



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

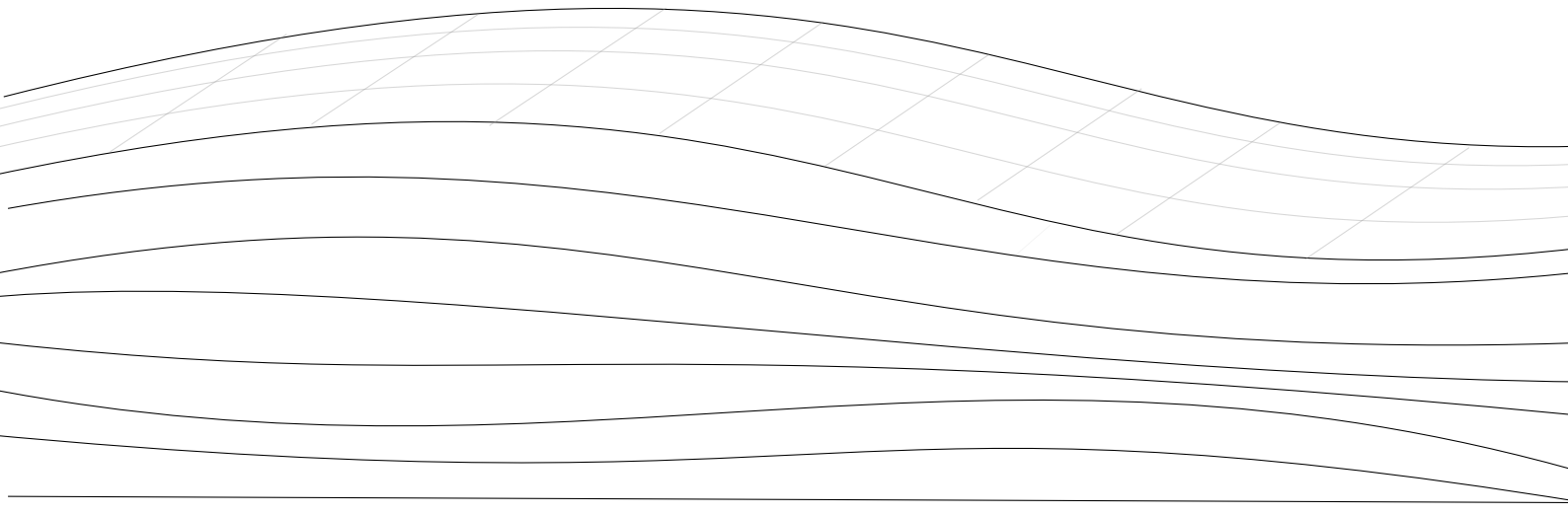
Trabalho de Conclusão de Curso

# Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

Acadêmico: Alexandre de Ramos Alabora

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Hatsumi Mukai

Maringá, 21 de maio de 2022





Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Acadêmico: Alexandre de Ramos Alabora

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Hatsumi Mukai

Maringá, 29 de abril de 2022

**“We are a way of the Cosmos to know iteself”**  
Carl Sagan, *Cosmos: a personal voyage*, 1980.

# Agradecimentos

---

Agradeço imensamente à minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dra. Hatsumi Mukai, que acolheu as ideias difusas de um aluno qualquer e ajudou a transformá-las em algo concreto. Muito obrigado pela paciência e ensinamentos.

Aos meus pais, Denise e Sidnei, os quais sem o apoio não seria possível o sonho da Física.

Aos funcionários da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós Graduação (PPG), onde trabalhei por boa parte da minha graduação, principalmente à chefe da Divisão de Pesquisa, Ana Cristina Velasco, a melhor chefe que eu poderia ter tido.

Aos meus amigos companheiros de turma: Danielle, Henrique, Thais, Hugo, Hygor, Luiz e Zé Guilherme, com toda certeza o companheirismo, a troca de ideias e diversão tornaram a jornada muito mais fácil.

Especialmente minhas amigas Ana Paula e Victoria, cuja a companhia vem desde os primeiros períodos da graduação, sua ajuda e apoio foi essencial nos momentos difíceis, e vocês protagonizaram todos os fáceis, obrigado.

Aos meus amigos veteranos: Jhonatan (Joi), Matheus (TH), Maurício (Mau) e Vítor (Virto), que de bom grado (nem tanto assim) me acolheram em seu círculo. Todas as discussões acaloradas, pedidos de ajuda e o dia-a-dia no geral com certeza ajudaram a moldar quem eu sou dentro do curso, principalmente nas expectativas criadas para o ano a frente do meu.

A todos os docentes, e demais profissionais da Universidade Estadual de Maringá, em particular do Departamento de Física e de todos os departamentos afetos ao meu curso de graduação, pela contribuição direta ou indireta na minha formação.

# Resumo

---

A Relatividade Geral é a teoria que melhor descreve o campo gravitacional. Nela o espaço e o tempo são tratados no mesmo patamar dentro de uma variedade quadridimensional lorentziana, e a gravidade é descrita como uma curvatura no espaço-tempo plano de Minkowski. Tal equivalência dificulta a criação de uma formulação hamiltoniana, em que a evolução temporal em específico tem papel importante. Para poder criar uma formulação hamiltoniana da teoria é necessário decompor o espaço-tempo em três componentes espaciais e uma temporal, sem perder as informações de curvatura que em parte também estão armazenadas na coordenada temporal. O resultado é a chamada decomposição 3+1, ou Formulação ADM (das iniciais dos pesquisadores que a propuseram - Arnowitt, Deser, Misner) da Relatividade Geral, em que o espaço-tempo é dividido em hipersuperfícies espaciais que capturam a variedade em um tempo constante. Nessas novas subvariedades são encontradas grandezas geométricas que servem de novas variáveis canônicas permitindo a construção de uma hamiltoniana. Existem duas aplicações principais que a formulação hamiltoniana permite: uma em que a hamiltoniana é parte essencial da segunda quantização, a chamada quantização canônica, permitindo construir a primeira tentativa de uma teoria quântica da Gravitação, resultando na equação de Wheeler-Dewitt, e a segunda em que as novas variáveis canônicas permitem escrever problemas físicos em termos de condições iniciais bem definidas que são evoluídas em relação a dado parâmetro, fazendo com que seja possível resolver espaços-tempo complexos utilizando super-computadores conduzindo a chamada Relatividade numérica. Neste trabalho de revisão, abordaremos ambas.

**Palavras chave:** Relatividade Geral, Formulação Canônica, Relatividade Numérica, Gravitação Quântica.

# Abstract

---

General Relativity is the theory that best describes the gravitational field. In it space and time are treated at the same footing as a four-dimensional lorentzian manifold, and gravity is described as a curvature in the flat Minkowski space-time. That equivalence complicates the criation of a hamiltonian formulation, where time evolution has an specific important role. To be able to create a hamiltonian formulation is necessary to decompose space-time in three spatial and one time component, without losing information about the curvature contained in the time coordinate. The result is what is called 3+1 decomposition, or ADM Formulation (from Arnowitt, Deser and Misner, who proposed it) of General Relativity, where space-time is divided in spatial hypersurfaces that capture the manifold at a constant time slice. In these new submanifolds geometric quantities are found, that play the role of new canonical variables, making possible to build a Hamiltonian. There are two main applications that the hamiltonian formulation facilitates: firstly the hamiltonian is an essential part of the second quantization, the canonical quantization, allowing the construction of the first attempt of a quantum theory of gravity, resulting in the Wheeler - DeWitt equation, secondly, the new canonical variables allow physical problems to be written in terms of well defined initial values, making possible to solve complex space-times with super-computers, leadind to the field of Numerical Relativity. In this revision work both are covered.

**KeyWords:** General Relativity, Canonical Formulation, Numerical Relativity, Quantum Gravity.

# Sumário

---

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
<b>1 Relatividade Geral</b>	<b>3</b>
1.1 Superfícies Curvas . . . . .	4
1.1.1 Curvatura e Geometria Intrínseca . . . . .	4
1.1.2 Díades ou os “Campos Referenciais” . . . . .	6
1.1.3 Métrica . . . . .	7
1.1.4 Comprimento . . . . .	8
1.2 Geometria Riemanniana . . . . .	8
1.2.1 Geodésicas . . . . .	9
1.2.2 Campos . . . . .	10
1.2.3 Derivada Covariante . . . . .	11
1.2.4 Curvatura de Riemann . . . . .	12
1.2.5 Tensor e Escalar de Ricci . . . . .	13
1.2.6 Geometria Lorentziana . . . . .	14
1.3 As Equações de Campo de Einstein . . . . .	15
1.3.1 O Campo Gravitacional e seus Efeitos . . . . .	15
1.3.2 Dinâmica . . . . .	16
1.3.2.1 Lado Direito - Matéria e Energia . . . . .	16
1.3.2.2 Lado Esquerdo - Curvatura . . . . .	18
1.3.2.3 Vácuo . . . . .	19
1.4 Estrutura Conceitual . . . . .	19
1.4.1 Princípio da Equivalência . . . . .	20
1.4.2 Coordenadas e Simetrias . . . . .	21
1.4.3 Tempo e Energia . . . . .	21
1.5 Ação de Einstein-Hilbert . . . . .	22
<b>2 Formulação Canônica</b>	<b>26</b>
2.1 Sistemas Hamiltonianos Vinculados . . . . .	27
2.1.1 Discussão do Caso Geral . . . . .	27
2.1.2 O Relógio Quebrado . . . . .	28
2.1.3 Campos . . . . .	29
2.2 Decomposição 3+1 . . . . .	31
2.2.1 Foliação do Espaço-Tempo . . . . .	32
2.2.2 Curvatura Extrinseca . . . . .	33
2.3 Ação ADM . . . . .	35

2.3.1	Densidade Lagrangiana . . . . .	35
2.3.2	Equações de Movimento (por $N$ , $N_i$ e $h_{ij}$ ) . . . . .	37
2.4	A Hamiltoniana da Relatividade Geral . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>42</b>
3.1	Gravitação Quântica - A Equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	42
3.1.1	Quantização Canônica . . . . .	42
3.1.2	Quantização de Teorias Invariantes sob Reparametrização . . . . .	43
3.1.3	Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	44
3.1.4	Quantização do Campo Gravitacional . . . . .	45
3.1.5	Interpretações e Problemas da Equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	46
3.2	Relatividade Numérica -	
	Colisão de Buracos Negros . . . . .	47
3.2.1	Ondas Gravitacionais Linearizadas . . . . .	47
3.2.2	Decomposição 3+1 de um Sistema Binário de Buracos Negros . . . . .	50
	3.2.2.1 Construção dos Valores Iniciais . . . . .	52
	3.2.2.2 Evolução no Tempo . . . . .	53
	3.2.2.3 Extrair a Forma das Ondas Gravitacionais . . . . .	54
3.2.3	Evento GW150914- A Primeira Detecção de Ondas Gravitacionais . . . . .	54
3.2.4	Análise do Cálculo Numérico do Evento GW150914 . . . . .	56
	<b>Considerações Finais</b>	<b>61</b>
	<b>A Reconstrução das Formas da Onda via Python - Matplotlib</b>	<b>62</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>



# Introdução

---

Das quatro forças fundamentais da natureza a gravidade é a mais presente na vida humana de forma claramente notável. É ela que nossos ancestrais venceram para manter sua postura ereta há 10 mil anos no início da evolução humana, e é contra ela que um bebê batalha para manter-se em pé quando aprende a andar nos primeiros anos de sua vida. Com exceção a um seletivo grupo de pessoas que foram ao espaço, sofreremos a influência do campo gravitacional em todos os instantes de nossas vidas.

O deslumbre humano sobre os fenômenos da natureza vem desde a antiguidade, mas no caso particular da gravidade um entendimento sistemático das suas propriedades veio nos últimos 300 anos com Galileo e a Lei da Queda dos Corpos e a subsequente generalização de Newton com sua famosa Lei da Gravitação Universal, unificando o movimento dos objetos “que caem” na Terra com as órbitas dos corpos celestes em uma única e coerente teoria [1].

No início do século passado, Einstein desenvolveu sua teoria da Relatividade Especial, em que nela as noções anteriores de espaço e tempo precisam ser atualizadas para comportar a invariância da velocidade da luz em diferentes referenciais [2]. O próximo avanço, ocorreu quando percebeu-se que a própria gravidade não é simplesmente uma força de ação à distância, mas sim, uma manifestação da curvatura na estrutura do espaço-tempo descrita pela relatividade especial.

A teoria resultante dessa generalização é a Teoria da Relatividade Geral (TRG) que trata-se de uma teoria clássica de campo para descrever o campo gravitacional e sua dinâmica, de forma análoga à teoria de Maxwell para o campo eletromagnético. Cento e sete anos se passaram desde a concepção da TRG e seus resultados são confirmados de forma cada vez mais precisas pelos experimentos, inclusive prevendo uma miríade de fenômenos novos que antes eram inimagináveis no contexto da Física Clássica, como as lentes gravitacionais, buracos negros, a expansão do Universo, sincronização dos GPS (*global positioning system*, sistema de posicionamento global), entre outros.

Apesar deste sucesso, os limites de aplicação da TRG são conhecidos. A gravidade é extremamente fraca em relação às outras forças fundamentais da natureza (nuclear forte, eletromagnética e nuclear fraca), podendo assim, ser negligenciadas na maioria das descrições microscópicas da natureza. Mas existem cenários altamente energéticos e compactados em que se espera que efeitos gravitacionais quânticos sejam observados, são o *Big Bang* e o centro dos buracos negros. Até hoje não há uma teoria satisfatória que descreva o campo gravitacional na escala de Planck ( $\approx 10^{-35} m$ ).

Essa falha vem da diferença conceitual entre a Teoria Quântica e a TRG, uma é discreta e probabilística e a outra descreve um campo clássico contínuo e determinístico. Em 1957, Dirac cria a segunda quantização [3], em que é possível transformar teorias clássicas em quânticas, e para isso é necessário a densidade hamiltoniana do campo em questão. O método é bem sucedido para o campo eletromagnético, mas não é nada trivial para o campo gravitacional.

Para obter a hamiltoniana na Teoria da Relatividade Geral é necessário decompô-la em suas partes espaciais e temporal, elegendo a variável temporal como parâmetro sob o qual o sistema será evoluído podendo se obter as transformações canônicas da Teoria de

Hamilton. Mas isso não é fácil, pois nas Equações de Einstein espaço e tempo estão emaranhados, e a construção das novas variáveis canônicas deve conservar as informações de curvatura do espaço-tempo original. Quem resolveu esse problema foram os pesquisadores Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [4] na década de 50, encontrando novas variáveis canônicas com significado geométrico bem definido, que permite a construção da hamiltoniana da Relatividade Geral.

A formulação ADM é também conhecida como decomposição 3+1, essa formulação é extremamente útil para resolver as Equações de Einstein, visto que agora com o espaço-tempo decomposto não se calcula a métrica toda de uma vez, mas sim se divide o processo utilizando fotografias em uma fatia com o tempo  $t$  constante. Essa é a descrição de um problema de valor inicial de Equações Diferenciais, em que dada uma configuração inicial o sistema evolui no tempo, cenário em que computadores e métodos numéricos comuns são muito eficazes. Resolver as Equações de Einstein numericamente com programação de computadores utilizando a decomposição 3+1 é a área chamada de Relatividade Numérica. Das 4 grandes descobertas em Física Fundamental [5] da década passada, duas envolvem gravitação, e em ambas a Relatividade Numérica desempenhou um papel central, trata-se da: primeira detecção de ondas gravitacionais [6] e da primeira imagem registrada de um buraco negro [7].

A maioria dos textos que apresentam a formulação hamiltoniana da relatividade geral partem do pressuposto que o leitor já possua domínio sobre a matemática da Relatividade Geral e também da formulação de sistemas hamiltonianos vinculados feita por Dirac, neste trabalho ambos são apresentados, em uma tentativa de construir a teoria por primeiros princípios.

Acima de tudo, este trabalho representa a minha (e agora peço sua licença para escrever em primeira pessoa) jornada dando o primeiro mergulho na belíssima mas também desafiadora teoria de Einstein, como também a exploração da primeira tentativa de aproximá-la da linguagem da teoria quântica, em busca de uma descrição completa da natureza.

Este trabalho está dividido em três partes. No Capítulo 1 é apresentada a TRG, no Capítulo 2 é construída a formulação hamiltoniana ADM da TRG e no Capítulo 3 são exploradas duas aplicações diretas do formalismo ADM da TRG: primeiramente a tentativa da quantização do campo gravitacional via quantização canônica e a descrição da resultante Equação de Wheeler-DeWitt, e finalmente uma análise de Relatividade Numérica da colisão de dois buracos negros, discutindo brevemente a geração e detecção de ondas gravitacionais. Seguidas das considerações finais e referências bibliográficas.

Durante o texto se assume somente familiaridade com a Teoria da Relatividade Especial e com a Mecânica Analítica, mas ainda são desenvolvidos rapidamente alguns detalhes de ambas. Além disso, optando pela brevesza ao invés da riqueza de detalhes, os passos matemáticos simples não estão apresentados, junto com passagens de álgebra tensorial, cuja as regras matemáticas podem ser encontradas em [8].

# Relatividade Geral

---

A Relatividade Geral é uma teoria de campo que melhor descreve a interação gravitacional e os aspectos geométricos do espaço e do tempo. A seguir apresenta-se um breve prelúdio exibindo algumas motivações na construção da Teoria.

- A estrutura do espaço na Mecânica Clássica é representada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \delta_{ij} dx^i dx^j.$$

Trata-se do reconhecido teorema de Pitágoras, que define o espaço euclidiano em que o tempo é só um parâmetro. Aqui  $\delta_{ij}$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ , e também é adotada a convenção de Einstein para os somatórios, sendo os índices repetidos, um acima e um abaixo, somados. Portanto  $\delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{ij} \delta_{ij} dx^i dx^j$ .

- A estrutura do espaço-tempo na Relatividade Especial é expressa na forma

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{ab} dx^a dx^b,$$

sendo  $\eta_{ab} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$  uma matriz  $4 \times 4$ , com assinatura  $+2$ , a chamada métrica de Minkowski. O tempo  $t$  não é mais só um parâmetro, mas sim uma coordenada. Diferentes observadores podem discordar nas coordenadas específicas  $(t, x, y, z)$ , mas todos concordam com o intervalo  $ds^2$ .

- E, finalmente, no entendimento atual (o da Relatividade Geral), o espaço-tempo tem a seguinte estrutura

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b.$$

Aqui a métrica  $g_{ab}(x)$  é um campo cujos valores variam ponto a ponto, em que a evolução é definida por equações dinâmicas a serem descobertas, análogas as Equações de Maxwell para o campo eletromagnético.

Na Relatividade Geral a presença de massa e energia distorce a métrica plana e fixa de Minkowski  $\eta_{ab}$  e a substitui por um campo dinâmico genuíno  $g_{ab}(x)$ . O grande triunfo da TRG foi reconhecer que as distorções na estrutura do espaço-tempo são as responsáveis pelo campo gravitacional, ideia que chega à Einstein via o Princípio da Equivalência (Seção 1.4.1) [9, 10].

Pode-se fazer uma analogia com outra Teoria Clássica de Campo, o eletromagnetismo. No eletromagnetismo as variáveis que definem o campo são as componentes do quadri-potencial (que une o potencial elétrico com o potencial vetor), a equação que define como uma partícula se move sob ação de um campo eletromagnético é a chamada Força de Lorentz, e a dinâmica do campo eletromagnético é dada pelas conhecidas Equações de Maxwell. É necessário encontrar o análogo destas expressões para o campo gravitacional (Quadro 1).

**Quadro 1:** Analogia com o Eletromagnetismo.

	<b>Eletromagnetismo</b>	<b>Relatividade Geral</b>
<b>Campo</b>	quadri-potencial $A_a(x)$	campo gravitacional $g_{ab}(x)$
<b>Equação de Movimento</b>	força de lorentz $\ddot{x}^a = \frac{e}{m} F_b^a \dot{x}^b$	??????
<b>Equações de Campo</b>	equações de Maxwell $\partial_a F^{ab} = 4\pi J^b$	??????

A construção do campo  $g_{ab}$  e a descrição de sua dinâmica são o grande objetivo da Relatividade Geral e é o que será discutido no Capítulo 1.

O Capítulo 1 do texto é altamente influenciado por Rovelli [9], principalmente na formulação por tetradas que não é a usual, mas é mais geral e intuitiva como primeiro contato, juntamente com Carrol [10] e Wald [11], que tomam uma aproximação mais tradicional (Carrol mais geométrica e Wald mais matemática).

## 1.1 Superfícies Curvas

A matemática necessária para descrever as distorções no espaço-tempo e a gravidade evoluiu da construída por Gauss e Riemann para descrever superfícies e espaços curvos. Construindo o formalismo em etapas começamos com o caso bidimensional.

### 1.1.1 Curvatura e Geometria Intrínseca

Por “caso bidimensional” quer se dizer uma superfície 2D imersa no espaço 3D euclidiano usual, como uma folha de papel (Figura 1.1.1.1). A grande realização de Gauss foi perceber que há duas maneiras de descrever a curvatura de uma superfície, a *extrínseca* e a *intrínseca* [12], e essa distinção será central para a Relatividade Geral.

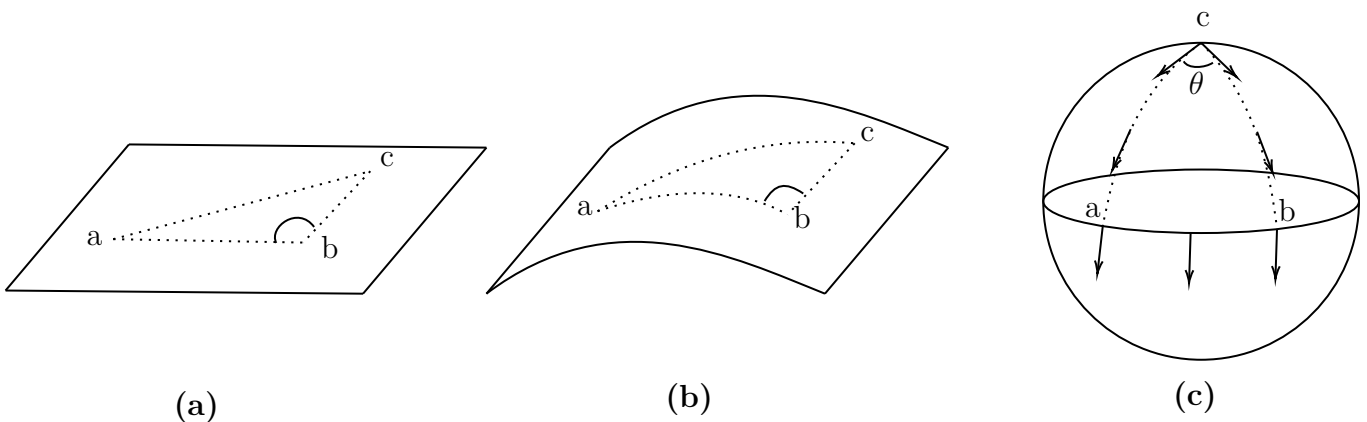


Figura 1.1.1.1: Representações de: (a) superfície extrinsecamente e intrinsecamente plana, (b) superfície extrinsecamente curva e intrinsecamente plana, e (c) superfície extrinsecamente e intrinsecamente curva. Fonte: adaptada de Carrol [10] e Wald [11].

A definição de curvatura extrínseca é a mais simples, em que uma superfície imersa

no espaço é extrinsecamente plana se ela fizer parte de um plano, e é curva caso contrário (Figura 1.1.1.1a).

A definição de curvatura intrínseca é mais sutil. Utilizando a Figura 1.1.1.1b, para defini-la temos, por exemplo, que um triângulo desenhado em sua superfície ainda segue a geometria euclidiana, ou seja, o teorema de Pitágoras ainda é válido. Se estivéssemos presos a superfície (b) medindo segmentos de reta não haveria nenhuma forma de sabermos se ela está curvada extrinsecamente ou não, a geometria *intrinsecamente* é a mesma que a de um plano.

Agora, analisando a Figura 1.1.1.1c, se medíssemos segmentos de “reta” em sua superfície estaríamos medindo um arco de um círculo máximo (ou seja, um círculo com mesmo perímetro que a circunferência da esfera), como o segmento  $ab$ . A soma dos ângulos de um triângulo na superfície de uma esfera não é  $\pi$ , no caso específico da Figura 1.1.1.1c, se considerássemos o segmento  $ab$  como 1/4 do tamanho do equador, a soma dos ângulos internos seria  $\frac{3}{2}\pi$  [9].

A maneira encontrada para computar tal curvatura é o chamado “transporte paralelo”, que basicamente quantifica o desvio das medidas na superfície curva das de um plano comum. Ainda na Figura 1.1.1.1c, considerando um caminho fechado começando e terminando em  $c$ , se transportássemos um vetor por esse perímetro, mantendo o ângulo com o caminho sempre constante, quando ele voltasse ao início estaria desviado de um ângulo  $\theta$ , como mostra a figura, algo que não aconteceria se a geometria intrínseca fosse plana.

Então, quantitativamente a curvatura  $K$  em um dado ponto  $p$  seria o desvio no ângulo de um vetor movimentado por algum perímetro infinitesimal via transporte paralelo:

$$K = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\alpha}{A}, \quad (1.1)$$

$K$  é a chamada curvatura de Gauss. No caso específico da esfera da Figura 1.1.1.1c  $A = \theta R^2$  pela proporcionalidade da área do hemisfério, e segue-se que  $K = 1/R^2$ , ou seja, a curvatura é uniforme. Isto não acontece para o caso o geral, normalmente a curvatura é dada por um campo  $K(x)$  definido na superfície.

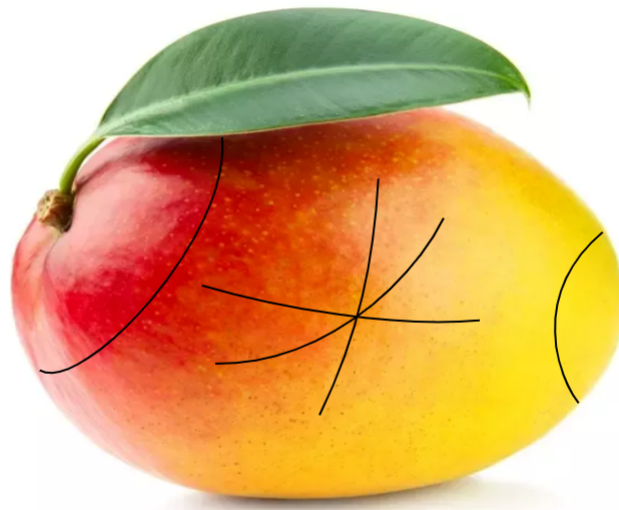


Figura 1.1.1.2: Linhas desenhadas em um exemplo de superfícies não uniforme, cada ponto pode ter uma curvatura diferente.

Normalmente para exemplificar superfícies gerais os livros didáticos utilizam uma maçã. Certa vez eu assistia o Professor Renio dos Santos Mendes ministrar a disciplina

de Oficina de Física II em 2019, ao explicar o conceito de curvatura indagou: “alguém por um acaso tem uma maçã ou uma laranja?”, eu por um acaso tinha uma manga, então ele prosseguiu a explicação com uma fruta bem mais nacional (Figura 1.1.1.2). Deixo a digressão deste parágrafo como uma singela homenagem.

O ponto mais importante desta discussão é o fato de que, na definição de curvatura intrínseca via transporte paralelo em nenhum momento o espaço onde a superfície está imersa é mencionado, a curvatura depende somente da superfície em si sem precisar enxergá-la “de fora”. Isto é importante, pois como será definido mais tarde o espaço-tempo é dado por uma geometria 4D que não está imersa em lugar algum.

### 1.1.2 Díades ou os “Campos Referenciais”

Os objetos que capturam a curvatura intrínseca de uma superfície são os chamados Campos de Referencial. Considerando um ponto  $p$  sob uma superfície  $\Sigma$  qualquer, pode-se sempre definir um plano tangente com origem nesse ponto, em que as coordenadas desse plano vão aproximar as da superfície em primeira ordem. Se as coordenadas do plano são dadas por  $X_p^i = (X_p, Y_p)$ , ao projetarmos elas para a superfície (Figura 1.1.2.1b) dizemos que  $X_p^i$  são as “coordenadas cartesianas locais” que se aproximam às coordenadas da superfície  $x_p^a$  na vizinhança de  $p$ .

A transformação das coordenadas  $x_p^a$ , da superfície para as coordenadas  $X_p^i$ , leia-se  $X_p^i(x^a)$ , é mediada de forma usual pelo Jacobiano, aqui escrito como  $e_a^i$ :

$$e_a^i = \left. \frac{\partial X_p^i(x^a)}{\partial x^a} \right|_{x^a=x_p^a}. \quad (1.2)$$

Repetindo o processo para todos os pontos da superfície obtém-se um campo  $e_a^i(x)$ , chamado de campo referencial ou simplesmente de “díade”, que captura a relação entre as coordenadas gerais  $x^a$  da superfície com as coordenadas cartesianas locais  $X^i$  de um ponto.

O Jacobiano da transformação inversa também é válido, e carrega as mesmas informações,

$$e_i^a = \left. \frac{\partial x^a(X_p^i)}{\partial X_p^i} \right|_{X_p^i=0}, \quad (1.3)$$

$e_i^a$  define um par de campos vetoriais tangentes à superfície. Em cada ponto eles formam uma base ortonormal apontando na direção dos eixos do plano cartesiano (Figura 1.1.2.1a), e daí vem o nome “díade”, e também o nome “campo referencial”, pois define o par de eixos do plano cartesiano local como derivadas direcionais

$$e_i^a = (\vec{e}_1(x), \vec{e}_2(x)).$$

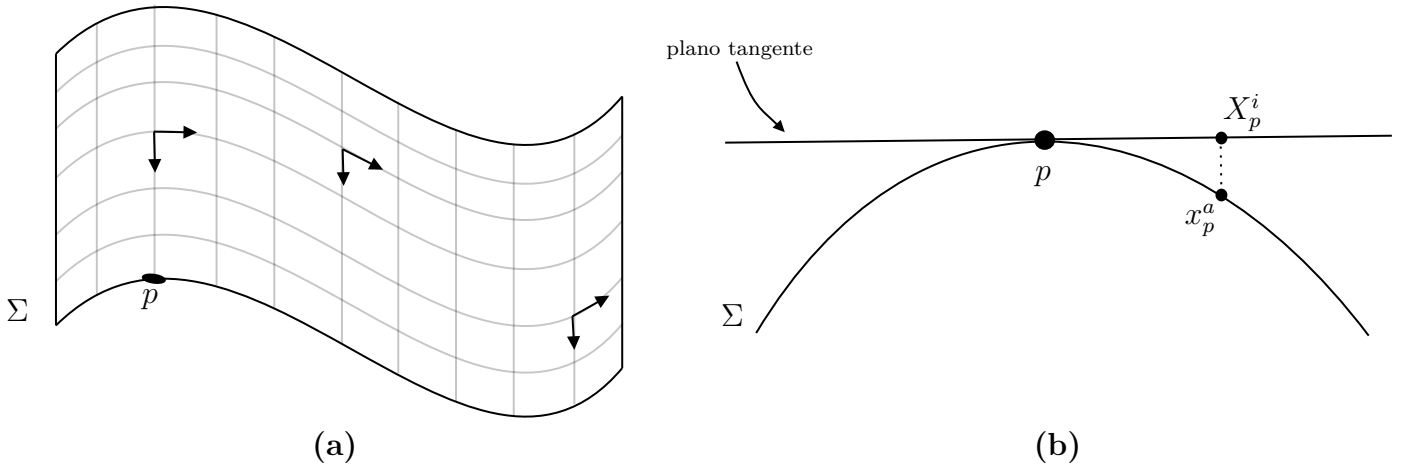


Figura 1.1.2.1: Representação de: **(a)** díades definindo o plano cartesiano local em uma superfície  $\Sigma$  qualquer, **(b)** o ponto  $p$  de (a) visto de outra perspectiva,  $X_p^i$  aproxima  $x_p^a$ . Fonte: o autor.

Resta mostrar que as díades de fato descrevem a geometria intrínseca, sem se referir ao espaço em que a superfície está imersa, assim como a curvatura de Gauss. Para tal, introduz-se a noção de métrica.

### 1.1.3 Métrica

A partir das díades podemos computar a distância entre 2 pontos próximos em uma superfície,  $x^a$  e  $x^a + dx^a$ . Utilizando a Equação (1.2) em  $dx^a$  para fazer a transformação, que é válida em primeira aproximação já que os pontos são próximos, temos

$$dX^i = \frac{\partial X^i(x^a)}{\partial x^a} dx^a = e_a^i(x) dx^a, \quad (1.4)$$

e como trata-se da aproximação cartesiana, as distâncias são dadas por Pitágoras

$$ds^2 = \sum_i dX^i dX^i \equiv \delta_{ij} dX^i dX^j. \quad (1.5)$$

Substituindo (1.4) em (1.5), obtém-se

$$ds^2 = \delta_{ij} e_a^i(x) e_b^j(x) dx^a dx^b, \quad (1.6)$$

que pode convenientemente ser escrita como

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \quad (1.7)$$

em que

$$g_{ab}(x) = e_a^i(x) e_b^j(x) \delta_{ij}. \quad (1.8)$$

$g_{ab}$  é a chamada “métrica”, que permite calcular comprimentos em uma superfície genérica.

### 1.1.4 Comprimento

Para justificar que a métrica, e consequentemente as díades capturam a geometria intrínseca, voltemos a motivação inicial, de que, a curvatura é definida ao se medir comprimentos na superfície.

Para exemplificar, dada uma curva  $\gamma$  qualquer desenhada em uma superfície definida por um parâmetro  $\tau$ , a função que define a curva será

$$\gamma = x^a(\tau).$$

Um deslocamento infinitesimal  $d\tau$  sob a curva muda levemente as coordenadas, seguindo

$$dx^a = \frac{dx^a}{d\tau}d\tau \equiv \dot{x}^a d\tau. \quad (1.9)$$

Fazendo uma analogia com a cinemática, se  $\tau$  fosse o tempo, o passo anterior seria como encontrar o deslocamento a partir da velocidade.

Substituindo (1.9) em (1.7), obtém-se

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{g_{ab}(x(\tau))dx^a dx^b} \\ &= \sqrt{g_{ab}(x(\tau))\dot{x}^a d\tau \dot{x}^b d\tau} \\ &= \sqrt{g_{ab}(x(\tau))\dot{x}^a \dot{x}^b} d\tau. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Finalmente, o comprimento  $L$  da curva  $\gamma$  será encontrado ao se integrar sob todos os deslocamentos infinitesimais,

$$L = \int \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a \dot{x}^b} d\tau. \quad (1.11)$$

Essa expressão é invariante sob transformações de coordenadas e de parametrização [11], e depende somente da curva e da geometria da superfície, e não das coordenadas que usamos para mapeá-la.

Conhecendo a métrica  $g_{ab}$ , conhecemos o comprimento de qualquer curva sob uma superfície. Como a definição de geometria intrínseca é baseada em caminhos na superfície, a métrica captura completamente a geometria sem recorrer em nenhum momento ao espaço em que ela está imersa. O mesmo é válido para a curvatura de Gauss, e é possível escrever  $K(x)$  (Equação 1.1) em termos da métrica, mas isso será feito mais a frente no caso geral de  $n$  dimensões.

O próximo passo é generalizar o que foi feito para as superfícies para os espaços de 3 ou mais dimensões.

## 1.2 Geometria Riemanniana

Quem ficou com a árdua tarefa de generalizar os resultados de Gauss para  $n$  dimensões foi um de seus alunos de doutorado, Bernard Riemann [13].

Agora as coordenadas generalizadas do espaço são  $x^a = x^1, x^2, \dots, x^d$ , com  $d$  sendo o número de dimensões. A maioria das definições da subseção anterior ainda são válidas, mas agora os índices  $i$  vão de 1 à  $d$ , para o caso de  $d = 3$  não temos mais díades, mas sim tríades, e para o caso  $d = 4$  tétradas (que são as de interesse para a TRG).

Os comprimentos ainda são definidos pela métrica da mesma forma, mas agora não é mais tão simples visualizá-los.  $g_{ab}$  é também conhecida como a métrica de Riemann e repito aqui a equação dos comprimentos  $ds^2$  por clareza

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (1.12)$$



Encerra-se por aqui as generalizações diretas, grandes desafios começam a surgir quando precisa-se definir o análogo de  $K(x)$ , e portanto derivadas e o transporte paralelo, mas para o bem deste trabalho (e também para o de Einstein em 1915) Riemann e companhia já os superaram no século 19.

### 1.2.1 Geodésicas

Entre os elementos geométricos que desempenham um papel importante na Física estão as chamadas geodésicas, que são os caminhos que minimizam a distância entre dois pontos (Figura 1.2.1.1). São análogas as linhas retas na geometria euclidiana.

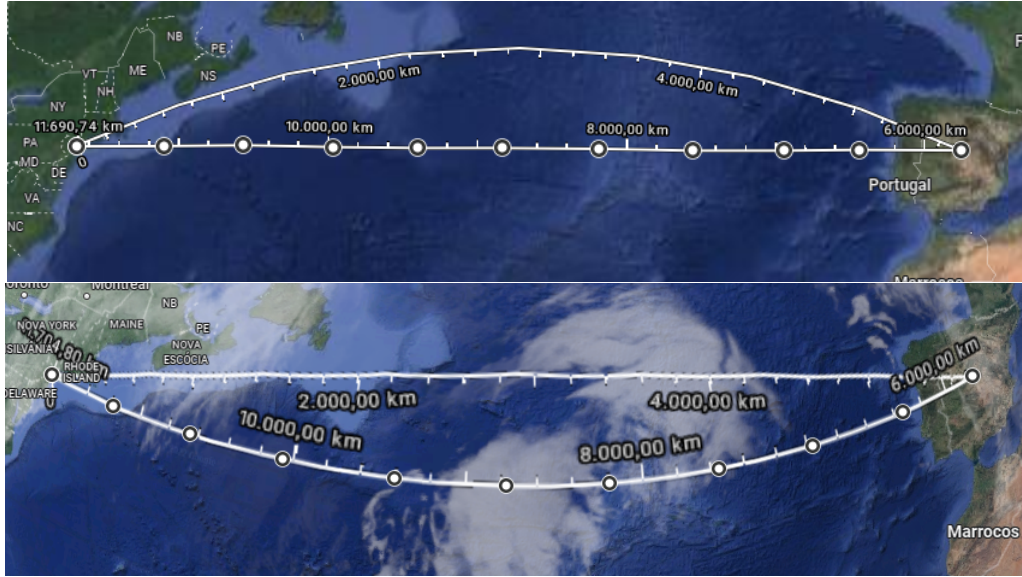


Figura 1.2.1.1: Rota Nova Iorque - Madrid, a linha pontilhada é a reta na projeção Mercator, e a outra é a geodésica. Acima: visão na projeção, a geodésica parece mais longa; abaixo: visão esférica (a real), a geodésica é claramente o caminho mais curto. Geodésica = 5760 km, reta na projeção = 5930 km (visualização e distâncias computadas com o *Google Earth*).

Para chegar na equação da geodésica basta aplicar métodos variacionais na Equação (1.11) do comprimento de uma curva genérica. Variando a curva uma pequena quantia  $\delta$ , mantendo o ponto inicial e final fixos, derivando temos

$$\delta L = \int \delta \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} d\tau = \int \frac{1}{2\sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b}} \delta(g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b) d\tau.$$

Como a curva é invariante sob reparametrização pode-se escolher um parâmetro conveniente, neste caso se  $d\tau = ds$  temos, das Equações (1.9) e (1.10),  $\dot{x} = \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} = 1$ , e a raiz no denominador fica unitária

$$\delta L = \frac{1}{2} \int (\delta g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b + g_{ab} \delta \dot{x}^a \dot{x}^b + g_{ab} \dot{x}^a \delta \dot{x}^b) = \int \delta g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b + 2g_{ab} \delta \dot{x}^a \dot{x}^b d\tau,$$

$\delta \dot{x}^a$  pode ser reescrito como  $\frac{d}{d\tau}(\delta x^a)$ , e também é possível se usar o fato de que a variação tem o mesmo efeito de uma leve mudança de coordenadas  $\delta x^c$ :  $\delta g_{ab} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \delta x^c = \partial_c g_{ab} \delta x^c$ . Ficamos com

$$\delta L = \int \partial_c g_{ab} \delta x^c \dot{x}^a \dot{x}^b + 2g_{ab} \frac{d}{d\tau} (\delta x^a) \dot{x}^b d\tau.$$

A integral da segunda parcela pode ser feita por partes. Levando em consideração o fato de que

$$\delta x^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^c} \delta x^c.$$

Também a propriedade da transformação de tensores

$$g_{cb} = \frac{\partial x^a}{\partial x^c} g_{ab}.$$

E de que os termos de contorno da integral por partes são nulos, visto que a variação nos extremos é nula, temos

$$\delta L = \frac{1}{2} \int \left( \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - 2 \frac{d}{d\tau} (g_{cb} \dot{x}^b) \right) \delta x^c d\tau.$$

Se a geodésica é a função que minimiza o comprimento, temos  $\delta L = 0$ , e portanto, multiplicando o segundo termo da regra da cadeia por,  $\frac{\partial x^a}{\partial x^a}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - 2 \frac{d}{d\tau} (g_{cb} \dot{x}^b) &= 0 \\ \partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - 2 \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - 2g_{cb} \ddot{x}^b &= 0. \end{aligned}$$

É conveniente separar o segundo termo em 2 equivalentes, e passar o terceiro termo para o outro lado da igualdade,

$$\partial_c g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - \partial_a g_{cb} \dot{x}^a \dot{x}^b - \partial_b g_{ca} \dot{x}^a \dot{x}^b = 2g_{cd} \ddot{x}^d.$$

Contraindo com o tensor inverso  $g^{dc}$  e um pouco de álgebra, pode-se escrever

$$\ddot{x}^d + \Gamma_{ab}^d \dot{x}^a \dot{x}^b = 0, \quad (1.13)$$

em que

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}). \quad (1.14)$$

A Equação (1.13) é a chamada equação da geodésica, e a equação (1.14) é conhecida como as conexões de Levi-Civita ou símbolos de Christoffel, cujo significado geométrico será discutido em breve. É interessante notar que se a métrica for euclidiana  $g_{ab} = \delta_{ab}$  a Eq.(1.13) se torna  $\ddot{x}^d = 0$ , que é a equação da reta.

## 1.2.2 Campos

Outras construções importantes do ponto de vista físico são os campos. Nos espaços riemannianos os campos escalares continuam definidos da mesma forma, associando um número real para cada ponto do espaço, mas a definição de campos vetoriais é um pouco mais complicada, e também nesta subseção é introduzida uma nova classe, os campos tensoriais.

## Vetoriais

A dificuldade em trabalhar com campos vetoriais vem do fato de que para uma superfície o vetor sob um ponto em uma superfície 2D é um elemento de um plano tangente imerso em  $\mathbb{R}^3$ , mas na geometria riemanniana o espaço é definido independentemente do espaço de dimensão maior em que está imerso. A definição de campos vetoriais precisa ser um pouco ajustada, consideremos 2 casos:

*1º caso:* uma certa quantidade  $w_a(x)$ , definida como a derivada de um campos escalar (portanto um campo vetorial)

$$w_a(x) \equiv \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^a},$$

sob uma transformação de coordenadas,

$$\tilde{w}_a(\tilde{x}) = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} w_b(x(\tilde{x}));$$

*2º caso:* imaginando um fluxo de partículas com velocidade dada por  $v^a(x) = \frac{dx^a}{dt}$ . Novamente, sob uma transformação de coordenadas

$$\tilde{v}^a(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} v^b(\tilde{x})$$

Ambos os casos são campos vetoriais, mas que se transformam de formas diferentes (a nova coordenada no jacobiano está como sobrescrito em um e subscrito no outro). Campos que se transformam como  $v^a$  são chamados contravariantes e são representados por índices sobrescrito, e o contrário são chamados de covariantes, com índices subscrito.

## Tensoriais

Por definição um campo tensorial possui índices que se transformam de forma covariante, e índices que se transformam de forma contravariante

$$\tilde{T}^{a\dots}_{b\dots}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^c} \cdots \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b} \cdots \tilde{T}^{c\dots}_{d\dots}(x(\tilde{x})).$$

Uma propriedade de tensores que é extremamente útil na Relatividade Geral é a de que se uma equação tensorial é válida em sistema de coordenadas, ela será válida em todos os outros, devido à característica linear deste tipo de transformação [9].

### 1.2.3 Derivada Covariante

Equações entre tensores válidas em um sistema são válidas em qualquer sistema de coordenadas, dito isto, a derivada de um tensor não é um tensor, o que dificulta a descrição de uma geometria invariante. Isso acontece devido a base em que a derivada está sendo calculada também mudar, ou seja, o Jacobiano nem sempre é constante. Isto indica a necessidade de novos elementos que capturem essa taxa de variação.

A definição,

$$D_a v^b \equiv \partial_a v^b + \Gamma_{ac}^b v^c,$$

por sua vez, é um tensor, chamado de derivada covariante. Aqui não será mostrado como chegar à ela (na referência [14] esta demonstração é feita) mas serão discutidas algumas propriedades.

Se a derivada covariante de um vetor é nula por meio de um caminho qualquer  $\gamma$ , ou seja  $\dot{\gamma}^a D_a v^b = 0$ , isso significa que o ângulo entre o vetor e a tangente ao caminho é

constante, ou seja, o vetor é “transportado paralelamente”. Isso clarifica o significado dos Símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ac}^b$ , eles nos dizem como fazer o transporte paralelo deste vetor, e contrapõem a variação daquele Jacobiano que não é constante.

Outra propriedade é que a derivada covariante é independente das coordenadas

$$D_a g_{bc} = 0.$$

Isso se dá pois a métrica é construída a partir das coordenadas cartesianas locais, e as derivadas são nulas e válidas nesse regime também.

Além disso, a derivada covariante de um vetor covariante é definida com um sinal de menos

$$D_a w_b \equiv \partial_a w_b - \Gamma_{ab}^c w_c.$$

E se for um tensor com mais índices, temos por exemplo

$$D_a w_c^b \equiv \partial_a w_c^b + \Gamma_{ad}^b w_c^d - \Gamma_{ac}^d w_d^b.$$

### 1.2.4 Curvatura de Riemann

Uma pergunta que motiva a definição de curvatura em espaços riemannianos é a seguinte: como saber se a geometria definida por uma dada métrica  $g_{ab}(X)$  é realmente plana?

Certamente, se  $g_{ab} = \delta_{ab}$  as distâncias serão dadas por  $ds^2 = \delta_{ab} dX^a dX^b$ , que é justamente a definição do espaço euclidiano. Mas, ao introduzirmos novas coordenadas  $x^a$ , a métrica resultante será (usando o Jacobiano como na Equação (1.7))

$$g_{ab}(x) = \delta_{cd} \frac{\partial X^c}{\partial x^a} \frac{\partial X^d}{\partial x^b}.$$

Que também é plana, já que a geometria não muda com mudanças de coordenadas. A questão continua, como saber se a métrica define realmente uma geometria plana? A confusão se dá pois dado um ponto qualquer é sempre possível escolher coordenadas para que a métrica seja  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , pelo menos localmente.

Para investigar o problema, tomemos o comutador de duas derivadas covariantes agindo em um dado campo vetorial

$$[D_a D_b v^c, D_b D_a v^c] = D_a D_b v^c - D_b D_a v^c.$$

Usando as definições de derivadas covariantes e rearranjando os termos, pode-se chegar em

$$D_a D_b v^c - D_b D_a v^c = R_{dab}^c v^d. \quad (1.15)$$

Em que

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e. \quad (1.16)$$

Se o lado esquerdo da Equação (1.15) é um tensor, o lado direito também é, logo  $R_{bcd}^a$  também é, apesar das conexões de Levi-Civita não serem (e se transformarem de forma mais complicada).

Agora, se o espaço é plano pode-se escolher coordenadas globais em que  $g_{ab}(x) = \delta_{ab}$ , e pela definição (1.14), as conexões  $\Gamma_{ab}^c$  são nulas (por serem derivadas da métrica), e portanto  $R_{bcd}^a = 0$ , que é uma equação tensorial válida para qualquer sistema de coordenadas. Logo, encontrou-se uma maneira de testar se o espaço é plano em qualquer sistema de coordenadas, ele deve satisfazer  $R_{bcd}^a = 0$ .

$R^a_{bcd}$  definido na Equação (1.16) é a chamada curvatura de Riemann ou Tensor de Riemann, que é o análogo ao  $K(x)$  de Gauss mas para  $n$  dimensões.

O significado do Tensor de Riemann pode ser identificado a partir de seus índices. Os dois últimos índices  $cd$  são antisimétricos (o que pode ser encontrado fazendo uma análise da definição) e definem um plano localmente, e os dois primeiros definem uma matriz de rotação  $R^a_b$ .

Portanto, lembrando-se da Equação 1.1, que usa o ângulo de um vetor transportado paralelamente por um caminho fechado no limite com a área pequena, levando grosseiramente essa ideia para mais dimensões, os dois últimos índices definem a superfície por em que o caminho está, e os dois primeiros dão o ângulo infinitesimal que o vetor rotaciona quando passa por esse caminho.

Ainda é possível mostrar que o Tensor de Riemann captura a convergência de geodésica em uma superfície curva (retas paralelas nunca se encontram no espaço euclidiano, mas podem se cruzar em espaços curvos), e portanto descreve a geometria intrínseca do espaço (generalizando a ideia de medir comprimentos). É o chamado desvio geodésico [10].

Obviamente esta seção só pincela uma noção intuitiva do Tensor de Riemann, um tratamento completo é muito mais complicado e rico, sendo estes os grandes resultados da tese de Riemann.

### 1.2.5 Tensor e Escalar de Ricci

Durante manipulações de equações envolvendo tensores as vezes é útil fazer as chamadas “contrações”, ou seja, dividir o tensor em pedaços menores para explorar alguma propriedade ou que tenham interpretação física direta. No caso do Tensor de Riemann não seria diferente. Contraíndo o primeiro índice com o terceiro, obtemos

$$R^c_{acb} = R_{ab} . \quad (1.17)$$

E calculando o traço da expressão acima, ou seja, aplicando a métrica inversa, obtemos

$$R = g^{ab} R_{ab} . \quad (1.18)$$

As Equações (1.17) e (1.18) são chamadas respectivamente de Tensor de Ricci e Escalar de Ricci, e são as formas obtidas do Tensor de Riemann que aparecerão na Relatividade Geral. Ambas tem uma interpretação geométrica intuitiva (que pode também ser definida formalmente, mas aqui só será apresentada) [14].

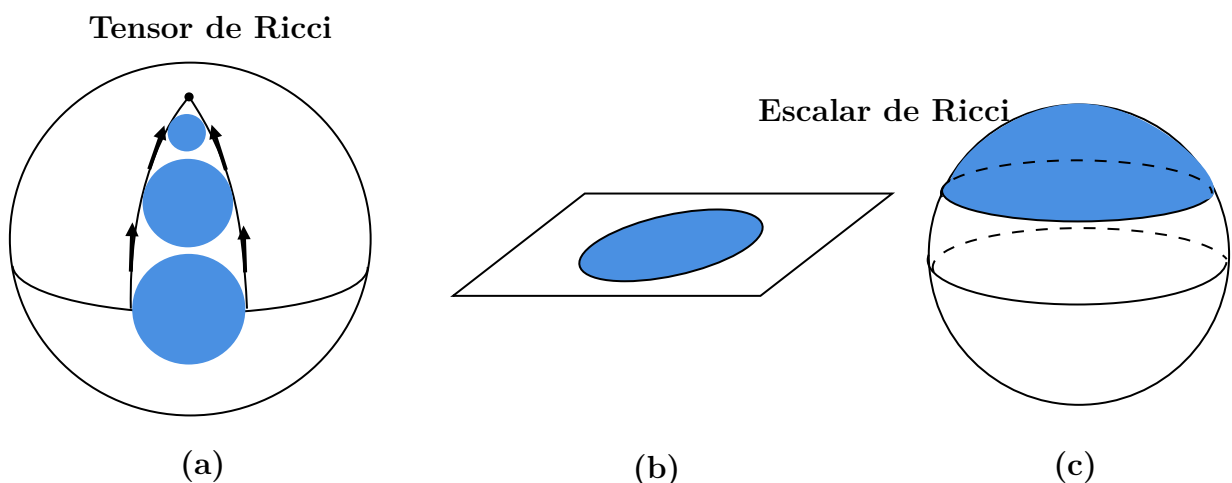


Figura 1.2.5.1: Representações de (a) círculo sendo transportado entre geodésicas de uma esfera, (b) círculo desenhado no plano, (c) círculo desenhado na superfície de uma esfera. Fonte: adaptada de [15].

O Tensor de Ricci mostra como volumes mudam entre geodésicas. Se levamos essa ideia para uma superfície 2D considerando um círculo transportado entre geodésicas do equador até um dos polos, seu tamanho diminui (Figura 1.2.5.1a), e é essa variação que o Tensor de Ricci captura (para o caso  $n$  dimensional geral).

O Escalar de Ricci compara o volume de uma esfera em um espaço curvo com o volume que essa esfera teria em um espaço plano. Levando para o caso 2D novamente, uma esfera 2D (o famoso círculo) no plano tem área  $A = \pi r^2$ , olhando para esse círculo agora posto em um dos pólos de uma esfera, é fácil de ver que agora  $A > \pi r^2$  (Figura 1.2.5.1b -c). É esse desvio que o Escalar de Ricci quantifica.

## 1.2.6 Geometria Lorentziana

A geometria riemanniana possui a propriedade de poder ser aproximada em cada ponto por um espaço euclidiano. Para descrever o espaço em que habitamos isto ainda não é o suficiente, pois como descoberto na Relatividade Especial a realidade é composta de um espaço-tempo, e portanto, deveria ser bem aproximada em cada ponto por um espaço de Minkowski.

Felizmente, isso é fácil de corrigir, basta substituir  $\delta_{ij}$  na métrica usual da Equação (1.8) por  $\eta_{ij}$ , a métrica de Minkowski

$$g_{ab}(x) = \eta_{ij} e_a^i(x) e_b^j(x).$$

Sendo  $\eta_{ij} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$ , agora a “assinatura” da métrica é  $(-, +, +, +)$  ao invés de  $(+, +, +, +)$ , em que o sinal negativo é explicado pelo comportamento do tempo sob transformações de Lorentz, a chamada dilatação temporal, e a assinatura é necessária para reproduzir os resultados observados na Relatividade Especial que ocorre geometricamente pelo espaço-tempo ser hiperbólico.

Esses espaços são chamados de pseudo-riemannianos, ou lorentzianos. Intervalos medidos usando a métrica podem ser tipo temporais, tipo espaciais ou nulos dependendo se  $ds^2$  (Equação (1.7)) é negativo, positivo ou zero, respectivamente. Isso se deve ao fato do módulo quadrado da velocidade  $|\dot{x}|^2$  ser positivo, negativo ou nulo em todos os pontos.

Esse detalhe cria um cone de luz em cada ponto do espaço que define a estrutura causal da teoria, as diagonais representam raios de luz, e como na Relatividade Restrita a velocidade da luz é o limite, somente eventos ambos dentro do cone podem se afetar (Figura 1.2.6.1a). Estendendo a ideia para espaços curvos, há um cone de luz para cada ponto do espaço, que variam sua orientação de um ponto a outro de forma suave seguindo a curva (Figura 1.2.6.1b).

Uma curva tipo espaço conecta eventos acontecendo ao mesmo tempo mas em lugares diferentes, uma curva do tipo tempo conecta eventos acontecendo no mesmo lugar mas em instantes diferentes, e uma curva nula é um raio de luz. Mas, na Relatividade Restrita a noção de simultaneidade é relativa, então diferentes observadores podem não concordar no tipo de uma curva, no entanto, todos concordarão com o intervalo  $ds^2$ , e as coordenadas se compensam para que a diferença se anule (se a métrica fosse euclidiana, se somariam).

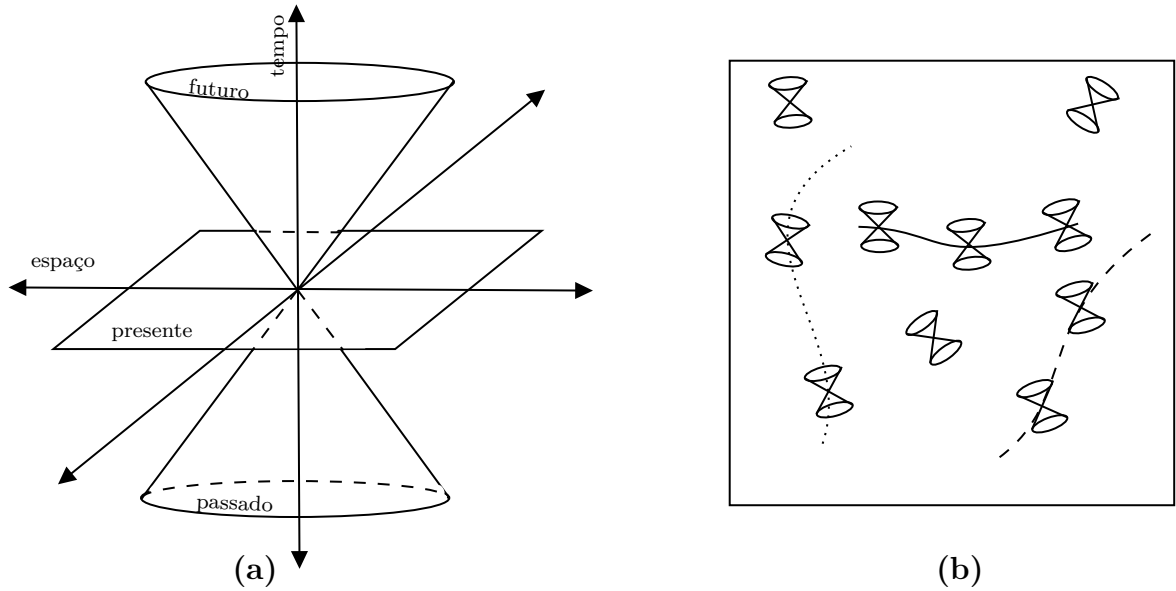


Figura 1.2.6.1: Ilustrações representando: (a) cone de luz, (b) cones de luz variando em um espaço curvo em um dado referencial, pontilhada: curva tipo tempo; traçada: curva nula; sólida: curva tipo espaço. Fonte: adaptada de Rovelli [9] e Carrol [10].

## 1.3 As Equações de Campo de Einstein

Depois de tantas preliminares matemáticas é hora de partir para a Física. Com o ferramental matemático definido brevemente nas últimas seções, agora pode-se definir a TRG em uma linguagem precisa, trata-se da: descrição de espaços quadridimensionais pseudo-riemannianos, construídos por tetradas  $e_a^i$ , ou equivalentemente pela métrica 4D lorentziana (Equação 1.19).

### 1.3.1 O Campo Gravitacional e seus Efeitos

O campo gravitacional é descrito pela métrica

$$g_{ab}(x) = \eta_{ij} e_a^i(x) e_b^j(x). \quad (1.19)$$

E conseqüentemente define a geometria do espaço-tempo por meio dos elementos de linha

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b. \quad (1.20)$$

Cada ponto  $p$  do espaço-tempo com coordenadas  $x_p^a$  tem suas tetradas definindo o plano cartesiano local  $X^i = e_a^i(x)(x^a - x_p^a)$ , que em termos físicos é um referencial em queda livre, em que a Física é a mesma que a da Relatividade Restrita, ou seja, é aproximada por um espaço plano de Minkowski. Essa propriedade é a definição formal do chamado Princípio da Equivalência, que será discutido de forma heurística na próxima Seção.

O campo gravitacional dita a passagem do tempo e o “tamanho” do espaço. Um relógio se movendo pelo espaço-tempo por uma trajetória  $\gamma$  tipo tempo mede um dado tempo  $T$ , e o mesmo é válido para uma barra em um intervalo tipo espaço, em que as expressões foram colocadas lado a lado (via Equação 1.11, levando em consideração  $\eta_{ij}$ )

$$T = \int_{\gamma} \sqrt{-g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} d\tau \quad L = \int_{\gamma} \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} d\tau .$$

A diferença é o sinal.  $T$  é chamado tempo próprio (que não pode ser confundido com a coordenada  $t$ ) e  $L$  é o comprimento próprio. Seus valores são dados pela dinâmica desses instrumentos físicos (régua e relógios) interagindo com o campo gravitacional (medindo  $ds$ 's de uma dada métrica). Raios de luz são definidos por  $ds = 0$ , ou seja, viajam por linhas nulas, com máxima velocidade, a da luz.

Quando não há forças agindo sobre uma partícula ela segue uma geodésica, a saber,

$$\ddot{x}^d + \Gamma_{ab}^d \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 . \quad (1.21)$$

Com as conexões de Levi-Civita sendo

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) . \quad (1.22)$$

Este fato deriva diretamente do Princípio da Equivalência. A queda livre é definida por movimento retilíneo, e as “retas” dos espaços curvos são as geodésicas. A Equação da Geodésica é análoga à força de Lorentz no eletromagnetismo, e o segundo termo pode ser visto como a “força”, que nesse caso nada mais é que o efeito da geometria do espaço-tempo.

### 1.3.2 Dinâmica

As equações que descrevem a dinâmica do campo gravitacional (análogas as Equações de Maxwell para o campo Eletromagnético) são as chamadas Equações de Campo de Einstein (ECEs) (Equação 1.23). Assim como outras equações dinâmicas fundamentais, como por exemplo a Equação de Schrödinger na Mecânica Quântica ou a Segunda Lei de Newton, as ECEs não podem ser necessariamente deduzidas, mas podem ser obtidas a partir de certos conjuntos de suposições. Esses conjuntos podem iluminar aspectos da teoria, mas em princípio, as Equações de Campo da Relatividade Geral são fruto das mentes e intuições de Einstein e seus colaboradores [16].

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab} . \quad (1.23)$$

Diversos textos na literatura apresentam deduções das ECEs a partir de diferentes conjuntos de suposições, por exemplo: Carrol [10] chega as ECEs a partir da generalização relativística da Equação de Poisson da gravitação universal, Wald [11] chega a partir da imposição de certas condições físicas para a distribuição de matéria e energia no Universo e Weinberg [17] procura por tensores que recaiam no caso plano em primeira aproximação.

Aqui não será feita nenhuma dessas demonstrações por completo. Optou-se por abordar o significado físico de cada termo da equação. Basicamente, o lado esquerdo descreve a curvatura do espaço-tempo (Geometria), e o lado direito descreve a presença de matéria e energia (Física), a igualdade indica então, que a presença de matéria e energia distorce o espaço-tempo.

#### 1.3.2.1 Lado Direito - Matéria e Energia

$$8\pi G T_{ab}$$

Primeiramente,  $8\pi G$  é uma constante de proporcionalidade, com  $G$  sendo a mesma constante da Gravitação Universal de Newton, ela define o quanto o espaço-tempo se distorce com a presença de massa e energia, e como  $G$  é um valor muito pequeno, é necessária uma grande quantidade de massa e energia para criar uma distorção.  $T_{ab}$  é o chamado Tensor Energia-Momento, e descreve a densidade e o fluxo de matéria e energia.



$T_{ab}$  é análogo a corrente eletromagnética no Eletromagnetismo, e também se compara ao Tensor de Tensões de Maxwell, sendo construído de forma semelhante. No eletromagnetismo é a distribuição e o movimento de cargas que define o campo eletromagnético, aqui é a massa e a energia que definem o campo gravitacional.

Para construir o Tensor Energia Momento, dada a definição do momento relativístico

$$p^a = \gamma m \dot{x}^a .$$

Se considerarmos as 4 dimensões, a componente  $v^0$  pode ser definida como velocidade da luz  $c$ , logo temos

$$p^0 = \gamma m c^2 / c .$$

Que claramente tem dimensões de energia sobre  $c$ , e logo a componente temporal nos dá informações sobre a energia.

Podemos definir a seguinte quantidade,  $\dot{x}^a p^a$ , que é nula quando não há massa nem energia em um certo volume, então, dividindo sobre uma unidade de volume (que também sofre contração de Lorentz), temos um tensor que descreve o fluxo de energia e momento

$$T^{ab} = \frac{\gamma \dot{x}^b p^a}{\gamma \text{ unidade de volume}} . \quad (1.24)$$

As componentes espaço-tempo  $T^{a0}$  são o “fluxo por unidade de volume em um tempo constante”, ou seja, são densidades de momento, e no caso  $T^{00}$  é a densidade de energia relativística. As componentes tempo-espaço  $T^{0b}$  representam o fluxo de energia nas diferentes direções espaciais. Já as componentes espaço-espaço são as manifestações do fluxo de momento de forma análoga à mecânica dos fluidos, se os índices são iguais o momento é perpendicular a “superfície” e se comporta como a pressão, se são diferentes, o momento é paralelo e causa um “cisalhamento” transferindo-se para o ambiente a sua volta, como um líquido viscoso.

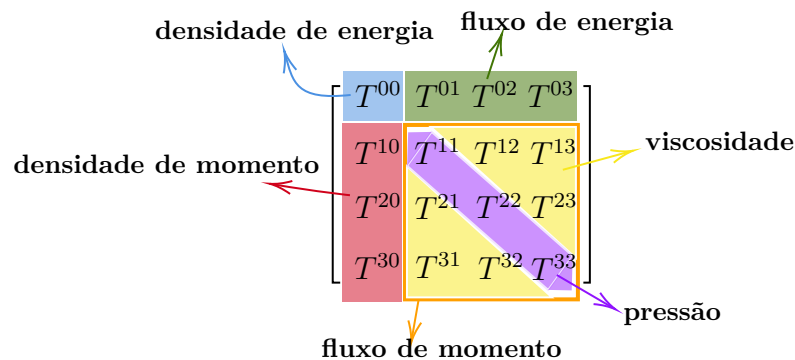


Figura 1.3.2.1: Matriz indicando as componentes do Tensor Energia-Momento - azul: tempo-tempo; vermelho: espaço-tempo; verde: tempo-espaço; laranja: espaço-espaço. Fonte: adaptado de Wikipedia [18].

Um exemplo elementar da construção do Tensor Energia-Momento seria o de uma partícula movendo-se sobre uma curva  $S$  no espaço-tempo, chamada “linha do Universo”, usando a Equação (1.24), tem-se

$$T^{ab}(x) = m \int_S d\tau \dot{x}^a \dot{x}^b \delta(x, x(\tau)) .$$

Isto é,  $T^{ab}$  está todo concentrado na partícula com proporção  $\dot{x}^a \dot{x}^b$ , e se tomarmos o referencial com a partícula em repouso  $\dot{x}^a = (1, 0, 0, 0)$ , não há fluxo de momento nem de energia, e  $T^{ab}$  só tem uma componente  $T^{00} = m$ , concentrada na posição da partícula.

Cada exemplo mais complexo tem a sua respectiva construção do Tensor Energia-Momento. Isso tudo foi feito para o tensor  $T^{ab}$  mas seus índices podem ser baixados usando a métrica.

### 1.3.2.2 Lado Esquerdo - Curvatura

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab}$$

O terceiro termo,  $\Lambda g_{ab}$  contém a constante cosmológica, ela dita o comportamento do espaço-tempo em larga escala e seu valor é apreciável somente em escalas cosmológicas, no escopo deste trabalho é possível negligenciá-lo. As ECEs se tornam então

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab} . \quad (1.25)$$

O restante da expressão mede a curvatura local, contém os elementos apresentados anteriormente, que foram o Tensor de Ricci, Escalar de Ricci e a métrica. A primeira pergunta é, o Tensor de Ricci captura a curvatura intrínseca completamente, então porque usar a expressão mais complicada  $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \kappa T_{ab}$  ao invés de  $R_{ab} = \kappa T_{ab}$ ? A resposta está nas leis de conservação de momento e energia, mas antes de mostrar isto, é necessário apresentar algumas identidades.

Cálculos laboriosos (a derivada covariante do Tensor de Riemann, abusando de sua simetrias) [9] mostram que o tensor de Riemann segue a seguinte identidade (somar as componentes com o primeiro índice fixo e permutando os outros 3, é igual a 0)

$$D_e R^a_{bcd} + D_d R^a_{bec} + D_c R^a_{bde} = 0,$$

chamada de Segunda Identidade de Bianchi. Sua forma contraída é [10]

$$D^a R_{ab} - \frac{1}{2}D_b R = 0,$$

que com as propriedades da métrica, pode ser escrita como

$$D_a(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}) = 0.$$

A energia e o momento se conservam, ou seja, mantém-se os mesmos sob variações (translações no espaço-tempo), e isso pode ser expresso pelo divergente, que no caso generalizado para espaços-tempo curvos, é a derivada covariante

$$D_a T^{ab} = 0$$

Se as ECEs fossem dadas pela forma simples  $R_{ab} = \kappa T_{ab}$  teríamos imediatamente  $D_a R = 0$  pela Identidade de Bianchi Contraída, e levaria à  $R = \kappa g^{ab} T_{ab} = \kappa T$ , chegando em

$$D_a T = 0,$$

em que  $T$  é o traço do Tensor Energia-Momento, o que é intuitivamente falso, pois significaria que a distribuição de massa e energia no Universo seria uniforme, o que não corresponde à realidade (o leitor lendo este parágrafo é um amontoado de massa mais denso que seus arredores).

Torna-se necessário buscar uma representação de curvatura que também se conserve. Mas a Identidade de Bianchi contraída já trás a solução do problema, sendo ela o lado esquerdo da ECEs que respeita as condições de conservação de  $D_a T^{ab} = 0$  permitindo que a distribuição de massa e energia não seja homogênea.

Provas matemáticas completas da Primeira, Segunda e Contraída Identidade de Bianchi disponíveis em [17].

### 1.3.2.3 Vácuo

Uma região sem matéria é chamada vácuo na Relatividade Geral, em que  $T_{ab} = 0$ . As ECEs se tornam

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0.$$

Imediatamente  $R = 0$  e  $R_{ab} = 0$ , ou seja, na ausência de matéria o Tensor de Ricci desaparece. Mas isso não quer dizer que o espaço seja plano, assim como cargas não definem completamente o campo eletromagnético a massa não define completamente o campo gravitacional, e isto é ilustrado pela existência de ondas eletromagnéticas e de ondas gravitacionais. O que define completamente se o espaço é plano é o Tensor de Riemann, portanto

$$(\text{Riemann} = 0) \leftrightarrow \text{Espaço plano} ; (\text{Ricci} = 0) \leftrightarrow \text{Espaço Vazio}.$$

A Equação  $R_{ab} = 0$  é de extrema importância, por exemplo, logo fora de um corpo (estrelas, planetas, entre outros)  $T_{ab} = 0$ , mas ainda há efeitos gravitacionais apreciáveis. Todos os usos das ECEs nos Capítulos 2 e 3 são no vácuo.

Agora temos todos os ingredientes para concluir a analogia com o eletromagnetismo: a equação de movimento na TRG é a Equação da Geodésica e a dinâmica do campo é dada pelas Equações de Campo de Einstein (**Quadro 2**).

**Quadro 2:** Finalizando a analogia com o Eletromagnetismo apresentada no Quadro 1.

	<b>Eletromagnetismo</b>	<b>Relatividade Geral</b>
<b>Campo</b>	quadri-potencial $A_a(x)$	campo gravitacional $g_{ab}(x)$
<b>Equação de Movimento</b>	força de lorentz $\ddot{x}^a = \frac{e}{m}F_b^a\dot{x}^b$	equação da geodésica $\ddot{x}^d + \Gamma_{ab}^d\dot{x}^a\dot{x}^b = 0$
<b>Equações de Campo</b>	equações de Maxwell $\partial_a F^{ab} = 4\pi J^b$	equações de Einstein $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}$

## 1.4 Estrutura Conceitual

A Relatividade Geral tem incontáveis aplicações e é presente em vários contextos na Física Moderna. Neste trabalho uma aplicação será abordada com mais detalhes, tratam-se das ondas gravitacionais no Capítulo 3.

Visto que a TRG é desenvolvida em uma linguagem matemática sofisticada, a parte conceitual pode ser perdida durante todas as preliminares necessárias para se trabalhar com a teoria. No fim das contas (literalmente) estamos tratando da evolução temporal de corpos em movimento, mas agora o cenário onde esses corpos se movem é dinâmico, noções de espaço, tempo e principalmente do que se entende por “referencial” são muito mais intrincadas e merecem atenção especial. O objetivo desta seção é clarificar alguns pontos.

### 1.4.1 Princípio da Equivalência

No prelúdio do Capítulo 1 foi feita a seguinte afirmação: “o espaço-tempo é o campo gravitacional” e que esta ideia chega à Einstein pelo Princípio da Equivalência. Neste capítulo essas afirmações serão justificadas reconstruindo a lógica que o levou a tais conclusões.

Einstein é famoso por seus experimentos mentais ou “*Gedankenexperiment*”, e um deles explica muito bem o Princípio da Equivalência. Conforme ilustrado na Figura 1.4.1.1, imagine jogar uma bola aqui na Terra, a trajetória natural dela seria uma parábola comum, agora imagine jogar esta mesma bola em um foguete no espaço, que está acelerando a exatamente  $9,8 \text{ m/s}^2$ , jogando a bola da mesma forma, ela descreverá a mesma parábola que descreveu na superfície do planeta. Se estivéssemos em uma cápsula isolada realizando o experimento, não haveria como saber se estamos na superfície da Terra ou no foguete.

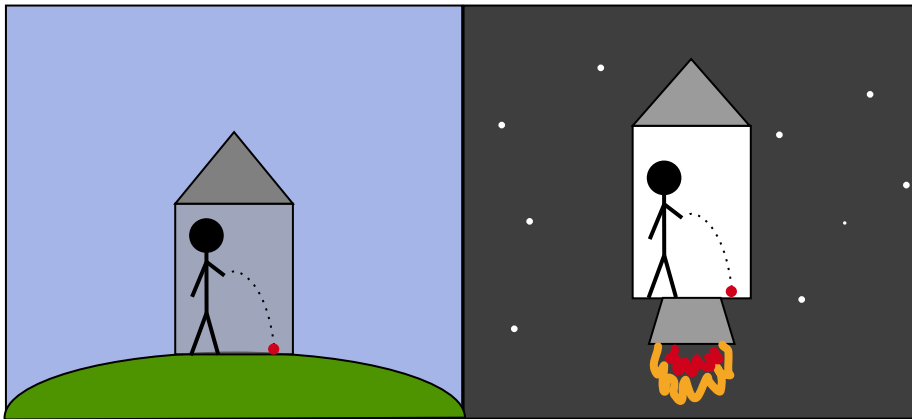


Figura 1.4.1.1: Imagens ilustrativas referente ao Princípio da Equivalência em que no lado esquerdo: jogando uma bola na superfície da Terra; lado direito: jogando uma bola em um foguete com aceleração constante de  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Fonte: o autor.

A lição que se tira é a seguinte: a força gravitacional e as forças inerciais têm exatamente a mesma natureza, ou seja, a gravidade cria referenciais não inerciais.

Mas o que isso tem a ver com a Relatividade Geral? Voltemos a Newton. Para Newton existe um espaço e um tempo absolutos, e as forças inerciais são explicadas como a aceleração relativa à esse referencial absoluto, e esta visão é mantida na Relatividade Especial, mas agora há um espaço-tempo com geometria fixa. O espaço newtoniano tem o papel de definir o que está acelerando e o que não está.

Einstein percebe que a gravidade é peculiar nesse quesito, a física da nave acelerando é a mesma física da superfície da Terra, e a Terra não está acelerando. Imagine agora que a nave para de acelerar, e que o homem palito do lado esquerdo da Figura (1.4.1.1) resolve fazer seu experimento em um elevador, que por fatalidade do destino, despenca. Ambos os referenciais tem a mesma física de um referencial “em queda livre”, ambos flutuam como astronautas (pois todas as coisas caem com a mesma aceleração).

A consequência é reveladora: o efeito da gravidade no elevador em queda é redefinir o que é um referencial inercial, no campo gravitacional da Terra o referencial inercial em que as coisas não estão acelerando aparentemente, é diferente da noção newtoniana em relação à um referencial absoluto. A gravidade define um novo referencial inercial “verdadeiro”, o do elevador caindo.

O espaço-tempo de Minkowski define o que acelera e o que não acelera, mas isso também é válido para o campo gravitacional. Einstein concluiu: “o espaço-tempo de Minkowski não é nada mais que uma configuração particular do campo gravitacional, em

uma configuração geral a geometria não é mais minkowskiana, mas sim riemanniana”. E este é o pontapé inicial da Relatividade Geral.

## 1.4.2 Coordenadas e Simetrias

Antes da Relatividade Geral eventos eram localizados pela distância de um certo ponto fixo (a origem), em coordenadas cartesianas por exemplo, ao afirmar que um objeto está posicionado nas coordenadas  $X = 3$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$  significa que o objeto está há uma distância  $d = 3$  da origem nas unidades que estiver utilizando. No caso das coordenadas generalizadas, o objeto pode estar há qualquer distância da origem, e pode-se denotar qualquer coordenada para um evento. Assim, dizer que um evento está nas coordenadas  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $t = 5$ , não carrega nenhuma informação. Na verdade, a distância será dada pelo tensor métrico  $g_{ab}(x)$ .

De um ponto de vista matemático, essa liberdade de escolher coordenadas implica na teoria ser subdeterminada [9]. Se  $g_{ab}(x)$  é uma solução das ECEs, sua representação em outro sistema de coordenadas  $\tilde{g}_{ab}(\tilde{x})$  também deve ser. A métrica é um tensor de *rank* 2 e se transforma da seguinte forma,

$$g_{ab} \rightarrow \tilde{g}_{cd}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^d} g_{ab}(x(\tilde{x})) . \quad (1.26)$$

Esta é uma simetria da teoria, e é chamada de covariância geral ou de invariância de difeomorfismo, dependendo da forma que interpretarmos a transformação. Sob uma transformação de coordenadas  $x^a \rightarrow \tilde{x}^a(x)$  o campo gravitacional pode evoluir em duas métricas  $g_{ab}(x)$  e  $\tilde{g}_{ab}(\tilde{x})$ , com ambas se mantendo soluções das ECEs. Isto não quer dizer que a teoria é indeterminada, mas que a transformação (1.26) deve ser vista como uma “invariância de gauge”, isto é: as soluções das ECEs relacionadas por essa transformação descrevem o mesmo espaço-tempo.

Isto tudo se deve ao fato de que na Relatividade Geral não existe um cenário fixo onde os eventos acontecem, e isto pode ser interpretado pela invariância de gauge das duas seguintes formas:

- Covariância Geral- A mudança pode ser vista simplesmente como mudar o rótulo dos pontos do espaço-tempo, de  $x^a$  para  $\tilde{x}^a$ ;
- Invariância de Difeomorfismo - A mudança pode ser vista como ao invés de mudar as coordenadas mudar o ponto  $p$  que essas coordenadas representam em si, ou seja, o ponto  $p$  é mandado para outro ponto no espaço  $\tilde{p}$  com coordenadas  $\tilde{x}^a$ .

Basicamente: mudamos as coordenadas e mantemos a base, ou alternativamente, mudamos a base e mantemos as coordenadas.

Na primeira interpretação a distância entre dois pontos  $p$  e  $q$  é conservada, na segunda não necessariamente (uma demonstração formal deste fato leva em consideração conceitos avançados de Topologia [11]), mas as métricas  $g_{ab}$  e  $\tilde{g}_{ab}$  ainda descrevem a mesma Física.

Com isso a noção de distância é perdida, pontos são definidos somente com a relação a solução das Equações de Einstein que fornece a métrica, que deve respeitar (1.26).

## 1.4.3 Tempo e Energia

Dentre as coordenadas discutidas na última seção está a coordenada temporal  $x^0 = t$ , que se comporta de forma diferente das coordenadas espaciais. A princípio ela parece similar às teorias não relativísticas, como o Eletromagnetismo clássico, mas essa similaridade não se traduz. Nas Equações de Maxwell a “coordenada” tempo é a grandeza

medida por um relógio. Já na TRG isto não é verdade, a coordenada  $t$  não mede nada fisicamente mensurável, como já apresentado, o tempo medido por um relógio é dado por

$$T = \int_{\gamma} \sqrt{-g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} d\tau .$$

Portanto, o tempo próprio entre dois eventos no espaço-tempo depende de  $\gamma$ , e em geral não há como definir uma coordenada temporal exclusiva para eventos no espaço-tempo, tudo depende do referencial.

Então quando se diz “evolução temporal” na relatividade geral quer se dizer uma coisa completamente diferente, antes era a evolução “no tempo”, em relação a um parâmetro independente da teoria  $t$ . Agora trata-se de uma evolução relativa das variáveis físicas uma com relação as outras, entre elas, o tempo próprio medido por um relógio.

Esta propriedade do tempo na TRG tem consequências na definição de energia total. A energia é definida como uma quantidade que se conserva sob translações temporais, e isto é válido para a Relatividade Geral, que é invariante sob translação de qualquer coordenada. Mas essa translação também é uma simetria de gauge local, e geradores de simetrias locais são nulos (para preservar a invariância das leis da Física), nesse caso é a energia, que é nula em todos os pontos.

Em cenários específicos ainda é possível ter definições de energia total diferentes de zero e úteis, tomando sistemas isolados, ou definindo a energia de ondas gravitacionais longe da fonte. Essa ambiguidade se dá justamente pelas noções relativas das coordenadas, que só se localizam uma em relação às outras (inclusive a coordenada temporal).

Uma forma rigorosa de demonstrar este fato é analisando os gauges  $g_{00} = 1$  e  $g_{0i} = 0$  (densidade de energia do campo gravitacional), em uma análise canônica completa da teoria, encontra-se que a densidade hamiltoniana desaparece em todas as soluções. Essa demonstração está no escopo deste trabalho, e será feita no Capítulo 2.

## 1.5 Ação de Einstein-Hilbert

Na Mecânica Clássica é possível obter a equação dinâmica que descreve o movimento dos corpos, as Equações de Lagrange, minimizando a variação de uma quantidade chamada de Ação. Isto também é verdadeiro na Relatividade Geral, só que agora a variáveis não são mais as posições e as velocidades generalizadas, mas sim a métrica, e o funcional da Ação tem uma forma diferente, mostrado na Equação (1.27).

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R , \quad (1.27)$$

$d^4x \sqrt{-g}$  representa um elemento de volume quadridimensional, com  $g$  (sem índices) sendo o determinante da métrica, fato que pode ser demonstrado observando como um quadri-volume se transforma, e  $R$  é o Escalar de Ricci, que tem o mesmo papel da lagrangiana.

Esta ação foi a forma mais simples encontrada que resulta nas ECEs, e foi descoberta por Hilbert logo após publicação da TRG, sendo chamada de Ação de Einstein-Hilbert. Nesta seção será aplicado o princípio variacional na Ação de Einstein-Hilbert para mostrar que são obtidas novamente as Equações de Campo de Einstein.

Deve-se variar a ação com respeito à métrica, e usando a definição do Escalar de Ricci, temos  $R = g^{ab} R_{ab}$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta(g^{ab} R_{ab} \sqrt{-g}) \\ \delta S &= \int d^4x (\delta g^{ab} R_{ab} \sqrt{-g} + \delta R_{ab} g^{ab} \sqrt{-g} + \delta \sqrt{-g} R) . \end{aligned} \quad (1.28)$$

Portanto temos 3 variações que envolvem a métrica:  $\delta g^{ab}$ ,  $\delta R_{ab}$  e  $\delta\sqrt{-g}$ , que serão analisadas separadamente. Para  $\delta\sqrt{-g}$  levando em consideração o seguinte fato, verdadeiro para qualquer matriz quadrada  $M$  com determinante não nulo

$$\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M) .$$

Variando essa identidade, obtém-se

$$\frac{1}{\det M} \delta \det M = \text{Tr}(M^{-1} \delta M).$$

Relacionando este último resultado com a métrica

$$\delta g = g g^{ab} \delta g_{ab}.$$

Agora, variando  $\sqrt{-g}$ , e substituindo o resultado anterior

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \\ \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Nas ECEs o que aparece é  $g_{ab}$  e não  $g^{ab}$ , mas a métrica e a métrica inversa são relacionadas da seguinte forma

$$g^{ab} g_{ab} = \delta_{ab} .$$

Variando este resultado

$$\begin{aligned} \delta(g_{ab} g^{ab}) &= \delta(\delta_{ab}) = 0 \\ \delta g_{ab} g^{ab} &= -g_{ab} \delta g^{ab}. \end{aligned}$$

A Equação (1.29) se torna então

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}.$$

Voltando para a (1.28)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x (\delta g^{ab} R_{ab} \sqrt{-g} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} R + \delta R_{ab} g^{ab} \sqrt{-g}) \\ \delta S &= \int d^4x (R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) \delta g^{ab} + \int d^4x g^{ab} \delta R_{ab} \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Pelo Princípio da Mínima Ação  $\delta S = 0$ , e como  $\delta g^{ab}$  é completamente arbitrário (e desaparece nos extremos), voltamos as ECEs no vácuo, somente se o segundo termo for nulo

$$\int d^4x g^{ab} \delta R_{ab} \sqrt{-g} = 0. \quad (1.31)$$

É isso que tentará se demonstrar. Lembrando a definição do Tensor de Ricci

$$R^c{}_{acb} = \partial_c \Gamma^c{}_{ab} - \partial_b \Gamma^c{}_{ac} + \Gamma^c{}_{cd} \Gamma^d{}_{ab} - \Gamma^c{}_{bd} \Gamma^d{}_{ac} .$$

Variando

$$\delta R_{ab} = \partial_c \delta \Gamma^c{}_{ab} - \partial_b \delta \Gamma^c{}_{ac} + \delta \Gamma^c{}_{cd} \Gamma^d{}_{ab} + \Gamma^c{}_{cd} \delta \Gamma^d{}_{ab} - \delta \Gamma^c{}_{bd} \Gamma^d{}_{ac} - \Gamma^c{}_{bd} \delta \Gamma^d{}_{ac} .$$

Que está na forma da diferença de duas derivadas covariantes

$$\begin{aligned} D_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - D_b(\delta\Gamma_{ac}^c) &= \partial_c\delta\Gamma_{ab}^c + \delta\Gamma_{ab}^d\Gamma_{cd}^c - \delta\Gamma_{bd}^c\Gamma_{ac}^d - \delta\Gamma_{ad}^c\Gamma_{bc}^d \\ &\quad - (\partial_b\delta\Gamma_{ac}^c + \delta\Gamma_{ac}^d\Gamma_{bd}^c - \delta\Gamma_{cd}^c\Gamma_{ab}^d - \delta\Gamma_{ad}^c\Gamma_{bc}^d) \cdot \\ &= \delta R_{ab} \end{aligned}$$

Substituindo na (1.31)

$$\begin{aligned} \int d^4x g^{ab}\delta R_{ab}\sqrt{-g} &= \int d^4x g^{ab}(D_a(\delta\Gamma_{ab}^c) - D_b(\delta\Gamma_{ac}^c))\sqrt{-g} \\ &= \int d^4x D_c(g^{ab}\Gamma_{ab}^c - g^{ac}\Gamma_{ab}^b)\sqrt{-g} \cdot \end{aligned}$$

Analisando o termo entre parênteses, é possível notar que os índices  $a$  e  $b$  cancelam, restando somente  $c$ , resultando em um tensor de *rank* 1, ou seja, um vetor.

Definindo  $(g^{ab}\Gamma_{ab}^c - g^{ac}\Gamma_{ab}^b) \equiv A^c$ , ficamos com a seguinte integral

$$\int_V D_c A^c \sqrt{-g} d^4x \cdot$$

Que é uma integral de volume na forma do Teorema da Divergência, em que é possível transformar uma integral de volume em uma integral de superfície, e como por construção a variação nos extremos (nesse caso a superfície) se anula, a integral se anula, como queríamos mostrar.

Portanto, a Equação (1.30) retorna as Equações de Campo de Einstein no vácuo

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0.$$

Mas, obviamente as equações no vácuo não são a teoria completa, ainda falta o termo correspondente à matéria, o Tensor Energia-Momento. Isso acontece pois só se considerou o campo gravitacional, também é necessário considerar os campos de matéria. Podemos escrever a ação total como

$$S = \frac{1}{16\pi G}S_{EH} + S_M,$$

em que  $S_{EH}$  é a ação de Einstein-Hilbert (Equação 1.27), e  $S_M$  é a ação da matéria que queremos descrever.

Variando a métrica inteira, e incorporando o resultado anterior para  $S_{EH}$ , temos

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\delta S_{EH} + \delta S_M = \frac{1}{16\pi G}(R_{ab} - g_{ab}R)\delta g^{ab}\sqrt{-g} + \delta S_M \cdot$$

Pelo princípio da mínima ação, novamente  $\delta S = 0$ , e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi G}(R_{ab} - g_{ab}R)\delta g^{ab}\sqrt{-g} &= -\delta S_M \\ R_{ab} - g_{ab}R &= -16\pi G \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \end{aligned}$$

Definindo

$$T_{ab} = 2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (1.32)$$

Voltamos à forma geral das ECEs

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -8\pi G T_{ab} \cdot$$



A definição do Tensor Energia-Momento para satisfazer as ECEs parece imposta, e a princípio é, mas há justificativas. Primeiramente a Equação (1.32) é um tensor simétrico de *rank* 2 que é conservado e tem dimensões de densidade de energia, o que satisfaz o que esperávamos do Tensor Energia-Momento mostrado na Seção 1.3.

Além disso, é possível fazer uma demonstração formal, mas isso leva em consideração a formulação lagrangiana geral de Teorias Clássicas de Campo utilizando o Teorema de Noether [19], um tratamento completo está fora do escopo deste trabalho.

# Formulação Canônica

---

O formalismo hamiltoniano da Mecânica Clássica [19] nos fornece um conjunto de equações que são equivalentes as formulações lagrangiana e newtoniana da mecânica. A grande vantagem está no fato de que o formalismo fornece um método geral que permite sondar aspectos estruturais da mecânica, e serve de base para outros desenvolvimentos na Física, como a Mecânica Quântica e a Mecânica Estatística.

Na formulação lagrangiana temos uma função que depende das posições e velocidades generalizadas,  $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ , que em sistemas elementares não depende explicitamente do tempo e corresponde a diferença entre energia cinética e potencial. Podemos encontrar uma função que dependa das coordenadas e dos momentos realizando a chamada Transformação de Legendre [19], e para isso define-se os momentos canônicos conjugados

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Que nos dá  $p_i$  em função de  $q_i$  e  $\dot{q}_i$ . A hamiltoniana é então definida como

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L.$$

Sendo a dinâmica do sistema dada pelas Equações de Hamilton, em que o espaço definido por  $q_i$  e  $p_i$  é o chamado espaço de fase

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Utilizando os Parênteses de Poisson (uma operação entre duas funções do espaço de fase)

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Temos

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

e as Equações de Hamilton podem ser escritas da seguinte forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}.$$

A solução dessas equações é um “fluxo” (ou uma curva) no espaço de fase, definida por  $q_i(t)$  e  $p_i(t)$  como funções de um parâmetro  $t$  dadas condições iniciais  $q_i(0)$  e  $p_i(0)$ , e é este comportamento que busca-se resgatar ao criar uma formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral (que a princípio é difícil usando as ECE).

Além disso, a formulação hamiltoniana da Mecânica Clássica está intimamente ligada com a Mecânica Quântica. As Equações de Hamilton escritas com os Parênteses de Poisson só precisam ter suas variáveis canônicas promovidas à operadores quânticos (junto disso vem as relações de comutação).

A formulação hamiltoniana resumida aqui não é aplicável diretamente à Relatividade Geral (nem a outras teorias de campo), pois para isso ela deve incorporar campos e vínculos de forma geral.

Nas próximas seções será construída uma teoria Hamiltoniana que consiga lidar com vínculos de forma geral e com campos, e depois se aplicará essa nova teoria para o campo gravitacional, encontrando a hamiltoniana da Relatividade Geral.

## 2.1 Sistemas Hamiltonianos Vinculados

Na Física é comum utilizarmos mais variáveis do que o necessário para descrever um sistema, são os chamados vínculos. Por exemplo, um pêndulo tem apenas 1 grau de liberdade, mas se o descrevermos utilizando a coordenadas cartesianas do plano haverá um vínculo  $x + y = l$ , com  $l$  sendo o comprimento.

Existem vários motivos para descrever uma teoria com mais variáveis que o necessário, e normalmente isso se dá pois construindo uma teoria dinâmica do início é difícil saber quais são realmente os verdadeiros graus de liberdade da teoria em questão. Além disso, vínculos servem para limitar como um sistema evolui no tempo, restringindo algumas grandezas físicas (como por exemplo a conservação de carga), no caso da formulação hamiltoniana, vínculos limitam a região do espaço de fase acessível pelo sistema.

Um ótimo exemplo disso é o eletromagnetismo clássico, no vácuo o campo eletromagnético tem 2 graus de liberdade (as duas possíveis polarizações de uma onda eletromagnética), mas utilizamos 6 variáveis para descrevê-lo, que são os valores do campo elétrico e do campo magnético. De fato, duas das 4 Equações de Maxwell não carregam nenhuma informação dinâmica, mas são vínculos que restringem como o sistema pode evoluir (são a Lei de Gauss e a Lei de Gauss para o Magnetismo). Comportamento semelhante é encontrado na Relatividade Geral.

### 2.1.1 Discussão do Caso Geral

Vínculos são equações envolvendo as variáveis do espaço de fase que são válidas em todos os instantes da evolução do sistema. Especificamente um vínculo pode ter a forma  $\phi(q_i, p_i) = 0$ , nesse caso ele representa também uma grandeza conservada.

De forma geral, essas relações são tratadas com o método dos Multiplicadores de Lagrange [20], somando à Hamiltoniana cada um dos vínculos junto de seus multiplicadores de Lagrange  $\lambda_i$ , a chamada Hamiltoniana Total

$$H_T = H + \sum_{i=1}^M \lambda_i \phi_i.$$

A presença dos multiplicadores de Lagrange na hamiltoniana total indica que as equações de movimento não serão mais unicamente definidas pelas condições iniciais  $q_i(0)$  e  $p_i(0)$ , mas dependerá também dos  $M$  vínculos do sistema.

Normalmente não se conhece os vínculos, tem-se somente a lagrangiana, e encontrar esses vínculos de forma geral não é nada fácil. Paul Dirac desenvolveu um procedimento completo [3] para analisar um sistema e separar todos seus vínculos, eles estão divididos entre vínculos primários e secundários que podem ser de primeira ou segunda classe ( $\phi(q_i, p_i) = 0$  é um vínculo primário).

Aqui analisemos 2 casos específicos de sistemas vinculados que serão úteis para descrição da Relatividade Geral, sem evocar a construção completa de Dirac.

## 2.1.2 O Relógio Quebrado

Imagine um relógio que esteja sempre adiantado ou atrasado de forma consistente e não linear que mede um tempo  $T$ , de forma que o tempo correto seja descrito por uma função  $t(T)$ . Queremos estudar Mecânica Clássica com esse relógio defeituoso.

O primeiro passo é construir a ação

$$S = \int dT L \left( x, \frac{dx}{dT} \right) = \int dt \dot{T} L \left( x, \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dT} \right) = \int dt \dot{T} L \left( x, \frac{dx}{dt} \frac{1}{\dot{T}} \right).$$

Que para uma partícula livre fica

$$S = \int dt \frac{m x^2}{2 \dot{T}}.$$

Essa ação é invariante sob reparametrização, fazer a troca  $t \rightarrow f(t)$  equivaleria trocar nosso relógio quebrado por outro relógio quebrado. As variáveis do sistema agora são  $x$  e  $T$ , e para encontrar as equações de movimento do sistema basta utilizar as Equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\dot{T}} \right) &= 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{\dot{T}^2} \right). \end{aligned}$$

As equações resultantes parecem mais complicadas do que a equação de uma partícula livre com relógios normais, e vão depender do quão ruim é o relógio quebrado, em que a dinâmica só será definida após escolher-se um relógio. Se  $T = t$  voltamos para o caso usual, com  $\ddot{x} = 0$ .

Passando para a formulação hamiltoniana, definindo os momentos canonicamente conjugados de  $x$  e  $T$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \frac{\dot{x}}{\dot{T}} \qquad p_T = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} = -m \frac{\dot{x}^2}{2\dot{T}^2}.$$

Analisando os momentos encontramos um vínculo

$$\phi(x, T) = p_T + \frac{p_x^2}{2m} = 0.$$

Agora, construindo a Hamiltoniana

$$H = p_T \dot{T} + p_x \dot{x} - L = p_T \dot{T} + p_x \dot{x} - \frac{m \dot{x}^2}{2 \dot{T}}.$$

Substituindo os momentos, encontramos  $H = 0$ , e sendo a hamiltoniana a geradora de evolução temporal, a conclusão é que o sistema não evolui no tempo. Esse resultado estranho é facilmente contornável, o vínculo  $\phi(x, T)$  representa uma grandeza conservada e grandezas conservadas indicam uma simetria, e o mesmo “fluxo” no espaço de fase dado pela hamiltoniana pode ser escrito em termos da quantidade conservada  $O$

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \{q_i, O\} \qquad \frac{dp_i}{d\lambda} = \{p_i, O\}$$

A única dinâmica presente no sistema não é temporal, mas sim fruto de uma simetria. No nosso caso a hamiltoniana é 0, então a hamiltoniana total é dada pela combinação

linear dos vínculos com os multiplicadores de Lagrange,  $H_T = \lambda(t)\phi(x, p_x, T, p_T)$ , cujas equações dinâmicas serão

$$\begin{aligned} \dot{x} = \{x, H_T\} &= \lambda \frac{p_x}{m} & \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{T} = \{T, H_T\} &= 0 & \dot{p}_T &= 0. \end{aligned}$$

Se  $\lambda = \text{cte}$  voltamos ao caso newtoniano usual.

Inserir um relógio quebrado na Mecânica Clássica parece sem sentido, toda essa confusão é evitada traduzindo a leitura de um relógio para o outro, basicamente fazendo o caminho reverso até as leis de Newton. Mas na Relatividade Geral não é possível des-reparametrizar as equações, relógios arbitrários estão embutidos na teoria 2.1.2.1.

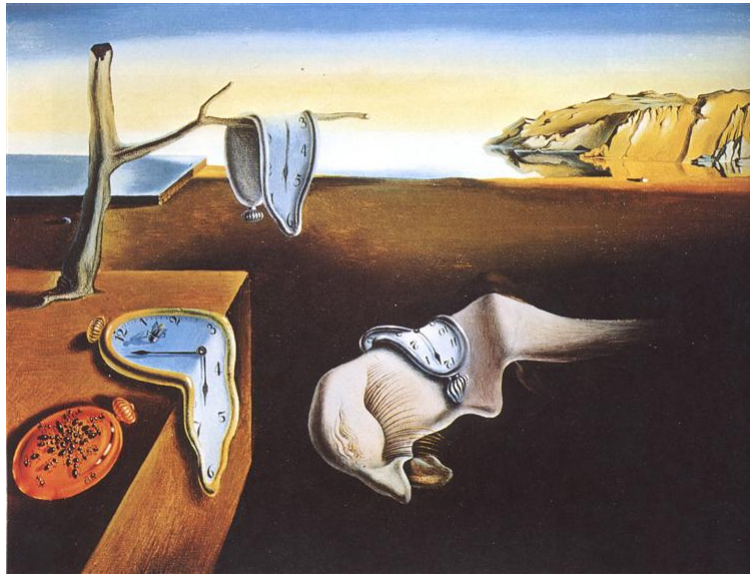


Figura 2.1.2.1: “A Persistência da Memória” por Salvador Dalí. A introdução de relógios arbitrários na teoria clássica já afeta a noção pré-concebida de espaço e tempo, sendo mudada completamente pela relatividade, tema presente na obra surrealista.

A descrição feita aqui trata dos chamados sistemas invariantes sobre reparametrização [21], grupo do qual a Relatividade Geral faz parte.

### 2.1.3 Campos

Antes de partir para o campo gravitacional tomemos um exemplo mais simples, o do Campo Eletromagnético. Não cabe aqui desenvolver a teoria covariante do eletromagnetismo por completo [22], mas tratando os elementos de forma abstrata podemos exemplificar os processos que depois serão levados para o campo gravitacional.

Os elementos que descrevem o campo eletromagnético na formulação covariante são o Tensor Eletromagnético  $F_{ab}$  e o quadri-potencial  $A^a$ . A forma de ambos é [22]

$$A^a = \left( \frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right) \quad F_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para os nossos propósitos  $F_{ab}$  simplesmente combina os campos elétrico e magnético em um único elemento, e o quadri-potencial faz o mesmo para o potencial elétrico e

potencial vetor. Encontramos  $F_{ab}$  aplicando o quadri-gradiente em  $A^a$ , o que vem da seguinte relação

$$F_{ab} = \partial_b A^a - \partial_a A^b \quad (2.1)$$

Ou seja, não há derivadas temporais de  $A_0$ , o que indica que o valor não é uma das variáveis, mas sim um vínculo do sistema. Agora, as equações dinâmicas do Eletromagnetismo também podem ser obtidas a partir da variação de uma ação, que é dada por [23]

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right). \quad (2.2)$$

Variar essa ação em relação à  $A^a$  resulta nas Equações de Maxwell no vácuo [20]

$$\partial_b F^{ab} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \partial_i F^{0i} = 0 & \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = 0 & \longrightarrow \quad \frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \end{cases}$$

Quando passamos para Campos precisamos definir uma densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  e uma densidade hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , escritas como

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad \quad H = \int d^3x \mathcal{H}.$$

A hamiltoniana e a lagrangiana agora são descritas por unidade de volume. Outra mudança que deve ser feita é na representação dos momentos canonicamente conjugados, no caso do campo eletromagnético a coordenada generalizada será dada por  $A_a$ , então definimos os momentos para campos eletromagnéticos como

$$\pi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_a} \quad (2.3)$$

A densidade lagrangiana é o funcional da ação eletromagnética (2.2)  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}$  fazendo o cálculo explícito com (2.1) observa-se que, quando  $a = b$ ,  $F_{ab}$  é nulo, portanto,

$$\pi^a = F^{a0} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \pi^0 = F^{00} = 0 \\ \pi^i = F^{i0} = E^i = \partial_i A^0 - \partial_0 A^i \end{cases}$$

A hamiltoniana é portanto, utilizando essas relações do momento

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^a \dot{A}_a - \mathcal{L} \\ \mathcal{H} &= \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{4} F_{ab} - F^{ab} \\ \mathcal{H} &= \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{2} F_{i0} F^{i0} + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \partial_i A_0 \pi^i \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para que teoria seja consistente, esta hamiltoniana deve retornar novamente as Equações de Maxwell. Tomemos as Equações de Hamilton para encontrar a dinâmica do sistema

$$\dot{A}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^i} = \pi_i + \partial_i A_0 \quad \rightarrow \quad \pi_i = F_{0i} \quad (2.5a)$$

$$\dot{\pi}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_i} + \partial_j \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_j A_i)} \right) = -\partial_j F^{ij} \quad \rightarrow \quad \partial_0 F^{i0} + \partial_j F^{ij} = \partial_a F^{ia} = 0 \quad (2.5b)$$

$$\dot{A}_0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^0} = 0 \quad (2.5c)$$

$$\dot{\pi}^0 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_0} + \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_0)} \right) = \partial_j \pi^j = \partial_j F^{0j} \quad (2.5d)$$

Em (2.5b) e (2.5d) foi usado o conceito da derivada funcional. Analisando essas expressões é possível notar o seguinte: (2.5d) nos devolve  $\partial_j F^{oj}$ , que deve ser 0 pelas equações de Maxwell, mesmo que nenhuma informação sobre  $\pi^0$  seja dada na hamiltoniana, o que permite encontrar o primeiro vínculo

$$\partial_i \pi^i = 0$$

Também, (2.5c) restringe completamente o potencial elétrico, o que não é fisicamente razoável. Para resolver este problema notamos que a primeira expressão em 2.3 é um vínculo que se conserva no tempo graças ao último vínculo,

$$\pi^0 = 0$$

que possui seu multiplicador de lagrange que deve ser adicionado a densidade hamiltoniana para se obter a densidade hamiltoniana total

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + A_0 \partial_i \pi^i + \lambda \pi^0.$$

E com isso (2.5c) passa a ser

$$\dot{A}_0 = \lambda.$$

Munidos com a teoria hamiltoniana Clássica para campos e para sistemas invariantes sob reparametrização, resta aplicá-la para o campo gravitacional descrito pela Relatividade Geral, mas antes, precisamos definir novas variáveis canônicas.

## 2.2 Decomposição 3+1

A Ação de Einstein-Hilbert apresentada na Seção 1.5 toma como densidade lagrangiana  $\sqrt{-g}R$ , nela não há variáveis canônicas claras pois não fica bem definido sob qual parâmetro as variáveis evoluem, dificultando uma formulação hamiltoniana. Para resolver esse problema devemos definir novas variáveis canônicas, para construir um funcional da ação que nos devolva equações dinâmicas na forma das Equações de Hamilton, e para isso existem diversas abordagens.

A abordagem seguida aqui é a desenvolvida primeiramente por Arnowitt, Deser e Misner, que é a base da Relatividade Numérica e foi a utilizada na primeira tentativa de quantização do campo gravitacional [24]. Existem outras abordagens, normalmente desenvolvimentos na gravitação quântica [25] que servem à outros propósitos.

Na formulação ADM elegemos a coordenada temporal para descrever a evolução das coordenadas espaciais, isto é feito definindo novas variáveis com significado geométrico muito claro dentro da Relatividade Geral. Na TRG espaço e tempo são tratados no mesmo nível, e na formulação hamiltoniana isso é quebrado momentaneamente, é a chamada Decomposição 3+1, em que a métrica decomposta guarda todas as informações da curvatura do espaço-tempo.

## 2.2.1 Foliação do Espaço-Tempo

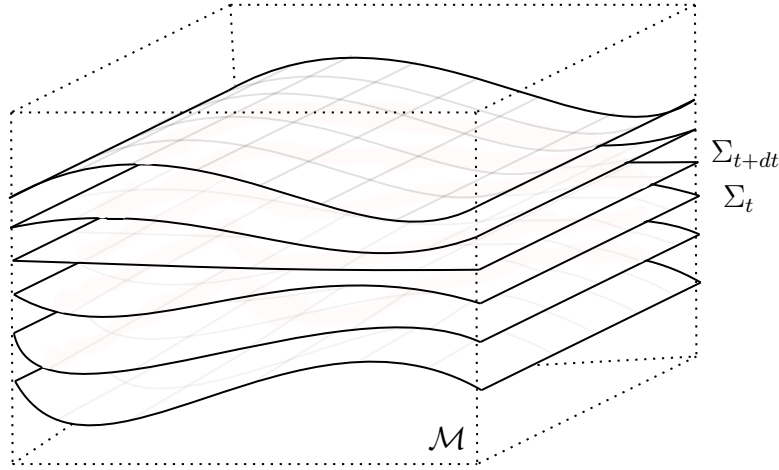


Figura 2.2.1.1: Imagem representando um espaço-tempo  $\mathcal{M}$  foliado em hipersuperfícies  $\Sigma$ , nesse caso a variedade está representada em 3D e as hipersuperfícies em 2D. Fonte: o autor.

A maneira como os pesquisadores Arnowitt, Deser e Misner chegaram às novas variáveis canônicas foi por meio da chamada foliação do espaço-tempo, as variáveis espaciais são parametrizadas em termos de cada  $t$  constante, de forma que para cada  $t$  haja uma “hipersuperfície” que represente a configuração do espaço.

Anteriormente neste trabalho se referiu aos “espaços Riemannianos”, mas agora para evitar confusão se usará o termo técnico “variedade”, representada por  $\mathcal{M}$ . Então o espaço-tempo é uma variedade quadri-dimensional, e neste contexto, a variedade  $\mathcal{M}$  pode ser foliada em diversas hipersuperfícies  $\Sigma$  que capturam a configuração do espaço em um dado  $t$  constante (Figura 2.2.1.1).

De forma que as coordenadas da variedade podem ser obtidas pelas coordenadas da hipersuperfície

$$X^a = X^a(x^i, t)$$

Com os vetores tangentes a parte temporal  $\partial_i X^a$ , definimos um vetor unitário normal à parte espacial,  $n^a$ , ou seja

$$\begin{aligned} g_{ab} \partial_i X^a n^b &= 0 && \text{(componente espacial é nula)} \\ g_{ab} n^a n^b &= 1 && \text{(componente temporal é unitária)} \end{aligned}$$

A distância infinitesimal entre dois pontos com a mesma coordenada  $x^i$  em duas hipersuperfície infinitesimalmente próximas  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t+dt}$  é dada por

$$N^a = \dot{X}^a = \frac{\partial X^a(x^i, t)}{\partial t}$$

Que pode ser decomposta na base  $\{n^a, \partial_i X^a\}$

$$N^a = N n^a + N^i \partial_i X^a \tag{2.6}$$

$N$  e  $N^a$  são chamadas respectivamente de função *lapse* e função *shift*, no inglês *lapse* diz respeito à um deslocamento no tempo, e *shift* no espaço. Todas essas variáveis tem um significado geométrico intuitivo, exposto na Figura (2.2.1.2).



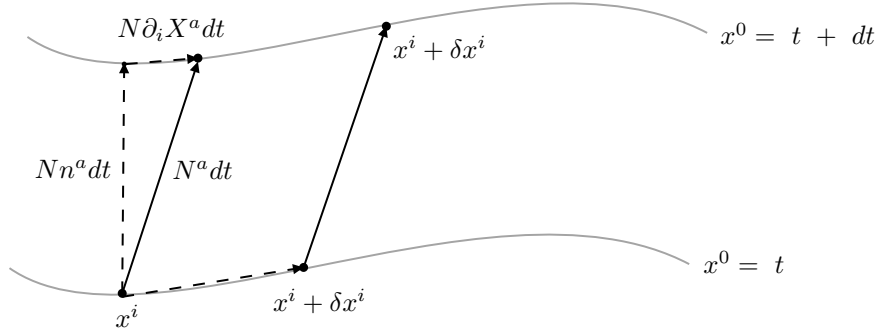


Figura 2.2.1.2: Ilustração de duas hipersuperfícies muito próximas,  $N^a$  conecta dois pontos com a mesma coordenada  $x^i$ . Fonte: adaptada de Neto [20].

Para determinar a evolução dinâmica do campo é necessário descrever como as suas componentes na direção  $\partial_i X^a$  e  $n^a$  evoluem. Ou seja, decompor  $g_{ab}$  na parte tangente à hipersuperfície e na parte paralela. Logo, usando a Equação (2.6)

$$\begin{aligned} g_{ij} &= h_{ij} = g_{ab} \partial_i X^a \partial_j X^b \\ g_{0i} &= g_{ab} N^a \partial_i X^b = h_{ij} N^j = N_j \\ g_{00} &= g_{ab} N^a N^b = -N^2 + N^i N^j h_{ij} = -N^2 + N_i \end{aligned}$$

Em que  $h_{ij}$  é a métrica intrínseca da hipersuperfície, chamada de métrica induzida. A métrica em termos de  $N^a$ ,  $N$  e  $h_{ij}$  é então

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} -N^2 + N^i N_i & N_i \\ N_j & h_{ij} \end{bmatrix} \quad g^{ab} = \begin{bmatrix} -1/N^2 & N_i/N^2 \\ N^j/N^2 & h_{ij} - \frac{N^i N_j}{N^2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Curvatura Extrinseca

Definimos a métrica em termos das novas variáveis, mas isso não é o suficiente. Isso se dá pois ainda é necessário descrever como essas componentes evoluem em relação à variedade quadridimensional que representam, ou seja, como elas se deformam de  $t$  para  $t + dt$ . Isto é, a curvatura extrínseca da hipersuperfície em relação à variedade que a circunda.

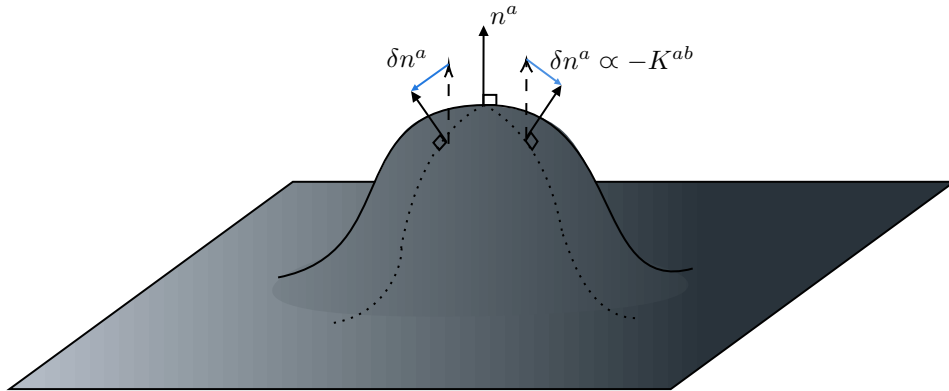


Figura 2.2.2.1: Definição da curvatura extrínseca em um superfície 2D. Fonte: adaptado de Baumgarte [26].

Definimos a curvatura extrínseca  $K_{ab}$  por meio do vetor normal  $n^a$ , notando como ele varia entre um ponto e outro muito próximos na hipersuperfície (Figura 2.2.2.1). O que ocorre realmente é um transporte paralelo caracterizados por uma derivada covariante, mas nesse caso é uma derivada covariante na hipersuperfície, e para escrevê-la em termos da derivada covariante usual basta projetar a  $D_a n^a$  na métrica  $h_{ij}$ . Para essa operação definimos um operador chamado projetor

$$\perp_b^a = \delta_b^a + n^a n_b. \quad (2.8)$$

O que ele faz é projetar as componentes de  $n^a$  na hipersuperfície, utilizando a métrica com um índice levantado  $g_b^a = \delta_b^a$ .

Portanto, a projeção da derivada covariante de  $n^a$  na hipersuperfície é definida como

$$K_{ab} = \perp_a^c \perp_b^d D_c n_d.$$

Para poder ler suas componentes escrevamos a Equação (2.6) em termos de  $n^a$

$$n^a = \frac{N^a}{N} - \frac{N^i \partial_i X^a}{N}.$$

Que agora pode ser decomposto na base  $\{N^a, \partial_i X^a\}$ , baixando o índice com  $n_a = g_{ab} n^b$

$$n^a = \left( \frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right). \quad (2.9)$$

$$n_a = (-N, 0, 0, 0) \quad (2.10)$$

Com essa relação, calculando os  $n^a$  dos projetores (2.8), e substituindo os projetores em  $K_{ab}$  chegamos nas componentes da curvatura extrínseca

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} D_i n_j$$

$$K_{00} = N^i N^j K_{ij}$$

$$K_{0i} = N^j K_{ij}$$

Estamos interessados nas componentes espaciais da curvatura que contém a derivada covariante, e lembrando da definição de derivada covariante, utilizando (2.10)

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} \partial_i n_j + \Gamma_{ij}^a n_a = -N \Gamma_{ij}^0$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{K_{ij}}{N}. \quad (2.11)$$

Utilizando a definição dos símbolos de Christoffel e a nova métrica (2.7)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} g^{0b} (\partial_j g_{bi} + \partial_i g_{bj} + \partial_b g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_j g_{0i} + \partial_i g_{0j} - \partial_0 g_{ij}) + \frac{1}{2} g^{0k} (\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{N^2} \right) (\partial_j N_i + \partial_i N_j - \dot{h}_{ij}) + \frac{1}{2} \frac{N^k}{N^2} (\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij}) \\ &= \frac{1}{2N^2} [\dot{h}_{ij} - \partial_j N_i - \partial_i N_j + N_k h^{kl} (\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij})]. \end{aligned}$$

Podemos definir uma derivada covariante intrínseca à hipersuperfície, que diz respeito à métrica  $h_{ij}$

$$D_j N_i = \partial_j N_i - {}^3\Gamma_{ij}^k N_k$$

$${}^3\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{lk} (\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} + \partial_k h_{ij})$$

sendo  ${}^3\Gamma_{ij}^k$  a conexão intrínseca da hipersuperfície, que satisfaz  $\partial_l h_{ij} = 0$ , e juntando os dois resultados podemos escrever

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2N^2} [\dot{h}_{ij} - D_j N_i].$$

Obtendo, finalmente a curvatura extrínseca pela Equação (2.11)

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N} [\dot{h}_{ij} - D_j N_i]. \quad (2.12)$$

Na versão contravariante

$$K^{lm} = h^{li} h^{mj} K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{h}^{lm} + D_m N^l). \quad (2.13)$$

Em que foi usada a relação  $\dot{h}_{li} h^{im} = -h_{lm} \dot{h}^{im}$  que vem de  $h_{li} h^{im} = \delta_a^b$  (como foi feito para a métrica usual na ação de Einstein-Hilbert).

Com  $K_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $N^i$  e  $N$  podemos reescrever o funcional da Ação de Einstein-Hilbert, sendo essas as novas variáveis canônicas.

## 2.3 Ação ADM

O próximo passo é substituir  $g_{ab}$  escrito em termos das novas variáveis  $N$ ,  $N^i$  e  $h_{ij}$  na Ação de Einstein-Hilbert que repito aqui

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R.$$

Isso implica em encontrar o Escalar de Ricci  $R$  e  $\sqrt{-g}$ .

A partir daqui as seções terão um bocado de contas que tomariam páginas se fossem abertas por completo, mas a matemática envolvida são substituições nas definições e propriedades de tensores. Isso se dá pois a métrica  $g_{ab}$  tem muitas componentes.

### 2.3.1 Densidade Lagrangiana

Iniciando pelo Escalar de Ricci, computa-se primeiramente os símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2} g^{dc} (\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab})$$

Utilizando 2.7 e 2.12

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{N^i \partial_i N}{N} - \frac{N^i N^j}{N} K_{ij} \quad \Gamma_{0i}^0 = \frac{\partial_i}{N} - \frac{N^j}{N} K_{ij} \quad \Gamma_{ij}^0 = -\frac{K_{ij}}{N}$$

$$\Gamma_{00}^i = N h^{ij} \frac{N_j}{N} + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_j (N^2 - N_m N^m) - \frac{\partial_j N}{N} N^i N^j + \frac{N^i N^j N^k}{N} K_{jk}$$

$$\Gamma_{j0}^i = N \left( -K_i^j + D_j \frac{N^i}{N} + \frac{N^i N^m}{N^2} K_{jm} \right) \quad \Gamma_{jk}^i = {}^3\Gamma_{jk}^i + \frac{N^i}{N} K_{jk}$$

As expressões acima podem ser usadas para encontrar o Tensor de Ricci. Lembrando

$$\begin{aligned} R^a_{bcd} &= \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ce} \Gamma^e_{bd} - \Gamma^a_{de} \Gamma^e_{bc} \\ R_{ab} &= R^c_{acb} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R_{00} &= N h^{ij} \dot{K}_{ij} + N \partial^i D_j N - 2N D_j N^i K_i^j - 2N N^i D_j K_i^j + N N^i \partial K + N^2 K^{ij} K_{ij} \\ &\quad + N^i N^{j3} R_{ij} + N^i N^j K_{ij} K - 2N^i N^j K_i^k K_{kj} - \frac{N^j N^i}{N} \dot{K}_{ij} - N^j N^i D_j \partial_i N \\ &\quad + 2 \frac{N^j N^i}{N} D_i N^k K_{kj} + \frac{N^i N^j N^k}{N} D_j K_{ij} \\ R_{0i} &= -\frac{N^j}{N} \dot{K}_{ij} - \frac{N^j}{N} \partial_i D_j N + K_{kj} \frac{N^j}{N} D_i N^k + K_{ki} \frac{N^j}{N} D_j N^k - 2N^j K_j^k K_{ki} \\ &\quad - N D_j K_i^j + N \partial_i K + N^{j3} R_{ji} + N^j K_{ji} K + \frac{N^j N^k}{N} D_j K_{ki} \\ R_{ij} &= \frac{1}{N} (-\dot{K}_{ij} - \partial_i D_j N + D_i N^k K_{kj} + D_j N^k K_{ik}) - 2K_i^k K_{kj} + {}^3 R_{ij} + \frac{N^k}{N} D_k K_{ij} + K K_{ij} \end{aligned}$$

em que,  $K = h^{ij} K_{ij}$ ,  $D_k h^{ij} = 0$  e  ${}^3 R_{ij}$  é o tensor de Ricci intrínseco à hipersuperfície construído com  ${}^3 \Gamma_{ij}^k$ . O lado direito do tensor de Ricci construído acima possui somente termos definidos com relação às hipersuperfícies tridimensionais.

Contraíndo o Tensor de Ricci encontramos o Escalar de Ricci

$$R = \frac{1}{N} (-2\dot{K} - 2\partial_j D_i N + 2N^i \partial_i K) + K_{ij} K^{ij} + K^2 + {}^3 R. \quad (2.14)$$

foi utilizada a identidade decorrente de (2.13)

$$h^{ij} \dot{K}_{ij} = (h^{ij} K_{ij}) - K_{ij} \dot{h}^{ij} = \dot{K} - 2N K^{ij} K_{ij} + 2D_j N^i K_{ij}.$$

Da métrica ADM (2.7) lemos diretamente o determinante

$$\sqrt{-g} = N h^{1/2}$$

Será útil calcular a variação do determinante da métrica espacial assim como foi feito para métrica usual no caso da Ação de Einstein-Hilbert

$$\delta h^{1/2} = -\frac{1}{2} h^{1/2} h_{ij} \delta h^{ij} = \frac{1}{2} h^{1/2} h^{ij} \delta h_{ij}$$

Segue que

$$2\dot{h}^{1/2} = h^{1/2} h^{ij} \dot{h}_{ij} = -2N h^{1/2} K + 2h^{1/2} D_i N^i. \quad (2.15)$$

Com todo esse material agora é possível escrever explicitamente a densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert em termos das novas variáveis

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sqrt{-g} R &= N h^{1/2} R = -2h^{1/2} \dot{K} - 2h^{1/2} \partial^i D_i N + 2h^{1/2} N^i \partial_i K \\ &\quad + h^{1/2} N (K^2 + K_{ij} K^{ij} + {}^3 R) - 2\dot{h}^{1/2} K - 2N h^{1/2} K^2 + 2h^{1/2} D_i N^i K \\ &= N h^{1/2} (-K^2 + K_{ij} K^{ij} + {}^3 R) - 2(h^{1/2} K) + 2D_i (h^{1/2} h^{ji} \partial_j N) \end{aligned}$$

E, finalmente, substituindo na Ação de Einstein-Hilbert, obtemos

$$S = \int dt d^3 x N h^{1/2} (-K^2 + K_{ij} K^{ij} + {}^3 R) - \int dt d^3 x 2(h^{1/2} K) + \int dt d^3 x 2D_i (h^{1/2} h^{ji} \partial_j N).$$

As duas últimas parcelas são termos de superfície, e podem ser ignorados como aconteceu na dedução da Ação de Einstein-Hilbert usual [23]. A Ação ADM é portanto

$$S = \int dt d^3x N h^{1/2} (-K^2 + K_{ij} K^{ij} + {}^3R). \quad (2.16)$$

É interessante notar que nessa expressão não aparecem derivadas temporais do vetor *shift* ou da função *lapse*  $N^i$  e  $N$ , o que indica que elas não tem papel dinâmico na ação, e será mostrado mais a frente que na verdade prestam o papel de multiplicadores de Lagrange.

A ação depende de  $\dot{h}_{ij}$  somente por meio de  $K_{ij}$ , e a derivada temporal da métrica portanto aparece na parte  $K_{ij} K^{ij} - K^2$ , que pode ser considerada a parte cinética da ação, sendo  $h_{ij}$  responsável pela dinâmica da teoria, enquanto  ${}^3R$  presta o papel de um potencial.

### 2.3.2 Equações de Movimento (por $N$ , $N_i$ e $h_{ij}$ )

Para encontrar as Equações de movimento da Relatividade Geral variamos a ação em termos de  $h_{ij}$ ,  $N^i$  e  $N$ , que são as novas componentes da métrica  $g_{ab}$ .

Começando por  $N$ , o princípio da mínima ação escrito com derivadas funcionais é

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{L}}{dN} - \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{N}} \right) - D_i \left( \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial_i N)} \right) = \frac{d\mathcal{L}}{dN} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{ij}} \frac{\partial K_{ij}}{\partial N} = 0. \quad (2.17)$$

Aqui utilizou-se a dependência implícita de  $N$  em  $K_{ij}$ . Para calcular a variação da densidade lagrangiana em relação à  $K_{ij}$  podemos baixar os índices da métrica extrínseca contravariante  $K^{lm}$  (2.13), para contrair e encontrar o traço  $K^2$  (como se faz com o Escalar de Ricci), utilizando a métrica espacial inversa  $h^{ij}$  para colocar na densidade lagrangiana obtém-se uma nova representação

$$\mathcal{L}_K = h^{1/2} N (h^{ki} h^{jl} - h^{ij} h^{kl}) K_{ij} K_{kl}.$$

Voltando em (2.17)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} = \frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial K_{pq}} = h^{1/2} N (h^{ki} h^{jl} - h^{ij} h^{kl}) K_{kl} \frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{pq}} + h^{1/2} N (k^{ij} h^{jl} - h^{ij} h^{kl}) K_{ij} \frac{\partial K_{kl}}{\partial K_{pq}}. \quad (2.18)$$

Fazendo a seguinte definição (que faz com que a curvatura extrínseca e sua inversa façam sentido como inversas)

$$\delta_{ij}^{pq} = \frac{1}{2} (\delta_i^p \delta_j^q + \delta_j^p \delta_i^q) = \frac{\partial K_{ij}}{\partial K_{pq}}.$$

Junto ao fato de que

$$\frac{\partial K_{pq}}{\partial N} = -\frac{1}{N} K_{pq}.$$

Obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} \frac{\partial K_{pq}}{\partial N} = -2h^{1/2} (K^{ij} K_{ji} - K^2).$$

Chegando finalmente à primeira equação de movimento

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{L}}{dN} = \boxed{(-K^2 + K_{ij} K^{ij} - {}^3R) = 0} \quad (2.19)$$

Agora, para encontrar a segunda equação dinâmica, variamos com relação à  $N^i$

$$\frac{\delta S}{\delta N_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\mathcal{L}}{dN_i} - \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{N}_i} \right) - D_j \left( \frac{d\mathcal{L}}{d(D_j N_i)} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad D_j \left( \frac{d\mathcal{L}}{d(D_j N_i)} \right) = 0. \quad (2.20)$$

E fica visível que a ação não possui derivadas de  $N_i$ , que aparecem só com a definição de  $K_{ij}$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d(D_j N_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D_j N_i)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} \frac{\partial K_{pq}}{\partial (D_j N_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} \frac{\partial K_{pq}}{\partial (D_j N_i)}.$$

E essas equações se reduzem à

$$D_j \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} \frac{\partial K_{pq}}{\partial (D_j N_i)} \right) = 0.$$

Usando  $\frac{\partial K_{pq}}{\partial (D_j N_i)} = \frac{1}{N} \delta_{pq}^{ij}$  (ortogonalidade de  $N_i$  com  $K_{pq}$ ), chegamos na segunda equação dinâmica

$$\frac{\partial S}{\partial N_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{2h^{1/2} D_j (K^{ij} - h^{ij} K) = 0}. \quad (2.21)$$

Para obter a última equação dinâmica, que se refere à  $h_{ij}$ , é útil primeiramente definir a variação do símbolo de Christoffel Tridimensional e do Tensor de Ricci tridimensional

$$\begin{aligned} \delta({}^3R_{ij}) &= \delta D_k {}^3\Gamma_{ij}^k - \delta D_j {}^3\Gamma_{ik}^k \\ \delta({}^3\Gamma_{ij}^k) &= \frac{1}{2} h^{kl} (\delta D_j h_{li} + \delta D_i h_{lj} - \delta D_l h_{ij}). \end{aligned}$$

Que torna possível calcular

$$\frac{\delta S}{\delta h_{ij}} = 0$$

Que resulta em

$$\boxed{\dot{K}_{ij} = N({}^3R_{ij} + K K_{ij} - 2K_i^M K_{mj}) - D_j \partial_i N + D_i N_m K_j^m + D_j N_m K_i^m + N^m D_m K_{ij}}. \quad (2.22)$$

É interessante notar que as duas primeiras equações dinâmicas na verdade não carregam nenhuma informação dinâmica, pois não possuem derivadas temporais, são na verdade vínculos que serão explorados na próxima seção.

Este comportamento já podia ser observado nas Equações de Campo de Einstein usuais. Definindo o Tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}.$$

Dada a identidade de Bianchi

$$D_a G^{ab} = 0.$$

Que escrita explicitamente com a definição de derivada covariante é

$$\underbrace{\partial_0 G^{0b}}_{\text{derivadas primeiras de } t} = - \underbrace{(\partial_i G^{ib} + \Gamma_{ad}^b G^{dc} + \Gamma_{ac}^d G^{bd})}_{\text{derivadas segundas de } t}.$$

O lado esquerdo já é acompanhado pela derivada temporal, e o lado direito não, como as ECEs possuem no máximo derivadas segundas da métrica, a componente  $G^{0b}$  do tensor de Einstein só pode ter derivadas primeiras da métrica para que a igualdade seja mantida.

Isso quer dizer que as componentes espaço-tempo e tempo-tempo do Tensor de Einstein não contém informações dinâmicas sobre o sistema, e portanto são vínculos nas condições iniciais, exatamente como as duas primeiras Equações de Maxwell.

As equações encaixotadas nesta seção são equivalente as Equações de Campo de Einstein, e isso pode ser demonstrado em um cálculo laborioso [20], projetando o tensor de Einstein na parte ortogonal e tangencial de uma dada superfície. Agora a parte dinâmica e a parte vinculada da teoria está bem separada devido à decomposição 3+1.

Encontramos a ação em termos das novas variáveis canônicas e as equações de movimento que derivam dela, agora é possível encontrar a hamiltoniana em si.

## 2.4 A Hamiltoniana da Relatividade Geral

O primeiro passo para encontrar uma formulação hamiltoniana a partir de uma lagrangiana é encontrar os momentos canonicamente conjugados para poder realizar a transformada de Legendre. Lembrando da densidade lagrangiana encontrada no capítulo anterior

$$\mathcal{L} = Nh^{1/2}(-K^2 + K_{ij}K + {}^3R)$$

Os momentos serão então

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (2.23a)$$

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_i} = 0 \quad (2.23b)$$

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} \frac{\partial K_{pq}}{\partial \dot{h}_{ij}} = -\frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{pq}} \delta^{ij}_{pq} = -\frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{ij}} \\ &= -h^{1/2}(K^{ij} - h^{ij}K). \end{aligned} \quad (2.23c)$$

Para encontrar (2.23c) utilizou-se (2.12) e (2.18) junto ao fato da densidade lagrangiana depender de  $\dot{h}_{ij}$  implicitamente por intermédio de  $K_{ij}$ . As equações (2.23b) e (2.23a) são do mesmo tipo das que aparecem nos momentos canonicamente conjugados do eletromagnetismo e são tratados de forma semelhante.

A densidade hamiltoniana canônica será dada então por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= P\dot{N} + P_i\dot{N}^i + \pi^{ij}\dot{h}_{ij} \\ &= P\dot{N} + P_i\dot{N}^i + \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - Nh^{1/2}(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R); \end{aligned} \quad (2.24)$$

Notadas a presença de vínculos, nosso objetivo é escrever a hamiltoniana total. Da (2.23c) obtém-se

$$\pi = h_{ij}\pi^{ij} = 2h^{1/2}K \quad \longrightarrow \quad \pi^{ij} - h^{1/2} \left( K^{ij} - \frac{h^{ij}}{2h^{1/2}}\pi \right).$$

Portanto

$$K^{ij} = -h^{-1/2} \left( \pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2} \pi \right) \quad K^{ij} = -h^{-1/2} \left( \pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2} \pi \right). \quad (2.25)$$

Utilizando (2.12) no resultado acima, obtém-se

$$\dot{h}_{ij} = 2Nh^{-1/2} \left( \pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2} \pi \right). \quad (2.26)$$

Substituindo (2.23) e as duas expressões anteriores em (2.24)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 2Nh^{-1/2} \left( \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right) + 2\pi^{ij} D_j N_i \\
&= -Nh^{-1/2} h^{-1} \left[ \left( \pi^{ij} - \frac{h^{ij}}{2} \pi \right) \left( \pi_{ij} - \frac{h_{ij}}{2} \pi \right) - \frac{1}{4} \pi^2 \right] - Nh \frac{1}{2^3} R \\
&= N(G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - h \frac{1}{2^3} R) + 2\pi^{ij} D_j N_i.
\end{aligned}$$

Por comodidade, foi definido um novo tensor

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}).$$

Portanto a hamiltoniana total será

$$\begin{aligned}
H_T &= \int d^3x \mathcal{H}_C + \int d^3x (\lambda P + \lambda^i P_i) \\
&= \int d^3x (N\mathcal{H}_0 + N_i \mathcal{H}^i + \lambda P + \lambda^i P_i). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Ignorando os devidos termos de superfície, em que,

$$\mathcal{H}_0 = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - h \frac{1}{2^3} R \tag{2.28a}$$

$$\mathcal{H}^i = -2D_j \pi^{ij}. \tag{2.28b}$$

A hamiltoniana total passa a ser a geradora de dinâmica no sistema. Usando a definição de parênteses de Poisson, é possível encontrar as combinações não nulas entre  $\{q_i, p_i\}$ , mas agora entre as novas variáveis canônicas. São elas

$$\begin{aligned}
\{N(x^i, t), P(y^i, t)\} &= \delta^{(3)}(x^i - y^i) \\
\{N_i(x^l, t), P^j(y^l, t)\} &= \delta_i^j \delta^{(3)}(x^l - y^l) \\
\{h_{ij}(x^m, t), \pi^{kl}\} &= \delta_{ij}^{kl} \delta^{(3)}(x^m - y^m).
\end{aligned}$$

O que nos permite escrever as derivadas temporais dos momentos, junto ao fato da conservação dos vínculos (2.23b) e (2.23a)

$$\begin{aligned}
\dot{P}(x^i, t) &= \{P(x^i, H_T)\} = \int d^3y \{P(x^i, t), N(y^i, t)\} \mathcal{H}_0(y^i) \\
&= - \int d^3y \delta^{(3)}(x^i - y^i) \mathcal{H}_0(y^i) = -\mathcal{H}_0(x^i) = 0 \\
&\rightarrow \mathcal{H}_0(x^i) = 0 \tag{2.29a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{P}^i(x^i, t) &= \{P^i(x^i, t), H_T\} = \int d^3y P^i(x^i, t), N_j(y^i, t) \mathcal{H}^j(y^i) \\
&= - \int d^3y \delta^{(3)}(x^i - y^i) \delta_j^i \mathcal{H}^j(y^i) = -\mathcal{H}^i(x^i) = 0 \\
&\rightarrow \mathcal{H}^i(x^i) = 0 \tag{2.29b}
\end{aligned}$$

Assim, a conservação dos vínculos em  $P$  e  $P^i$  resulta em

$$\mathcal{H}_C = 0.$$



Este vínculo é o mesmo que aparece no exemplo do relógio quebrado, de teorias invariantes sob reparametrização, mas agora de forma fundamental. Essa situação é semelhante a do eletromagnetismo, lá temos um vínculo primário  $\pi^0 = 0$ , cuja conservação no tempo resulta em um vínculo secundário  $\partial_i \pi^i = 0$ .

É possível demonstrar formalmente que a hamiltoniana total (2.27) é equivalente às ECEs, calculando as suas Equações de Hamilton, que resultam nas Equações Dinâmicas obtidas na última seção com o uso da formulação lagrangiana. Nesse processo também fica claro o significado dos vínculos (2.28a) e (2.28b), eles criam novas relações entre  $\pi^{ij}$  e  $h_{ij}$ .

$\mathcal{H}^i$  é o gerador de transformações infinitesimais de coordenadas espaciais, e como as hipersuperfícies são invariantes sob difeomorfismos, também é um gerador de transformações de gauge.  $\mathcal{H}_0$  por sua vez gera uma translação na direção ortogonal à da superfície, ou seja, ele a carrega por cada  $t = cte$ .

Com isso encontramos as Equações ADM da Relatividade Geral. É interessante também incluir a evolução temporal da métrica espacial obtida na Equação (2.15), apresentadas, por completeza, todas juntas, em relação a forma de como são normalmente chamadas

<p><b>(Vínculo Hamiltoniano)</b>  <math>(-K^2 + K_{ij}K^{ij} - {}^3R) = 0.</math></p> <p><b>(Vínculo de Momento);</b>  <math>2h^{1/2}D_j(K^{ij} - h^{ij}K) = 0.</math></p> <p><b>(Evolução da Curvatura Extrínseca);</b>  <math>\dot{K}_{ij} = N({}^3R_{ij} + KK_{ij} - 2K_i^m K_{mj}) - D_j \partial_i N + D_i N_m K_j^m + D_j N_m K_i^m + N^m D_m K_{ij}.</math></p> <p><b>(Evolução da Métrica Espacial);</b>  <math>2\dot{h}^{1/2} = -2Nh^{1/2}K + 2h^{1/2}D_j N^j.</math></p>
--

Em resumo, dividimos as 10 componentes das Equações de Campo de Einstein, em 4 Equações puramente vinculantes, e 6 equações puramente dinâmicas.

Junto à Hamiltoniana Total, essas equações permitem aplicar a quantização canônica, e também desenvolver problemas de valores iniciais.

# Aplicações

---

O grande objetivo deste trabalho é explorar a formulação hamiltoniana da Relatividade Geral em seus dois contextos de aplicação mais importantes, a Gravidade Quântica e a Relatividade Numérica. Isso se dá pelo fato da formulação canônica

- ser o ponto de partida da Quantização Canônica do Campo Gravitacional;
- permitir a criação de problemas de valores iniciais que podem ser resolvidos por supercomputadores.

Ambos pontos serão explicados nas seções a seguir.

## 3.1 Gravitação Quântica - A Equação de Wheeler-DeWitt

Em um de seus trabalhos seminais [3], Dirac criou seu procedimento para obter a generalização do formalismo hamiltoniano da Mecânica Clássica para envolver vínculos e campos exemplificado no Capítulo 2 deste trabalho. Após a generalização, Dirac criou o método da quantização canônica, levando o formalismo para a Mecânica Quântica, e esse avanço o levou a quantizar o campo eletromagnético criando a eletrodinâmica quântica (QED). O trabalho de Dirac deu início ao que chamamos hoje de Teoria Quântica de Campos, a partir dela descrevemos as forças e partículas fundamentais, culminando no Modelo Padrão de Interações e Partículas, a melhor descrição da natureza em escalas microscópicas que conhecemos.

Na linguagem da Teoria Quântica de Campos conseguimos explicar 3 das 4 forças fundamentais da natureza (nuclear forte, nuclear fraca e eletromagnética), restando a gravidade. O próximo passo lógico seria quantizar a teoria de campo clássica que descreve a gravidade, ou seja, a Teoria da Relatividade Geral, para então se obter uma descrição completa da natureza. Para atingir esse objetivo, precisamos da construção hamiltoniana do campo gravitacional, para então possivelmente aplicarmos a quantização canônica [10, 23].

Uma formulação hamiltoniana da Relatividade Geral deixa a teoria mais próxima da linguagem da Mecânica Quântica, e a primeira forma de atacar o problema é aplicar o método de quantização de Dirac para a hamiltoniana do Campo Gravitacional.

Após muito trabalho, Arnowitt, Deser, e Misner [4] encontraram a Hamiltoniana do Campo Gravitacional, exemplificada nos últimos capítulos, agora “resta” somente quantizá-lo.

### 3.1.1 Quantização Canônica

A quantização canônica é um programa geral para quantizar teorias clássicas de campo, e pode ser sumarizada nos seguintes passos.

1. Promover as variáveis  $p$  e  $q$  para operadores quânticos  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ .
2. Estes operadores e suas funções devem respeitar as relações de comutação da Mecânica Quântica, que pode ser obtida da teoria clássica a partir da seguinte substituição

$$\{A(p, q), B(p, q)\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{A}(\hat{p}, \hat{q}), \hat{B}(\hat{p}, \hat{q})]. \quad (3.1)$$

Com

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

3. A representação que satisfaça ao item anterior terá a evolução dinâmica da sua função de onda dada pela Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_C(\hat{q}, \hat{p})\psi. \quad (3.2)$$

em que  $\hat{H}_C = \hat{H}_T - \lambda_m \hat{\phi}_m$ .

4. Os vínculos do tipo  $\phi_m(p, q) = 0$  tornam-se equações restritivas nas possíveis equações de onda do sistema

$$\phi_m(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0. \quad (3.3)$$

Antes de partir para o campo gravitacional em si, é útil considerar os 2 exemplos dados na Seção 2.1, das teorias invariantes sob reparametrização e do campo eletromagnético.

### 3.1.2 Quantização de Teorias Invariantes sob Reparametrização

O relógio quebrado agora é quântico. Neste caso, utilizando (3.1)

$$\{q^a, \pi_b\} = \delta_b^a \Rightarrow [\hat{q}^a, \hat{\pi}^b] = i\hbar \delta_b^a.$$

Sendo  $q^0 = t$ , com os outros comutadores sendo nulos. Uma representação que obedece a comutação obtida acima é

$$\hat{q}^a = q^a \quad \hat{\pi}_b = \mp i\hbar \frac{\partial}{\partial q^b}.$$

Entretanto, a Equação de Schrödinger não nos dá nenhuma informação sobre  $\psi(q^a, \tau)$ , além do que  $\psi$  não depende explicitamente de  $\tau$ , pois como obtido anteriormente,  $\hat{H}_C = 0$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q^a, \tau)}{\partial \tau} = \hat{H}_C(q^a, p_b, \tau)\psi(q^a, \tau) = 0$$

Aplicando (3.3), no vínculo

$$[\hat{\pi}_0 + H(\hat{q}^i, \hat{p}_j, t)] = 0.$$

Consequentemente, a hamiltoniana em termos de  $t$  é não nula

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, q^i) = H(\hat{q}^i, \hat{p}_j, t)\psi(t, q^i).$$

Aplicando (3.3) no sistema, a Equação de Schrödinger foi obtida novamente. Este exemplo serve para mostrar que a evolução de um sistema quântico pode estar contida em (3.3) e não em (3.1).

### 3.1.3 Quantização do Campo Eletromagnético

Neste caso

$$\{A_a(x), \pi^b(x')\} = \delta_a^b \delta^3(x - x') \Rightarrow [\hat{A}_a(x), \hat{\pi}^b(x')] = i\hbar \delta_a^b \delta^3(x - x').$$

Com os operadores

$$\hat{A}_a(x) = A_a(x) \quad \hat{\pi}^b(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_b(x)}$$

Agora, a hamiltoniana não é nula

$$\hat{H}_c = \int d^3x \left( -\frac{1}{2} \hat{\pi}^i \pi_i + \frac{1}{4} \hat{F}^{ij} \hat{F}_{ij} \right).$$

Portanto, haverá um Equação de Schrödinger governando a função de onda  $\psi(A_a, t)$ , que indica a amplitude da probabilidade de encontrar o campo eletromagnético em uma dada configuração  $A_a(\vec{x}, t)$  em uma hipersuperfície  $t = cte$ .

Agora vamos analisar os vínculos, aplicando (3.3). Primeiramente

$$\hat{\pi}^0 \psi(A_a(x), t) = 0 \Rightarrow -i\hbar \frac{\delta \psi(A_a(x), t)}{\delta A_0} = 0.$$

Que mostra que  $\psi$  não depende de  $A_0$ , como mostrado anteriormente é um mero multiplicador de Lagrange. Para o outro vínculo

$$\partial_j \hat{\pi}^j \psi(A_l(x), t) = 0 \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\delta \psi(A_l(x), t)}{\delta A_j} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Esta última equação traz um interpretação interessante, dada um transformação de gauge infinitesimal (ou seja, que não altera o conteúdo físico da teoria)

$$\bar{A} = A_i(x) + \delta A_i = A_i(x) + \partial_i \Lambda(x).$$

Com  $\Lambda \equiv \vec{\Lambda}$ . O efeito desta transformação na função de onda é, usando (3.4)

$$\begin{aligned} \psi(\bar{A}_l(x), t) &= \psi(A_l(x) + \delta A_l(x), t) \\ &= \psi(A_l(x), t) + \int d^3x \frac{\delta \psi(A_l(x), t)}{\delta A_i(x)} \delta A_i(x) \\ &= \psi(A_l(x), t) + \int d^3x \frac{\delta \psi(A_l(x), t)}{\delta A_i(x)} \partial_i \Lambda(x) \\ &= - \int d^3x \Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \frac{\delta \psi(A_l(x), t)}{\delta A_i(x)} \right] + \psi(A_l(x), t) \\ &= \psi(A_l(x), t) \end{aligned}$$

Portanto, as soluções de (3.4) não dependem de gauge, e portanto a função de onda depende somente nos graus de liberdade verdadeiros da teoria. Da mesma forma que no caso clássico, os vínculos são os geradores de transformações.

### 3.1.4 Quantização do Campo Gravitacional

Na TRG temos

$$\{h_{ij}(x), \pi^{kl}(x')\} = \delta_{ij}^{kl} \delta^3(x - x') \Rightarrow [\hat{h}_{ij}(x), \hat{\pi}^{kl}(x')] = i\hbar \delta_{ij}^{kl} \delta^3(x - x').$$

Com os operadores

$$\hat{h}_{ij}(x) = h_{ij}(x) \quad \hat{\pi}^{ij}(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)}.$$

Mas ainda há outras duas variáveis que a princípio assumiriam o papel de operadores também,  $N$  com  $P$  e  $N^i$  com  $P_j$ . Mas é possível demonstrar que a função de onda não depende delas, pois

$$[N(x), P(x')] = \delta^3(x - x') \quad [N^i(x), P_j(x)] = \delta_j^i \delta^3(x - x').$$

Que teriam as seguintes operadores

$$P(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N(x)} \quad P_i(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta N^i(x)}.$$

Obtendo pelo uso de (3.3) e dos momentos canônicos conjugados da Relatividade Geral (2.23)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \psi}{\delta N}(N, N^i, h_{kl}) &= 0 \\ \frac{\delta \psi}{\delta N^i}(N, N^i, h_{kl}) &= 0 \end{aligned}$$

Que mostra que  $\psi$  é independente de  $N$  e  $N^i$ , sendo esses multiplicadores de Lagrange.

Agora analisando a dependência em  $h_{ij}$  novamente, temos que  $H_c$  na Relatividade Geral é nula, nos mostrando que aplicar a Equação de Schrödinger só nos diz que a função de onda não depende do tempo.

Ainda resta quantizar os vínculos (2.29)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 \psi = 0 &= (\hat{G}_{ijkl} \hat{\pi}^{ij} \pi^{kl} - \hat{h} \frac{1}{2} {}^3\hat{R}) \psi \\ &\rightarrow \hat{G}_{ijkl} \frac{\delta^2 \psi}{\delta h_{ij} + \delta h_{kl}} + \hat{h} \frac{1}{2} {}^3\hat{R} \psi \end{aligned} \quad (3.5)$$

E

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^i \psi = 0 &\rightarrow (\partial_j \hat{\pi}^{ij} + {}^3\hat{\Gamma}_{lm}^k \hat{\pi}_{lm}) = 0 \\ &\rightarrow D_k \left( \frac{\delta \psi}{\delta h_{ij}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

O significado de  $\mathcal{H}_i \psi = 0$  está relacionado diretamente com o obtido classicamente (de gerador de translações puramente espaciais). Dada uma transformação espacial infinitesimal

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} + \delta h_{ij} = h_{ij} + D_j \xi_i + D_i \xi_j$$

Que aplicando na função de onda  $\psi(\bar{h}_{ij})$

$$\begin{aligned}
 \psi(\bar{h}) &= \psi(h_{ij} + \delta h_{ij}) \\
 &= \psi(h_{ij}) + \int d^3x \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \delta h_{ij} \\
 &= \psi(h_{ij}) + \int d^3x \frac{\delta}{\delta h_{ij}} 2D_j \xi_i \\
 &= \psi(h_{ij}) + \int d^3x 2D_j \left( \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \right) \\
 &= \psi(h_{ij}).
 \end{aligned}$$

Tal que, as funções de onda que satisfazem o vínculo, não mudam sob transformações puramente espaciais.

Para (3.5) a história é um pouco mais complicada e merece uma discussão mais cuidadosa, trata-se da Equação de Wheeler-DeWitt, encontrada por John Wheeler e Bryce DeWitt em 1967 [24] na busca por uma teoria quântica da gravidade.

### 3.1.5 Interpretações e Problemas da Equação de Wheeler-DeWitt

A Equação de Wheeler-DeWitt (WDW) (3.5) nos dá um primeiro vislumbre de como se pensar a Quantização da Relatividade Geral, a equação leva em todas suas partes a métrica  $h_{ij}$ , apesar de emaranhada em várias dependências que resultam da forma complicada da própria decomposição 3+1, os ingredientes estão ali.

A métrica espacial  $h_{ij}$ , e sua função de onda  $\psi$ , a chamada “Função de Onda do Universo”, que adiciona a parte probabilística, que tal como foi demonstrado por John Bell [27] em 1964, é parte inerente da natureza da qual não se pode escapar. A WDW nos fornece uma nuvem de diferentes geometrias sobrepostas, assim como podemos imaginar um elétron solto em uma nuvem de diferentes posições.

Wheeler tinha uma visão poética de como deveria ser a gravidade quântica, seria como o oceano, a distância ele parece liso e contínuo, mas de perto é possível observar as ondas quebrando em seus movimentos turbulentos. Assim seria o espaço, em nossa escala ele é liso e plano, mas em escalas menores próximas a de Planck, ele se recorta e borbulha.

Quem deu a chave para Wheeler descrever esse borbulhar do espaço de forma matemática foi um jovem colega, Bryce DeWitt, que havia por acaso encontrado a então recente hamiltoniana da Relatividade Geral e teve a ideia de aplicar os métodos desenvolvidos por Dirac. Debruçaram-se então a escrever a “função de onda do espaço”, que determinaria a probabilidade de se observar um espaço-curvo, ou então outro. O resultado foi o que Wheeler chamava de “Equação de DeWitt”, e o que DeWitt chamava de “Equação de Wheeler”, para o resto de nós hoje ela é conhecida como Equação de Wheeler-DeWitt [28].

Dado esse pequeno interlúdio histórico, a Equação não funciona muito bem e está repleta de sérios problemas.

Primeiramente, as Equações (3.6) e (3.5) tem problemas de ordenamento, isto é, a ordem dos fatores dentro da equação é puramente arbitrária principalmente dentro do operador hamiltoniano, isso faz com que a Equação tenha um conjunto muito grande de soluções, muitas impossíveis do ponto de vista físico, e que tornam a teoria não bem definida do ponto de vista matemático, por não ser unívoca [20].

Além disso, hoje ainda não é claro como alguém poderia recuperar a Teoria da Relatividade Geral no limite Clássico, ou seja, mostrar que nos dados limites a teoria quântica reproduz a teoria clássica, o que é um ponto fundamental principalmente em áreas mais especulativas, em que uma confirmação experimental é tão difícil [29].

E talvez o maior de todos os problemas:  $\mathcal{H}_0 = 0$  faz o papel do vínculo clássico  $\pi_0 + H(q^i, p_j, t) = 0$ , e no caso da Relatividade Geral seria responsável pela evolução do parâmetro  $t$ . Como visto nas teorias invariantes sob reparametrização, esse vínculo aplica a Equação de Schrödinger implica em precisar reencontrá-la em termos de um tempo físico  $t$  que dá a verdadeira dinâmica de  $\psi$ , no nosso caso do exemplo  $q^0 = t$ . Para o caso da TRG, é preciso definir uma das variáveis dentro de  $h_{ij}$  como o “tempo”, o parâmetro  $t$  já não aparece linear e isolado o que torna a tarefa nada fácil, com uma miríade de propostas de evoluções temporais, que não são tratáveis do ponto de vista prático, basicamente devido a forma complexa de  ${}^3R$  [20].

Apesar disso, soluções da WDW continuam a aparecer, principalmente na Cosmologia com um conjunto de condições de contorno muito restrito, criando alguns modelos que são capazes de descrever alguns aspectos do modelo  $\Lambda$ CDM [20].

## 3.2 Relatividade Numérica - Colisão de Buracos Negros

Como visto na Seção anterior, a forma complicada da decomposição 3+1 torna a manipulação matemática extremamente complexa, deixando sua interpretação nebulosa e no caso quântico até então inviável. Para os casos não quânticos a decomposição 3+1 torna possível a análise de sistemas complicados por métodos numéricos, mas sua forma ainda é bastante intrincada.

Neste Capítulo será dada uma visão geral de tais métodos, focando principalmente nos resultados e em uma visão intuitiva do tratamento.

A Relatividade Geral de Einstein é invicta em todos os testes feitos até agora, mas até há pouco tempo ela só havia sido testada no “limite fraco”, que diz respeito a baixas energias, normalmente no contexto do Sistema Solar [9]. Mas havia a possibilidade dos resultados desviarem do previsto no contexto de altas energias, que se tornaram comuns na Astrofísica e na Cosmologia, seriam eles principalmente os buracos negros e as estrelas de nêutrons. Um desvio das previsões da teoria com o observado no limite forte seria uma grande pista para uma melhoria na teoria da gravidade.

A Relatividade Numérica chega então para suprir esse vazio, tornando possíveis previsões da Relatividade Geral no limite de altas energias, pois tais previsões só seriam possíveis de serem feitas por meio dos supercomputadores, e a TRG na sua forma padrão não é nada amigável à computação.

### 3.2.1 Ondas Gravitacionais Linearizadas

O principal artefato gerado pela interação gravitacional de objetos no limite de altas energias são as ondas gravitacionais, que são a melhor ferramenta para sondar os limites da TRG, descrevê-las foi a força motriz inicial da Relatividade Numérica.

Iniciemos com a descrição das Ondas Gravitacionais no limite fraco que já haviam sido descritas por Einstein [30]. Longe da fonte, uma onda gravitacional pode ser interpretada como uma pequena perturbação  $h_{ab}$  junto a métrica plana de Minkowski  $\eta_{ab}$

$$g_{ab}(x) = \eta_{ab} + h_{ab} \quad (3.7)$$

Agora, é importante ressaltar que  $h_{ab}$  não se trata mais da métrica espacial introduzida no Capítulo 2, mas sim um termo perturbativo muito pequeno (mantendo-se a letra  $h$  para condizer com os textos modernos), e por isso a partir de agora descartaremos quadráticos (ou de ordem maior) de  $h_{ab}$

A perturbação ainda é invariante sob transformações de coordenadas, definindo

$$\tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \partial_a \lambda_b + \partial_b \lambda_a .$$

É possível a partir dessa transformação encontrar o Gauge de Lorenz e seus derivados [9]

$$\partial^a h_{ab} = 0 \quad \eta^{ab} h_{ab} = 0 \quad h_{0a} = 0 . \quad (3.8)$$

Ao inserir a perturbação (3.7) nas Equações de Einstein no vácuo são obtidas equações diferenciais parciais lineares e de segunda ordem, ou seja, uma equação de onda. Primeiramente, só com termos lineares em  $h_{ab}$ , as conexões são

$$\Gamma_{bv}^a = -\frac{1}{2} \eta^{ad} (\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{db} - \partial_d h_{bc}) .$$

Com isso, o tensor de Riemann

$$R_{bec}^a = \partial_e \Gamma_{bc}^a - (e \leftrightarrow c) = \frac{1}{2} \eta^{ad} (\partial_e \partial_b h_{dc} + \partial_e \partial_c h_{db} - \partial_e \partial_d h_{bc} - (e \leftrightarrow c)) .$$

Que no vácuo, contraindo o tensor de Riemann, obtém-se o tensor de Ricci  $R_{ab} = 0$

$$R_{bac}^a = \frac{1}{2} (\partial^d \partial_b h_{dc} - \partial^d \partial_d h_{bc} - \eta^{da} \partial_c \partial_b h_{da} + \partial_c \partial^d h_{bd}) .$$

Utilizando as condições (3.8)

$$\partial^d \partial_d h_{ab} = 0 .$$

Escrevendo em termos mais familiares com o d'Alambertiano

$$\square h_{ab} = 0 . \quad (3.9)$$

Portanto, a solução é uma onda. A perturbação  $h_{ab}$  possui 16 componentes, e é possível mostrar que elas se reduzem somente à duas componentes independentes, que descrevem as duas possíveis polarizações de uma onda se propagando pelo campo gravitacional. Isto é similar ao eletromagnetismo, em que o campo elétrico pode oscilar de forma vertical ou horizontal, e todas as outras polarizações são combinações dessas duas.

No caso da gravidade temos a polarização  $+$  e  $\times$ , que podem ser observadas considerando o fato de que a equação de onda pode ser resolvida considerando uma combinação linear de ondas planas

$$h_{ab}(\vec{x}, t) = \epsilon_{ab} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} .$$

em que  $k^a$  é o chamado vetor de onda. Dentro do gauge de Lorenz é possível escolher um em específico, chamado de “transverso e sem traço” [26], e a polarização aparece evidente. Nele  $\eta^{ab} \epsilon_{ab} = 0$  (sem traço) e  $k^a \epsilon_{ab} = 0$ . Nesse caso uma onda se propagando na direção  $z$  é representada como

$$h_{ab}(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_+ & \epsilon_\times & 0 \\ 0 & \epsilon_\times & \epsilon_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sin(k(z - t))$$

No eletromagnetismo a polarização diz respeito a direção do campo vetorial, mas na Relatividade Geral informa como a distância entre objetos muda em diferentes direções, então os elementos de linha são



$$ds^2 = -dt^2 + (1 + \epsilon_+ \sin(k(z-t)))dx^2 + (1 - \epsilon_+ \sin(k(z-t)))dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\epsilon_\times \sin(k(z-t))dx dy .$$

Essas são duas ondas gravitacionais planas, a segunda é exatamente a primeira rotacionada em um ângulo de  $45^\circ$  no ao redor do eixo  $z$ , e ambas transformam-se uma na outra com uma rotação  $\pi/2$ . Essa propriedade dá o nome  $\times$  e  $+$  das polarizações, principalmente pelo efeito que tem em um anel de massas afetados por elas (Figura 3.2.1.1).

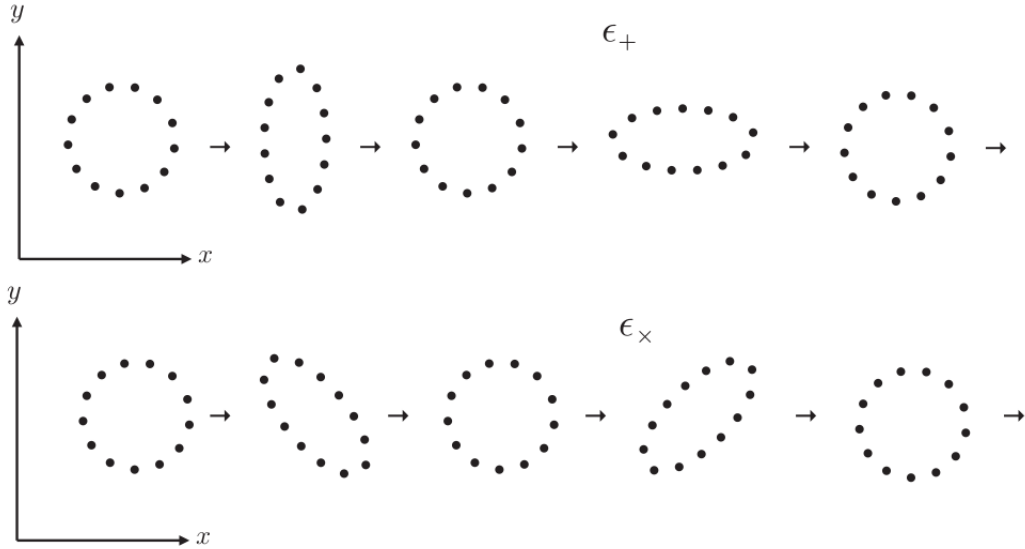


Figura 3.2.1.1: Ilustração do movimento de um anel de partículas sob o efeito de uma onda gravitacional vinda perpendicularmente à folha. Acima: polarização  $+$ . Abaixo: polarização  $\times$ . É possível notar ambas rotacionadas  $45$  graus. Fonte: Rovelli [9]

No eletromagnetismo para a produção de uma onda eletromagnética é necessária uma variação na distribuição de carga no tempo. Um distribuição pode ser analisada na chamada expansão multipolar, cujos dois primeiros termos são

$$q(t) = \int \rho(x, t) d^3x$$

$$d^i(t) = \int \rho(x, t) x^i d^3x.$$

Respectivamente a carga total e o dipolo. Pela conservação da carga  $q(t)$  não varia, logo as ondas eletromagnéticas de menor ordem são produzidas por dipolos.

No caso da gravitação uma onda gravitacional é produzida por um variação na distribuição de massas e energias do sistema, que também pode ser analisada por uma expansão multipolar. O primeiro termo é a energia total, que não varia pela conservação de energia, já o segundo termo é o dipolo, que também não varia pela conservação do momento, visto que a derivada temporal de um dipolo é justamente o momento total. Portanto as ondas gravitacionais de menor ordem são produzidas pelo próximo termo, o quadrupolo

$$q^{ij}(t) = \int \rho(x, t) x^i x^j d^3x.$$

Um quadrupolo é produzido por exemplo por duas massas oscilando ligadas por uma mola, ou duas massas orbitando uma a outra. A emissão tem estrutura quadrupolar que explica como ela afeta a massa, que tem seu dipolo constante.

Para versão linearizada das ECEs, Einstein [30] derivou um equação análoga ao eletromagnetismo para o valor de  $h_{ab}$  à um distância  $r$  da fonte quadrupolar

$$h_{ij}(r, t) = \frac{2G}{rc^4} \ddot{I}_{ij}(t - r/c). \quad (3.10)$$

Com  $I_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}q^{lm}$ . Dela é possível encontrar a “luminosidade” gravitacional

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}^{ij} \rangle$$

A constante  $G/5c^5$  é muito pequena, portanto é necessário uma grande distribuição de massa e energia variando no tempo para criar ondas gravitacionais, e de fato, as ondas detectadas até hoje foram produzidas em momentos cataclísmicos astrofísicamente falando, na colisão de buracos negros e estrelas de nêutrons.

Esta é a referida “aproximação quadrupolar” e vale somente para campos gravitacionais fracos. Entretanto, as fontes de ondas gravitacionais detectáveis mais promissoras são caracterizadas por campos fortes e fontes em altas velocidades, o que torna necessário o uso da Relatividade Numérica, pois neste regime a não linearidade das ECEs tomam conta dos resultados e não é mais possível linearizá-las em duas polarizações e, portanto uma solução completa do espaço-tempo nas proximidades da fonte é necessária.

Apesar disso, (3.10) é uma boa primeira aproximação até para esses casos extremos, e serve para conferir se o código computacional escrito para realizar os cálculos numéricos estão de acordo com o esperado de forma mais rápida.

### 3.2.2 Decomposição 3+1 de um Sistema Binário de Buracos Negros

Para construir um problema de valor inicial e resolvê-lo para um sistema qualquer usando a formulação ADM seguem-se os seguintes passos:

1. Definir uma variedade espacial inicial  $\Sigma$ ;
2. Definir um par  $(h, K)$  que respeite os vínculos hamiltoniano e de Momento;
3. Definir as 4 funções  $N$  e  $N^i$ ;
4. Finalmente, evoluir  $h$  e  $K$  no tempo com suas dadas Equações.

Obviamente isto é muito mais fácil em palavras do que feito. As condições iniciais devem ser construídas em vista do sistema físico em questão, e para o caso de sistemas binários é particularmente difícil, com a primeira solução completa saindo em 2005 [31]. A seguir, apresentam-se as linhas gerais dos métodos utilizados para resolver o binário de buracos negros, apresentando e descrevendo ao fim as equações finais, que devem ser “colocadas” no computador.

Toda a teoria desenvolvida até agora leva em consideração o vácuo, sem nenhum campo de matéria, que adicionaria mais uma camada de complexidade ao problema. Felizmente, buracos negros podem ser tratados nesse regime sendo os sistemas binários mais simples de serem analisados no regime de altas energias.

Um buraco negro é uma região do espaço-tempo em que a gravidade é tão potente que nada consegue escapar, nem mesmo a luz. Todos os cones de luz após um dado horizonte apontam para o centro do buraco negro. Esses objetos existem no Universo e

são explicados por processos astrofísicos super energéticos, como o colapso de estrelas em supernovas. Por um acaso, dois desses objetos super compactos podem se esbarrar.

Quando se encontram, esses objetos espiralam, e dada a assimetria esférica do sistema criam ondas gravitacionais. Dada a gigantesca massa envolvida na colisão, estes eventos são ótimos candidatos na criação de ondas gravitacionais apreciáveis o suficiente. As etapas de uma colisão de buracos negros está exposta na Figura (3.2.2.1)

A aproximação espiralada dos dois corpos tem 3 fases. Uma espiral quase circular, que podem ser resolvidas por técnicas chamadas de "pós-newtonianas", estando as órbitas estão circulando em equilíbrio, e a perda de energia do sistema por ondas gravitacionais é modelada como uma taxa linear com que os objetos se aproximam. O "mergulho" e a Fusão, em que os campos fortes estão interagindo muito proximamente e de forma não linear, necessitando da Relatividade Numérica completa. E ao fim, o "ringdown", em que a fusão já aconteceu e o sistema está quase estabelecido em equilíbrio, em que essa fase pode ser tratada por métodos perturbativos semelhantes aos apresentados na última seção

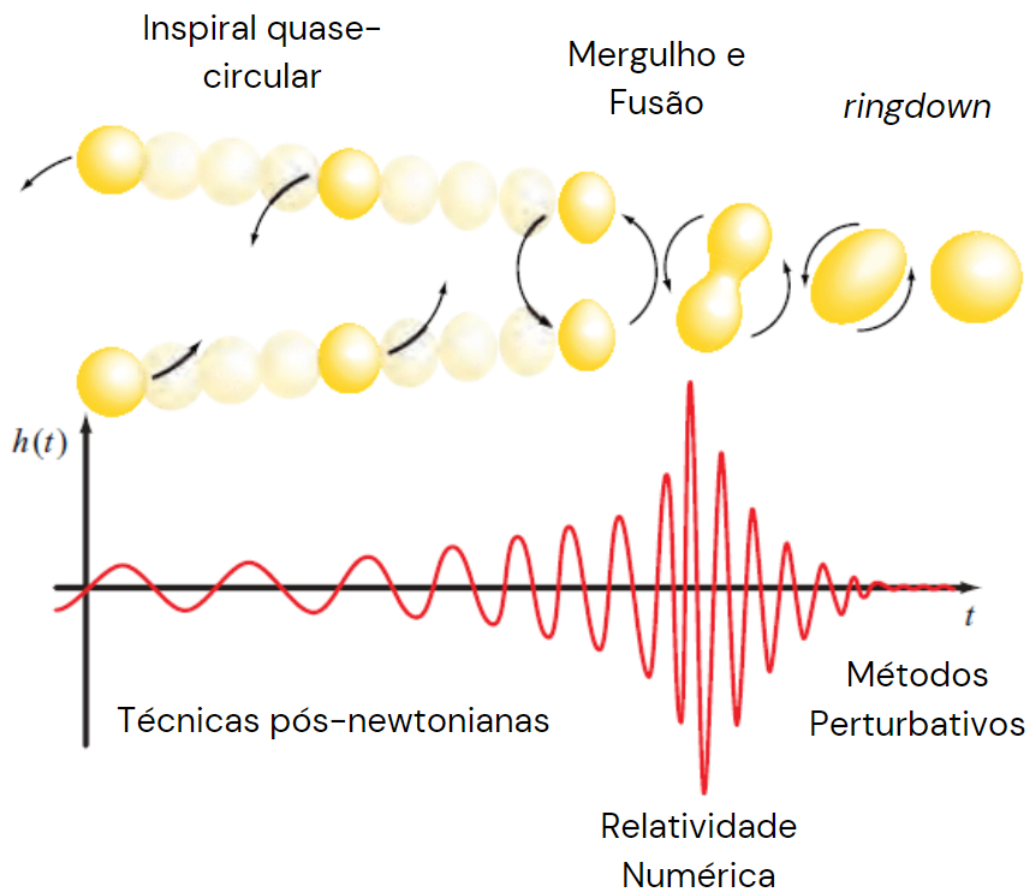


Figura 3.2.2.1: Ilustração das etapas da espiral de um binário de buracos negros, e seu perfil de onda esboçado.

Fonte: Baumgarte [26]

O problema dos buracos negros pode ser analisado em 3 partes, a saber, 1) Construir de Valores Iniciais, 2) Evoluir no Tempo e 3) Extrair a Forma da Onda Gravitacional. Que resumem-se em resolver as equações para os vínculos e para evolução, dadas as devidas especificidades do sistema. Isso também é muito mais fácil dito do que feito, e para os propósitos deste trabalho apresenta-se um breve resumo das ideias gerais utilizadas por pesquisadores da área.

### 3.2.2.1 Construção dos Valores Iniciais

Quando a aproximação pós-newtoniana não é mais válida devido aos efeitos relativísticos é necessário utilizar a decomposição 3+1. "Construir valores iniciais" traduz-se diretamente em resolver os vínculos hamiltoniano e de momento. Olhando as Equações para os vínculos hamiltoniano e de momento não é óbvio como resolvê-las, por isso são empregados artifícios, que as transformam em Equações Diferenciais Parciais Elípticas, que são particularmente atraentes aos métodos numéricos.

A solução elementar de Buracos Negros é a chamada métrica de Schwarzschild. Trata-se da solução do espaço-tempo ao redor de uma distribuição de massa esférica estática em coordenadas esféricas

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Essa solução possui uma singularidade em  $r = 0$ , e um horizonte de eventos em  $r = M/2$  de onde nenhuma informação pode entrar ou sair, esses atributos quebram um código numérico, então é preciso evitá-los. Para contornar esse problema é possível escrevê-la por meio de uma "transformação conforme", em que a métrica espacial é escrita como uma combinação de alguma potência de um fator positivo  $\psi$  e da métrica relacionada  $\bar{h}_{ij}$

$$h_{ij} = \psi^4 \bar{h}_{ij}.$$

Aplicando a transformação de coordenadas  $R = \psi^2 r$  na métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^2 dt^2 + \psi^4 (dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)).$$

Aqui é possível ver que a função *lapse*  $N$  acompanhando a parte temporal é  $\frac{1-M/2r}{1+M/2r}$ , não há *shift*  $N^i = 0$  e conseqüentemente  $K = 0$ , também é possível notar que  $\bar{h}_{ij}$  é a parte espacial da métrica de Minkowski, condição conhecida como "conformalmente plana".

Essa transformação faz algumas coisas por nós. No horizonte de eventos evitamos a singularidade, o que acontece é que a solução é espelhada, e ficamos com um sistema de coordenadas que só descreve o que está fora do horizonte de eventos.

Nesta solução, o Vínculo de Momento é satisfeito de forma trivial, e o Vínculo Hamiltoniano se reduz à [26]

$$\bar{D}^2 \psi = 0.$$

em que a barra no  $D$  indica a derivada covariante com relação à métrica relacionada  $\bar{h}_{ij}$ .

Esta solução é válida para um único buraco negro. Para dois buracos negros em equilíbrio, basta somar as soluções de cada um, já que o Vínculo de Momento é linear, e a hipersuperfície resultante está exposta na Figura 3.2.2.2.

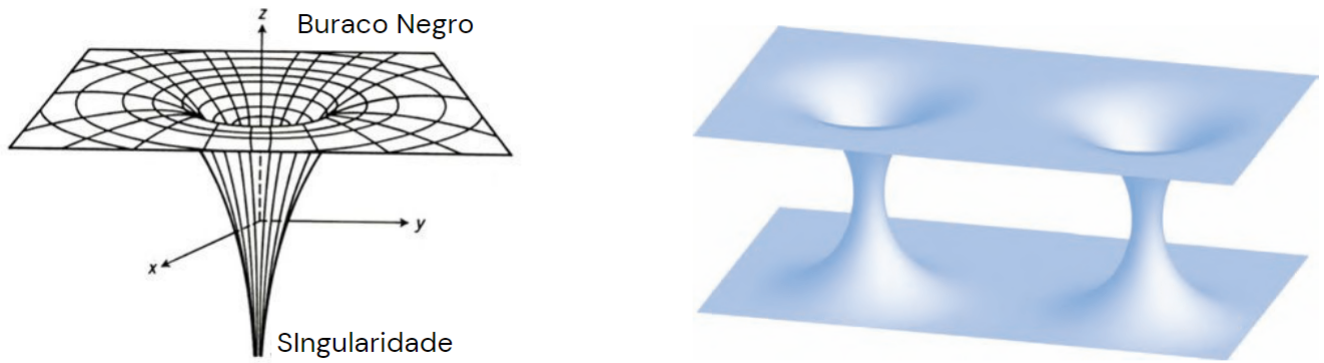


Figura 3.2.2.2: Esquerda: hipersuperfície de um buraco negro com singularidade; direita: hipersuperfície inicial de um binário de buracos negros sem singularidade.. Fonte: Baumgarte [26]

Na natureza, os buracos negros não seguem a métrica de Schwarzschild, pois ainda deve-se considerar seu momento angular e sua carga, e a solução completa é a chamada métrica de Kerr, que é um pouco mais complicada. E também não são encontradas em equilíbrio como a solução encontrada aqui.

A solução geral é o chamado método de Bowen-York [32], nele, sem dar muitos detalhes, a métrica de Kerr é resolvida de forma similar ao que foi feito nesta seção assumindo o gauge transversal e sem traço, como foi feito para as ondas linearizadas, e os buracos negros são descritos em "quase equilíbrio" em um órbita circular.

No método de Bowen-York é possível resolver o vínculo de momento analiticamente, e o que resta para ser resolvido numericamente é o vínculo hamiltoniano. No fundo, esse vínculo é uma equação diferencial parcial elíptica.

### 3.2.2.2 Evolução no Tempo

Definidos os valores iniciais, basta evoluir a métrica espacial e a curvatura extrínseca no tempo. Mas o problema da singularidade se torna não trivial de se resolver. O código numérico não pode esbarrar com essa singularidade em nenhum momento da execução, então é preciso definir coordenadas que evitem a singularidade durante todos os passos.

O método encontrado para resolver esse problema é o das "perfurações em movimento" [31]. Método esse que se baseia no princípio da "censura cósmica", que diz que qualquer singularidade deve estar escondida por um horizonte de eventos dentro de um buraco negro, e como por definição nenhuma informação pode propagar para fora do buraco negro, o espaço-tempo fora do horizonte de eventos não é afetado pelo que está dentro.

A princípio, basta remover os pontos do espaço dentro do horizonte de eventos da simulação que não haverá problemas. O grande problema é que nem sempre é fácil localizar o horizonte de eventos dentro de uma simulação numérica. Uma primeira tentativa foi resolver para perfurações fixas, o que é possível devido a invariância de difeomorfismo. Nela separa-se a função  $\psi$  na parte singular, evoluindo somente a segunda parte

$$\psi = \left(1 + \frac{M}{2r}\right).$$

Mas isso trazia artefatos indesejados nas simulações. Hoje em dia a evolução é feita sem separar a singularidade, mas é necessário cuidado para que essa nunca encontre um dos pontos no *grid* da simulação, pois nelas não é o espaço-tempo inteiro que é simulado,

mas pontos com uma separação discreta. Se a órbita tem simetria equatorial, nenhum ponto de medida é posicionado no plano equatorial.

Tomando essas precauções basta resolver a evolução da métrica espacial e da curvatura extrínseca com os valores iniciais definidos.

### 3.2.2.3 Extrair a Forma das Ondas Gravitacionais

Como na produção da radiação eletromagnética, estamos interessados no limite assintótico da propagação das ondas gravitacionais, que será como atingirão nosso planeta e poderão ser comparadas com as simulações numéricas. O método padrão utilizado é o chamado formalismo de Newmann-Penrose [33].

Um objeto importante nesse formalismo é o chamado Tensor de Weyl. O Tensor de Riemann  $R^a_{bcd}$  tem 20 componentes, 10 delas são absorvidas no seu traço, o Tensor de Ricci, as outras 10 que restam são sem traços e conhecidas como Tensor de Weyl  $C^a_{bcd}$ . No formalismo de Newman-Penrose o Tensor de Weyl é escrito em termos de 4 funções escalares  $\psi_0, \dots, \psi_4$ , que são obtidas contraindo o tensor com uma tetrada complexa e nula (sendo essa escolha arbitrária).

Essas funções escalares são os chamados escalares de Weyl, é possível mostrar que os escalares ímpares  $\psi_1$  e  $\psi_3$  podem ser nulos dependendo da escolha de coordenadas, já o restante tem significado físico,  $\psi_0$  e  $\psi_4$  dizem respeito à radiação que cai e que escapa o buraco negro respectivamente, e  $\psi_2$  diz respeito a parte longitudinal do campo gravitacional. Nesse caso o interesse está em  $\psi_4$ .

Uma base possível para isto é escolher dois vetores seria dois vetores reais positivos radialmente  $l^a$  e  $k^a$ , e um vetor complexo ortogonal a eles  $m^a$ , de tal forma que o único produto escalar não nulo seja

$$-l^a k_a = 1 = m^a \bar{m}_a.$$

Com  $\bar{m}_a$  sendo o complexo conjugado de  $m_a$ . Definindo o escalar de Weyl  $\psi_4$

$$\psi_4 = -C^a_{bcd} k^a \bar{m}^b k^c \bar{m}^d. \quad (3.11)$$

A base para construir esses vetores pode ser escolhida como a esférica

$$\begin{aligned} l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_{\hat{t}} + e^a_{\hat{r}}) & k^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_{\hat{t}} - e^a_{\hat{r}}) \\ m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_{\hat{\theta}} + e^a_{\hat{\phi}}) & \bar{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_{\hat{\theta}} - e^a_{\hat{\phi}}). \end{aligned}$$

Agora o que resta é contrair a curvatura de Riemann com  $k^a$  e  $\bar{m}^a$  na Equação (3.11), levando em consideração a decomposição 3+1 do tensor, e também a pequena escala da perturbação. O resultado é

$$\psi_4 = \ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times.$$

Para encontrar os perfis de onda  $h_+$  e  $h_\times$  basta integrar a parte real e imaginária da equação acima duas vezes, e com isso é possível encontrar a luminosidade como antes, mas também a energia e o momento perdidos pela fonte na emissão das ondas.

### 3.2.3 Evento GW150914- A Primeira Detecção de Ondas Gravitacionais

Em 2015, 99 anos depois de Einstein ter previsto as ondas gravitacionais a colaboração LIGO anunciou a primeira detecção de ondas gravitacionais da história, catalogada como Evento GW150914 [6].

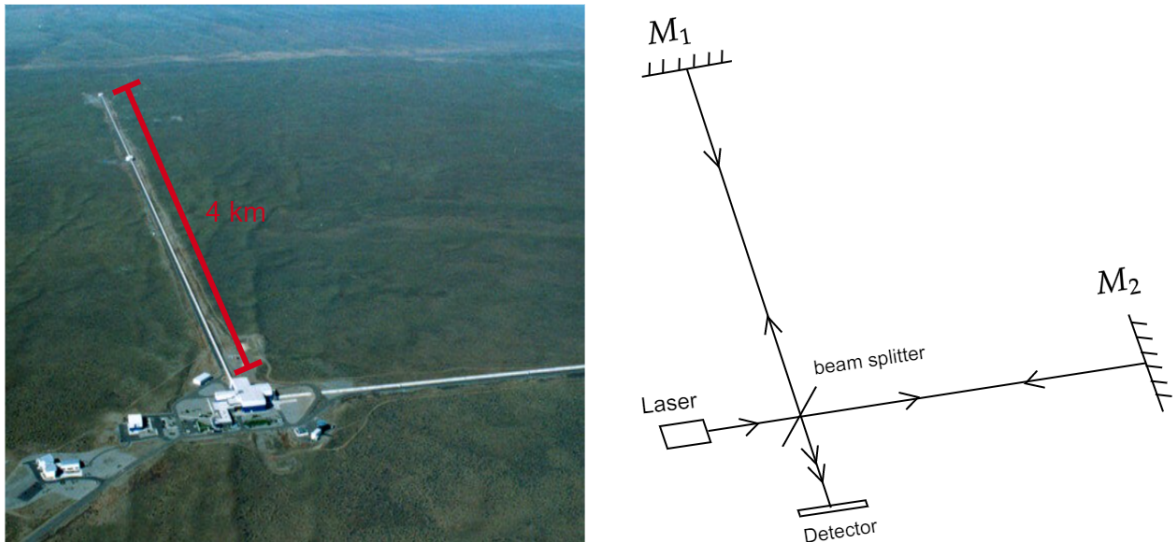


Figura 3.2.3.1: Imagem panorâmica instalação do LIGO em Washington. Trata-se de um gigantesco interferômetro. Fonte: LIGO [34]

A sigla da instituição significa "*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*", e trata-se de duas instalações nos Estados Unidos. Cada uma dessas instalações comporta um gigantesco interferômetro de Michelson-Morley, milhares de vezes maior que o interferômetro de bancada que usamos no laboratório de Física Moderna, mas ainda com o exato mesmo princípio básico de funcionamento.

Um interferômetro mede a interferência entre feixes de luz, nele um laser é dividido por um *beam-splitter* percorre um caminho, é ricocheteado ao fim por um espelho e se unifica novamente, caso os caminhos em que o laser foi dividido não sejam iguais haverá uma pequena diferença de fase entre os feixes, causando uma figura de interferência ao fim da linha (Figura 3.2.3.1).

No caso do LIGO os braços tem 4 km e estão regulados para causar uma interferência destrutiva, ou seja, haverá uma diferença no caminhos entre os espelhos caso qualquer luz chegue ao detector. Uma onda gravitacional passando pelo equipamento fará com que a distância de um braço seja levemente maior que a do outro, oscilando com a passagem da onda.

Essa oscilação está na escala atômica, portanto esses equipamento são extremamente sensíveis [34], e podem ser afetados por fatores ambientais como tempestades distantes ou microterremotos, portanto muito cuidado é necessário para isolá-los. Para diminuir a incerteza do ruído do ambiente existem dois interferômetros, em lados opostos do país, de forma que uma onda gravitacional verdadeira afetaria ambas instalações ao mesmo tempo com o mesmo padrão de interferência, padrões esses que foram simulados pela Relatividade Numérica posteriormente.

No evento GW150914 o LIGO detectou uma forma de onda correspondente à colisão de um sistema binário com  $36 + 29$  massas solares há cerca de 1,5 bilhões de anos-luz, o buraco negro resultante ficou com 62 massas solares e os 3 restantes foram emitidos em ondas gravitacionais, dadas as devidas incertezas [6].

Vale ressaltar que esta é a primeira detecção direta de ondas gravitacionais em que observaram "distorções no espaço e no tempo" causadas por um par de buracos negros. O que levou os pesquisadores Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne a serem contemplados

com o Nobel de Física do ano de 2017 pelas decisivas contribuições para a observação de ondas gravitacionais.

No Brasil há um grupo de pesquisa denominado de GRAVITON, liderado pelo Prof. Dr. Odylio Denys Aguiar do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE). Entre as pesquisas do grupo, faz parte a detecção de ondas gravitacionais por meio do detector de ondas gravitacionais (massa ressonante esférica de CuAl, com 65cm de diâmetro e massa de 1150 Kg, dentro de uma cavidade criogênica) Mario Schenberg situado no Instituto de Física da Universidade de São Paulo na Capital.

As ondas gravitacionais são uma alternativa à astronomia tradicional por meio das ondas eletromagnéticas e dos sensores de neutrinos. Descobriu-se uma nova janela para o Universo.

### 3.2.4 Análise do Cálculo Numérico do Evento GW150914

*Einstein Toolkit* [35] é um *Software* de código aberto de Relatividade Numérica, onde pesquisadores de gravitação do mundo todo compartilham seus cálculos numéricos e simulações, etc (3.2.4.1).

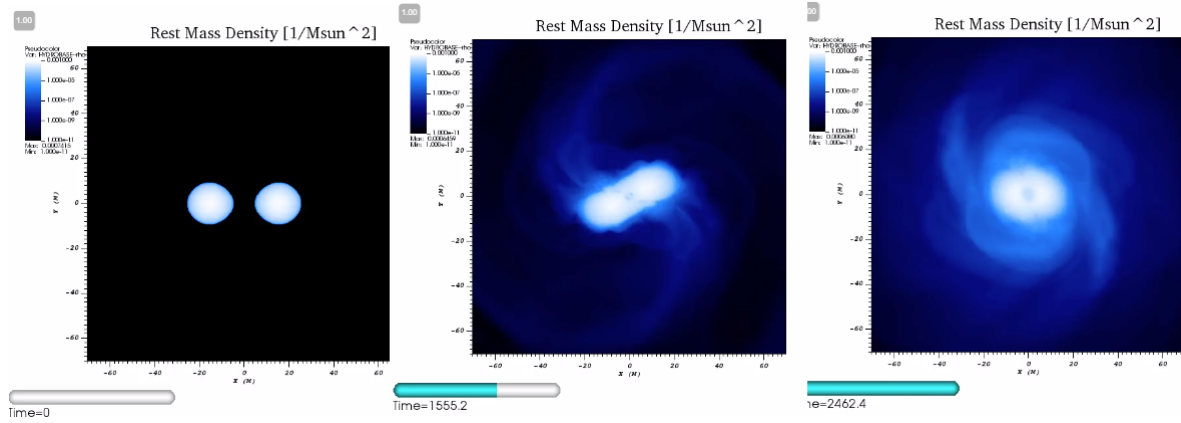


Figura 3.2.4.1: Exemplo de uma das visualizações encontradas no repositório, as etapas da colisão de duas estrelas de nêutrons simuladas numericamente.

Um desses repositórios é justamente uma recriação do evento GW150914 [36]. Nele são resolvidas as condições iniciais por meio do método Bowen-York, é feita a evolução do sistema pelo método de perfurações em movimento e retira-se o perfil da onda emitida utilizando o formalismo de Newmann-Penrose. Isto é feito utilizando as grandezas físicas estimadas pelo LIGO, são elas

Tabela 3.1: Parâmetros estimados pelo LIGO [6] e utilizados na simulação de [36].

Parâmetros Físicos	Propriedades Extraídas
Separação Inicial $D = 10M$	nº de órbitas = 6
Razão das Massas $q = \frac{m_1}{m_2} = 36/29$	Tempo para colisão = 899 M
Spin $\chi_1 = 0,31$	Massa final = 0,95 M
Spin $\chi_2 = -0,46$	Spin final = 0,69

Vale ressaltar que por conveniência todas as unidades são expressadas em unidades geometrizadas em que  $G = c = 1$ , e tempo e distância são dados em termos da massa, que nesse caso é masa total do sistema  $M = 62 M_\odot$  (massas solares), convertendo para o sistema internacional: a separação inicial é de  $95km$ , e o tempo para colisão é de  $\approx 0,2 s$ .



O método numérico utilizado pra resolver as equações foi o das diferenças finitas com a adição de outra técnica chamada *Mesh Refinement*, trata-se de discretizar o espaço e os passos temporais, de forma que agora derivadas são calculadas discretamente de um ponto a outro da rede (na definição da derivada  $\Delta x$  não vai mais à 0). A aproximação será cada vez melhor conforme a separação dos pontos é menor, o refinamento faz com que essa resolução seja menor nas áreas de maior interesse, a Figura 3.2.4.2 mostra um exemplo de um rede para Relatividade Numérica.

Neste repositório o código pra resolver as equações é aberto e qualquer um pode conferir a implementação, junto com um tutorial para quem queira replicar os achados, e também todos os dados gerados pelo programa, com o intuito de propiciar que estudantes possam explorar os dados.

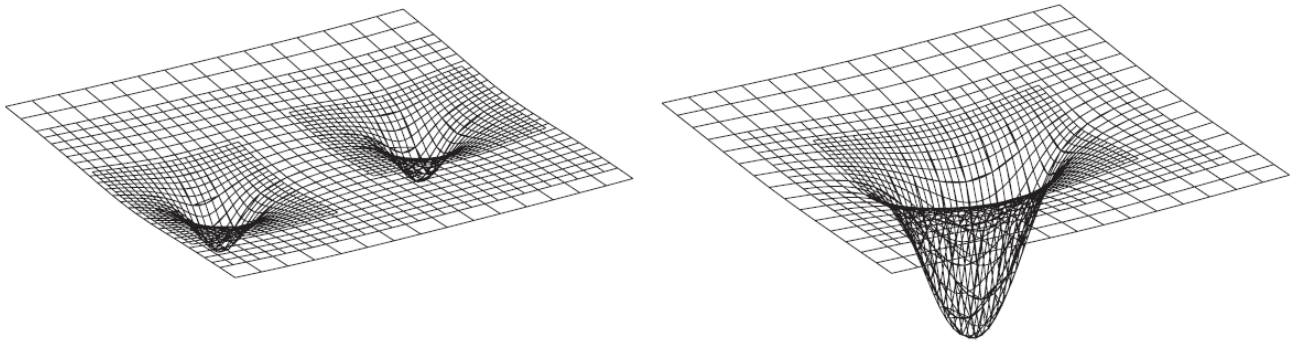


Figura 3.2.4.2: Gráficos em 3D da rede utilizada para simular a colisão de duas estrelas de nêutrons, na esquerda antes da colisão, na direita após. Fonte: Evans et. al [37].

Mesmo que a formulação hamiltoniana torne possível a solução numérica das Equações de Campo de Einstein, ainda é um cálculo difícil, pois tratam-se de um conjunto de Equações Diferenciais Parciais não lineares acopladas que precisam ser resolvidas ponto a ponto no espaço para cada passo temporal.

Na simulação feita por [36], utilizou-se uma máquina da *North-German Supercomputing Alliance (HLRN)* com 152GB de memória RAM, com um processador de 128 núcleos rodando dedicado por 2,8 dias, em um computador de mesa comum o aumento desse tempo seria exponencial com a diminuição dos núcleos de processamento, sem contar o problema de transbordar a memória caso ela seja menor de 52GB.

Exploraremos os dados disponibilizados por [36] para construir algumas visualizações simples. O arquivo total disponibilizado pelo grupo têm 98GB de tamanho, mas que pode ser particionado de forma leve para diferentes propósitos, que neste trabalho são visualizar a geodésica de um buraco negro até a colisão e extrair o formato da onda gravitacional emitida pelo evento, na forma que é detectada pelo LIGO.

O LIGO também disponibiliza seus dados ao público [38], de forma que é possível reconstruir a forma da onda detectada por ambos os detectores assim como seus próprios métodos numéricos para comparação que seguem [31]. Os gráficos produzidos com os dados dessas duas bases são apresentadas nas Figuras 3.2.4.2 às 3.2.4.7.

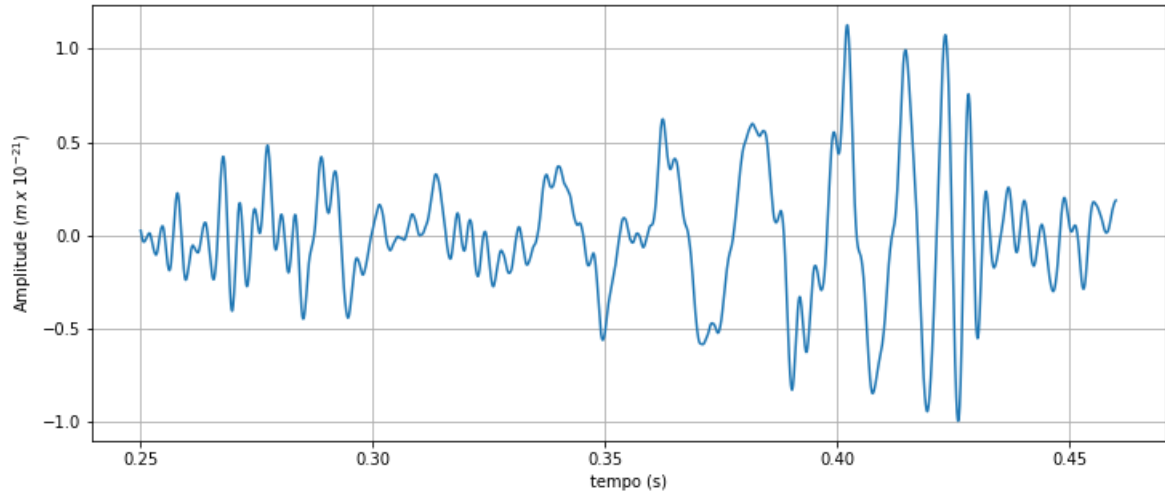


Figura 3.2.4.3: Gráfico da amplitude versus tempo da reconstrução do sinal observado pelo LIGO em Hanford, Washington.

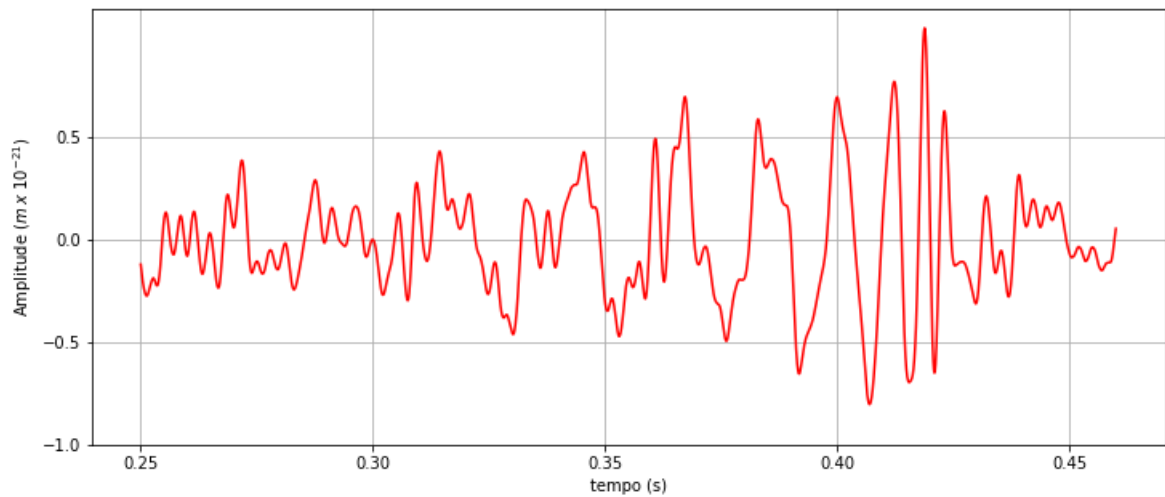


Figura 3.2.4.4: Gráfico da amplitude versus tempo da reconstrução do sinal observado pelo LIGO em Livingstone, Louisiana.

Nas Figuras (3.2.4.3) e (3.2.4.4) apresentam-se os sinais observados simultaneamente em Hanford, Washington e do outro lado dos EUA em Livingstone, Louisiana respectivamente. É notável que ambas apresentam um aumento de amplitude apreciável por volta de 0,4 s, e também os sinais são parecidos o suficiente para o algoritmo que analisa o sinal recebido pelos interferômetros do LIGO, classificarem ambos como uma possível detecção real e não puro ruído.

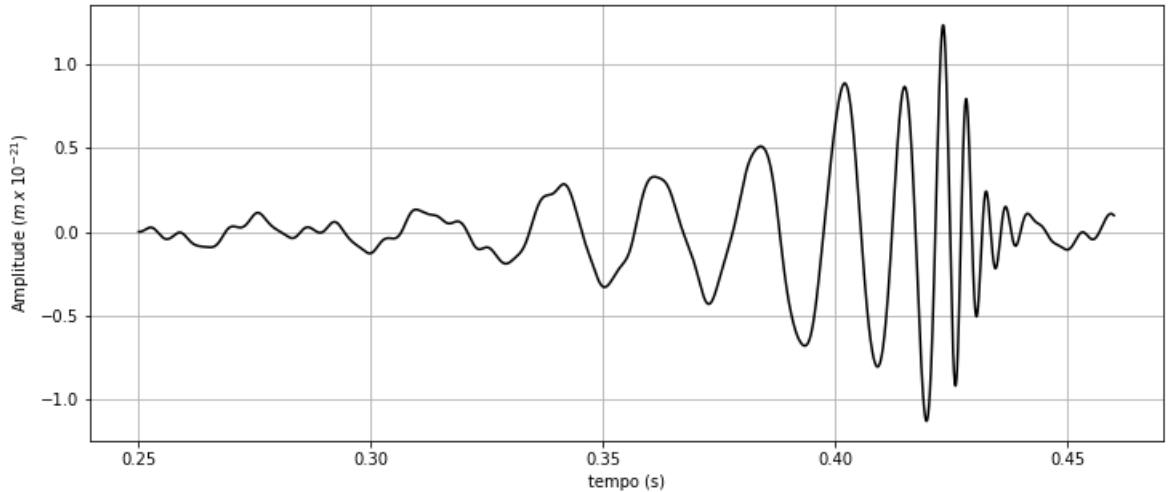


Figura 3.2.4.5: Gráfico da amplitude versus tempo do resultado numérico obtido pelo LIGO com os parâmetros estimados.

Na Figura (3.2.4.5) está exposta a forma da onda obtida numericamente pelo LIGO ao simular a colisão com os parâmetros estimados mostrados na Tabela 3.1. O LIGO simula também ruído estocástico que afeta de forma mais aparente as baixas amplitudes, assim como esperado para um dado real, mas isso é superado nas amplitudes mais altas alcançadas no ápice da colisão, e é o que se traduz no gráfico por volta de 0,4 s.

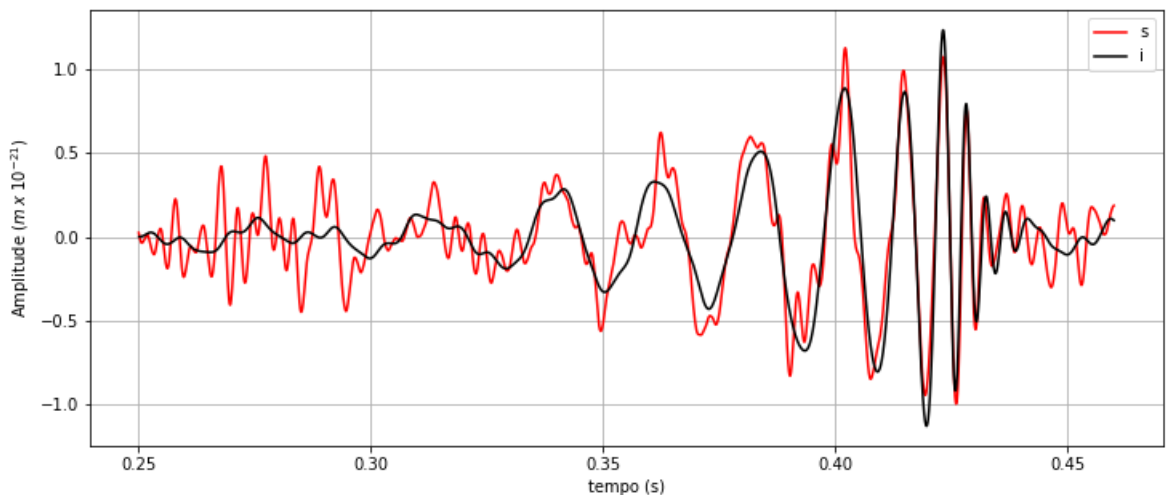


Figura 3.2.4.6: Gráfico da amplitude versus tempo da comparação entre a forma de onda numérica e o observado em Livingstone.

Na Figura 3.2.4.6 está a comparação entre o simulado e o observado em Hanford. A concordância é excepcional, ainda mais levando em consideração que tratam-se de escalas da ordem do diâmetro de prótons, e o ruído aumenta conforme menor a amplitude, que já saiu fora da banda de detecção ótima do sensor.

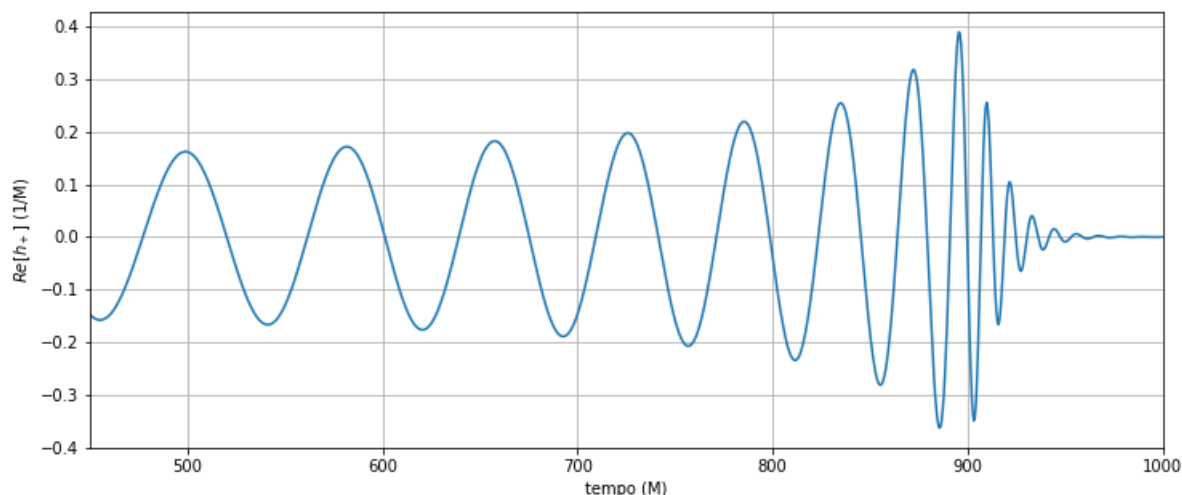


Figura 3.2.4.7: Simulação da evolução no tempo da forma de onda reconstruída com os dados de [36]

Na Figura 3.2.4.7 é mostrado o resultado numérico obtido de forma independente pelo Einstein Toolkit, o eixo  $y$  da amplitude é obtido a partir da parte real do escalar de Weyl. Nesta simulação não há ruído estocástico, então seria a forma da onda ideal sem limitações de sensores e interferências externas. O padrão é muito parecido com o observado, tanto em amplitude quanto em frequência.

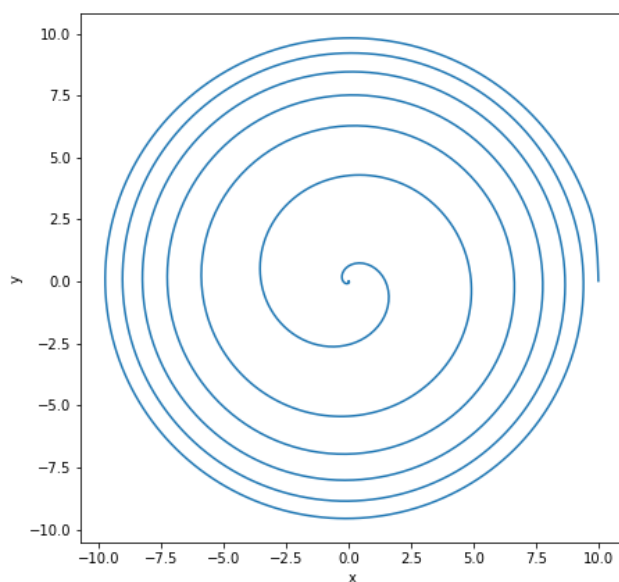


Figura 3.2.4.8: Simulação do comportamento da geodésica do buraco negro mais pesado reconstruída com os dados de [36].

Na Figura 3.2.4.8 está traçada a trajetória a partir dos dados de posição para o buraco negro mais massivo disponíveis na base de dados do Einstein Toolkit. O raio diminui devido a emissão de ondas gravitacionais, caso não houvessem efeitos relativísticos a órbita seria circular.

# Considerações Finais

---

A Relatividade Geral muda nossa concepção de espaço e de tempo, o palco fixo onde a Física performava seu show agora faz parte do show em si, o cenário se molda e se contorce conforme a dança dos corpos que o habitam. Matematicamente isso trás um arcabouço de técnicas complicados, pois como o jovem Riemann descobriu, descrever espaços com mais dimensões que se curvam não é trivial. A principal dificuldade emerge do papel do tempo na teoria, sendo só mais uma variável dinâmica.

A formulação Hamiltoniana é extremamente útil para sondar aspectos estruturais da Mecânica Clássica, também foi essencial para o desenvolvimento da Mecânica Quântica e da Mecânica Estatística, e sua importância não é menor na Teoria Clássica de Campo. No caso da Relatividade Geral não há mais parâmetro em que as curvas no espaço de fase evoluem, sendo esse um grande obstáculo, que é superado pela introdução de novas variáveis canônicas, que introduzem um novo parâmetro a ser evoluído, mas sem perder as informações da curvatura contidas nas ECE.

Não é antinatural fazer essa separação brusca entre tempo e espaço novamente? De certa forma vai contra o espírito da teoria de Einstein, em que espaço e tempo são partes de uma coisa só, e a variedade lorentziana é invariante sob difeomorfismos. Vale lembrar que as hipersuperfícies individuais da folheação também são invariantes sob difeomorfismos, mas traduzir a curvatura do espaço em tempos discretos para a curvatura total do espaço-tempo é complicado devido a alta não linearidade da teoria de Einstein. Se você adiciona essa divisão, todas as equações são salpicadas com dependências não triviais entre as variáveis.

Essa divisão artificial é o que faz a Equação de Wheeler-DeWitt falhar assumindo aquela forma tão complexa. Existem outros caminhos que contornam esse problema, e são os avanços mais modernos na Gravitação Quântica [29]. A formulação ADM foi a primeira tentativa de quantizar o campo gravitacional, mas mesmo falhando dá pistas essenciais pro desenvolvimento da Gravitação Quântica contemporânea, e também abriu novas perguntas, como qual é o papel do tempo na escala de Planck.

Além disso deu muitos outros frutos, o principal deles a possibilidade de se fazer Relatividade Numérica, trazendo previsões para os ambientes mais extremos do universo (em que a Relatividade Geral ainda não havia sido testada), até agora confirmando todas as observações astrofísicas com a Teoria centenária.

# Reconstrução das Formas da Onda via Python - Matplotlib

---

Neste apêndice está exposto o código feito para visualizar os dados extraídos das fontes [38] do LIGO e [36] do Einstein Toolkit. O ambiente utilizado foi o *Google Colaboratory*, plataforma gratuita e disponível para quem tiver interesse.

Para reprodução do código são necessárias as tabelas no formato *.csv*: **H** (forma da onda observada em Hanford), **L** (forma da onda observada em Livingston) e **N** (simulação numérica), disponibilizadas pelo LIGO, e também as tabelas **EW** (forma da onda numérica) e **ET** (geodésicas do buraco negro), obtidas na base de dados do *Einstein Toolkit*.

Todas elas já tratadas podem ser encontradas aqui: [https://drive.google.com/file/d/1XW\\_y2K\\_z1uAPs183urhbEhzrzlcXiRE4/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1XW_y2K_z1uAPs183urhbEhzrzlcXiRE4/view?usp=sharing)

08/05/2022 10:47

Numerical\_Results\_TCC.ipynb - Colaboratory

## ▼ Análise das Simulações Numéricas, evento GW150914

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd

#sinal em hadford

H = pd.read_csv('fig1-observed-H.txt', sep=' ', header=0)

H.head()
```

	#time(seconds)	strain*1.e21
0	0.250000	0.024548
1	0.250061	0.015293
2	0.250122	0.006372
3	0.250183	-0.002075
4	0.250244	-0.009889

```
plt.figure(figsize=(12, 5))

plt.plot(H['#time(seconds)'], H['strain*1.e21'])

plt.xlabel('tempo (s)')

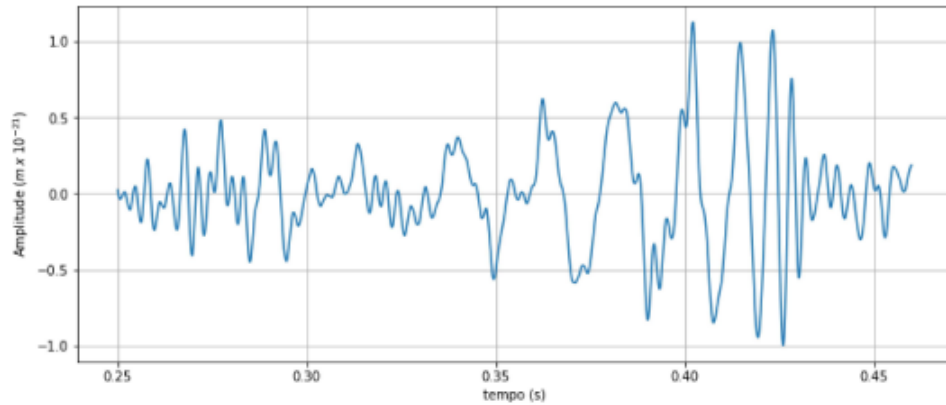
plt.ylabel('Amplitude ($m \; x \; 10^{-21}$)')

plt.grid()
```

<https://colab.research.google.com/drive/1117IWR0DGW0zqutz-WgwM-mCw0mtMvY?authuser=8#scrollTo=meS5ijP6JuiU&printMode=true>

```
plt.savefig('h.png')
```

```
plt.show()
```



```
#sinal em livingstone
```

```
L = pd.read_csv('fig1-observed-L.txt', sep=' ', header=0)
```

```
L.head()
```

```
#time(seconds) strain*1.e21
```

```
plt.figure(figsize=(12, 5))
```

```
plt.plot(L['#time(seconds)'], L['strain*1.e21'], color = 'red')
```

```
plt.xlabel('tempo (s)')
```

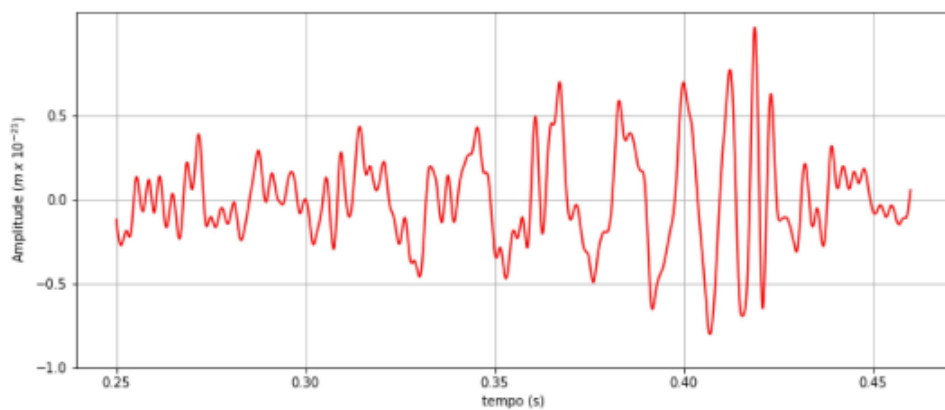
```
plt.ylabel('Amplitude ($m \ ; \ x\ ; \ 10^{\{-21\}}$')
```

```
plt.yticks(np.arange(-1, 1, 0.5))
```

```
plt.grid()
```

```
plt.savefig('l.png')
```

```
plt.show()
```



```
#simulação numérica do LIGO
```

```
N = pd.read_csv('fig1-waveform-H.txt', sep=' ', header=0)
```

```
N.head()
```

	#time(seconds)	strain*1.e21
0	0.250050	0.000483
1	0.250111	0.000343
2	0.250172	0.000276
3	0.250233	0.000282
4	0.250294	0.000362

```
plt.figure(figsize=(12, 5))
```

```
plt.plot(N['#time(seconds)'], N['strain*1.e21'], color = 'black')
```

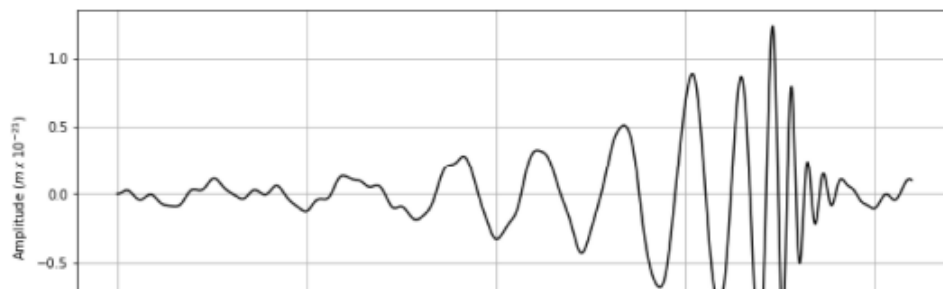
```
plt.xlabel('tempo (s)')
```

```
plt.ylabel('Amplitude (m \; x\; 10^{-21})')
```

```
plt.grid()
```

```
plt.savefig('n.png')
```

```
plt.show()
```



```
#sobreposições
```

```
plt.figure(figsize=(12, 5))
```

```
plt.plot(H['#time(seconds)'], H['strain*1.e21'], color = 'red')
```

```
plt.legend('sinal')
```

```
plt.plot(N['#time(seconds)'], N['strain*1.e21'], color = 'black')
```

```
plt.legend('simulação')
```

```
plt.xlabel('tempo (s)')
```

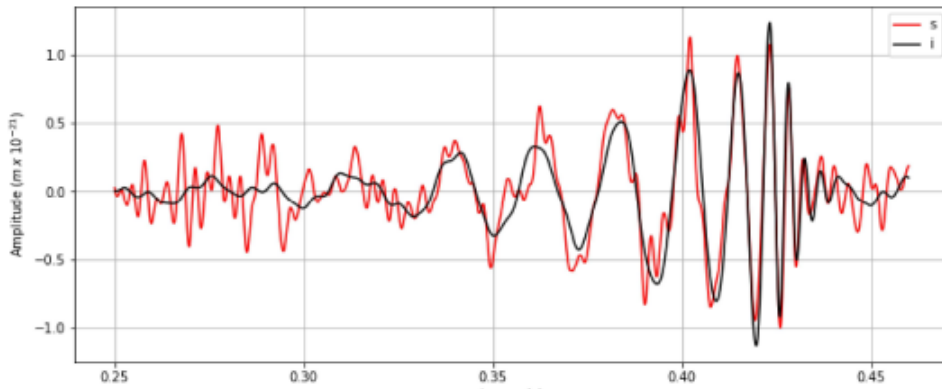
```
plt.ylabel('Amplitude (m \; x\; 10^{-21})')
```

```
plt.grid()
```

```
plt.savefig('h-vs-n.png')
```

```
plt.show()
```





#simulação independente Einstein Toolkit

```
ET = pd.read_csv('reftrajectories.csv')
```

```
ET.head()
```

	10.	θ
0	9.999829	0.022586
1	9.999083	0.111210
2	9.996417	0.227480
3	9.992161	0.349277
4	9.988278	0.470911

```
plt.figure(figsize=(7, 7))
```

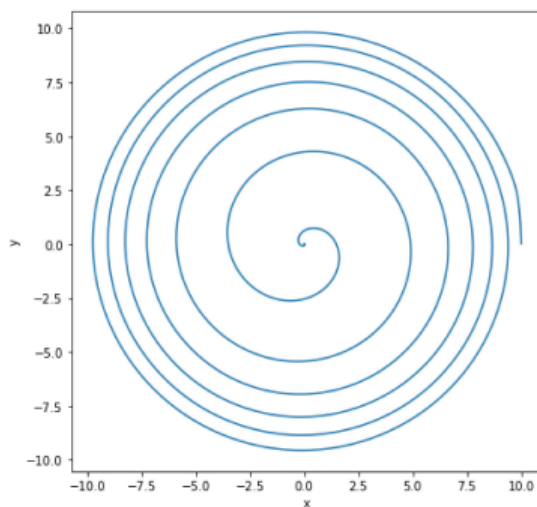
```
plt.plot(ET['10.'], ET['θ'])
```

```
plt.xlabel('x')
```

```
plt.ylabel('y')
```

```
plt.savefig('et.png')
```

```
plt.show()
```

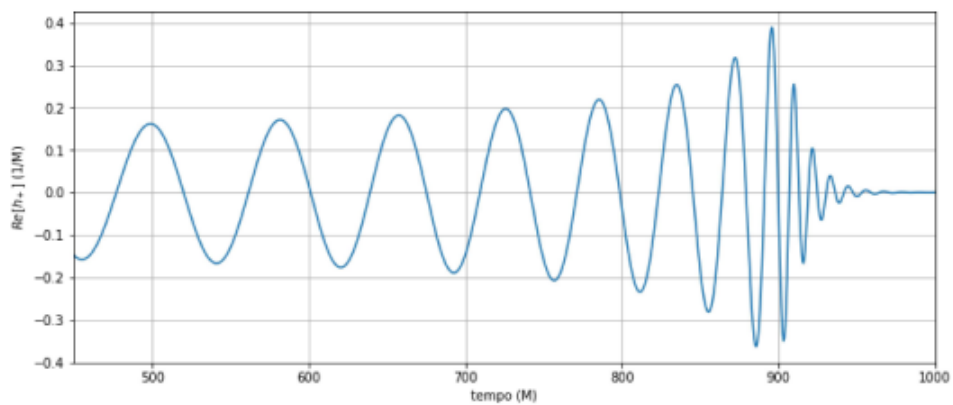


```
EW = pd.read_csv('refwaveform.csv')
```

```
EW.head()
```

	-510.94396316456397	0.0003129123435763458
0	-510.393282	0.000310
1	-509.842601	0.000306
2	-509.291919	0.000302
3	-508.741238	0.000298
4	-508.190557	0.000294

```
plt.figure(figsize=(12, 5))
plt.plot(EW['-510.94396316456397'], EW['0.0003129123435763458'])
plt.xlabel('tempo (M)')
plt.ylabel('$Re[h_+] (1/M)$')
plt.xlim([450, 1000])
plt.grid()
plt.savefig('ew.png')
plt.show()
```



# Referências Bibliográficas

---

- [1] I. Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Daniel Adee, 1846.
- [2] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” *Annalen der Physik*, vol. 17, 1905.
- [3] P. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1948.
- [4] C. W. M. R Arnowitt, S Deser, “Canonical variables for general relativity,” *Physical Review*, vol. 117, 1960.
- [5] Wikipedia, “Stress–energy tensor.” [https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy\\_tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy_tensor). Acesso em: 10/01/2022.
- [6] P. B. Abbot *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical Review Letters*, vol. 116, 2016.
- [7] D. J. James *et al.*, “First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 875, 2019.
- [8] D. E. Neuenschwander, *Tensor Calculus for Physics: A Concise Guide*. Johns Hopkins University Press, 2014.
- [9] C. Rovelli, *General Relativity: The Essentials*. Pearson Education, Inc., 2021.
- [10] S. M. Carrol, *Spacetime and Geometry: an introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 4 ed., 2004.
- [11] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [12] C. F. Gauss, *General Investigations of Curved Surfaces*. Project Gutenberg, 2011.
- [13] B. Riemann, “On the hypotheses wich lie at the bases of geometry,” *Nature*, vol. 8, 1867.
- [14] A. J. McConnell, *Applications of Tensor Analysis*. Dover, 2011.
- [15] *eigenchris*, “Tensor calculus 24: Ricci tensor geometric meaning (sectional curvature),” 2020.
- [16] A. Einstein, “The field equations of gravitation,” *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, 1915.
- [17] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, 2013.
- [18] Wikipedia, “Timeline of fundamental physics discoveries.” [https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline\\_of\\_fundamental\\_physics\\_discoveries#21st\\_century](https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_fundamental_physics_discoveries#21st_century). Acesso em: 10/01/2022.

- [19] N. Lemos, *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007.
- [20] N. P. Neto, *Hamiltonian Formulation of General Relativity*. Livraria da Física, 2020.
- [21] R. Gambini and J. Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity*. Oxford University Press, 2011.
- [22] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [23] M. Bojowald, *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2011.
- [24] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory,” *Physical Review*, 1967.
- [25] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity,” *Physical Review Letters*, vol. 57, 1986.
- [26] T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro, *Numerical Relativity: Solving Einstein’s Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [27] J. S. Bell, “On the einstein-podolsky-rosen paradox,” *Physics Physique*, 1964.
- [28] C. Rovelli, *Reality is not What it Seems*. River Head Books, 2018.
- [29] C. Rovelli, *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge University Press, 2020.
- [30] A. Einstein, “The foundation of the generalised theory of relativity,” *Annalen der Physik*, vol. 17, 1916.
- [31] M. Campanelli *et al.*, “Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, 2006.
- [32] J. M. Bowen and J. York, “Time asymmetric initial data for black holes and black hole collisions,” *Phys. Rev. D*, vol. 21, 1980.
- [33] E. T. Newman and R. Penrose, “An aproach to gravitational radiation by a method of spin coefficients,” *J. Math. Phys.*, vol. 3, 1963.
- [34] LIGO, “Frequently asked questions.” <https://www.ligo.org/science/faq.php>. Acesso em: 10/01/2022.
- [35] N. Choustikov, “The einstein toolkit: A student’s guide,” *arxiv*, 2020.
- [36] B. Wardell, I. Hinder, and E. Bentivegna, “Simulation of GW150914 binary black hole merger using the Einstein Toolkit.” <https://doi.org/10.5281/zenodo.155394>, Sept. 2016.
- [37] E. Evans *et al.*, “Computational relativistic astrophysics with adaptive mesh refinement,” *Phys. Rev.*, 2005.
- [38] LIGO, “Data release for event gw150914.” <https://www.gw-openscience.org/events/GW150914/>. Acesso em: 10/01/2022.