_2 dM_2 \right] \right\}\end{aligned}$$

Como a expansão segue a lei de Hubble-Lemaître:

$$\dot{R}_2 = H_o R_2$$

E derivando para encontrar \ddot{R}_2 :

$$\ddot{R}_2 = \dot{H}_o R_2 + H_o \dot{R}_2 = \dot{H}_o R_2 + H_o^2 R_2$$

Disso, podemos simplificar algumas integrais:

$$\begin{aligned}\int_B \dot{R}_2^2 dM_2 &= \int_B H_o^2 R_2^2 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi \rho_2 H_o^2 \int_B R_2^4 dR_2 = 4\pi \rho_2 H_o^2 \frac{R_2^5}{5} = 4\pi \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} H_o^2 \frac{R_2^5}{5} \\ &= \frac{3}{5} H_o^2 R_2^2 M_2\end{aligned}$$

$$\int_B \frac{\dot{R}_2}{R_2} dM_2 = \int_B \frac{H_o R_2}{R_2} dM_2 = H_o \int_B dM_2 = H_o M_2$$

$$\begin{aligned}\int_B \dot{R}_2 R_2 dM_2 &= \int_B H_o R_2 R_2 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi H_o \rho_2 \int_B R_2^4 dR_2 = 4\pi H_o \rho_2 \frac{R_2^5}{5} = 4\pi H_o \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} \frac{R_2^5}{5} \\ &= \frac{3}{5} H_o R_2^2 M_2\end{aligned}$$

$$\int_B \ddot{R}_2 R_2 dM_2 = \int_B \left(\dot{H}_o R_2 + H_o^2 R_2 \right) R_2 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi \rho_2 \left(\int_B \dot{H}_o R_2^4 dR_2 + \int_B H_o^2 R_2^4 dR_2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi\rho_2\left(\dot{H}_o\frac{R_2^5}{5} + H_o^2\frac{R_2^5}{5}\right) = 4\pi\frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}\left(\dot{H}_o\frac{R_2^5}{5} + H_o^2\frac{R_2^5}{5}\right) = \frac{3}{5}\left(\dot{H}_o + H_o^2\right)R_2^2M_2 \\
&\int_B \frac{\dot{R}_2^2}{R_2^2}dM_2 = \int_B \frac{H_o^2 R_2^2}{R_2^2}4\pi R_2^2\rho_2 dR_2 = 4\pi\rho_2 H_o^2 \int_B R_2^2 dR_2 = 4\pi\rho_2 H_o^2 \frac{R_2^3}{3} \\
&= 4\pi\frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}H_o^2\frac{R_2^3}{3} = H_o^2 M_2
\end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\int_B R_2^2 dM_2 = \frac{3}{5}M_2 R_2^2$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1}{z^2} \left\{ \left[M_2 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 M_2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 M_2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) M_2 + \frac{7}{8} \frac{3}{5} H_o^2 R_2^2 M_2 \right) \right] \hat{z} \right. \\
&+ \frac{\xi}{c^2} \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{z}{3} \vec{A}_{12} - (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{1}{2} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{5}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \frac{3}{5} M_2 R_2^2 \\
&+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(z H_o M_2 - \frac{1}{3} \frac{3}{5} H_o R_2^2 M_2 \right) - \frac{3z^2}{8} \hat{z} H_o^2 M_2 + \frac{1}{3} \hat{z} \frac{3}{5} (\dot{H}_o + H_o^2) R_2^2 M_2 \right] \right\} \\
\vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{21}{40} H_o^2 R_2^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\
&+ \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{3}{10} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \frac{3}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \\
&+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(z H_o - \frac{R_2^2}{5} H_o \right) - \frac{3z^2}{8} \hat{z} H_o^2 + \frac{1}{5} (\dot{H}_o + H_o^2) R_2^2 \hat{z} \right] \right\}
\end{aligned}$$

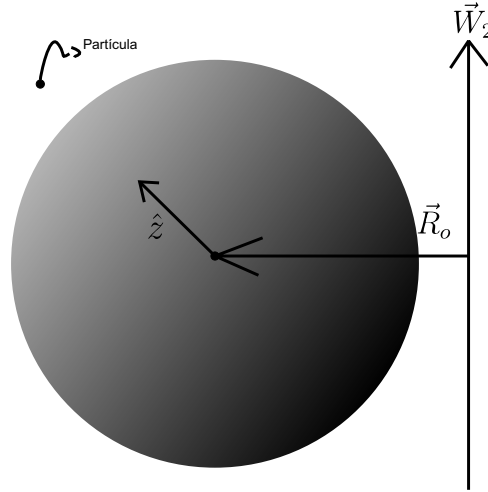


Figura 2.7: Esfera Maciça e Partícula no exterior.

Desprezando os termos expansivos:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) \right] \hat{z} \right. \\
&+ \left. \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{3}{10} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \frac{3}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Novamente este resultado ainda nunca havia sido obtido anteriormente nos trabalhos acerca da mecânica relacional.

2.3.5 Cálculo da Partícula no Interior de Uma Esfera Maciça Com \dot{R}_2 Variante

Neste caso será claro que a força em algum ponto no interior da esfera maciça (Ver Figura 2.8) será dado pela separação do intervalo de integração de 0 até z usando a força entre casca esférica e partícula no exterior e depois de z até R_2 usando a expressão da força no interior.

Do primeiro intervalo de integração teremos o resultado de uma partícula na fronteira de uma esfera maciça com \dot{R}_2 variante, logo basta fazer $R_2 = z$ na expressão da força entre esfera e maciça e partícula no exterior obtido na subseção anterior:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B_{21}} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{7}{10} \vec{V}_{12}^2 + \frac{2}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{20} H_o^2 z^2 + \frac{1}{5} \dot{H}_o z^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{4}{5} H_o (\vec{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \right] \right\}\end{aligned}$$

Enquanto que do segundo intervalo teremos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B_{21}} &= \int_z^R -\frac{H_g \xi m_1 dM_2}{3R_2 c^2} \left\{ \vec{A}_{12} + \frac{\dot{R}_2}{R_2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{\ddot{R}_2}{R_2} \vec{z} \right\} \\ \vec{F}_{B_{21}} &= -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left\{ \vec{A}_{12} \int_z^R \frac{dM_2}{R_2} + \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] \int_z^R \frac{\dot{R}_2}{R_2^2} dM_2 + \vec{z} \int_z^R \frac{\ddot{R}_2}{R_2^2} dM_2 \right\}\end{aligned}$$

Das seções anteriores é possível ver que:

$$\int_z^R \frac{dM_2}{R_2} = \frac{3}{2} \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{z^2}{R_2^2} \right)$$

Restando as integrais:

$$\begin{aligned}\int_z^R \frac{\dot{R}_2}{R_2^2} dM_2 &= \int_z^R \frac{H_o R_2}{R_2^2} 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi H_o \rho_2 \int_z^R R_2 dR_2 = 2\pi H_o \rho_2 (R_2^2 - z^2) \\ &= 2\pi H_o \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} (R_2^2 - z^2) = \frac{3}{2} H_o \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{z^2}{R_2^2} \right) \\ \int_z^R \frac{\ddot{R}_2}{R_2^2} dM_2 &= \int_z^R \frac{(\dot{H}_o R_2 + H_o^2 R_2)}{R_2^2} 4\pi R_2^2 \rho_2 dR_2 = 4\pi \rho_2 (\dot{H}_o + H_o^2) \int_z^R R_2 dR_2 \\ &= 2\pi \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} (\dot{H}_o + H_o^2) (R_2^2 - z^2) = \frac{3}{2} (\dot{H}_o + H_o^2) \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{z^2}{R_2^2} \right)\end{aligned}$$

Logo para esse segundo intervalo de integração teremos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B_{21}} &= -\frac{H_g \xi m_1}{3c^2} \left\{ \vec{A}_{12} \frac{3}{2} \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{z^2}{R_2^2} \right) + \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] \frac{3}{2} H_o \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{z^2}{R_2^2} \right) + \vec{z} \frac{3}{2} (\dot{H}_o + H_o^2) \frac{M_2}{R_2} \left(1 - \frac{z^2}{R_2^2} \right) \right\} \\ \vec{F}_{B_{21}} &= -\frac{H_g \xi m_1 M_2}{2c^2} \left\{ \vec{A}_{12} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{z^2}{R_2^3} \right) + \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] H_o \left(\frac{1}{R_2} - \frac{z^2}{R_2^3} \right) + \vec{z} (\dot{H}_o + H_o^2) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{z^2}{R_2^3} \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{B_{21}} = -H_g m_1 M_2 \left\{ \frac{\xi}{2c^2} \vec{A}_{12} + \frac{\xi H_o}{2c^2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{\xi}{2c^2} (\dot{H}_o + H_o^2) \vec{z} \right\} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{z^2}{R_2^3} \right)$$

$$\vec{F}_{B_{21}} = -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \frac{\xi}{2c^2} \vec{A}_{12} + \frac{\xi H_o}{2c^2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{\xi}{2c^2} (\dot{H}_o + H_o^2) \vec{z} \right\} \left(\frac{z^2}{R_2} - \frac{z^4}{R_2^3} \right)$$

O resultado final será a soma dessas duas forças:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{7}{10} \vec{V}_{12}^2 + \frac{2}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) + \frac{7}{20} H_o^2 z^2 + \frac{1}{5} \dot{H}_o z^2 \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{4}{5} H_o (\vec{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \right] \right\} \\ &- \frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \frac{\xi}{2c^2} \vec{A}_{12} + \frac{\xi H_o}{2c^2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{\xi}{2c^2} (\dot{H}_o + H_o^2) \vec{z} \right\} \left(\frac{z^2}{R_2} - \frac{z^4}{R_2^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{7}{10} \vec{V}_{12}^2 + \frac{2}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) + \frac{7}{20} H_o^2 z^2 + \frac{1}{5} \dot{H}_o z^2 \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{4}{5} H_o (\vec{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \right] \right\} \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \left\{ \frac{1}{2} \vec{A}_{12} + \frac{H_o}{2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{1}{2} (\dot{H}_o + H_o^2) \vec{z} \right\} \left(\frac{z^2}{R_2} - \frac{z^4}{R_2^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{7}{10} \vec{V}_{12}^2 + \frac{2}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) + \frac{7}{20} H_o^2 z^2 + \frac{1}{5} \dot{H}_o z^2 \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{4}{5} H_o (\vec{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \right] \right\} \\ &+ \left(\frac{1}{2} \vec{A}_{12} + \frac{H_o}{2} \left[2(\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} - \vec{V}_{12} \right] + \frac{1}{2} (\dot{H}_o + H_o^2) \vec{z} \right) \left(\frac{z^2}{R_2} - \frac{z^4}{R_2^3} \right) \end{aligned}$$

Ignorando os termos de expansão:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{7}{10} \vec{V}_{12}^2 + \frac{2}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} + \frac{1}{2} \vec{A}_{12} \left(\frac{z^2}{R_2} - \frac{z^4}{R_2^3} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Temos novamente um resultado original deste trabalho.

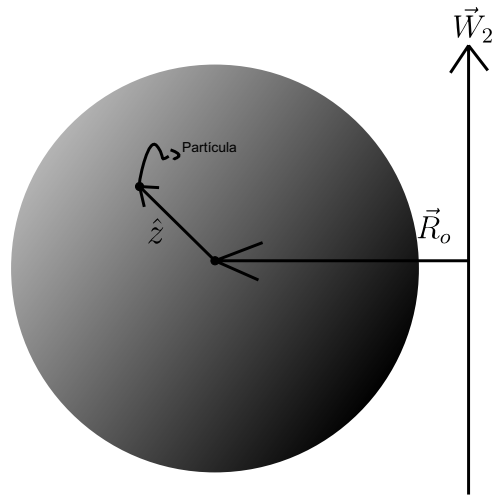


Figura 2.8: Esfera Maciça e Partícula no Interior.

Capítulo 3

Dedução da Mecânica Clássica e Energia de Repouso

3.1 Modelos Cosmológicos

3.1.1 Comentários Iniciais

Antes de abordarmos o objetivo dessa seção precisamos relacionar, os resultados obtidos nos parágrafos anteriores e aqueles por Assis [3], com suas implicações cosmológicas. Mas isso só será possível se colocarmos modelos cosmológicos sobre os quais as discussões podem ser centradas. Sabendo disso, dois modelos cosmológicos serão apresentados, cada um tendo suas peculiaridades.

3.1.2 Modelo Cosmológico I

Dois modelos cosmológicos foram propostos por Assis, todavia sabendo que estamos analisando a expressão da energia gravitacional weberiana sem a adição do fator exponencial proposto por Assis, será analisado apenas aquele no qual o universo é considerado uma esfera finita pois, como demonstra o autor, assim como pode ser visto nas equações acima, se fizermos com que o raio do universo tenda ao infinito teremos uma energia cinética e força que também irá ao infinito, um problema que é solucionado pela modificação anteriormente dita.

Mas como o universo é considerado uma esfera maciça surge uma questão: ‘Onde estaria seu centro?’. É possível perceber, na seção 17.6 de seu livro [3] que o centro da esfera maciça é sempre colocado no ponto de referência, tendo em vista que Assis pretende reutilizar a força entre casca esférica e partícula, a qual foi obtida no caso em que o centro da casca esférica está na origem do sistema de referencia, para determinar essa força do universo.

Se tudo o que foi dito no parágrafo anterior é correto então há no mínimo uma suposição escondida durante o processo de cálculo que uma esfera maciça exerce sobre uma partícula para esse modelo cosmológico proposto. Pois se, como foi feito em seu livro, usamos apenas a expressão entre casca esférica e partícula quando a partícula está no interior da casca esférica durante todo o intervalo de integração para descobirmos a força entre esfera maciça e partícula precisamos assumir que a partícula está exatamente no centro da esfera maciça, tendo em vista que a divisão da esfera maciça em várias cascas esféricas só terá como resultado único o de cascas esféricas com partícula em seu interior se, e somente se, a condição acima for satisfeita.

Quando a partícula não estiver no centro da esfera maciça precisamos separar o intervalo de integração de 0 à r , em que r é a distância entre o centro da esfera maciça e a partícula, usando

a expressão da casca esférica e partícula no exterior, finalizando com a integração de r até R , em que R é o raio da esfera maciça, usando agora a expressão da casca esférica e partícula no interior.

Só e somente para partículas próximas do centro podemos desprezar os termos a mais oriundos do primeiro intervalo de integração. Portanto as equações deduzidas por Assis, no modelo cosmológico do universo finito, só são úteis para o caso de partículas próximas do centro do universo. Para partículas próximas à fronteira do universo, termos a mais deverão ser considerados, do contrário não estaremos condizentes com as premissas anteriores assumidas.

Além disso, como foi demonstrado nas seções anteriores, o vetor que une o centro da esfera maciça e a partícula se anula nesse caso e a esfera maciça deve estar centrada na partícula e não no referencial. Então ao invés de usar este vetor para fazer analogias às expressões newtonianas em referenciais inerciais, o correto seria o uso de \vec{R}_o (Ver Figura 3.1 abaixo).

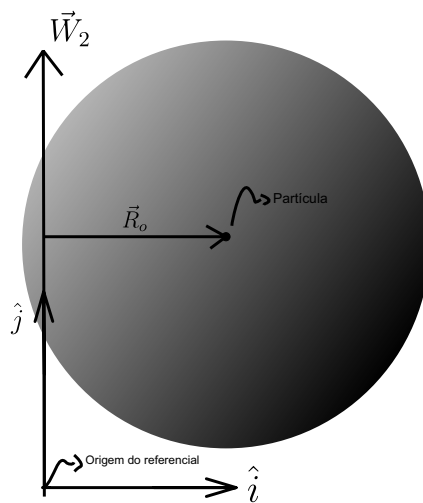


Figura 3.1: Partícula no Centro do Universo.

Como a transformação usada para deduzir as equações da mecânica para referenciais não inerciais levam em consideração a rotação acontecendo apenas em torno de sua origem, então o universo observável em torno da partícula aparentará rotacionar em torno de um eixo que passa pela origem do sistema de referencia. A mudança de \vec{R}_o para o vetor que tem origem na origem do referencial e termino na partícula será explicada na seção 4.2.

3.1.3 Modelo Cosmológico II

O problema das equações da mecânica clássica serem verdadeiras apenas para partículas no centro do universo pode ser resolvido adotando outro modelo cosmológico. Nesse novo, devesse sempre ter em mente que a força é produto de uma interação entre objetos físicos, e que devemos levar em consideração apenas aqueles objetos com o qual a partícula interage.

Se supormos que a partícula interage apenas com aqueles objetos físicos contidos na sua esfera observável, não precisamos admitir que a partícula está no centro do universo, basta imaginá-lo como infinito, mas que a partícula em questão interage somente com sua esfera observável finita centrada nela.

No modelo cosmológico I é assumido que a partícula sofre a força de qualquer outra partícula que exista no universo, sem qualquer limitação espaço-temporal. No segundo modelo há uma limitação clara, e além disso o universo é pensado como infinito, enquanto que é finito

no anterior. As equações da mecânica clássica agora valem para partículas em qualquer ponto do universo, desde que as esferas de interação de cada partícula tenham semelhanças básicas, como mesma densidade média e raios iguais.

3.2 Condições Cosmológicas

3.2.1 Força Completa Sobre Uma Partícula no Centro de Uma Esfera Maciça

Nas seção anterior realizamos o cálculo da força gravitacional weberiana entre uma esfera maciça e uma partícula com a partícula no centro quando a esfera maciça não possui nenhum movimento rotativo. Porém desejamos analisar nessa seção o caso em que todos os movimentos possíveis de rotação são considerados. Por esse motivo vamos apresentar a força correspondente num caso mais geral:

$$\vec{F}'_{B1} = -\Phi m'_1 \left[\vec{A}'_{12} + \vec{W}'_2 \times (\vec{W}'_2 \times \vec{R}_o) + 2\vec{V}'_{12} \times \vec{W}'_2 + \vec{R}_o \times \frac{d\vec{W}'_2}{dt} - H_o \left(\vec{V}'_{12} + \vec{R}_o \times \vec{W}'_2 \right) \right]$$

Essa força pode ser retirada das expressões e discussões oferecidas por Assis, com a única exceção do termo de expansão pois em seus modelos cosmológicos não se levou em consideração essa possibilidade. Também deve ficar claro que adicionamos os termos rotativos que aparecerão acompanhando a expansão.

É possível adicioná-los realizando transformadas de coordenadas. O leitor interessado pode ler as últimas páginas do apêndice B do livro de Assis [3] para entender o raciocínio por detrás do processo descrito acima e encontrar seu resultado final.

3.2.2 A Primeira Condição Cosmológica

No modelo I o resultado abaixo é válido apenas para partículas no centro do universo, enquanto que para o modelo II é válido para qualquer partícula do universo. Usaremos, lembrando do que foi agora a pouco dito, o resultado da interação entre esfera maciça e partícula no centro para procurar entender quais condições cosmológicas precisam ser satisfeitas se desejamos retornar às equações da mecânica clássica. Usando como pano de fundo a mecânica relacional, na qual afirma que:

$$\sum_{\substack{\forall q \\ q \neq k}} \vec{F}_{qk} = \vec{0}$$

Na qual \vec{F}_{qk} é a força exercida pela partícula q sobre a partícula k . Ao levarmos em conta que o universo é isotrópico em larga escala, e se chamarmos a força que essa distribuição exerce sobre a partícula por \vec{F}_{ik} podemos concluir que:

$$\sum_{\substack{\forall p \\ p \neq k}} \vec{F}_{pk} + \vec{F}_{ik} = \vec{0}$$

As partículas p são todas aquelas que não fazem parte da distribuição isotrópica de nosso universo. Como pelos modelos cosmológicos a parte isotrópica do universo foi assumida como

uma esfera maciça, podemos simplesmente substituir a força que uma esfera exerce sobre uma partícula em seu centro obtida nas seções anteriores:

$$\sum_{\substack{\forall p \\ p \neq k}} \vec{F}_{pk} - \Phi m_1 \left[\vec{A}_{12} + \vec{W}_2 \times (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) + 2\vec{V}_{12} \times \vec{W}_2 + \vec{R}_o \times \frac{d\vec{W}_2}{dt} - H_o (\vec{V}_{12} + \vec{R}_o \times \vec{W}_2) \right] = \vec{0}$$

Sendo melhor expressa no formato da mecânica clássica:

$$\sum_{\substack{\forall p \\ p \neq k}} \vec{F}_{pk} = \Phi m_1 \left[\vec{A}_{12} + \vec{W}_2 \times (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) + 2\vec{V}_{12} \times \vec{W}_2 + \vec{R}_o \times \frac{d\vec{W}_2}{dt} - H_o (\vec{V}_{12} + \vec{R}_o \times \vec{W}_2) \right]$$

Daqui devesse atentar que devemos usar as equações de força da mecânica relacional, ou seja:

$$\vec{F}_{21} = -H_g m_1 m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right]$$

E para a força entre cargas elétricas:

$$\vec{F}_{21} = H_e q_1 q_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right]$$

Tendo como resultado:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\forall p \\ p \neq k}} \left\{ -H_g m_1 m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right] + H_e q_1 q_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right] \right\} \\ & = \Phi m_1 \left[\vec{A}_{12} + \vec{W}_2 \times (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) + 2\vec{V}_{12} \times \vec{W}_2 + \vec{R}_o \times \frac{d\vec{W}_2}{dt} - H_o (\vec{V}_{12} + \vec{R}_o \times \vec{W}_2) \right] \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação por Φ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\forall p \\ p \neq k}} \left\{ -\frac{H_g}{\Phi} m_1 m_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right] + \frac{H_e}{\Phi} q_1 q_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right] \right\} \\ & = m_1 \left[\vec{A}_{12} + \vec{W}_2 \times (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) + 2\vec{V}_{12} \times \vec{W}_2 + \vec{R}_o \times \frac{d\vec{W}_2}{dt} - H_o (\vec{V}_{12} + \vec{R}_o \times \vec{W}_2) \right] \end{aligned}$$

Retornando à equações da mecânica clássica se e somente se:

$$\frac{H_g}{\Phi} = G$$

$$\frac{H_e}{\Phi} = k_e$$

Analisando a primeira igualdade, lembrando da definição de Φ :

$$\Phi = \frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}$$

Então:

$$\frac{H_g}{\frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}} = G$$

$$G = \frac{3c^2}{2\pi \rho_u \xi R_u^2} \quad (3.1)$$

Para a segundo igualdade:

$$\frac{H_e}{\frac{2\pi H_g \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}} = k_e$$

$$\frac{H_e}{H_g} = k_e \frac{2\pi \rho_u \xi R_u^2}{3c^2}$$

Reaproveitando a relação anterior obtida:

$$\frac{H_e}{H_g} = \frac{k_e}{G}$$

Para a equação da energia a mesma condição cosmológica se faz necessária. Não pretendemos apresentá-la aqui pois ela demanda um cuidado que aumentará as páginas sem acrescentar muito ao objetivo aqui almejado. O leitor interessado deve consultar o ‘Relational Mechanics’ de Assis.

3.2.3 A Segunda Condição Cosmológica

Da seção do cálculo da energia potencial entre esfera maciça e partícula no centro, supondo \dot{R}_2 constante (1.45):

$$U_{1B} = -m_1 \Phi \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{2} \dot{R}_u^2 - \frac{1}{2} \left(\vec{V}_{12} - (\vec{W}_2 \times \vec{R}_o) \right)^2 \right)$$

Nela há uma componente da energia que não depende da velocidade da partícula, nem da velocidade linear da distribuição isotrópica e nem mesmo da rotação dela, essa componente é justamente a:

$$U_{1Bo} = -\Phi m_1 \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{2} \dot{R}_u^2 \right)$$

Desprezando o termo de expansão/contração teremos:

$$U_{1Bo} = -\Phi \frac{3}{\xi} m_1 c^2$$

Se usarmos o valor da constante ξ necessário para prever a precessão do periélio de mercúrio justificada no ‘Relational Mechanics’, ou seja, se fizermos $\xi = 6$:

$$U_{1Bo} = -\Phi \frac{1}{2} m_1 c^2$$

A constante Φ pode ser ignorada tendo em vista o processo pelo qual retornamos às equações usuais da mecânica. Vemos então que jogando fora o termo de expansão a energia de repouso não condiz com a mecânica relativística, a qual prevê $m_1 c^2$. Contudo se não desprezamos a expansão/contração do universo basta então que:

$$\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{2} \dot{R}_u^2 = -c^2$$

$$\frac{3}{2}\dot{R}_u^2 = c^2 + \frac{3c^2}{\xi}$$

$$\frac{3}{2}\dot{R}_u^2 = \frac{\xi + 3}{\xi}c^2$$

$$\dot{R}_u^2 = \frac{2(\xi + 3)}{3\xi}c^2$$

Usando o valor de $\xi = 6$ oferecido por Assis para dar conta da precessão dos periélios:

$$\dot{R}_u^2 = \frac{2(6 + 3)}{3 \cdot 6}c^2 = \frac{9}{3 \cdot 3}c^2 = c^2$$

$$\dot{R}_u = \pm c$$

O universo precisa se expandir/contrair com a velocidade da luz para obtermos a equação de repouso da mecânica relativística. O valor positivo representando uma expansão, enquanto que o negativo retorna um contração, bastando lembrar que o vetor da velocidade de expansão é $\dot{R}_u \hat{R}_u$, em que \hat{R}_u sempre aponta do centro para fora do universo (Ver Figura 3.2), ou do centro da partícula para o limite do universo observável.

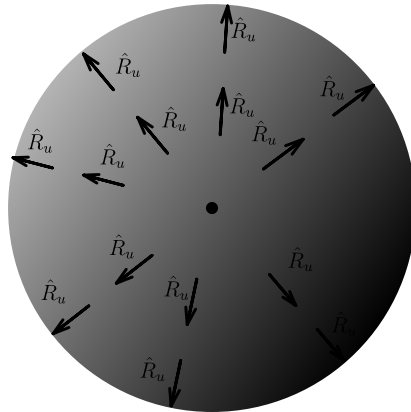


Figura 3.2: Universo em expansão.

Enquanto que se consideramos que \dot{R}_2 é variante de acordo a lei de Hubble-Lemaître, então o termo de repouso será (1.46):

$$U_{1Bo} = -\Phi m_1 \left(\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{4} H_o^2 R_u^2 \right)$$

Impondo a correspondência para com a energia de repouso da relatividade especial:

$$\frac{3c^2}{\xi} - \frac{3}{4} H_o^2 R_u^2 = -c^2$$

$$\frac{3}{4} H_o^2 R_u^2 = c^2 + \frac{3c^2}{\xi}$$

$$H_o^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\xi}\right) \frac{c^2}{R_u^2}$$

Usando o valor de $\xi = 6$

$$H_o^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{6}\right) \frac{c^2}{R_u^2}$$

$$H_o^2 = 2 \frac{c^2}{R_u^2}$$

Portanto:

$$H_o = \pm \sqrt{2} \frac{c}{R_u}$$

E como:

$$\dot{R}_2 = H_o R_2$$

Então o valor positivo corresponde à expansão e o negativo à contração, assim como no caso anterior. Além disso, partículas na fronteira do universo observável se afastam/aproximam de nós à velocidade superiores à velocidade da luz:

$$\dot{R}_u = \pm \sqrt{2} \frac{c}{R_u} R_u = \pm \sqrt{2} c$$

Capítulo 4

Referenciais Não Inerciais

4.1 Tratamento Clássico

Há vários trabalhos explicando a razão pela qual, dado um referencial S e S' , em que S' rotaciona em torno de sua origem quando observado por S , temos como transformada para o vetor posição da partícula:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

No qual \vec{r} é a posição da partícula em relação à S , \vec{r}' é a posição da partícula em relação à S' e \vec{R} é a posição de S' em relação à S (Ver Figura 4.1).

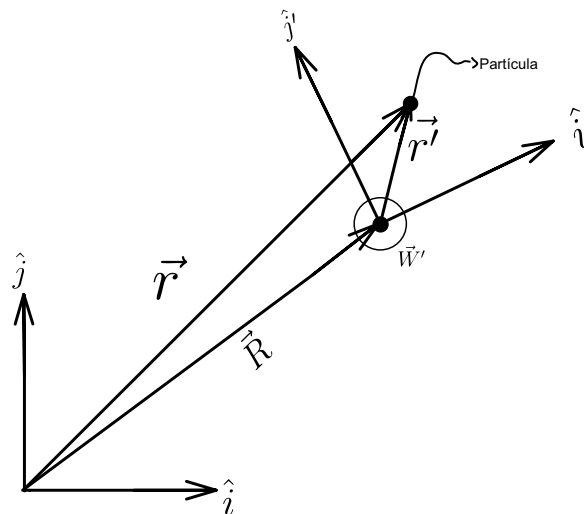


Figura 4.1: Mudança de Sistema de Referência.

Enquanto que para o vetor velocidade da partícula:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} + \vec{W} \times \vec{r}'$$

Sendo \vec{v} a velocidade da partícula em relação à S , \vec{v}' a velocidade da partícula em relação à S' , \vec{V} a velocidade de S' em relação à S e \vec{W} a velocidade angular da rotação de S' em relação à S . Além disso, para a equação da aceleração:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \frac{d\vec{W}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{W} \times (\vec{v}' + \vec{V}) + \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}')$$

Na qual \vec{a} a aceleração da partícula em relação à S , \vec{a}' a aceleração da partícula em relação à S' e \vec{A} é aceleração de S' em relação à S . Usando a equação newtoniana em relação a algum referencial inercial e considerando ele como se fosse o referencial S :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Usando as equações acima, juntamente com:

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

$$m = m'$$

Então teremos para o referencial S' com as características descritas acima:

$$\vec{F}' = m' \left(\vec{a}' + \vec{A} + \frac{d\vec{W}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{W} \times (\vec{v}' + \vec{V}) + \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}') \right)$$

Sendo comumente expressada da seguinte maneira:

$$\vec{F}' - m'\vec{A} - m'\vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}') - 2m'\vec{W} \times (\vec{v}' + \vec{V}) - m' \frac{d\vec{W}}{dt} \times \vec{r}' = m'\vec{a}'$$

Dela observasse que há termos a mais na equação além de $\vec{F}' = m'\vec{a}'$. Esses termos são chamados de forças fictícias, pois apesar de possuírem a característica de estarem do lado oposto à aceleração da partícula em relação ao referencial em questão, podendo ser imaginados como forças, não há nenhum agente conhecido que as cause.

4.2 Tratamento Relacional

É interessante ver que para os modelos cosmológicos discutidos em união com os axiomas da mecânica relacional e a expressão da força weberiana gravitacional entre partícula somos capazes de deduzir as expressões descritas acima desde que certas condições cosmológicas sejam satisfeita.

Contudo é bastante importante dar um passo adiante além das condições cosmológicas demonstradas necessárias, e da análise puramente de equações. Esse passo tem como rumo uma visualização mais intuitiva do surgimento dos termos, até então considerados fictícios, nos referenciais não inerciais, assim como que os caracteriza segundo a mecânica relacional.

Para começar consideraremos que o universo não acelera em relação ao referencial (Ver Figura 4.2), nem possui qualquer tipo de movimento rotativo, portanto, nem mesmo se move, estando em repouso completo, a força que o universo gerará na partícula será:

$$\vec{F}_{B1} = -\Phi m_1 \left\{ \vec{A}_1 - H_o \left(\vec{V}_{12} + \vec{R}_o \times \vec{W}_2 \right) \right\}$$

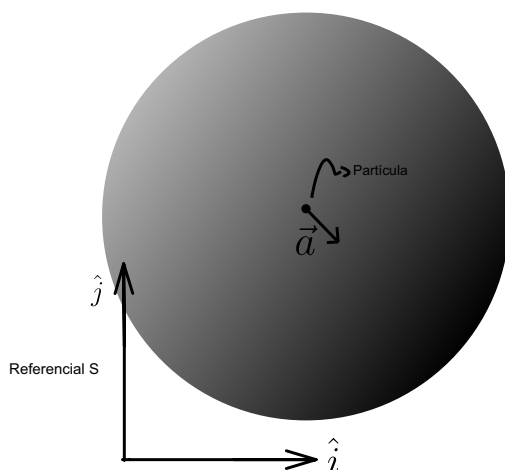


Figura 4.2: O universo estático em relação ao referencial S.

Como $H_o = 72 \frac{km}{Mpc.s}$, ou ainda, $H_o = 2,36 \times 10^{-18} s^{-1}$ sendo então absurdamente pequeno até mesmo para uma partícula de luz, na qual o produto H_o com $|\vec{V}_1|$ será $68 \times 10^{-11} \frac{m}{s^2}$, não é nem um pouco absurdo desprezá-lo. Disso:

$$\vec{F}_{B1} = -\Phi m_1 \vec{A}_1$$

Podemos concluir então que um referencial inercial é caracterizado justamente por observar o universo sem aceleração linear e rotação. O conjunto dos referenciais não inerciais são aqueles que observam algum tipo de movimento rotativo ou acelerativo do universo.

Se mudamos para um referencial que acelera em relação ao de cima (Ver Figura 4.3), ele verá o universo acelerando exatamente com a mesma aceleração dele em relação ao referencial anterior em intensidade porém em direção contrária, logo $\vec{A} = -\vec{A}'_2$ (Ver Figura 4.4).

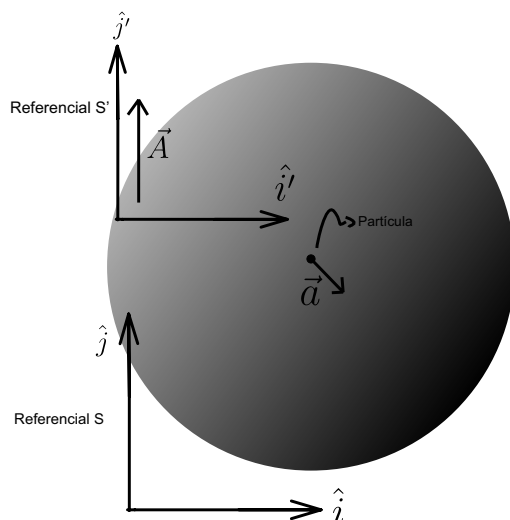


Figura 4.3: Movimentos em relação ao referencial S.

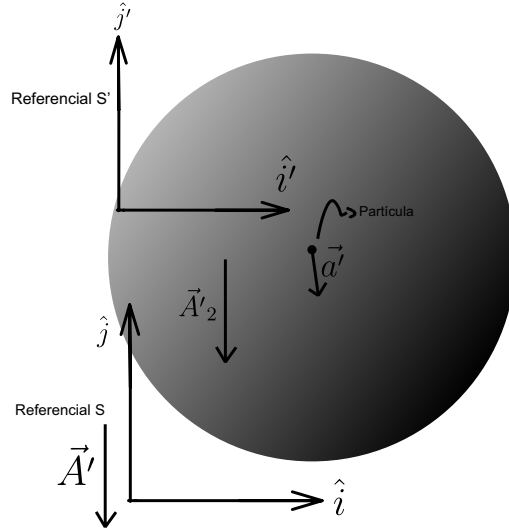


Figura 4.4: Movimentos em relação ao referencial S' .

É notável que o referencial S' verá o universo com a mesma aceleração que o referencial S o via em intensidade, mas com direção contrária. Partindo da mesma força do universo sobre a partícula mas agora expressa com suas características individuais, terá:

$$\vec{F}'_{B1} = -\Phi m'_1 (\vec{A}'_1 - \vec{A}_2)$$

Usando a relação dita no parágrafo anterior:

$$\vec{F}'_{B1} = -\Phi m'_1 \vec{A}'_1 - \Phi m'_1 \vec{A}$$

E lembrando do axioma da mecânica relacional:

$$F' = \Phi m'_1 \vec{A}'_1 + \Phi m'_1 \vec{A}$$

$$F' - \Phi m'_1 \vec{A} = \Phi m'_1 \vec{A}'_1$$

Olhando para a equação para um referencial não inercial sem rotação em relação ao inercial.

$$\vec{F}' - m' \vec{A} = m' \vec{a}'$$

Fica claro que a interpretação da mecânica relacional para os termos de forças fictícias é o de que há um agente causador, a saber, o universo. Que os termos 'a mais' fazem parte na verdade da mesma equação de força, mas expressos em referências diferentes de acordo com os movimentos observados da partícula em questão e o universo. A sua intensidade e direção é a mesma, sua natureza também, portanto o adjetivo 'fictício' não é mais justificável.

Tendo compreendido isso, é interessante que ao passarmos agora para um referencial que rotaciona em torno de seu eixo quando observado a partir do inercial acima (Ver Figura 4.5), então ele verá o universo rotacionando ao redor de si mas na direção oposta: $\vec{W} = -\vec{W}'_2$ (Ver Figura 4.6). Caso ele também acelera em relação ao inercial $\vec{A} = -\vec{A}'_2$ e tenha velocidade em relação ao inercial $\vec{V} = -\vec{V}'_2$, pois verá o universo com a mesma velocidade igual à sua em relação ao referencial em intensidade mas em direção oposta.

Assim notando que a partícula está sempre no centro do universo então $\vec{R}_o = \vec{R}_w + \vec{r}'_1$, em que \vec{R}_w é um vetor que paralelo ao vetor \vec{W}'_2 que parte da origem de \vec{R}_o e termina na origem de \vec{r}'_1 . Mas daí $\vec{W}'_2 \times \vec{R}_w = \vec{0}$, portanto $\vec{W}'_2 \times \vec{R}_o = \vec{W}'_2 \times \vec{r}'_1$.

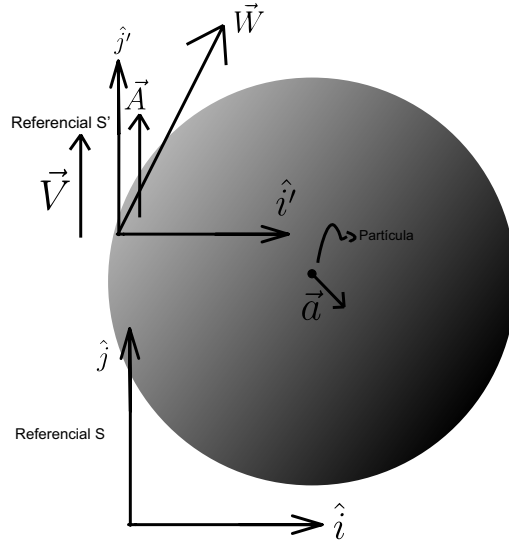


Figura 4.5: Movimentos em relação ao referencial S.

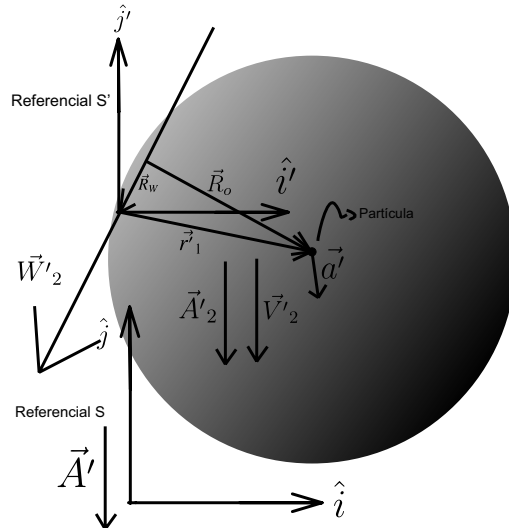


Figura 4.6: Movimentos em relação ao referencial S'.

É notável que o referencial S' verá o universo com a mesma aceleração que o referencial S o via em intensidade, mas com direção contrária. O mesmo pode ser dito para o vetor velocidade. Já quanto à rotação, o universo rotacionará em torno de \vec{W}'_2 representada pela vetor \vec{R}_o . Disso, olhando para a equação apresentada por Assis, a qual considerada a rotação da casca:

$$\vec{F}'_{B1} = -\Phi m'_1 \left[\vec{A}'_{12} + \vec{W}'_2 \times (\vec{W}'_2 \times \vec{R}_o) + 2\vec{V}'_{12} \times \vec{W}'_2 + \vec{R}_o \times \frac{d\vec{W}'_2}{dt} \right]$$

Teremos:

$$\vec{F}'_{B1} = -\Phi m'_1 \left[\vec{A}'_1 + \vec{A} + \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}'_1) + 2\vec{W} \times (\vec{V}'_1 + \vec{V}) + \frac{d\vec{W}'}{dt} \times \vec{r}'_1 \right]$$

Usando os axiomas da mecânica relacional:

$$F' = \Phi m'_1 \vec{A}'_1 + \Phi m'_1 \vec{A} + \Phi m'_1 \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}'_1) + 2\Phi m'_1 \vec{W} \times (\vec{V}'_1 + \vec{V}) + \Phi m'_1 \frac{d\vec{W}'}{dt} \times \vec{r}'_1$$

A qual é comumente dada por:

$$F' - \Phi m'_1 \vec{A} - \Phi m'_1 \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}'_1) - 2\Phi m'_1 \vec{W} \times (\vec{V}'_1 + \vec{V}) - \Phi m'_1 \frac{d\vec{W}}{dt} \times \vec{r}'_1 = \Phi m'_1 \vec{A}'_1$$

Comparando com a equação oriunda do tratamento clássico:

$$\vec{F}' - m' \vec{A} - m' \vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{r}') - 2m' \vec{W} \times (\vec{v}' + \vec{V}) - m' \frac{d\vec{W}}{dt} \times \vec{r}' = m' \vec{a}'$$

Finalizando então nosso objetivo, o de mostrar que trata-se da mesma força mas expressada em referenciais diferentes. Tratamentos análogos podem ser realizados para a expressão da energia cinética, mas como toda a linha de pensamento necessária para compreendê-la está exposta acima com a equação da força não iremos discutir aqui sobre isso para não sobrecarregar o texto desnecessariamente.

Capítulo 5

Análise de Artigos

5.1 Análise do Artigo Sobre a Curvatura da Luz

Nessa presente seção pretendemos analisar o artigo “ON THE ORIGIN OF THE DEFLECTION OF LIGHT” [2], pois nele pretendesse calcular a curvatura da luz devida à força de weber. Inicialmente será interessante lembrar do cálculo da força gravitacional weberiana entre esfera maciça e partícula no exterior, quando a esfera maciça não possui rotação e tem \dot{R}_2 constante pois este é bem aproximadamente o caso de uma partícula de luz interagindo com o Sol em seu exterior:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_{12}^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) + \frac{7}{8} \dot{R}_2^2 \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{5} \vec{A}_{12} - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \vec{V}_{12} - \frac{3}{10} \vec{V}_{12}^2 \hat{z} + \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12})^2 \hat{z} - \frac{3}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_{12}) \hat{z} \right\} \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \left[\dot{R}_2 (\hat{z} \cdot \vec{V}_{12}) \hat{z} \left(\frac{3z}{2R_2} - \frac{R_2}{4z} \right) - \frac{9R_2^2 z^2}{8R_2^2} \hat{z} + \frac{\ddot{R}_2 R_2}{4} \hat{z} \right] \right\}\end{aligned}$$

Desprezando os movimentos do Sol e assumindo que sua expansão é nula:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{B1} &= -\frac{H_g m_1 M_2}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_1^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_1)^2 + (\vec{z} \cdot \vec{A}_1) \right) \right] \hat{z} \right. \\ &+ \left. \frac{\xi}{c^2} \frac{R_2^2}{z^2} \left\{ \frac{z}{5} \vec{A}_1 - \frac{3}{5} (\hat{z} \cdot \vec{V}_1) \vec{V}_1 - \frac{3}{10} \vec{V}_1^2 \hat{z} + \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_1)^2 \hat{z} - \frac{3}{5} (\vec{z} \cdot \vec{A}_1) \hat{z} \right\} \right\}\end{aligned}$$

Para uma partícula que passa rente à superfície externa do Sol teremos durante esse intervalo de tempo $R_2 = z$, logo não podemos desprezar a parcela de $\frac{\xi R_2^2}{c^2 z^2}$ contida na força, se não desejamos desprezar também a parcela $\frac{\xi}{c^2}$. Porém o artigo buscando demonstrar que a força de weber não é capaz de prever corretamente a precessão do periélio ao mesmo tempo que a curvatura da luz correta, em outras palavras, usando $\xi = 6$, supõe que a força no caso acima seria igual àquela entre partículas:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{H_g m_1 m_2}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12} \ddot{r}_{12} \right) \right] \hat{r}_{12}$$

Na qual usando os resultados obtidos no Apêndice B da velocidade radial relativa e da aceleração radial relativa e desprezando o movimento do Sol, simbolizado pela letra 2, enquanto

que 1 denotada a partícula teríamos:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{H_g m_1 m_2}{r_{12}^2} \left[1 + \frac{\xi}{c^2} \left(\vec{V}_1^2 - \frac{3}{2} (\hat{z} \cdot \vec{V}_1)^2 + (\hat{z} \cdot \vec{A}_1) \right) \right] \hat{r}_{12}$$

Mas do que foi discutido acima só seria possível realizar essa aproximação no caso Sol e partícula de luz se a razão do raio do Sol e a distância da partícula até o Sol fosse grande o suficiente para desprezarmos a componente que possui essa razão, o que não se dá na realidade. Essa suposição era justificável pro caso mercúrio/Sol, da qual retirasse o valor de ξ tal que a precessão esteja de acordo com o observado, mas este já não é mais o caso para o problema da curvatura da luz.

Percebesse então que o artigo parte de uma premissa falsa, tendo também uma conclusão provavelmente falsa. Nosso trabalho não pretende executar essa conta, apenas demonstrar que partiu-se de uma premissa falsa no artigo citado, e que portanto, a curvatura da luz de acordo com a força de weber ainda está inexplorada.

5.2 Análise do Artigo das Interações Tipo Weberianas

No artigo intitulado ‘Weber-like interactions and energy conservation’ [1] usasse um terceiro artigo [14], no qual novamente ocorre a suposição falsa descrita acima. Do artigo em análise nesta seção mostra-se que partindo de uma expressão tipo weberiana:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{H_g m_1 m_2}{r_{12}^2} \left[1 - \mu \dot{r}_{12}^2 + \gamma r_{12} \ddot{r}_{12} \right] \hat{r}_{12}$$

Há uma condição que μ e γ precisam satisfazer para que a força acima seja conservativa: $\gamma = 2\mu$. Disso concluiu-se que apenas um parâmetro será independente se queremos que a força seja conservativa. Até aqui o artigo não comete nenhum erro, porém recorre à mesma falsidade ao supor que é possível aproximar o caso da curvatura da luz como uma interação entre duas partículas, conforme foi feito pelo artigo discutido na seção passada [2].

Pois dessa suposição falsa retirasse que se desejamos manter a força conservativa e deduzir a precessão correta do periélio precisamos de $\gamma = 2\mu$ e $\gamma = \frac{6}{c^2}$, enquanto que se desejamos manter a força conservativa e deduzir a curvatura correta da luz então precisamos do conjunto $\gamma = 2\mu$ e $\gamma = \frac{18}{c^2}$.

Logo, não seria possível ter uma força tipo weberiana que é tanto conservativa, como boa para calcular a precessão do periélio e a curvatura da luz (basta ver que os dois conjuntos de equações dados acima são incompatíveis). Mas o erro deste artigo é exatamente o mesmo que o do anterior, a saber, assumir que a força entre o Sol e a partícula de luz pode ser aproximada pela força tipo weberiana entre partículas, o que é falso. Daí está demonstrado que a conclusão não está justificada por conter uma premissa falsa e que o problema ainda está aberto a análises futuras.

Capítulo 6

Tópicos Adicionais

6.1 A Constante da Gravitação de Newton

Da primeira condição cosmológica precisamos que (3.1):

$$G = \frac{3c^2}{2\pi\rho_u\xi R_u^2}$$

Uma condição necessário para retornarmos às equações da mecânica clássica. Pretendemos agora analisar se isso se dá na realidade utilizando os valores mais aceitos atualmente para as grandezas do lado direito da equação. O valor da velocidade da luz é [15]:

$$c = 299.792.458 \frac{m}{s}$$

Não encontramos nenhum trabalho encontrando experimentalmente o valor da densidade média do universo, mas uma discussão detalhada por parte de Assis [3], seção 4.5, permite usar:

$$\rho_u = 4,2 \times 10^{-28} \frac{kg}{m^3}$$

Novamente não encontramos nenhum artigo oferecendo medições diretas, mas crê-se que:

$$R_u = 4,4 \times 10^{26} m$$

Usando o valor de ξ oferecido por Assis:

$$\xi = 6$$

Podemos deduzir que:

$$G = 8,78 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$$

Comparando com o valor da constante gravitacional de Newton obtida experimentalmente [16]:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$$

Vemos que diante da imensa incerteza da densidade média do universo e do raio do universo observável a primeira condição cosmológica está dentro de limites aceitáveis. Uma verificação da igualdade acima só poderá ser efetuada com segurança quando avançarmos tecnologicamente

alcançando valores mais precisos e com medições menos indiretas dessas grandezas cosmológicas.

Além disso a relação da constante de Newton dada acima já havia sido sugerida por Dirac [17] em ordem de grandeza, trocando apenas a densidade média do universo por $\rho_u = \frac{M_u}{\frac{4}{3}\pi R_u^3}$ para realizar a comparação:

$$G = \frac{2c^2}{\xi} \frac{R_u}{M_u}$$

Dirac havia percebido que:

$$G \approx c^2 \frac{R_u}{M_u}$$

Portanto a mecânica relacional oferece uma resposta à Dirac e sua Hipótese dos Grandes Números pelo menos no que diz respeito à constante da gravitação de Newton.

6.2 A Constante de Hubble

Para o universo com expansão/contração constante teremos:

$$\dot{R}_u = \pm c$$

Ou seja, todo ponto do universo precisaria expandir/contrair na velocidade da luz para deduzir a energia de repouso da relatividade especial. Entrando em conflito com a crença atual mais vigente e possuindo dificuldade com a experiência. Portanto acreditamos que esse caso deve ser ignorado e partiremos para a análise do caso do universo seguindo a lei de Hubble-Lemaître ??.

$$H_o = \pm \sqrt{2} \frac{c}{R_u}$$

Usando os valores oferecidos logo acima obtemos:

$$H_o = \pm 9,64 \times 10^{-19} \frac{1}{s}$$

Comparando com o valor obtido por vários métodos [18]:

$$H_o = 2,27 \times 10^{-18} \frac{1}{s}$$

Como já foi explicado, o raio do universo é uma grandeza cosmológica ainda carente de precisão, portanto é suficiente, tendo em mãos um conjunto limitado de conhecimento acerca do cosmos, que ambos os resultados estejam na mesma ordem de grandeza.

6.3 A Variação da Constante de Hubble e a Idade do Universo

Das equações encontradas até então podemos concluir que as partículas na fronteira do universo interagente precisam se afastar/aproximar de acordo com a lei de Hubble:

$$\dot{R}_u = H_o R_u$$

Mas usando a segunda condição cosmológica:

$$\dot{R}_u = \pm \sqrt{2} \frac{c}{R_u} R_u = \pm \sqrt{2} c$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo, fazendo $t_0 = 0$ e $R_0 = 0$, supondo que ele esta se expandindo:

$$R_u(t) - R_0 = \sqrt{2} \int_0^t c dt$$

Se supormos a velocidade da luz constante no tempo:

$$R_u(t) = \sqrt{2} ct$$

Implicando em, para o momento atual T :

$$R_u(T) = \sqrt{2} cT$$

Usando a equação da constante de Hubble com a velocidade da luz:

$$R_u(T) = H_o R_u(T) T$$

Teremos por fim:

$$T = \frac{1}{H_o}$$

Essa relação já havia sido percebida a muito tempo [7]. Usando o valor da constante de Hubble obtida experimentalmente [18]:

$$T = 4,3484 \times 10^{17} s$$

Acreditasse que atualmente o universo tenha em torno de 13,787 bilhões de anos, o que em segundos retorna:

$$T = 4,3484 \times 10^{17} s$$

Como para essas grandezas a incerteza experimental é bem menor em comparação à densidade média do universo e seu raio observável vemos uma clara convergência significativa, dando suporte à mecânica relacional. Essa relação já havia sido percebida a muito tempo, mas sem qualquer tipo de explicação como pode ser dada pela mecânica relacional, um resultado pioneiro desta teoria e de nosso trabalho.

Também é interessante ressaltar que supomos a velocidade da luz constante, tornando a variação do raio do universo observável constante e portanto $\dot{R}_u = 0$. Vamos analisar um pouco mais essa suposição ao derivarmos a equação que relaciona a variação do raio do universo observável com a constante de hubble:

$$\ddot{R}_u = \dot{H}_o R_u + H_o \dot{R}_u = \dot{H}_o R_u + H_o^2 R_u = \sqrt{2} \dot{c}$$

Como, pela suposição, $\dot{c} = 0$ e $\ddot{R}_u = 0$:

$$\dot{H}_o R_u + H_o^2 R_u = 0$$

$$\dot{H}_o = -H_o^2$$

Ou seja:

$$\dot{H}_o = -5,6 \times 10^{-36} \frac{1}{s^2}$$

Esse é o valor aproximado de \dot{H}_o se a velocidade da luz for aproximadamente constante no tempo, uma suposição que se demonstrou útil no cálculo da idade do universo. Não há até o momento nenhuma medição dessa variável cosmológica, impossibilitando uma comparação com a experiência. Podemos considerá-la portanto uma previsão que carece de evidência aguardando melhorias tecnológicas para sua verificação.

Não desejamos nos apegar à concepção da velocidade de luz constante no tempo, apenas mostrar que ela retorna bons resultados, pois é possível levar em consideração uma possível variação e deduzir as igualdades acima impondo certas condições. O problema é que para isso teríamos que saber a expressão da velocidade em função do tempo, algo que claramente escapa de nosso conhecimento. Portanto essa possibilidade não será investigada.

6.4 Variação das Grandezas Cosmológicas

Da subseção anterior foi mostrado que para o caso em que a velocidade da luz, a constante de Hubble precisa variar conforme a equação abaixo:

$$\dot{H}_o = -H_o^2$$

Seu valor precisa ser necessariamente negativo para que isso aconteça. Mas por outro lado, se agora a constante de Hubble é constante no tempo ($\dot{H}_o = 0$):

$$H_o^2 R_u = \sqrt{2}\dot{c}$$

Logo a velocidade da luz não será constante no tempo e seu valor aumentará com o passar do tempo. Usando o valores atuais teríamos:

$$\dot{c} = 1,6 \times 10^{-9} \frac{m}{s^2}$$

Atualmente não há precisão suficiente para medirmos variações desta ordem. Porém disso concluiu-se que não é possível que a velocidade da luz e a constante de Hubble sejam constantes ao mesmo tempo a não ser que a constante de Hubble seja nula sempre ou o raio do universo interagente seja nulo, o que talvez possa ocorrer mas é de se esperar que seja em condições muito particulares e portanto não gerais.

Para perceber isso basta fazer na equação $\dot{H}_o = 0$ e $\dot{c} = 0$ e ver que ela só será satisfeita quando $H_o = 0$ ou $R_u = 0$. O mais provável é que pelo menos umas dessas grandezas cosmológicas variará no tempo. É claro que, é ainda mais plausível seria supor que ambas variam, mas como não temos acesso a isso, não iremos analisar essa possibilidade a fundo, apenas deixar claro que ela existe. Passando para as implicações que isso carrega para a constante da gravitação de Newton:

$$G = \frac{3c^2}{2\pi\rho_u\xi R_u^2} = \frac{3c^2}{2\pi\frac{M_u}{\frac{4}{3}\pi R_u^3}\xi R_u^2} = \frac{3c^2}{2\pi\xi R_u^2} \frac{\frac{4}{3}\pi R_u^3}{M_u} = \frac{2c^2}{\xi} \frac{R_u}{M_u}$$

Usando, para um universo em expansão:

$$R_u = \sqrt{2} \frac{c}{H_o}$$

Teremos:

$$G = \frac{2c^2}{\xi} \frac{\sqrt{2} \frac{c}{H_o}}{M_u} = \frac{2\sqrt{2}c^3}{\xi H_o M_u}$$

É de se esperar que a massa do universo interagente varie no tempo, tendo em vista que a até mesmo a massa do sol varia no tempo devido ao processo de emissão de luz e como a perda de massa do universo é aproximada a perda de massa das estrelas por este mesmo processo, então sabendo que atualmente a variação da massa do sol é aproximadamente:

$$\dot{M}_s \approx -1,27 \times 10^9 \frac{kg}{s}$$

A variação da massa do universo interagente será aproximadamente a multiplicação da atual variação da massa do sol com o número de estrelas no universo observável:

$$\dot{M}_U \approx \dot{M}_s N_{estrelas} = -1,27 \times 10^9 \times 10^{24} = -1,27 \times 10^{35} \frac{kg}{s}$$

Derivando a equação da constante de Newton temos:

$$\dot{G} = \frac{2\sqrt{2}}{\xi} \left\{ \left[\frac{(3c^2 \dot{c} H_o - c^3 \dot{H}_o)}{H_o^2} \right] M_u - \dot{M}_u \frac{c^3}{H_o} \right\} \frac{1}{M_u^2}$$

Se a velocidade da luz é constante no tempo ($\dot{c} = 0$) então a constante da gravitação universal gravitacional de Newton variará da seguinte maneira (lembrando que neste caso $\dot{H}_o = -H_o^2$):

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \frac{2\sqrt{2}}{\xi} \left\{ \left[\frac{-c^3 \dot{H}_o}{H_o^2} \right] M_u - \dot{M}_u \frac{c^3}{H_o} \right\} \frac{1}{M_u^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\xi} \left\{ c^3 M_u - \dot{M}_u \frac{c^3}{H_o} \right\} \frac{1}{M_u^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\xi} \left\{ M_u H_o - \dot{M}_u \right\} \frac{c^3}{H_o M_u^2} \end{aligned}$$

De $M_u \approx 1,5 \times 10^{53} kg$ e $H_o \approx 2,3 \times 10^{-18} s^{-1}$ e com os valores anteriormente obtidos, a constante da gravitação de Newton varia atualmente aproximadamente:

$$\dot{G}(T) \approx 1,15 \times 10^{-28} \frac{m^3}{kg s^3}$$

Devido às varias aproximações, e muita incerteza nas grandezas utilizadas, o valor real pode divergir grandemente deste resultado obtido. Divergências da ordem de 10^3 são facilmente compreensíveis. É de se esperar uma variação da gravitação de Newton em regiões:

$$10^{-25} \frac{m^3}{kg s^3} < \dot{G}(T) < 10^{-31} \frac{m^3}{kg s^3}$$

Valores que estão bastante além da precisão dos equipamentos atuais, portanto não podemos compará-lo com observações. Caso futuramente chegemos ao ponto de conseguirmos medir variações dessa ordem de grandeza na constante da gravitação de Newton e o resultado acima condizer com o observado então novamente a mecânica relacional terá realizado uma previsão.

Há trabalhos recentes reportando anomalias nos movimentos celeste de nosso sistema solar que podem ser explicados por meio da ideia da variação da constante da gravitação de Newton [19], porém devido à imensa incerteza do resultado obtido acima não pretendemos dar uma resposta definitiva e completa. É possível ver que o intervalo acima oferecido está dentro do necessário para responder o artigo, sendo portanto um resultado excelente e original deste trabalho.

Das discussões acima vemos que o mais esperado é que todas essas quantidades variem no tempo, e que talvez, a velocidade da luz varie muito pouco a ponto de podermos desprezá-la nos casos analisados.

6.5 Viagem Interestelar

Suponhamos um objeto físico que está numa região do espaço longe o suficiente de qualquer distribuição anisotrópica de tal forma que a somatória das forças desta distribuição seja nula, logo a força inercial também será nula em virtude da terceira lei da Mecânica Relacional:

$$\vec{F}_{ik} = \vec{0}$$

A expressão da força inercial num referencial inercial tornará a equação acima em:

$$-\Phi m_1 \left\{ \vec{A}_1 - H_o \vec{V}_1 \right\} = \vec{0}$$

$$\vec{A}_1 = H_o \vec{V}_1$$

Disso concluíse:

$$\frac{dV_1}{dt} = H_o V_1$$

$$\int_{v_o}^v \frac{dV_1}{V_1} = \int_{t_0=0}^t H_o dt$$

Se supormos que durante o intervalo de integração podemos considerar H_o constante. Então:

$$\ln \frac{v}{v_o} = H_o t$$

$$v = v_o e^{H_o t}$$

Como $H_o > 0$ então a velocidade do objeto físico aumentará exponencialmente com o tempo, de tal forma que passada a idade atual do universo, ou seja, fazendo $t = T = \frac{1}{H_o}$:

$$v_f = e v_o$$

A velocidade será então quase que triplicada após esse imenso intervalo de tempo. Caso isso seja verdadeiro, viagens interestelares de longo prazo poderão tornar-se viáveis usando-se a própria força inercial do universo para aumentar exponencialmente a velocidade da nave em relação ao universo. Devesse ter em mente que todos os outros objetos físicos sofrem essa alteração na velocidade portanto será muito importante aumentar sua velocidade inicial para que a longo prazo seja possível alcançar o alvo desejado.

Também é possível compreender que o mesmo acontecerá para uma esfera em rotação com a distribuição anisotrópica exercendo uma força nula de tal forma que a força inercial também seja nula. Isso é interessante pois em tese seria possível deixar aumentando sua velocidade angular em relação ao referencial fixo em relação às estrelas até um ponto no qual a energia da esfera aumentasse para um valor significativo.

Teríamos assim produção de energia realizada somente pela interação do objeto físico com a sua esfera observável. Como foi visto acima, a mudança na velocidade é muito pequena para pequenas variações temporais, portanto dificilmente seria algo proveitoso. Contudo é algo a ser considerado pois é um resultado bastante impressionante caso se dê na realidade.

Conclusão

Demonstramos que todos os nossos cálculos estão de acordo com aqueles obtidos por Assis ao desprezarmos as componentes de expansão, já que Assis não levou em consideração a possibilidade da expansão do universo, em virtude de seus modelos cosmológicos serem estáticos neste quesito. Dando apoio ao que foi oferecido por Assis em seus trabalhos para estes casos, mas que não foi colocado passo a passo matemático, como foi feito aqui.

Além disso determinamos a energia potencial e força entre esfera maciça e partícula usando somente a geometria dos casos estudados, sem fazer qualquer tipo de relação para com referenciais específicos, aproximando-se muito a um tratamento relacional da física.

A dedução da energia de repouso da relatividade especial de Einstein foi realizada com sucesso. Encontramos até mesmo uma relação entre a constante de Hubble, a velocidade da luz e o raio do universo que está dentro da ordem de grandeza usando seus valores mais aceitos atualmente. Um resultado original e único deste trabalho sobre a mecânica relacional.

Também oferecemos valores para a variação da constante de Hubble caso a velocidade da luz seja constante ou varie muito pouco para pequenos intervalos de tempo a ponto de que podemos desprezar sua variação, restando aprimoramento tecnológico para a testagem empírica da equação obtida.

Deixamos explícita a condição cosmológica necessária para a dedução da mecânica clássica e verificamos que a relação encontrada entre a constante da gravitação de Newton, a densidade média do universo e seu raio está dentro da ordem de grandeza dos valores atuais mais aceitos. O modelo cosmológico proposto por Assis foi criticado e oferecemos em troca um modelo superior em relação ao pontos levantados.

A caracterização, partindo do tratamento relacional da física, dos referenciais não inerciais como aqueles que observam algum tipo de movimento rotativo ou acelerativo do universo foi efetuada oferecendo várias imagens ilustrativas passando dos referenciais inerciais até o caso mais geral dos não inerciais. E comparando o tratamento da mecânica relacional com o tratamento da mecânica clássica desse conjunto de referenciais nos quais as expressões da equação de movimento não são muito simples.

Uma resposta às críticas mais fortes sobre a mecânica relacional e sua adequação para com a experiência foi dada. Demonstrando as premissas falsas e portanto os erros cometidos pelo artigos [1, 2] analisados. A equação que de fato modela os casos estudados nestes artigos foi exposta deixando espaço para futuros trabalhos verificarem a resposta da mecânica relacional para a curvatura da luz.

Devido à expansão do universo um termo a mais na força inercial aparece dependendo da velocidade do corpo de tal forma que isso afetaria viagens interestelares de longo prazo, da ordem da idade do universo atual (13,787 Bilhões de Anos). Pois a velocidade da nave em relação ao universo aumentaria exponencialmente no tempo de tal forma que poderíamos chegar mais rápido nos locais almejados.

É possível também que esferas em rotação em relação ao universo aumentem sua velocidade de rotação. Não calculamos o seu valor, mas esse efeito deveria acontecer caso os nossos

cálculos estejam corretos e a força de weber realmente se dê na realidade. Também oferecemos um intervalo de valores para a variação da constante de gravitação de Newton que responderia às anomalias encontradas atualmente nos movimentos celeste de nosso sistema solar [19]. Um resultado marcante de nosso trabalho.

Apêndice A

Soluções dos P_j

Começaremos realizando algumas manipulações iniciais. Iremos supor que as fatias nas quais a casca esférica foi dividida, cada uma contendo uma massa dM_2 , terão a mesma densidade de área uniforme, de tal forma que $dM_2 = \sigma_2 dA_2$ e $\sigma_2 = \frac{M_2}{4\pi R_2^2}$, reforçando que M_2 é a massa total da casca esférica e R_2 é o raio dela. Como essas duas quantidades não são função de dM_2 , pela suposição do próprio problema, então poderemos retirá-las da integral.

O elemento de área dA_2 é dado pelo produto do comprimento com a largura do anel formado pelos cortes efetuados anteriormente, mas tendo em vista que tais anéis são aproximadamente circunferência de raio $R_2 \sin \theta$, em que θ é o ângulo entre o eixo z e qualquer uma das retas formadas pela união do centro da esfera com qualquer ponto do elemento de área, sendo o mesmo que o ângulo entre \hat{R}_2 e \hat{z} . De tal forma que seu comprimento será $2\pi R_2 \sin \theta$, e sendo a largura $R_2 d\theta$, o elemento de área é dado por $dA_2 = 2\pi R_2^2 \sin \theta d\theta$.

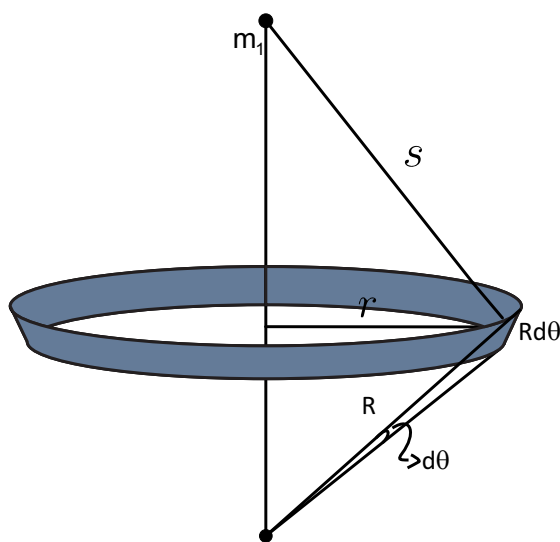


Figura A.1: Uma anel formado pelo corte.

Veja que a espessura do anel pode ser aproximado como um comprimento de arco, logo seu valor é $R_2 d\theta$. Já seu comprimento nada mais é que o comprimento da circunferência de raio r , logo será $2\pi r$, mas de $r = R \sin \theta$ tiramos que o comprimento do anel será $2\pi R \sin \theta$. Por fim podemos concluir que:

$$dM_2 = \frac{M_2}{4\pi R_2^2} 2\pi R_2^2 \sin \theta d\theta = \frac{M_2}{2} \sin \theta d\theta$$

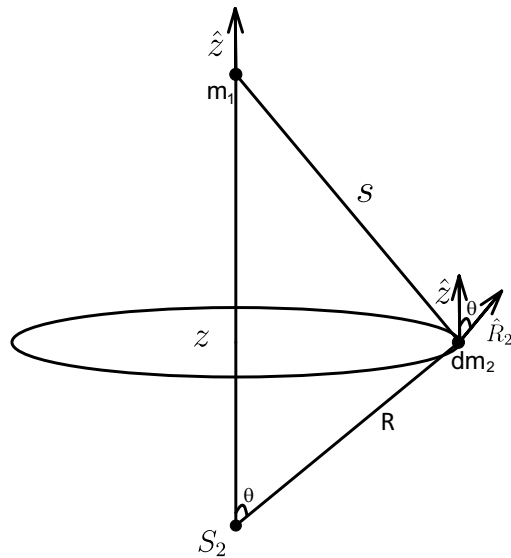


Figura A.2: Triângulo para obtenção do cosseno de θ

Lembrando da lei dos cossenos teremos para o triângulo acima:

$$s^2 = z^2 + R_2^2 - 2zR_2 \cos \theta$$

A qual diferenciada em relação a θ resulta em:

$$\frac{ds^2}{d\theta} = \frac{d(z^2 + R_2^2 - 2zR_2 \cos \theta)}{d\theta}$$

$$2s \frac{ds}{d\theta} = 2zR_2 \sin \theta$$

$$\frac{sds}{zR_2} = \sin \theta d\theta$$

Substituindo a relação acima no elemento de massa:

$$dM_2 = \frac{M_2}{2} \frac{sds}{zR_2} = \frac{M_2}{2R_2z} sds$$

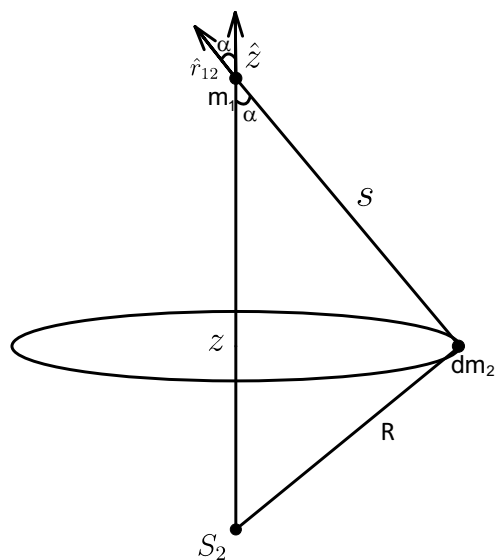


Figura A.3: Triângulo para obtenção do ângulo α

Por meio do triângulo acima formado podemos retirar, via lei dos cossenos novamente, que:

$$R_2^2 = s^2 + z^2 - 2sz \cos \alpha$$

$$s^2 + z^2 - R_2^2 = 2sz \cos \alpha$$

$$\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} = \cos \alpha$$

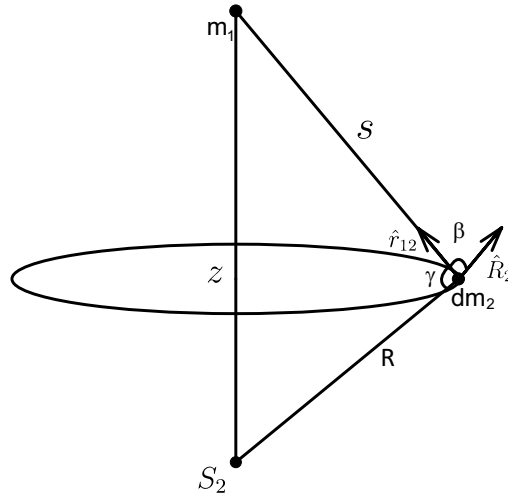


Figura A.4: Triângulo para obtenção do ângulo β

Observe que $\beta + \gamma = \pi$, então $\cos \beta = -\cos \gamma$, mas da lei dos cossenos $z^2 = s^2 + R_2^2 - 2sR_2 \cos \gamma$, logo $z^2 = s^2 + R_2^2 + 2sR_2 \cos \beta$. Logo:

$$z^2 = s^2 + R_2^2 + 2sR_2 \cos \beta$$

$$-\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} = \cos \beta$$

E da lei do cosseno para o ângulo θ :

$$\frac{z^2 + R_2^2 - s^2}{2zR_2} = \cos \theta$$

Basta então substituir as relações acima nas integrais P_j :

$$P_1 = \int_S \frac{dM_2}{s} = \int_S \frac{1}{s} \frac{M_2}{2R_2z} s ds = \frac{M_2}{2R_2z} \int_S ds = \frac{M_2}{2R_2z} [s]_S$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \int_S \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 = \int_S \frac{\left[\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right]^2}{s} \frac{M_2}{2R_2z} s ds = \frac{M_2}{8R_2z^3} \int_S \left[\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{s} \right]^2 ds \\ &= \frac{M_2}{8R_2z^3} \int_S \left[s + \frac{(z^2 - R_2^2)}{s} \right]^2 ds = \frac{M_2}{8R_2z^3} \int_S \left[s^2 + 2(z^2 - R_2^2) + \frac{(z^2 - R_2^2)^2}{s^2} \right] ds \\ &= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\int_S s^2 ds + 2(z^2 - R_2^2) \int_S ds + (z^2 - R_2^2)^2 \int_S \frac{1}{s^2} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\frac{1}{3} [s^3]_s + 2(z^2 - R_2^2)[s]_s + (z^2 - R_2^2)^2(-1)[s^{-1}]_s \right] \\
P_3 &= \int_s \frac{\sin^2 \alpha}{s} dM_2 = \int_s \frac{dM_2}{s} - \int_s \frac{\cos^2 \alpha}{s} dM_2 = P_1 - P_2 \\
P_4 &= \int_s \frac{\cos \alpha \cos \beta}{s} dM_2 = - \int_s \left[\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right] \left[\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} \right] \frac{1}{s} \frac{M_2}{2R_2z} s ds \\
&= - \frac{M_2}{8R_2^2z^2} \int_s \left[s + \frac{z^2 - R_2^2}{s} \right] \left[s + \frac{R_2^2 - z^2}{s} \right] ds \\
&= - \frac{M_2}{8R_2^2z^2} \int_s \left[s^2 + R_2^2 - z^2 + z^2 - R_2^2 + \frac{(z^2 - R_2^2)(R_2^2 - z^2)}{s^2} \right] ds \\
&= - \frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\int_s s^2 ds + (z^2 - R_2^2)(R_2^2 - z^2) \int_s s^{-2} ds \right] \\
&= - \frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{[s^3]_s}{3} + (z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_s \right] \\
P_5 &= \int_s \frac{\cos^2 \beta}{s} dM_2 = \int_s \left[\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} \right]^2 \frac{1}{s} \frac{M_2}{2R_2z} s ds = \frac{M_2}{8R_2^3z} \int_s \left[s + \frac{R_2^2 - z^2}{s} \right]^2 ds \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\int_s s^2 ds + 2(R_2^2 - z^2) \int_s ds + (R_2^2 - z^2)^2 \int_s s^{-2} ds \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{[s^3]_s}{3} + 2(R_2^2 - z^2)[s]_s - (R_2^2 - z^2)^2 [s^{-1}]_s \right] \\
P_6 &= \int_s \frac{\cos \alpha}{s^2} dM_2 = \int_s \left[\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right] \frac{1}{s^2} \frac{M_2}{2R_2z} s ds = \frac{M_2}{4R_2z^2} \int_s \left[1 + (z^2 - R_2^2)s^{-2} \right] ds \\
&= \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[\int_s ds + (z^2 - R_2^2) \int_s s^{-2} ds \right] = \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[[s]_s - (z^2 - R_2^2)[s^{-1}]_s \right] \\
P_7 &= \int_s \frac{\cos^3 \alpha}{s^2} dM_2 = \int_s \left[\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right]^3 \frac{1}{s^2} \frac{M_2}{2R_2z} s ds = \frac{M_2}{16R_2z^4} \int_s \left[s^2 + z^2 - R_2^2 \right]^3 \frac{1}{s^4} ds \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \int_s \left[s^6 + 3(z^2 - R_2^2)s^4 + 3(z^2 - R_2^2)^2 s^2 + (z^2 - R_2^2)^3 \right] \frac{1}{s^4} ds \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \int_s \left[s^2 + 3(z^2 - R_2^2) + 3(z^2 - R_2^2)^2 s^{-2} + (z^2 - R_2^2)^3 s^{-4} \right] ds \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\int_s s^2 ds + 3(z^2 - R_2^2) \int_s ds + 3(z^2 - R_2^2)^2 \int_s s^{-2} ds + (z^2 - R_2^2)^3 \int_s s^{-4} ds \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\frac{1}{3} [s^3]_s + 3(z^2 - R_2^2)[s]_s - 3(z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_s - (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} [s^{-3}]_s \right] \\
P_8 &= \int_s \frac{\cos \beta \cos^2 \alpha}{s^2} dM_2 = - \int_s \left[\left(\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} \right) \left(\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right)^2 \right] \frac{1}{s^2} \frac{M_2}{2R_2z} s ds \\
&= - \frac{M_2}{16R_2^2z^3} \int_s \left[(s^2 + R_2^2 - z^2) (s^2 + z^2 - R_2^2)^2 \frac{1}{s^4} \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \int_S \left[\left(s^6 + (z^2 - R_2^2)s^4 - (z^2 - R_2^2)^2s^2 - (z^2 - R_2^2)^3 \right) \frac{1}{s^4} \right] ds \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \int_S \left[s^2 + (z^2 - R_2^2) - (z^2 - R_2^2)^2s^{-2} - (z^2 - R_2^2)^3s^{-4} \right] ds \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\int_S s^2 ds + (z^2 - R_2^2) \int_S ds - (z^2 - R_2^2)^2 \int_S s^{-2} ds - (z^2 - R_2^2)^3 \int_S s^{-4} ds \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{1}{3}[s^3]_s + (z^2 - R_2^2)[s]_s + (z^2 - R_2^2)^2[s^{-1}]_s + (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3}[s^{-3}]_s \right] \\
P_9 &= \int_S \frac{\cos \beta}{s^2} dM_2 = - \int_S \left[\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} \right] \frac{1}{s^2} \frac{M_2}{2R_2z} s ds = -\frac{M_2}{4R_2^2z} \int_S \left[1 + (R_2^2 - z^2)s^{-2} \right] ds \\
&= -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[\int_S ds + (R_2^2 - z^2) \int_S s^{-2} ds \right] = -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[[s]_s - (R_2^2 - z^2)[s^{-1}]_s \right] \\
P_{10} &= \int_S \frac{\cos^2 \beta \cos \alpha}{s^2} dM_2 = \int_S \left[\left(\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} \right)^2 \left(\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right) \right] \frac{1}{s^2} \frac{M_2}{2R_2z} s ds \\
&= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \int_S \left[\left(s + \frac{R_2^2 - z^2}{s} \right)^2 \left(1 + \frac{z^2 - R_2^2}{s^2} \right) \right] ds \\
&= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \int_S \left[s^2 + (R_2^2 - z^2) - \frac{(R_2^2 - z^2)^2}{s^2} - \frac{(R_2^2 - z^2)^3}{s^4} \right] ds \\
&= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\int_S s^2 ds + (R_2^2 - z^2) \int_S ds - (R_2^2 - z^2)^2 \int_S s^{-2} ds - (R_2^2 - z^2)^3 \int_S s^{-4} ds \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}[s^3]_s + (R_2^2 - z^2)[s]_s + (R_2^2 - z^2)^2[s^{-1}]_s + (R_2^2 - z^2)^3 \frac{1}{3}[s^{-3}]_s \right] \\
P_{11} &= \int_S \frac{\cos \theta \cos \alpha}{s^2} dM_2 = \int_S \left(\frac{z^2 + R_2^2 - s^2}{2zR_2} \right) \left(\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right) \frac{1}{s^2} \frac{M_2}{2R_2z} s ds \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \int_S \left(z^2 + R_2^2 - s^2 \right) \left(1 + \frac{z^2 - R_2^2}{s^2} \right) ds \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \int_S \left((z^2 + R_2^2) - s^2 + \frac{(z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2)}{s^2} - (z^2 - R_2^2) \right) ds \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2) \int_S ds - \int_S s^2 ds + (z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2) \int_S s^{-2} ds - (z^2 - R_2^2) \int_S ds \right) \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2)[s]_s - \frac{1}{3}[s^3]_s - (z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2)[s^{-1}]_s - (z^2 - R_2^2)[s]_s \right) \\
P_{12} &= \int_S \frac{\cos \beta \cos \alpha}{s} dM_2 = - \int_S \left(\frac{s^2 + R_2^2 - z^2}{2R_2s} \right) \left(\frac{s^2 + z^2 - R_2^2}{2sz} \right) \frac{1}{s} \frac{M_2}{2R_2z} s ds \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \int_S \left(s^2 + R_2^2 - z^2 \right) \left(s^2 + z^2 - R_2^2 \right) \frac{1}{s^2} ds \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \int_S \left(s^4 - (z^2 - R_2^2)^2 \right) \frac{1}{s^2} ds = -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\int_S s^2 ds - (z^2 - R_2^2)^2 \int_S s^{-2} ds \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{1}{3}[s^3]_s + (z^2 - R_2^2)^2[s^{-1}]_s \right)
\end{aligned}$$

A.1 O cálculo de $[s^j]_S$ dentro e fora da casca

Os extremos de integração para dentro da casca serão dados por $(R_2 - z)$ e $(R_2 + z)$, sendo o extremo inferior o primeiro e o extremo superior o segundo. Já para fora da casca teremos para o inferior e o superior, $(z - R_2)$ e $(z + R_2)$, respectivamente. Isso tornará as soluções de $[s^j]_S$ diferentes para os dois casos, e por esse motivo iremos calcular suas soluções diferenciando-as por meio do subíndice i para o caso interno e e para o caso externo:

$$\begin{aligned}
 [s]_{Si} &= (R_2 + z) - (R_2 - z) = R_2 + z - R_2 + z = 2z \\
 [s]_{Se} &= (z + R_2) - (z - R_2) = z + R_2 - z + R_2 = 2R_2 \\
 [s^{-1}]_{Si} &= \frac{1}{R_2 + z} - \frac{1}{R_2 - z} = \frac{(R_2 - z) - (R_2 + z)}{(R_2 + z)(R_2 - z)} = \frac{R_2 - z - R_2 - z}{(R_2 + z)(R_2 - z)} = \frac{-2z}{(R_2 + z)(R_2 - z)} \\
 [s^{-1}]_{Se} &= \frac{1}{z + R_2} - \frac{1}{z - R_2} = \frac{(z - R_2) - (z + R_2)}{(z + R_2)(z - R_2)} = \frac{z - R_2 - z - R_2}{(z + R_2)(z - R_2)} = \frac{-2R_2}{(z + R_2)(z - R_2)} \\
 [s^3]_{Si} &= (R_2 + z)^3 - (R_2 - z)^3 = (R_2^2 + 2R_2z + z^2)(R_2 + z) - (R_2^2 - 2R_2z + z^2)(R_2 - z) \\
 &= (R_2^3 + R_2^2z + 2R_2^2z + 2R_2z^2 + z^2R_2 + z^3) - (R_2^3 - R_2^2z - 2R_2^2z + 2R_2z^2 + z^2R_2 - z^3) \\
 &= R_2^3 + R_2^2z + 2R_2^2z + 2R_2z^2 + z^2R_2 + z^3 - R_2^3 + R_2^2z + 2R_2^2z - 2R_2z^2 - z^2R_2 + z^3 \\
 &= 6R_2^2z + 2z^3 \\
 [s^3]_{Se} &= (z + R_2)^3 - (z - R_2)^3 = (z^2 + 2R_2z + R_2^2)(z + R_2) - (z^2 - 2zR_2 + R_2^2)(z - R_2) \\
 &= z^3 + R_2z^2 + 2R_2z^2 + 2R_2^2z + R_2^2z + R_2^3 - (z^3 - R_2z^2 - 2z^2R_2 + 2zR_2^2 + R_2^2z - R_2^3) \\
 &= z^3 + R_2z^2 + 2R_2z^2 + 2R_2^2z + R_2^2z + R_2^3 - z^3 + R_2z^2 + 2z^2R_2 - 2zR_2^2 - R_2^2z + R_2^3 \\
 &= 6R_2z^2 + 2R_2^3 \\
 [s^{-3}]_{Si} &= \frac{1}{(R_2 + z)^3} - \frac{1}{(R_2 - z)^3} = \frac{(R_2 - z)^3 - (R_2 + z)^3}{(R_2 + z)^3(R_2 - z)^3} = \frac{(R_2^3 - 3zR_2^2 + 3R_2z^2 - z^3)}{(R_2 + z)^3(R_2 - z)^3} \\
 &\quad - \frac{(R_2^3 + 3R_2^2z + 3R_2z^2 + z^3)}{(R_2 + z)^3(R_2 - z)^3} = \frac{(-6zR_2^2 - 2z^3)}{(R_2^2 - z^2)^3} = \frac{(6zR_2^2 + 2z^3)}{(z^2 - R_2^2)^3} \\
 [s^{-3}]_{Se} &= \frac{1}{(z + R_2)^3} - \frac{1}{(z - R_2)^3} = \frac{(z - R_2)^3 - (z + R_2)^3}{(z + R_2)^3(z - R_2)^3} = \frac{z^3 - 3z^2R_2 + 3zR_2^2 - R_2^3}{(z + R_2)^3(z - R_2)^3} \\
 &\quad - \frac{z^3 + 3z^2R_2 + 3zR_2^2 + R_2^3}{(z + R_2)^3(z - R_2)^3} = \frac{-6z^2R_2 - 2R_2^3}{(z + R_2)^3(z - R_2)^3} = \frac{-6z^2R_2 - 2R_2^3}{(z^2 - R_2^2)^3}
 \end{aligned}$$

Será interessante expô-los em uma lista curta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
[s]_{Si} &= 2z \\
[s]_{Se} &= 2R_2 \\
[s^{-1}]_{Si} &= \frac{2z}{(z^2 - R_2^2)} \\
[s^{-1}]_{Se} &= \frac{-2R_2}{(z^2 - R_2^2)} \\
[s^3]_{Si} &= 6R_2^2z + 2z^3 \\
[s^3]_{Se} &= 6R_2z^2 + 2R_2^3 \\
[s^{-3}]_{Si} &= \frac{(6zR_2^2 + 2z^3)}{(z^2 - R_2^2)^3} \\
[s^{-3}]_{Se} &= \frac{-6z^2R_2 - 2R_2^3}{(z^2 - R_2^2)^3}
\end{aligned}$$

A.2 Cálculo dos P_j

A.2.1 Cálculo de P_1 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{1i} &= \frac{M_2}{2R_2z} [s]_{Si} = \frac{M_2}{2R_2z} 2z = \frac{M_2}{R_2} \\
P_{1e} &= \frac{M_2}{2R_2z} [s]_{Se} = \frac{M_2}{2R_2z} 2R_2 = \frac{M_2}{z}
\end{aligned}$$

A.2.2 Cálculo de P_2 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{2i} &= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\frac{1}{3} [s^3]_{Si} + 2(z^2 - R_2^2)[s]_{Si} + (z^2 - R_2^2)^2(-1)[s^{-1}]_{Si} \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\frac{1}{3} (6R_2^2z + 2z^3) + 2(z^2 - R_2^2)(2z) + (z^2 - R_2^2)^2(-1)\left(\frac{2z}{z^2 - R_2^2}\right) \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + 2(z^2 - R_2^2)(2z) - (z^2 - R_2^2)(2z) \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + (z^2 - R_2^2)(2z) \right] = \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + 2z^3 - 2R_2^2z \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\frac{2z^3 + 6z^3}{3} \right] = \frac{M_2}{8R_2z^3} \frac{8z^3}{3} = \frac{M_2}{3R_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{2e} &= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\frac{1}{3} [s^3]_{s_e} + 2(z^2 - R_2^2)[s]_{s_e} + (z^2 - R_2^2)^2(-1)[s^{-1}]_{s_e} \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[\frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) + 2(z^2 - R_2^2)(2R_2) + (z^2 - R_2^2)^2(-1)\left(\frac{-2R_2}{z^2 - R_2^2}\right) \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 + (z^2 - R_2^2)(4R_2) + (z^2 - R_2^2)(2R_2) \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 + (z^2 - R_2^2)(6R_2) \right] = \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 + 6R_2z^2 - 6R_2^3 \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2z^3} \left[8R_2z^2 - \frac{16}{3}R_2^3 \right] = \frac{M_2}{3z^3} [3z^2 - 2R_2^2]
\end{aligned}$$

A.2.3 Cálculo de P_3 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{3i} &= P_{1i} - P_{2i} = \frac{M_2}{R_2} - \frac{M_2}{3R_2} = \frac{2M_2}{3R_2} \\
P_{3e} &= P_{1e} - P_{2e} = \frac{M_2}{z} - \frac{M_2}{3z^3} [3z^2 - 2R_2^2] = \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{z^3} M_2
\end{aligned}$$

A.2.4 Cálculo de P_4 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{4i} &= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{[s^3]_{s_i}}{3} + (z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_{s_i} \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{1}{3}(6R_2^2z + 2z^3) + (z^2 - R_2^2)^2 \frac{2z}{z^2 - R_2^2} \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + (z^2 - R_2^2)2z \right] = -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{6}{3}z^3 - 2R_2^2z \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{8}{3}z^3 \right] = -\frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z \\
P_{4e} &= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{[s^3]_{s_e}}{3} + (z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_{s_e} \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) + (z^2 - R_2^2)^2 \frac{-2R_2}{z^2 - R_2^2} \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 - 2(z^2 - R_2^2)R_2 \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 - 2R_2z^2 + 2R_2^3 \right] = -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{2}{3}R_2^3 + \frac{6}{3}R_2^3 \right] \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[\frac{8}{3}R_2^3 \right] = -\frac{R_2}{3z^2} M_2
\end{aligned}$$

A.2.5 Cálculo de P_5 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{5i} &= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{[s^3]_{si}}{3} + 2(R_2^2 - z^2)[s]_{si} - (R_2^2 - z^2)^2[s^{-1}]_{si} \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{1}{3}(6R_2^2z + 2z^3) + 2(R_2^2 - z^2)2z - (R_2^2 - z^2)^2 \frac{2z}{z^2 - R_2^2} \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + 4R_2^2z - 4z^3 + 2R_2^2z - 2z^3 \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[8R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 - \frac{18}{3}z^3 \right] \\
&= \frac{M_2}{R_2^3} \left[R_2^2 - \frac{2}{3}z^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{5e} &= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{[s^3]_{se}}{3} + 2(R_2^2 - z^2)[s]_{se} - (R_2^2 - z^2)^2[s^{-1}]_{se} \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) + 2(R_2^2 - z^2)2R_2 - (R_2^2 - z^2)^2 \frac{-2R_2}{z^2 - R_2^2} \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 + 4R_2^3 - 4R_2z^2 - 2R_2(R_2^2 - z^2) \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 + 4R_2^3 - 4R_2z^2 - 2R_2^3 + 2R_2z^2 \right] \\
&= \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{2}{3}R_2^3 + 2R_2^3 \right] = \frac{M_2}{8R_2^3z} \left[\frac{8}{3}R_2^3 \right] = \frac{M_2}{3z}
\end{aligned}$$

A.2.6 Cálculo de P_6 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{6i} &= \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[[s]_{si} - (z^2 - R_2^2)[s^{-1}]_{si} \right] = \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[2z - (z^2 - R_2^2) \frac{(-2z)}{(R_2 + z)(R_2 - z)} \right] \\
&= \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[2z - 2z \right] = 0 \\
P_{6e} &= \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[[s]_{se} - (z^2 - R_2^2)[s^{-1}]_{se} \right] = \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[2R_2 - (z^2 - R_2^2) \frac{-2R_2}{z^2 - R_2^2} \right] \\
&= \frac{M_2}{4R_2z^2} \left[2R_2 + 2R_2 \right] = \frac{M_2}{z^2}
\end{aligned}$$

A.2.7 Cálculo de P_7 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{7i} &= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\frac{1}{3} [s^3]_{si} + 3(z^2 - R_2^2) [s]_{si} - 3(z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_{si} - (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} [s^{-3}]_{si} \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\frac{1}{3} (6R_2^2z + 2z^3) + 3(z^2 - R_2^2)2z - 3(z^2 - R_2^2)^2 \frac{(2z)}{(z^2 - R_2^2)} \right. \\
&\quad \left. - (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} \frac{(-6zR_2^2 - 2z^3)}{(R^2 - z^2)^3} \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\frac{1}{3} (6R_2^2z + 2z^3) + 3(z^2 - R_2^2)2z - 3(z^2 - R_2^2)2z \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} (6zR_2^2 + 2z^3) \right] = 0 \\
P_{7e} &= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\frac{1}{3} [s^3]_{se} + 3(z^2 - R_2^2) [s]_{se} - 3(z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_{se} - (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} [s^{-3}]_{se} \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[\frac{1}{3} (6R_2z^2 + 2R_2^3) + 3(z^2 - R_2^2)2R_2 - 3(z^2 - R_2^2)^2 \frac{-2R_2}{z^2 - R_2^2} - (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} \frac{(-6z^2R_2 - 2R_2^3)}{(z^2 - R_2^2)^3} \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 + 6R_2(z^2 - R_2^2) + 6R_2(z^2 - R_2^2) + 2z^2R_2 + \frac{2}{3}R_2^3 \right] \\
&= \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[4R_2z^2 + \frac{4}{3}R_2^3 + 12R_2z^2 - 12R_2^3 \right] = \frac{M_2}{16R_2z^4} \left[16R_2z^2 - \frac{32}{3}R_2^3 \right] = \frac{M_2}{z^4} \left[z^2 - \frac{2}{3}R_2^3 \right]
\end{aligned}$$

A.2.8 Cálculo de P_8 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{8i} &= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{1}{3} [s^3]_{si} + (z^2 - R_2^2) [s]_{si} + (z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_{si} + (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} [s^{-3}]_{si} \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{1}{3} (6R_2^2z + 2z^3) + (z^2 - R_2^2)2z \right. \\
&\quad \left. + (z^2 - R_2^2)^2 \frac{2z}{(z^2 - R_2^2)} + (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} \frac{(6zR_2^2 + 2z^3)}{(z^2 - R_2^2)^3} \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + (z^2 - R_2^2)2z + (z^2 - R_2^2)2z + 2zR_2^2 + \frac{2}{3}z^3 \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + 4z^3 - 4zR_2^2 + 2zR_2^2 + \frac{2}{3}z^3 \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{2}{3}z^3 + \frac{12}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^3 \right] = -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{16}{3}z^3 \right] = -\frac{M_2}{3R_2^2} \\
P_{8e} &= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{1}{3} [s^3]_{se} + (z^2 - R_2^2) [s]_{se} + (z^2 - R_2^2)^2 [s^{-1}]_{se} + (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} [s^{-3}]_{se} \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{1}{3} (6R_2z^2 + 2R_2^3) + (z^2 - R_2^2)2R_2 + (z^2 - R_2^2)^2 \frac{-2R_2}{(z^2 - R_2^2)} + (z^2 - R_2^2)^3 \frac{1}{3} \frac{-6z^2R_2 - 2R_2^3}{(z^2 - R_2^2)^3} \right] \\
&= -\frac{M_2}{16R_2^2z^3} \left[\frac{1}{3} (6R_2z^2 + 2R_2^3) + 2R_2(z^2 - R_2^2) - 2R_2(z^2 - R_2^2) - \frac{1}{3} (6z^2R_2 + 2R_2^3) \right] = 0
\end{aligned}$$

A.2.9 Cálculo de P_9 no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
 P_{9i} &= -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[[s]_{si} - (R_2^2 - z^2)[s^{-1}]_{si} \right] = -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[2z - (R_2^2 - z^2) \frac{(-2z)}{(R_2 + z)(R_2 - z)} \right] \\
 &= -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[2z + 2z \right] = -\frac{M_2}{R_2^2} \\
 P_{9e} &= -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[[s]_{se} - (R_2^2 - z^2)[s^{-1}]_{se} \right] = -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[2R_2 - (R_2^2 - z^2) \frac{-2R_2}{(z^2 - R_2^2)} \right] \\
 &= -\frac{M_2}{4R_2^2z} \left[2R_2 - 2R_2 \right] = 0
 \end{aligned}$$

A.2.10 Cálculo de P_{10} no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
 P_{10i} &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}[s^3]_{si} + (R_2^2 - z^2)[s]_{si} + (R_2^2 - z^2)^2[s^{-1}]_{si} + (R_2^2 - z^2)^3 \frac{1}{3}[s^{-3}]_{si} \right] \\
 &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}(6R_2^2z + 2z^3) + (R_2^2 - z^2)2z + (R_2^2 - z^2)^2 \frac{(-2z)}{(R_2^2 - z^2)} - (R_2^2 - z^2)^3 \frac{1}{3} \frac{(6zR_2^2 + 2z^3)}{(R_2^2 - z^2)^3} \right] \\
 &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}(6R_2^2z + 2z^3) + (R_2^2 - z^2)2z + (R_2^2 - z^2)(-2z) - \frac{1}{3}(6zR_2^2 + 2z^3) \right] = 0 \\
 P_{10e} &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}[s^3]_{se} + (R_2^2 - z^2)[s]_{se} + (R_2^2 - z^2)^2[s^{-1}]_{se} + (R_2^2 - z^2)^3 \frac{1}{3}[s^{-3}]_{se} \right] \\
 &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) + (R_2^2 - z^2)2R_2 + (R_2^2 - z^2)^2 \frac{-2R_2}{(z^2 - R_2^2)} + (R_2^2 - z^2)^3 \frac{1}{3} \frac{-6z^2R_2 - 2R_2^3}{(z^2 - R_2^2)^3} \right] \\
 &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) + 2R_2(R_2^2 - z^2) - 2R_2(R_2^2 - z^2) + \frac{1}{3}(6z^2R_2 + 2R_2^3) \right] \\
 &= \frac{M_2}{16R_2^3z^2} \left[\frac{2}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) \right] = \frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left[2z^2 + \frac{2}{3}R_2^2 \right] = \frac{M_2}{4R_2^2z^2} \left[z^2 + \frac{1}{3}R_2^2 \right]
 \end{aligned}$$

A.2.11 Cálculo de P_{11} no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
 P_{11i} &= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2)[s]_{si} - \frac{1}{3}[s^3]_{si} - (z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2)[s^{-1}]_{si} - (z^2 - R_2^2)[s]_{si} \right) \\
 &= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2)2z - \frac{1}{3}(6R_2^2z + 2z^3) - (z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2) \frac{(2z)}{(z^2 - R_2^2)} - (z^2 - R_2^2)2z \right) \\
 &= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2)2z - 2R_2^2z - \frac{2}{3}z^3 - (z^2 + R_2^2)2z - 2z^3 + 2zR_2^2 \right) \\
 &= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left(-\frac{2}{3}z^3 - \frac{6}{3}z^3 \right) = \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left(-\frac{8}{3}z^3 \right) = -\frac{M_2}{3R_2^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{11e} &= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2)[s]_{s_e} - \frac{1}{3}[s^3]_{s_e} - (z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2)[s^{-1}]_{s_e} - (z^2 - R_2^2)[s]_{s_e} \right) \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left((z^2 + R_2^2)2R_2 - \frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) - (z^2 + R_2^2)(z^2 - R_2^2)\frac{-2R_2}{(z^2 - R_2^2)} - (z^2 - R_2^2)2R_2 \right) \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left(2R_2(z^2 + R_2^2) - 2R_2z^2 - \frac{2}{3}R_2^3 - 2R_2(z^2 + R_2^2) - 2R_2z^2 + 2R_2^3 \right) \\
&= \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left(-4R_2z^2 - \frac{2}{3}R_2^3 + \frac{6}{3}R_2^3 \right) = \frac{M_2}{8R_2^2z^3} \left(-4z^2 + \frac{4}{3}R_2^2 \right) = \frac{M_2}{2R_2z^3} \left(-z^2 + \frac{1}{3}R_2^2 \right)
\end{aligned}$$

A.2.12 Cálculo de P_{12} no Interior e no Exterior da Casca Esférica

$$\begin{aligned}
P_{12i} &= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{1}{3}[s^3]_{s_i} + (z^2 - R_2^2)^2[s^{-1}]_{s_i} \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{1}{3}(6R_2^2z + 2z^3) + (z^2 - R_2^2)^2\frac{2z}{(z^2 - R_2^2)} \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + (z^2 - R_2^2)2z \right) = -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(2R_2^2z + \frac{2}{3}z^3 + 2z^3 - 2zR_2^2 \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{2}{3}z^3 + \frac{6}{3}z^3 \right) = -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{8}{3}z^3 \right) = -\frac{M_2}{3R_2^2}z \\
P_{12e} &= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{1}{3}[s^3]_{s_e} + (z^2 - R_2^2)^2[s^{-1}]_{s_e} \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{1}{3}(6R_2z^2 + 2R_2^3) + (z^2 - R_2^2)^2\frac{-2R_2}{(z^2 - R_2^2)} \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 - 2R_2(z^2 - R_2^2) \right) = -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(2R_2z^2 + \frac{2}{3}R_2^3 - 2R_2z^2 + 2R_2^3 \right) \\
&= -\frac{M_2}{8R_2^2z^2} \left(\frac{2}{3}R_2^3 + \frac{6}{3}R_2^3 \right) = -\frac{R_2}{3z^2}M_2
\end{aligned}$$

A.3 Todos termos expostos em uma lista

Colocando todas as integrais em uma única página teremos:

$$\begin{aligned}
P_{1i} &= \frac{M_2}{R_2} \\
P_{1e} &= \frac{M_2}{z} \\
P_{2i} &= \frac{M_2}{3R_2} \\
P_{2e} &= \frac{M_2}{3z^3} [3z^2 - 2R_2^2] \\
P_{3i} &= \frac{2M_2}{3R_2}
\end{aligned}$$

$$P_{3e} = \frac{2 R_2^2}{3 z^3} M_2$$

$$P_{4i} = -\frac{1}{3} \frac{M_2}{R_2^2} z$$

$$P_{4e} = -\frac{R_2}{3 z^2} M_2$$

$$P_{5i} = \frac{M_2}{R_2^3} \left[R_2^2 - \frac{2}{3} z^2 \right]$$

$$P_{5e} = \frac{M_2}{3 z}$$

$$P_{6i} = 0$$

$$P_{6e} = \frac{M_2}{z^2}$$

$$P_{7i} = 0$$

$$P_{7e} = \frac{M_2}{z^4} \left[z^2 - \frac{2}{3} R_2^2 \right]$$

$$P_{8i} = -\frac{M_2}{3 R_2^2}$$

$$P_{8e} = 0$$

$$P_{9i} = -\frac{M_2}{R_2^2}$$

$$P_{9e} = 0$$

$$P_{10i} = 0$$

$$P_{10e} = \frac{M_2}{4 R_2^2 z^2} \left[z^2 + \frac{1}{3} R_2^2 \right]$$

$$P_{11i} = -\frac{M_2}{3 R_2^2}$$

$$P_{11e} = \frac{M_2}{2 R_2 z^3} \left(-z^2 + \frac{1}{3} R_2^2 \right)$$

$$P_{12i} = -\frac{M_2}{3 R_2^2} z$$

$$P_{12e} = -\frac{R_2}{3 z^2} M_2$$

Apêndice B

Velocidade Radial Relativa e Aceleração Radial Relativa

B.1 Determinação de \dot{r}_{12}

Estamos buscando nesse apêndice determinar:

$$\dot{r}_{12} = \frac{dr_{12}}{dt}$$

Para isso definiremos o vetor posição da partícula 1 por:

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}$$

E o vetor posição da partícula 2 por:

$$\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}$$

Portanto a velocidade relativa entre elas será, assumindo os eixos da base $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ fixos, dada por:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{12} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \dot{x}_1\hat{x} + \dot{y}_1\hat{y} + \dot{z}_1\hat{z} - \dot{x}_2\hat{x} - \dot{y}_2\hat{y} - \dot{z}_2\hat{z} \\ &= (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\hat{x} + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)\hat{y} + (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)\hat{z} = \dot{x}_{12}\hat{x} + \dot{y}_{12}\hat{y} + \dot{z}_{12}\hat{z}\end{aligned}$$

E o vetor posição relativa será:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_1 - x_2)\hat{x} + (y_1 - y_2)\hat{y} + (z_1 - z_2)\hat{z} = x_{12}\hat{x} + y_{12}\hat{y} + z_{12}\hat{z}$$

Assim como a distância entre elas será:

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |(x_1 - x_2)\hat{x} + (y_1 - y_2)\hat{y} + (z_1 - z_2)\hat{z}| = \sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}$$

Realizando a derivada temporal para encontrar a velocidade radial relativa:

$$\dot{r}_{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}} \frac{d}{dt} (x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}} 2(x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12})$$

Basta neste instante perceber que podemos escrever:

$$\dot{r}_{12} = \frac{1}{r_{12}} (\vec{v}_{12} \cdot \vec{r}_{12}) = \vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12}$$

Finalizando o objetivo dessa subseção, restando apenas o cálculo de \ddot{r}_{12}

B.2 Determinação de \ddot{r}_{12}

Antes de satisfazer o desejo de nossa subseção será preciso expressar a aceleração relativa:

$$\vec{a}_{12} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \ddot{x}_1\hat{x} + \ddot{y}_1\hat{y} + \ddot{z}_1\hat{z} - \ddot{x}_2\hat{x} - \ddot{y}_2\hat{y} - \ddot{z}_2\hat{z} = \ddot{x}_{12}\hat{x} + \ddot{y}_{12}\hat{y} + \ddot{z}_{12}\hat{z}$$

Pois daí realizando a derivada segunda da posição relativa:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{12} &= \frac{d\dot{r}_{12}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}} (x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{dt} (x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2) (x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}} \frac{d}{dt} (x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2)^{\frac{3}{2}}} 2(x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}) (x_{12}\dot{x}_{12} + y_{12}\dot{y}_{12} + z_{12}\dot{z}_{12}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2}} (\dot{x}_{12}^2 + \dot{y}_{12}^2 + \dot{z}_{12}^2 + x_{12}\ddot{x}_{12} + y_{12}\ddot{y}_{12} + z_{12}\ddot{z}_{12}) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{r_{12}^3} (\vec{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \frac{1}{r_{12}} ((\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}) + (\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12})) \right] \\ &= \frac{(\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}) - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + (\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12})}{r_{12}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\ddot{r}_{12} = \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}}{r_{12}} = \frac{\vec{v}_{12}^2}{r_{12}} - \frac{\dot{r}_{12}^2}{r_{12}} + \hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}$$

Apêndice C

Cálculo dos F_j

C.1 Cálculo de F_1

Partindo para o cálculo de F_1 :

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_C \cos v \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C \cos v [\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos v \hat{i} + \sin \alpha \sin v \hat{j}] \frac{M_2}{2\pi} dv \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\int_C \cos v \cos \alpha \hat{z} dv + \int_C \cos v \cos v \sin \alpha \hat{i} dv + \int_C \cos v \sin v \sin \alpha \hat{j} dv \right] \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\hat{z} \cos \alpha \int_C \cos v dv + \hat{i} \sin \alpha \int_C \cos^2 v dv + \hat{j} \sin \alpha \int_C \frac{\sin 2v}{2} dv \right] \end{aligned}$$

A primeira e a última integral serão ambas nulas, para isso basta lembrar dos extremos de integração $(0, 2\pi)$ e suas soluções são triviais. Já a integral intermediária permanecerá:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{M_2 \hat{i} \sin \alpha}{2\pi} \int_C \cos^2 v dv = \frac{M_2 \hat{i} \sin \alpha}{2\pi} \int_C \left[\frac{\cos 2v + 1}{2} \right] dv \\ &= \frac{M_2 \hat{i} \sin \alpha}{2\pi} \left[\int_C \frac{\cos 2v}{2} dv + \int_C \frac{1}{2} dv \right] \end{aligned}$$

A primeira integral irá resultar em zero, por fim:

$$F_1 = \frac{M_2 \hat{i} \sin \alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dv = \frac{M_2 \hat{i} \sin \alpha}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{2} - \frac{0}{2} \right] = \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{i}$$

C.2 Cálculo de F_2

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_C \sin v \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C \sin v (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos v \hat{i} + \sin \alpha \sin v \hat{j}) \frac{M_2}{2\pi} dv \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\int_C \sin v \cos \alpha \hat{z} dv + \int_C \sin v \sin \alpha \cos v \hat{i} dv + \int_C \sin \alpha \sin^2 v \hat{j} dv \right] \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\cos \alpha \hat{z} \int_C \sin v dv + \sin \alpha \hat{i} \int_C \frac{\sin 2v}{2} dv + \sin \alpha \hat{j} \int_C \sin^2 v dv \right] \end{aligned}$$

A primeira e a segunda integral serão nulas, lembrando dos extremos de integração $(0, 2\pi)$, já a última:

$$\int_C \sin^2 v dv = \frac{1}{2} \left[v - \frac{\sin 2v}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left[2\pi - \frac{\sin 4\pi}{2} - \left(0 - \frac{\sin 0}{2} \right) \right] = \pi$$

Portanto:

$$F_2 = \frac{M_2}{2\pi} \left[\sin \alpha \hat{j} \int_C \sin^2 v dv \right] = \frac{M_2}{2\pi} \sin \alpha \hat{j} \pi = \frac{M_2}{2} \sin \alpha \hat{j}$$

C.3 Cálculo de F_3

Passamos então para o cálculo de F_3 :

$$\begin{aligned} F_3 &= \int_C \cos^2 v \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C \cos^2 v \left[\cos \alpha \hat{z} + \cos v \sin \alpha \hat{i} + \sin v \sin \alpha \hat{j} \right] \frac{M_2}{2\pi} dv \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\int_C \cos^2 v \cos \alpha \hat{z} dv + \int_C \cos^2 v \cos v \sin \alpha \hat{i} dv + \int_C \cos^2 v \sin v \sin \alpha \hat{j} dv \right] \\ &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\cos \alpha \hat{z} \int_C \cos^2 v dv + \sin \alpha \hat{i} \int_C \cos^3 v dv + \sin \alpha \hat{j} \int_C \cos^2 v \sin v dv \right] \end{aligned}$$

A primeira integral já foi resolvida no cálculo de F_1 , sendo seu resultado π . Já a intermediária e a última serão nulas, estando a prova a seguir:

$$\begin{aligned} \int_C \cos^3 v dv &= \int_C \cos v (1 - \sin^2 v) dv = \int_C \cos v dv - \int_C \cos v \sin^2 v dv \\ &= [\sin v]_C - \left[\frac{\sin^3 v}{3} \right]_C = \sin 2\pi - \sin 0 - \frac{[\sin^3 2\pi - \sin^3 0]}{3} = 0 \\ \int_C \cos^2 v \sin v dv &= \left[-\frac{\cos^3 v}{3} \right]_C = -\frac{1}{3} [\cos^3 2\pi - \cos^3 0] = -\frac{1}{3} [1 - 1] = 0 \end{aligned}$$

Permitindo concluir que:

$$F_3 = \frac{M_2}{2\pi} \cos \alpha \hat{z} \pi = \frac{M_2}{2} \cos \alpha \hat{z}$$

C.4 Cálculo de F_4

Partindo para F_4 :

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \int_C \cos \nu \sin \nu \hat{r}_{12} dm_2 = \int_C \cos \nu \sin \nu (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}) \frac{M_2}{2\pi} d\nu \\
 &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\int_C \cos \nu \sin \nu \cos \alpha \hat{z} d\nu + \int_C \cos \nu \sin \nu \sin \alpha \cos \nu \hat{i} d\nu \right. \\
 &+ \left. \int_C \cos \nu \sin \nu \sin \alpha \sin \nu \hat{j} d\nu \right] = \frac{M_2}{2\pi} \left[\cos \alpha \hat{z} \int_C \frac{\sin 2\nu}{2} d\nu + \sin \alpha \hat{i} \int_C \cos^2 \nu \sin \nu d\nu \right. \\
 &+ \left. \sin \alpha \hat{j} \int_C \cos \nu \sin^2 \nu d\nu \right] = \frac{M_2}{2\pi} \left[\sin \alpha \hat{i} \int_C (1 - \sin^2 \nu) \sin \nu d\nu \right. \\
 &+ \left. \sin \alpha \hat{j} \int_C \cos \nu (1 - \cos^2 \nu) d\nu \right] = \frac{M_2}{2\pi} \left[\sin \alpha \hat{i} \left(\int_C \sin \nu d\nu - \int_C \sin^3 \nu d\nu \right) \right. \\
 &+ \left. \sin \alpha \hat{j} \left(\int_C \cos \nu d\nu - \int_C \cos^3 \nu d\nu \right) \right] = \frac{M_2}{2\pi} \left[\sin \alpha \hat{i} \left(- \int_C \sin^3 \nu d\nu \right) \right. \\
 &+ \left. \sin \alpha \hat{j} \left(- \int_C \cos^3 \nu d\nu \right) \right]
 \end{aligned}$$

Foi demonstrado na subseção anterior que:

$$\int_C \cos^3 \nu d\nu = 0$$

Restando apenas

$$\begin{aligned}
 \int_C \sin^3 \nu d\nu &= \left[-\cos \nu + \frac{1}{3} \cos^3 \nu \right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi + \frac{1}{3} \cos^3 2\pi) - (-\cos 0 + \frac{1}{3} \cos^3 0) \\
 &= (-1 + \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = 0
 \end{aligned}$$

Permitindo concluir que:

$$F_4 = \vec{0}$$

C.5 Cálculo de F_5

Restando apenas a conta de F_5 :

$$\begin{aligned}
 F_5 &= \int_C \sin^2 \nu \hat{r}_{12} dm_2 \\
 &= \int_C \sin^2 \nu (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \cos \nu \hat{i} + \sin \alpha \sin \nu \hat{j}) \frac{M_2}{2\pi} d\nu \\
 &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\int_C \sin^2 \nu \cos \alpha \hat{z} d\nu + \int_C \sin^2 \nu \sin \alpha \cos \nu \hat{i} d\nu + \int_C \sin^2 \nu \sin \alpha \sin \nu \hat{j} d\nu \right] \\
 &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\cos \alpha \hat{z} \int_C \sin^2 \nu d\nu + \sin \alpha \hat{i} \int_C (1 - \cos^2 \nu) \cos \nu d\nu + \sin \alpha \hat{j} \int_C \sin^3 \nu d\nu \right] \\
 &= \frac{M_2}{2\pi} \left[\cos \alpha \hat{z} \int_C \sin^2 \nu d\nu + \sin \alpha \hat{i} \left(\int_C \cos \nu d\nu - \int_C \cos^3 \nu d\nu \right) + \sin \alpha \hat{j} \int_C \sin^3 \nu d\nu \right]
 \end{aligned}$$

Todas elas se anularam, com exceção da primeira integral:

$$F_5 = \frac{M_2}{2\pi} \cos \alpha \hat{z} \pi = \frac{M_2}{2} \cos \alpha \hat{z}$$

Referências Bibliográficas

- [1] F. Bunchaft and S. Carneiro, “Weber-like interactions and energy conservation,” *Foundations of Physics Letters*, vol. 10, no. 4, pp. 393–401, 1997.
- [2] J. Giné, “On the origin of the deflection of light,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 35, no. 1, pp. 1–6, 2008.
- [3] A. K. T. Assis, *Relational mechanics*. Apeiron Montreal, 1999.
- [4] F. A. Palacios, R. B. Passaglia, and F. M. Lima, “Força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre um corpo acelerado dentro dela,” *Physicae Organum*, vol. 2, no. 2, 2016.
- [5] L. M. Costa and F. M. Lima, “Força de uma casca esférica em um corpo acelerado: independência da posição,” *Physicae Organum*, vol. 4, no. 1, pp. 68–78, 2018.
- [6] F. Lima, “Nonzero gravitational force exerted by a spherical shell on a body moving inside it, and cosmological implications,” *Gravitation and Cosmology*, vol. 26, no. 4, pp. 387–398, 2020.
- [7] N. A. Bahcall, “Hubble’s law and the expanding universe,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 112, no. 11, pp. 3173–3175, 2015.
- [8] A. K. T. Assis, “Weber’s electrodynamics,” in *Weber’s Electrodynamics*, pp. 47–77, Springer, 1994.
- [9] A. K. T. Assis, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English Volume I: Gauss and Weber’s Absolute System of Units*. Apeiron Montreal, 2021.
- [10] A. K. T. Assis, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English Volume II: Weber’s Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday*. Apeiron Montreal, 2021.
- [11] A. K. T. Assis, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English Volume III: Measurement of Weber’s Constant c , Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity*. Apeiron Montreal, 2021.
- [12] A. K. T. Assis, *Wilhelm Weber’s Main Works on Electrodynamics Translated into English Volume IV: Conservation of Energy, Weber’s Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation*. Apeiron Montreal, 2021.
- [13] P. A. Tipler and G. Mosca, “Física para cientistas e engenheiros. vol. 1,” *LTC, Rio de Janeiro*, 2009.

- [14] S. Ragusa, “Gravitation with a modified weber force,” *Foundations of Physics Letters*, vol. 5, no. 6, pp. 585–589, 1992.
- [15] A. G. McNish, “The speed of light,” *IRE Transactions on Instrumentation*, vol. I-11, no. 3/4, pp. 138–148, 1962.
- [16] Q. Li, C. Xue, J.-P. Liu, J.-F. Wu, S.-Q. Yang, C.-G. Shao, L.-D. Quan, W.-H. Tan, L.-C. Tu, Q. Liu, *et al.*, “Measurements of the gravitational constant using two independent methods,” *Nature*, vol. 560, no. 7720, pp. 582–588, 2018.
- [17] P. A. M. Dirac, “A new basis for cosmology,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 165, no. 921, pp. 199–208, 1938.
- [18] W. L. Freedman and B. F. Madore, “The hubble constant,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 48, pp. 673–710, 2010.
- [19] T. Miura, H. Arakida, M. Kasai, and S. Kuramata, “Secular increase of the astronomical unit: a possible explanation in terms of the total angular-momentum conservation law,” *Publications of The Astronomical Society of Japan - PUBL ASTRON SOC JPN*, vol. 61, 05 2009.