



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física  
Licenciatura em Física

Leandro Moraes Azevedo

## **Harmonia Física: A harmonia dos mundos na concepção musical de Kepler**

Maringá-PR  
Maio de 2021

Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física  
Licenciatura em Física

Leandro Morais Azevedo

## **Harmonia Física: A harmonia dos mundos na concepção musical de Kepler**

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física

Orientador: Professor Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves

Maringá-PR  
Maio de 2021

Leandro Morais Azevedo

# Harmonia Física: A harmonia dos mundos na concepção musical de Kepler

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito para obtenção do título de Licenciado em Física

Aprovado em Maio de 2021.

## Comissão Examinadora

---

Professor Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves  
Orientador – UEM - Universidade Estadual de Maringá

---

Professor Dr. Daniel Gardelli  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

---

Professor Dr. Luciano Carvalhais Gomes  
UEM - Universidade Estadual de Maringá

*Este trabalho é dedicado a minha família,  
amigos, namorada e professores que  
estiveram comigo durante o processo da  
minha formação. Um agradecimento especial  
aos meus pais, que sempre me deram suporte  
e apoio psicológico durante a minha  
trajetória.*

# Agradecimentos

Meu agradecimento especial com certeza vai para minha família e minha namorada – Rita (Mãe), Maurilio (Pai), Laiana (Irmã), Sofia (Namorada) – os quais foram protagonistas no apoio psicológico que tanto precisei durante meu processo de graduação.

Além destes, agradeço aqueles que também me acompanharam durante este tempo, meus amigos pessoais: Leonardo, Felipe, Osmar, Lucas, Luingry e Luís, e aqueles que durante minha graduação tive o prazer de conhecer e com certeza levarei por minha vida toda: Gabriel, João, Elaine e Emanuel.

Devo meu singular agradecimento ao Professor Marcos Cesar Danhoni Neves, o qual me orientou durante toda a minha jornada no grupo PET - Física e não só me orientou nesta monografia, como me inspirou em diversas conversas, debates e indicações durante este processo.

Por fim, um sincero agradecimento ao Professor Daniel Gardelli e ao Professor Luciano Carvalhais Gomes, por aceitarem o convite para participação de minha defesa, além de servirem como catalisadores durante suas aulas para tantas inspirações as quais foram utilizadas para escrever este trabalho.

Para todos os membros da banca, obrigado!

# Resumo

A partir de uma certa idade, quando estamos para decidir nosso futuro acadêmico, é comum ouvirmos a seguinte pergunta: “Você é de Humanas ou de Exatas?”. Trazendo esta questão como referência, utilizamos como base três disciplinas: Física, Matemática e Música, que, quando estão juntas, uma delas parece ser totalmente desconexa das outras duas. Portanto, explorando alguns capítulos da história destas disciplinas, conseguimos verificar como as três se relacionam e se complementam. Com o objetivo principal de compreender a concepção da teoria harmônica de Kepler, quando ele concluiu a ideia da “Música das Esferas”, fizemos uma grande retrospectiva, detendo-nos sobre as principais ideias de Pitágoras e a relação deste e seus discípulos com a Música, a fim de matematizar a mesma. Após esta análise pitagórica, mergulhamos na história de Kepler para compreendermos seu trajeto até o objetivo do trabalho. Assim, tendo revisitado sua história, exploramos especificamente sua lei harmônica e suas motivações para sua construção. Como conclusão, apontamos a importância de conhecermos a História da Ciência, pois além de termos uma visão mais ampla sobre as disciplinas podemos encontrar motivações abstratas que geraram resultados concretos.

**Palavras-Chave:** História da Ciência, Física, Matemática, Música, Kepler, Movimento Planetário, Harmonia

# Abstract

From a certain age, when we are about to decide our academic future, it is common to hear the following question: "Are you Human or Exact?". Bringing this issue as a reference, we used three disciplines as a base: Physics, Mathematics and Music, which, when together, one of them seems to be totally disconnected from the other two. Therefore, by exploring some chapters in the history of these disciplines, we were able to verify how the three relate and complement each other. With the main objective of understanding Kepler's conception of harmonic theory, when he concluded the idea of "Music of the Spheres", we made a great retrospective, focusing on the main ideas of Pythagoras and the relationship between him and his disciples with Music in order to mathematize it. After this Pythagorean analysis, we immerse ourselves in Kepler's story to understand his path to the objective of the monography. Thus, having revisited its history, we specifically explored its harmonic law and its motivations for its construction. As a conclusion, we point out the importance of knowing the History of Science, because in addition to having a broader view of the disciplines, we can find abstract motivations that generated concrete results.

**Keywords:** History of Science, Physics, Mathematics, Music, Kepler, Planetary Movement, Harmony

# Lista de Figuras

2.1	Exemplos de flautas de Divje Babe, ou flautas paleolíticas. . . . .	12
2.2	Esquemática de um monocórdio. . . . .	14
2.3	Monocórdio. . . . .	14
2.4	Exemplo dos intervalos musicais de Pitágoras em um violão. . . . .	15
2.5	Ciclo das quintas. . . . .	16
2.6	Escala Diatônica. . . . .	17
2.7	Escala Temperada. . . . .	18
2.8	Relação dos intervalos de oitava x frequência. Dados da Tabela 2.4 . . . .	19
3.1	Diagrama do modelo copernicano. . . . .	21
3.2	Diagrama de Kepler para as conjunções de Júpiter e Saturno. . . . .	22
3.3	Diagrama de Kepler para os sólidos representando as órbitas planetárias. .	23
3.4	Capa da obra <i>Mysterium Cosmographicum</i> , de Johannes Kepler. . . . .	24
3.5	Capa da obra <i>Astronomia Nova</i> de Johannes Kepler. . . . .	27
3.6	Modelo Tyconico. . . . .	28
3.7	Esquema usado por Gilbert para representar o magnetismo terrestre. . . .	29
3.8	Esquema utilizado por Kepler exibindo a variação assimétrica, que causa o conflito entre a lei das áreas e o paradigma circular. . . . .	30
3.9	Modelo geométrico utilizado por Kepler que fazia o uso de epiciclos. . . . .	31
4.1	Capa da obra <i>Harmonices Mundi</i> , de Johannes Kepler. . . . .	32
4.2	Notas musicais correspondentes aos planetas. . . . .	35



# Lista de Tabelas

2.1	Frequências e notas musicais . . . . .	15
2.2	Comprimentos e intervalos musicais. . . . .	16
2.3	Notas de referências e quintas. . . . .	17
2.4	Intervalos musicais, frequências e afinações naturais e temperadas. . . . .	18
3.1	Planetas e respectivos poliedros segundo o <i>Mysterium Cosmographicum</i> , de Johannes Kepler. . . . .	23
4.1	Planetas e respectivas notas musicais. . . . .	34
4.2	Planetas e períodos translacionais. . . . .	36

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Pitágoras e a Música</b>	<b>11</b>
2.1	Introdução . . . . .	11
2.2	A música como disciplina . . . . .	12
2.3	Início de seus estudos . . . . .	13
2.4	Escala Diatônica . . . . .	16
2.5	Escala Temperada . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Johannes Kepler e sua trajetória</b>	<b>20</b>
3.1	Introdução . . . . .	20
3.2	História Acadêmica . . . . .	20
3.3	<i>Mysterium Cosmographicum</i> . . . . .	21
3.4	<i>Astronomia Nova</i> . . . . .	26
<b>4</b>	<b><i>Harmonices Mundi</i></b>	<b>32</b>
4.1	Introdução . . . . .	32
4.2	A música das esferas . . . . .	33
4.3	Terceira Lei . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Legado de Kepler</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>41</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>

# 1 Introdução

A partir de uma certa idade, quando estamos para decidir nosso futuro acadêmico, é comum ouvirmos a seguinte pergunta: “Você é de Humanas, ou de Exatas?”. Um dos objetivos deste trabalho é ampliar a visão sobre esta pergunta, a fim de trazer uma visão mais inter e transdisciplinar sobre os meios acadêmicos.

Para alcançar esta interpretação, vamos explorar conceitos vindo de três disciplinas, Física, Matemática e Música. É de conhecimento popular, que destas três disciplinas, duas delas chegam a ser confundidas como as mesmas (Física e Matemática) e a outra não parece ter absolutamente relação alguma com as demais. Porém, é analisando capítulos e trechos da história destas disciplinas que podemos ver o quão equivocada é essa concepção.

De início, faremos uma análise sobre a relação de Pitágoras e seus discípulos com a Música, examinando como a mesma foi matematizada através dele, e assim compreendendo os conceitos básicos de teoria musical para formação de escalas e modelos que conhecemos até hoje, e também suas relações com as frequências físicas, sem descartar suas ideias filosóficas acima de tudo isso.

Após termos este alicerce, mergulharemos na história, motivação e concepção da obra *Harmonices Mundi*, de 1619 escrita por Johannes Kepler. Para este estudo, descreveremos um resumo da história de vida de Kepler, compreendendo o contexto histórico que estava inserido, a fim de conceber suas motivações até a concepção de sua Lei Harmônica. Conhecendo sua história e motivação, faremos uma análise de perto sobre sua teoria, procurando entender seu funcionamento. Assim, conferindo as conclusões de Kepler a partir dela, enxergando melhor como a Música e Matemática serviram de base para sua construção.

Por fim, concluiremos focando o olhar na abstração de suas motivações na hora de seus estudos até sua concepção, trazendo mais exemplos similares ao decorrer da história, com o propósito de demonstrar como a construção de leis e teorias que conhecemos hoje em dia, contém um caráter muito mais metafísico e místico do que normalmente é discutido.

## 2 Pitágoras e a Música

### 2.1 Introdução

Física, Matemática e Música, de onde devemos partir para encontrar uma relação entre essas áreas de estudo que aparentam ser tão distintas? Para explorarmos a conexão presentes nessas disciplinas, devemos estar contextualizados respectivamente com suas histórias, pois observando suas origens conseguimos enxergar que estas nem sempre estiveram distantes como superficialmente aparentam estar. Assim sendo, faremos durante este trabalho grandes resgates históricos de importantes marcos para essa descoberta. Neste capítulo, trataremos da primeira referência mais importante da sistematização matemática da música, Pitágoras, seus discípulos e sua relação com a música.

Quando buscamos sobre a história da ciência no período da antiguidade, somos apresentados a grandes figuras do ramo da filosofia. Dentre estas e seus pensamentos, observamos que havia uma grande busca por um certo tipo de conhecimento, que levaria os homens ao início e essência de tudo que conhecemos, como (SANTOS, 1990, p. 1) afirma:

*"A filosofia, sob a singular luminosidade de seu momento inaugural, manifesta desde logo múltiplas tentativas de enunciação de um princípio primeiro, único, elucidativo da ordem vigente no universo. Os primeiros pensadores, imersos ainda no mistério, atônitos, buscam a postura original, capaz de gerar esse novo dizer: especulando "sobre a natureza", visam ao que nela é essencial e permanente."*

Dentre estas personalidades, o fundador da famosa escola pitagórica, Pitágoras de Samos, junto com seus discípulos, (assim como os anteriores apresentados) buscavam e acreditavam nesta matéria primordial. Eles afirmavam que a resposta para todas as perguntas da época relacionada a esta essência provinha dos **números**, sendo estes o domínio do universo, a substância de tudo que conhecemos. Suas conclusões foram base para todas as ideias e pensamentos de sua escola (ARISTÓTELES, p. 5):

*"Os assim chamados pitagóricos, tendo-se dedicado às matemáticas, foram os primeiros a fazê-la avançar. Nutridos por ela, acreditaram que os seus princípios eram o princípio de todas as coisas."*

Os pitagóricos acreditavam que a matemática era real, imutável, onipresente, a obra mais perfeita existente no universo, a qual os seres humanos não eram capazes de compreender sua beleza por completo. Desta premissa, sua escola possibilitou a descoberta de diversas áreas através dos números e seus estudos acerca deles, dentre elas: Números Figurados, Números Perfeitos, Teorema de Pitágoras e o mais importante para o nosso trabalho: a análise e sistematização das harmonias entre os diferentes sons ouvidos pelo ser humano.

## 2.2 A música como disciplina

A música é uma arte presente na humanidade desde seus primórdios. Observamos registros históricos de flautas e instrumentos de percussão de no mínimo a 40.000 AEC durante a era Paleolítica, como por exemplo as flautas de Divje Babe.

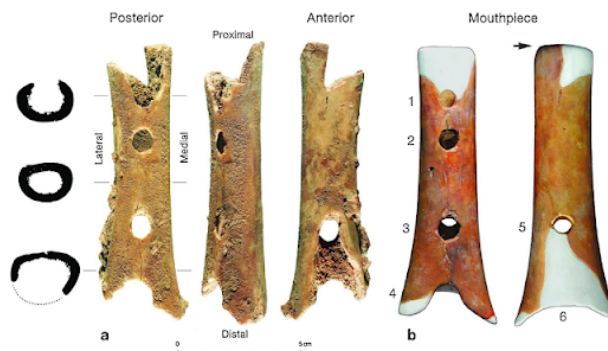


Figura 2.1: Exemplos de flautas de Divje Babe, ou flautas paleolíticas.

Fonte: <<https://prehistorialdia.blogspot.com/2011/01/la-flauta-de-divje-babe.html>> Acesso em: 1 fev. 2021

Essa arte apresenta um papel fundamental para a expressividade humana durante sua história. Logo não foi diferente durante a era antiga, (CERQUEIRA, 2017, p. 4-5) discorre sobre:

*"O mais singular da cultura musical grega são as significações que o imaginário helênico atribui às práticas musicais, ao som, à voz, ao canto, ao ritmo e à harmonia daí decorrendo um lugar especial reservado no sistema educativo. A própria etimologia do significante mousike é bastante expressiva a este respeito. Mousike, feminino substantivado do adjetivo mousikos, significa musical no sentido de "das Musas", portanto, o que relaciona às Musas, filhas de Zeus e Mnemosine, guardiãs e inspiradoras de todas as atividades intelectuais e artísticas que, caracterizando o espírito humano, são ausente entre animais."*

Ao contrário da atualidade, em que a música, como disciplina de estudo, carece do mínimo, sendo em sua maior parte do tempo colocada como sombra de outras disciplinas relacionadas a artes, durante a era antiga o cenário era expressivamente diferente, visto

que esta fazia parte de um dos principais currículos acadêmicos proposto por Santo Agostinho para os estudos da época. Para Agostinho, era necessário para época que os acadêmicos soubessem ler e interpretar as escrituras divinas, para isto, agrupou as disciplinas consideradas necessária em 2 grupos, o *Trivium* composto por: gramática, dialética e retórica; e o *Quadrivium*: aritmética, geometria, música e astronomia. O *trivium* partia da ideia de ensinar as leis do pensamento e suas expressividades. Já o *quadrivium* buscava o conhecimento abstrato, com o objetivo de alcançar os entendimentos espirituais e rejeitar os supersticiosos. Dentre estes, o papel que a música desempenhava não era como um objeto de canto em si, mas sim suas relações com a aritmética, a harmonia dos astros e com as leis da acústica.

## 2.3 Início de seus estudos

Definida como a arte de combinar sons e silêncio fazendo uma combinação entre melodia, harmonia e ritmo, a música era interpretada pelos pitagóricos, como um sinal de harmonia do cosmos com o objetivo de conseguir o equilíbrio interno. Portanto, dentre esta divisão, uma delas em específico intrigou Pitágoras: a harmonia.

A relação entre Pitágoras e a música começa logo cedo quando este apresentava um gosto e habilidade em suas composições feitas para o instrumento lira. A música tinha diversos significados para ele, como explica (PEREIRA, 2013, p. 16):

*"[...] a purificação da mente, a cura de doenças, o domínio da raiva e da agressividade do homem, dentre outras coisas. Com o auxílio da música, Pitágoras criava um ambiente de harmonia e tranquilidade para passar seus ensinamentos aos discípulos"*

Quando começou seus estudos relacionados a este ramo, Pitágoras tinha como objetivo, entender qual era a relação entre um som e outro para que estes fossem interpretados como agradáveis aos nossos ouvidos. Para alguns historiadores, estes questionamentos começaram a surgir, quando ele começou a observar os sons produzidos pela batida de um martelo em diferentes chapas de metal enquanto ele passava por uma oficina. Tentando encontrar uma relação entre o tamanho das chapas e as consonâncias dos sons, observou que os sons eram agradáveis aos ouvidos quando as chapas tinham tamanho de proporção **1** para **2**, o que futuramente viria a compreender que isto é causado porque a frequência da vibração em uma chapa é o **dobro** da outra.

Sabendo-se o funcionamento de uma corda, e como esta vibra a uma frequência em função de seu comprimento, Pitágoras para continuar seus estudos de harmonia, construiu um instrumento constituído de apenas uma corda e duas estruturas delimitando o seu tamanho, chamado monocórdio.

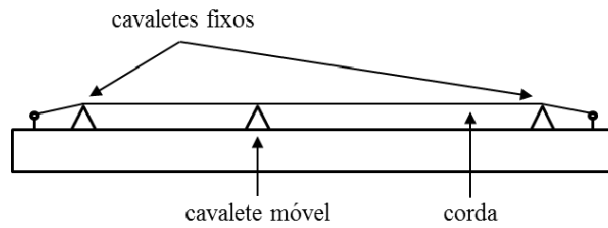


Figura 2.2: Esquemática de um monocórdio.

Fonte: <[https://www.researchgate.net/figure/O-monocordio-ou-canon\\_fig11\\_312106396](https://www.researchgate.net/figure/O-monocordio-ou-canon_fig11_312106396)>



Figura 2.3: Monocórdio.

Fonte: <<https://professorabimael.com.br/tag/acustica/feed/>>

Dividindo a corda do instrumento em **12** partes iguais, o filósofo deu início ao estudo da harmonia entre as notas de acordo com estas divisões. Para entendermos os resultados provindos de seus estudos com o monocórdio, consideramos  $L$  o comprimento inicial da corda, ou seja, tocada “solta”. Assim, Pitágoras observou que quando pressionava a corda, dividindo-a nas razões de  $\frac{L}{2}$ ,  $\frac{2L}{3}$  e  $\frac{3L}{4}$ , o som obtido era considerado consoante, em outras palavras, o mais belo agradável aos nossos ouvidos, coincidindo com o som que ouvia do martelo colidindo com as placas de metal, que em seu comprimento, respeitavam as mesmas proporções. Em termos de frequência, observamos que:

$$f \propto \frac{1}{L} \quad (2.1)$$

logo,

$$f = A \frac{1}{L} \quad (2.2)$$

onde  $f$  é a frequência,  $A$  é a constante de proporcionalidade e  $L$  é o comprimento da corda, caso façamos o uso dos resultados obtidos, encontramos:

$$2f = A \frac{1}{L/2} \quad (2.3)$$

$$\frac{3}{2}f = A \frac{1}{2L/3} \quad (2.4)$$

$$\frac{4}{3}f = A \frac{1}{3L/4} \quad (2.5)$$

Portanto considerando a frequência  $f = 440Hz$  (Lá 4) a frequência onde a corda está solta, ou seja para  $L = 1$ , encontraremos, conforme os valores da Tabela 2.1:

Comprimento $L$	Frequencia $f$ (Hz)	Nota musical
1	440	Lá 4
$\frac{1}{2}$	880	Lá 5
$\frac{2}{3}$	660	Mi 5
$\frac{3}{4}$	586	Ré 5

Tabela 2.1: Frequências e notas musicais

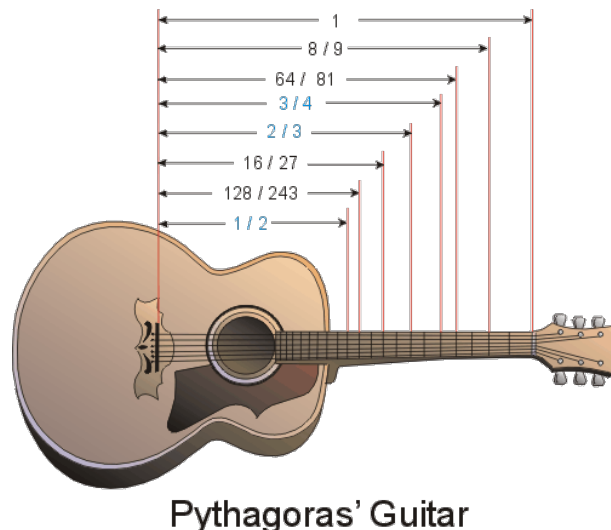


Figura 2.4: Exemplo dos intervalos musicais de Pitágoras em um violão.

Fonte: <<https://faraday.physics.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Vibrations/Vibrations.html>>

Posteriormente na história da música, iremos entender que os intervalos entre as notas Lá e Mi ( $2/3$ ), constituem em uma quinta justa, já entre Lá e Ré ( $3/4$ ) temos uma quarta justa. Ambos intervalos são considerados intervalos perfeitos e o ápice da consonância, afirma (VIEIRA, 2015, p. 40):

*"Um intervalo consonante, ou consonância, é uma combinação de dois sons, o que por si só produz um efeito mais ou menos completo e satisfatório, ou seja, que não exige necessariamente que seja seguido por alguma outra combinação. [...]. Os intervalos perfeitos formam o que chamamos de consonâncias perfeitas"*

Não esquecendo da primeira relação destacada na tabela acima, que foi a primeira a ser considerada consoante, devemos observar que ao dividirmos o comprimento  $L$  ao meio,



obtemos a mesma sonoridade porém mais aguda, o que futuramente viria a ser chamado de intervalo de oitava. Sendo assim, caso façamos o mesmo processo com as outras relações a fim de obter as mesmas notas em frequências mais agudas, obtemos os valores constantes na Tabela 2.2:

Comprimento $L$	Intervalo Musical
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$	Oitavas
$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots$	Quintas
$\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$	Quartas

Tabela 2.2: Comprimentos e intervalos musicais.

## 2.4 Escala Diatônica

A partir das relações obtidas entre quintas, quartas e oitavas, utilizaremos um método muito bem estabelecido entre o meio musical, conhecido como o ciclo das quintas (Figura 2.5), que consiste em adotar uma nota como referência, logo após identificar sua quinta, em seguida usando esta nova nota encontrada, encontrar a quinta novamente, e assim, repetir o processo.

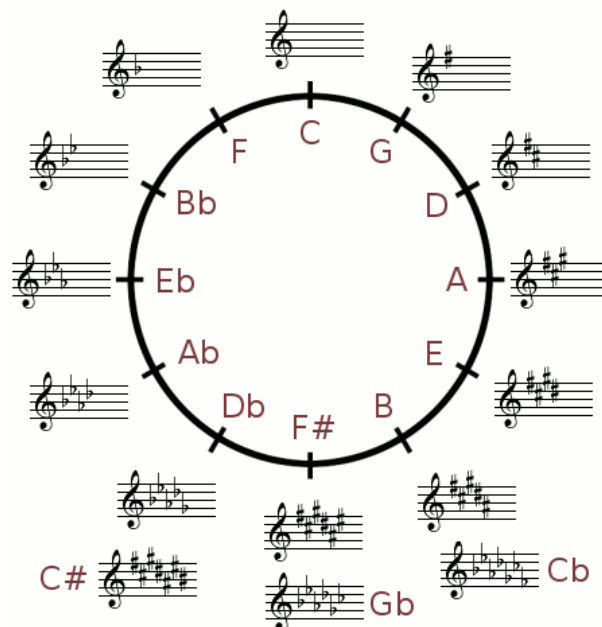


Figura 2.5: Ciclo das quintas.

Fonte: <<https://www.adultpianolesson.com/wp-content/uploads/2011/10/circle-keySIGs.gif>>

Então, para simplificar, consideramos como notas iguais aquelas que apresentam o intervalo de oitava (cujas notas são as mesmas, porém mais agudas). Assim, utilizando a

nota Dó como referência, encontraremos as relações baseadas no ciclo das quintas (Tabela 2.3):

Notas de referência	Quinta
Dó	Sol
Sol	Ré
Ré	Lá
Mi	Si

Tabela 2.3: Notas de referências e quintas.

É importante lembrar, que a nota Fá (cujas quintas são Dó e Sol), também é encontrada nas relações de consonância fazendo um intervalo de Quarta justa com o Dó. Assim sendo, encontramos a famosa escala diatônica de 7 notas ou 8, caso o intervalo de oitava esteja incluso (Figura 2.6).

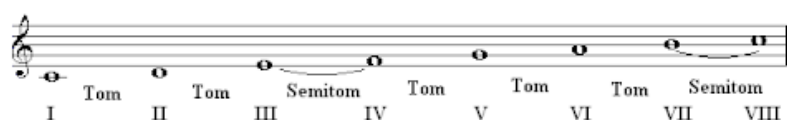


Figura 2.6: Escala Diatônica.

Fonte: <<https://bit.ly/3tDoZvk>>

## 2.5 Escala Temperada

Com o fim da Idade Média e a chegada do Renascimento, a humanidade passou por revoluções e mudanças em diversas áreas do conhecimento, dentre elas, as artes. Sendo assim, visto que a escala diatônica era construída em cima de relações entre uma nota de referência, havia uma grande dificuldade nas afinações dos instrumentos na época, pois para soarem consoantes juntos, todos teriam que partir desta mesma nota de base, o que de certa forma, era inviável de acordo com a estrutura e construção do instrumento. Além dos instrumentos e suas consonâncias juntas, o mesmo problema aparecia durante a composição e reprodução das obras, as quais ficavam limitadas apenas a uma tonalidade, caso contrário, estas soariam dissonantes, desafinadas.

Observando que a escala derivada das relações pitagóricas apresentava certos desvios e ‘falhas’, surgiu uma necessidade de uma nova escala, que fizesse o papel da padronização entre esses desvios e apresentassem intervalos equidistantes independente da tonalidade proposta. Assim, buscando uma divisão perfeita entre os intervalos das notas já conhecidas, surge a chamada escala temperada.

A escala temperada faz o uso de cinco notas adicionais a escala diatônica, sendo estas notas denominadas acidentes musicais, podendo ser classificadas como sustenidos (#) ou bemóis (b) (Figura 2.7).

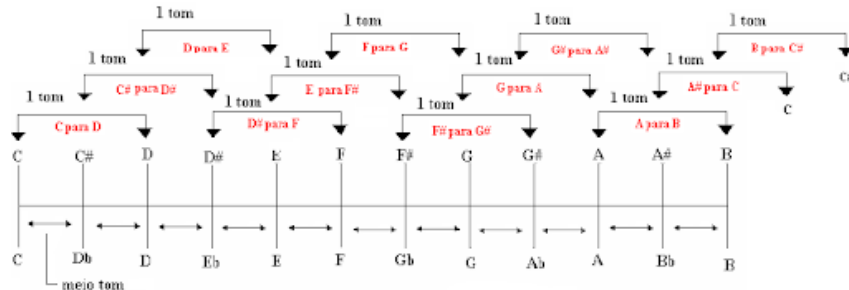


Figura 2.7: Escala Temperada.

Fonte: <<https://musica.culturamix.com/blog/wp-content/uploads/2020/05/Notas-Enarm%C3%B4nicas.png>>

Esta escala, cumprindo seu objetivo, era equidistante em relação às notas apresentadas. Então, sendo  $r$  o fator de relação entre suas distâncias, teremos em termos de frequência:

$$\begin{aligned}
 f_0 & \\
 f_1 &= r f_0 \\
 f_2 &= r f_1 = r^2 f_0 \\
 f_3 &= r f_2 = r^3 f_0 \\
 &\dots \\
 f_{12} &= r^{12} f_0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Lembrando que,  $f_{12} = 2f_0$ , pois a frequência de um intervalo de oitava ainda se preserva como o dobro, então teremos que:

$$r^{12} f_0 = 2f_0 \Rightarrow r = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1,0594631\dots \tag{2.7}$$

Portanto teremos os seguintes desvios em relação à escala pitagórica (Tabela 2.4):

Nota Musical	Intervalo Musical	Afinação Natural	Frequência Natural (Hz)	Afinação temperada	Frequência Temperada (Hz)
Ré	Segunda maior	1,12	148,50	1,12	148,10
Mí	Terça maior	1,25	165,00	1,26	166,32
Fa	Quarta perfeita	1,33	175,95	1,33	176,22
Sol	Quinta perfeita	1,5	198,00	1,49	197,73
Lá	Sexta maior	1,66	220,04	1,68	222,02
Si	Sétima maior	1,87	247,50	1,88	249,21
Dó	Oitava perfeita	2	264,00	2	264,00

Tabela 2.4: Intervalos musicais, frequências e afinações naturais e temperadas.

Fonte: <[http://www.das.inpe.br/~alex/FisicadaMusica/fismus\\_escalas.htm](http://www.das.inpe.br/~alex/FisicadaMusica/fismus_escalas.htm)>

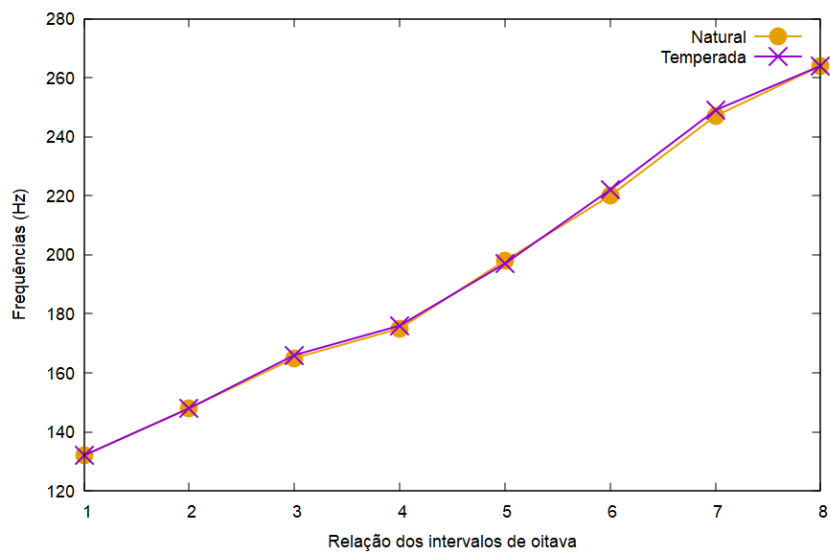


Figura 2.8: Relação dos intervalos de oitava x frequência. Dados da Tabela 2.4

Fonte Própria

Assim como a maioria das revoluções entre as áreas de conhecimento, esta escala foi amplamente criticada. Diante todas estas críticas, um dos maiores músicos da história, J. S. Bach, com toda sua experiência, demonstrou em sua obra **O Cravo Bem-Temperado**, o poder e a versatilidade possibilitada pela nova escala. Por ser uma figura extremamente conhecida, Bach, apesar das críticas, concluiu seu objetivo, sendo extremamente influente, mudando e revolucionando o panorama musical vigente.

## 3 Johannes Kepler e sua trajetória

### 3.1 Introdução

Agora que está bem estabelecida a matematização da música e a relação que ambas disciplinas têm historicamente, podemos explorar um interessante capítulo na história da ciência e da astronomia que provém diretamente destas relações discutidas anteriormente. Para isto, iniciaremos fazendo uma breve e resumida análise sobre a história de vida acadêmica do cientista alemão Johannes Kepler, o qual protagonizou este marco.

### 3.2 História Acadêmica

Nascido no ano de 1571 na cidade de Weil der Stadt, na Alemanha, Kepler em diversas pesquisas bibliográficas é descrito como alguém muito curioso, amante de enigmas e paradoxos. Tendo desde sempre a matemática e suas diversas ramificações como sua área de estudo favorita, Kepler iniciou seus estudos na cidade de Leonberg em 1578, onde sempre esteve diretamente envolvido com os estudos protestantes, pois seu contexto e sua época eram de grande influência da igreja. Durante sua estadia na cidade, dois eventos foram de grande importância para sua formação: a passagem de um cometa aos seis anos de idade em 1577, um eclipse lunar aos seus nove anos de idade em 1580.

Devido a grande influência e suas condições familiares, Kepler cursou um seminário teológico o qual passou dos treze aos dezessete anos lá. Apesar de um currículo muito extenso e rígido, o cientista se destacava por sua capacidade de raciocínio e uma grande devoção religiosa. Seu próximo passo acadêmico foi no ano de 1589 na Universidade de Tübingen, onde realizou diversos estudos relacionados à Filosofia vinda de Aristóteles. Este período é de certa forma incerto, porém acredita-se e discute-se que foi durante este período, onde teve seus estudos focados em religião e astrologia, que o cientista começou a desenvolver suas maiores influências (Pitágoras, Platão, entre outras), que futuramente serviriam de base para criação de suas obras.

Enquanto estava em Tübingen, Kepler teve contato com diversos professores e mestres, entre os quais estava Mästlin. Sendo professor de astronomia e matemática na universidade, Mästlin foi sem sombra de dúvidas a figura mais importante e influente para Kepler durante este período. Em algumas bibliografias, encontramos cartas trocadas

por eles, o que mostra como o mestre foi o primeiro a enxergar seu potencial e realmente incentivar Kepler em seus estudos astronômicos. Mästlin nesta época, havia estudado as medidas de paralaxe de dois cometas, concluindo que esses eventos eram supralunares, ou seja, para além da distância da Lua, o que feria rigorosamente os estudos aristotélicos sobre tais eventos. Assim, em busca de encontrar uma justificativa para estes movimentos controversos dos cometas, Mästlin recorreu ao recente **modelo copernicano**. Este fato, é de grande importância para Kepler, pois virá a explicar que o apreço do cientista pelo modelo heliocêntrico de Copérnico provinha de seu mestre mais influente durante este período, mesmo sabendo que o modelo era considerado conflitante com os ensinamentos bíblicos, o que de certa forma tornava-o proibido de ser debatido abertamente.

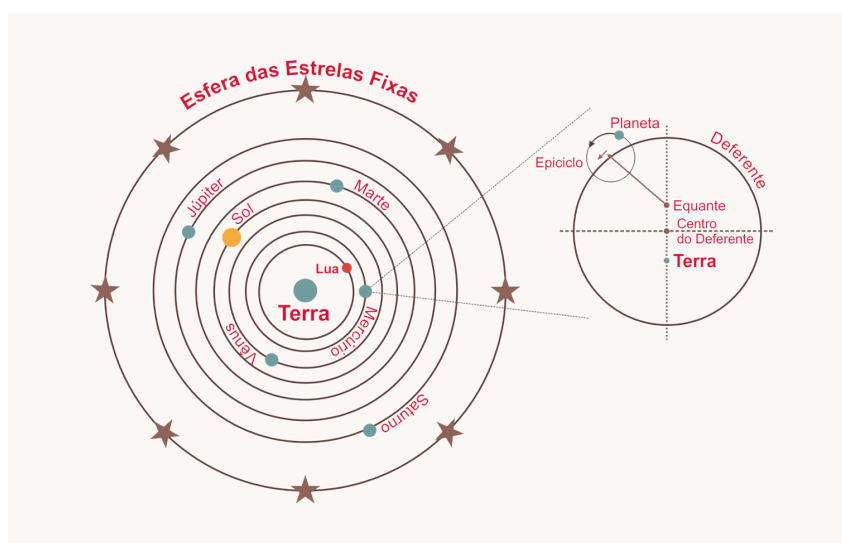


Figura 3.1: Diagrama do modelo copernicano.

Fonte: <<https://casadafisica.wordpress.com/historia/johannes-kepler/>> Acesso em: 1 fev. 2021

### 3.3 *Mysterium Cosmographicum*

No ano de 1593, na cidade de Graz, província austríaca da Estíria, após o falecimento de um importante professor de matemática da universidade protestante da cidade, um novo candidato ao cargo foi solicitado da universidade de Tübingen. Kepler foi o indicado. Tendo em mente que sua formação em Tübingen fora com propósitos religiosos, Kepler impôs como condição para aceitar o cargo, que lhe dessem futuramente a permissão de retornar a sua antiga universidade para finalizar seus estudos teológicos. Assim foi feito.

Durante este período (na maioria do tempo conturbado e difícil) como professor na universidade de Graz, em uma pausa para férias, Kepler deu início aos estudos e cálculos para construção de sua primeira obra, que foi considerada um grande marco para a ciência e para a astronomia, *Mysterium Cosmographicum*. Sua premissa começou ainda durante as aulas, em que em uma delas, esboçou um diagrama que continha uma relação muito

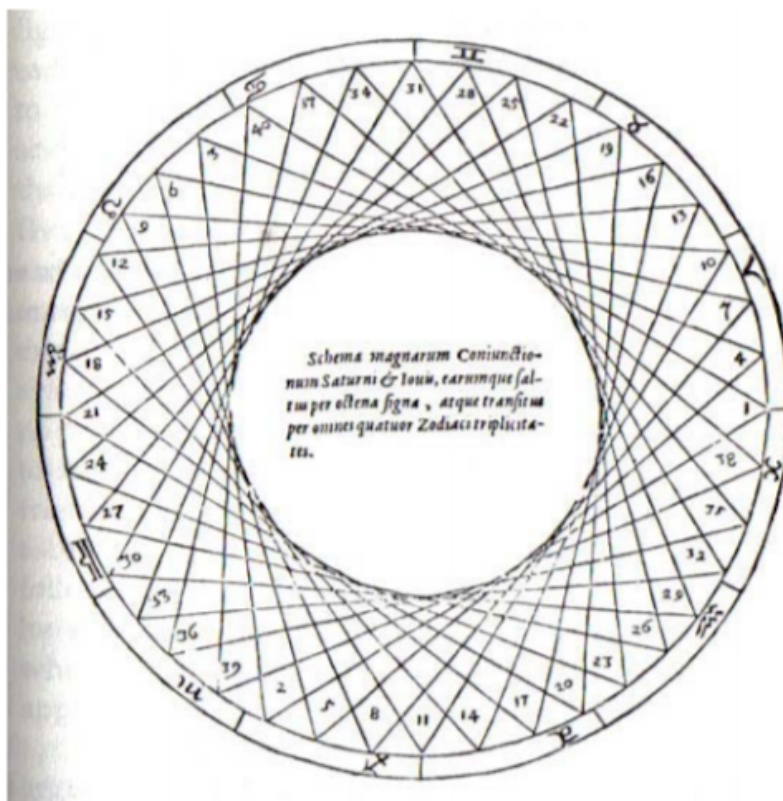


Figura 3.2: Diagrama de Kepler para as conjunções de Júpiter e Saturno.

Fonte: (CASEMIRO, 2007)

curiosa (Figura 3.2).

A ideia do diagrama era simples: esboçar um conjunto de triângulos equiláteros em que a base é limitada por um círculo interno e sua extremidade por um círculo externo. A partir disso, se fizermos uma análise de proporção dos raios do círculo interno e externo, o valor será muito próximo da mesma relação encontrada para os orbes de Júpiter e Saturno. Assim, Kepler supôs que os outros planetas deveriam seguir esta mesma coerência, porém para formas geométricas diferentes. Após incansáveis cálculos com diferentes planos e sólidos, Kepler finalmente encontra as relações de cada planeta e suas orbes com seu respectivo poliedro, uma relação que viria ser base para escrita de seu livro (Tabela 3.1).

É importante ressaltar que Kepler nos deixa bem claro a sua visão não material sobre os orbes nos céus, visto que caso fossem providos de matéria, estes viriam a impedir a passagem de outros corpos, o que na visão do astrônomo era absurdo.

Durante a redação de seu trabalho (Figura 3.4), Kepler se preocupou especificamente em atribuir uma causalidade para as quais o número, os tamanhos e os movimentos dos planetas são como os observados. O astrônomo se dizia ter recebido sinais divinos, e que não conseguia expressar tamanha felicidade por encontrar tais relações, declamando que sozinho nunca seria possível, e que tal feito era resposta para suas orações, as quais sempre pediu que fosse respondido caso as ideias de Copérnico fossem coerentes. Kepler

sabendo a fonte e conhecendo a maneira em que foram encontrados os dados os quais estava comparando, acreditava que os desvios e irregularidades nos resultados eram principalmente por medições imprecisas, causadas pelo uso da Terra e não do Sol (como o mesmo sugeria) como orbe central.

<b>Planeta mais externo</b>	<b>Poliedro</b>	<b>Planeta mais interno</b>
Saturno	Cubo	Júpiter
Júpiter	Tetraedro	Marte
Marte	Dodecaedro	Terra
Terra	Icosaedro	Vênus
Vênus	Octaedro	Mercúrio

Tabela 3.1: Planetas e respectivos poliedros segundo o *Mysterium Cosmographicum*, de Johannes Kepler.

Fonte: (CASEMIRO, 2007, p. 69)

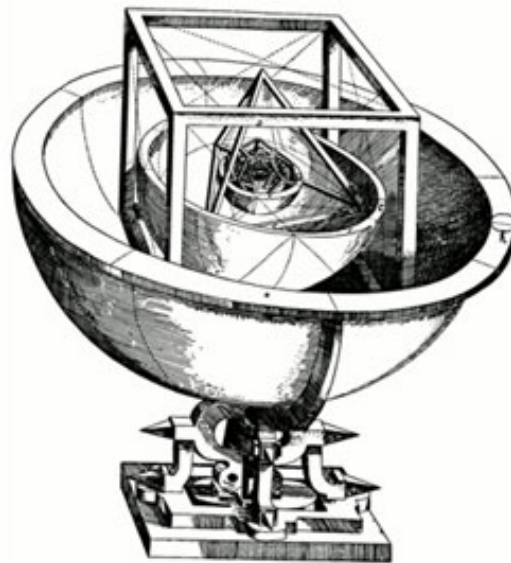


Figura 3.3: Diagrama de Kepler para os sólidos representando as órbitas planetárias.

Fonte: <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>> Acesso em: 2. fev



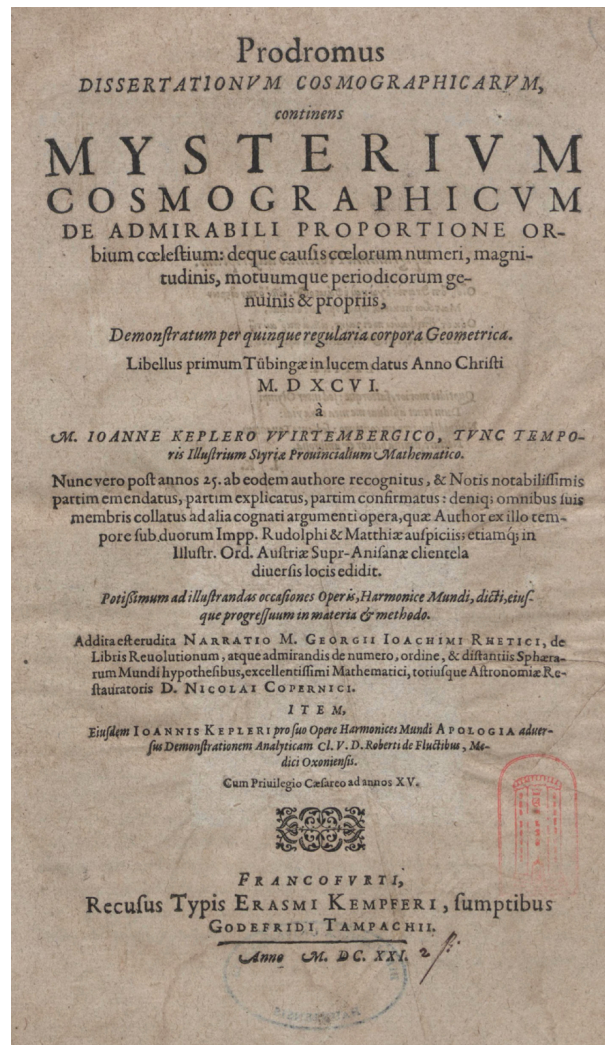


Figura 3.4: Capa da obra *Mysterium Cosmographicum*, de Johannes Kepler.

Fonte: <<https://bit.ly/3x6Uq3z>> Acesso em: 3 fev. 2021

Tendo publicado e ele mesmo divulgado seu trabalho, Kepler recebeu diversas respostas de importantes figuras científicas da época. Dentre elas, estava outro personagem essencial para o andamento de seus estudos, Tycho Brahe. Tycho foi um renomado e importante astrônomo de sua época, e era principalmente conhecido por sua grande quantidade e precisão em seus dados astronômicos, visto que ele possuía excelentes aparelhos de observação. O astrônomo redigiu uma carta expondo suas opiniões sobre o trabalho de Kepler, onde apontava pontos de discordância e concordância de acordo com sua visão. Apesar de algumas incompatibilidades com seus ideais, Brahe via em Kepler um grande potencial, principalmente matemático em sua obra, assim levando-o a oferecer ao jovem, um cargo de ajudante em seus trabalhos. Kepler então, sofrendo desavenças religiosas na cidade de Graz e sabendo que os pontos negativos de seu trabalho provinham dos dados imprecisos, acolheu a oportunidade do emprego.

O interesse de Tycho pelo trabalho e pelas habilidades de Kepler, estava especificamente relacionado a parte técnica e matemática de seus estudos. Brahe foi primeiramente

reconhecido por seu trabalho *De Stella Nova*, onde apresentava uma descoberta, fundamentada por dados empíricos de uma “nova estrela”, cuja mesma já tinha sido observada por diversos astrônomos, dentre eles Mästlin. Essa descoberta era de extrema importância, pois assim como nos estudos de Mästlin sobre paralaxe, deduzia que essa “estrela” estaria no mundo supralunar, o que como já citado, entrava em grande conflito com crenças vigentes na época. Mesmo reconhecendo os erros do modelo de Ptolomeu, Tycho não abandonou sua crença no modelo aristotélico, como relata (MEDEIROS, 2002, p. 20):

*"Eu acreditava que os corpos que caem, caem porque precisam realizar seu intento de buscarem o centro do Universo, o centro da Terra."*

Após o sucesso de sua obra, Brahe abriu um caminho muito maior para os estudos dos astros. Sempre carecendo de um teor técnico em suas descobertas, o astrônomo discordava de um ponto crítico no sistema planetário copernicano, o movimento da Terra. Então, ele próprio, inspirado por modelos já vistos anteriormente na era antiga, criou seu próprio sistema planetário, que ficou conhecido como sistema ticônico. Sua premissa básica era que todos os planetas giravam centrados no Sol, e este girava com seu centro na Terra, que não continha nenhum movimento. Foi durante a elaboração de seu próprio sistema, que Tycho, acreditando resolver as inconsistências de outros modelos, encontrou uma grande dificuldade em explicar a causa para Marte e Sol não se colidirem, visto que diante suas previsões, suas órbitas se cruzavam em um certo momento. Assim, buscando um teor técnico para seu trabalho, Tycho encontrou Kepler.

Tycho logo de início deixou este problema da órbita a par de Kepler. Porém, esta não foi uma tarefa rápida, levando em consideração que o real objetivo de Kepler eram os dados que Tycho possuía. Durante a parceria, ambos se encontraram em um caminho diferente para a elaboração de seus estudos. Kepler, iniciava seus estudos a partir de hipóteses e buscava dados que pudessem reforçar ou refutar suas teorias. Já Tycho, fazia o caminho inverso, buscando primeiro a fonte de dados e então uma elaboração teórica em cima destes dados.

Por conta dessas incompatibilidades, a relação de ambos se desgastou com o tempo. Brahe conhecia Kepler suficientemente bem para entender como o astrônomo não abandonaria sua visão copernicana, portanto, fez o possível para dificultar o acesso de Kepler à seus valiosos dados, resultados de vinte e cinco anos de observação. No ano de 1601, com o falecimento de Tycho Brahe, Kepler teve enfim acesso completo aos dados mais precisos do ex-companheiro.

Portanto, com essa nova gama de possibilidades, novas dúvidas surgiram para Kepler e seu atual modelo previsto em seu último trabalho, dúvidas essas que foram sementes para uma nova etapa em seus trabalhos.

### 3.4 *Astronomia Nova*

Sendo descrito em sua última obra como centro geométrico e físico do mundo, fonte da luz e do calor e causa dos movimentos celestes, o Sol é um dos pontos iniciais para a revolução que Kepler causou na astronomia. Assim como visto anteriormente, o astrônomo era guiado pela causalidade dos fenômenos, o que possibilitou uma visão física sobre a Astronomia, a qual a partir deste momento seria considerada a “Física dos Céus”. Foi partindo deste ponto de vista, que Kepler lidou (diante de suas próprias declarações) com sua guerra travada contra Marte e seu movimento, a qual seria tema principal de sua próxima obra: *Astronomia Nova ‘explicando as causas’ ou física celeste apresentada através de comentários sobre os movimentos da estrela Marte segundo as observações do homem de ilustre família Tycho Brahe* (Figura 3.5), ficando conhecido apenas como *Astronomia Nova*. Observando o título, enxergamos como Kepler tinha orgulho deste novo capítulo da astronomia (descrita pelo mesmo como ‘física celeste’) que sua obra viria a construir, ainda destacando não só no título como durante a obra, a importância de Brahe para suas conclusões, como traduz (ITOKAZU, 2006, p. 69):

*"Em 1597, eu escrevi a Tycho Brahe pedindo a sua opinião sobre o meu pequeno livro [o Mistério cosmográfico] e quando, respondendo, ele mencionou entre outras coisas as suas próprias observações, me inflamou de um imenso desejo de vê-las. Além disso, Tycho, que era com efeito uma grande parte do meu destino, não cessou desde então de me convidar para encontrá-lo. E como eu estava apreensivo com a distância do lugar, eu novamente atribuo à providência divina que ele tenha vindo para a Boêmia. Eu, assim, fui visitá-lo no início de 1600 com a esperança de aprender as verdadeiras excentricidades dos planetas. (...) Retrocedendo, penso que foi graças à providência divina que eu cheguei ao mesmo tempo em que ele se dedicava ao planeta Marte, cujos movimentos proporcionam a única via de acesso possível aos segredos ocultos da astronomia, sem o qual nós permaneceríamos para sempre ignorantes sobre esses segredos. <sup>1</sup>"*

---

<sup>1</sup>*Cumque anno MDXCVII ad TYCHONEM BRAHE scripsissem rogans ut suam de meo libello sententiam diceret, ipseque respondens inter caetera suarum etiam observationum meminisset, ingenti me cupiditate earum videndarum inflammavit. At vero TYCHO BRAHE ipse quoque magna pars fati mei ex eo non destitit me ultro hortari ut ad se venirem. Cumque me longinquitas loci esset absterritura, divinae rursum dispositioni asscribo quod in Bohemiam is venit. Eo igitur veni sub initium anni MDC spe Planetarum correctas eccentricitates addiscendi. (...) Rursus ergo divina dispositione accidisse puto, quod eodem tempore ego advenerim, quo tempore Marti ille erat intentus, ex cujus motibus omnino necesse est nos in cognitionem Astronomiae arcanorum venire aut ea perpetuo nescire. Traduzido por (ITOKAZU, 2006, p. 69).*

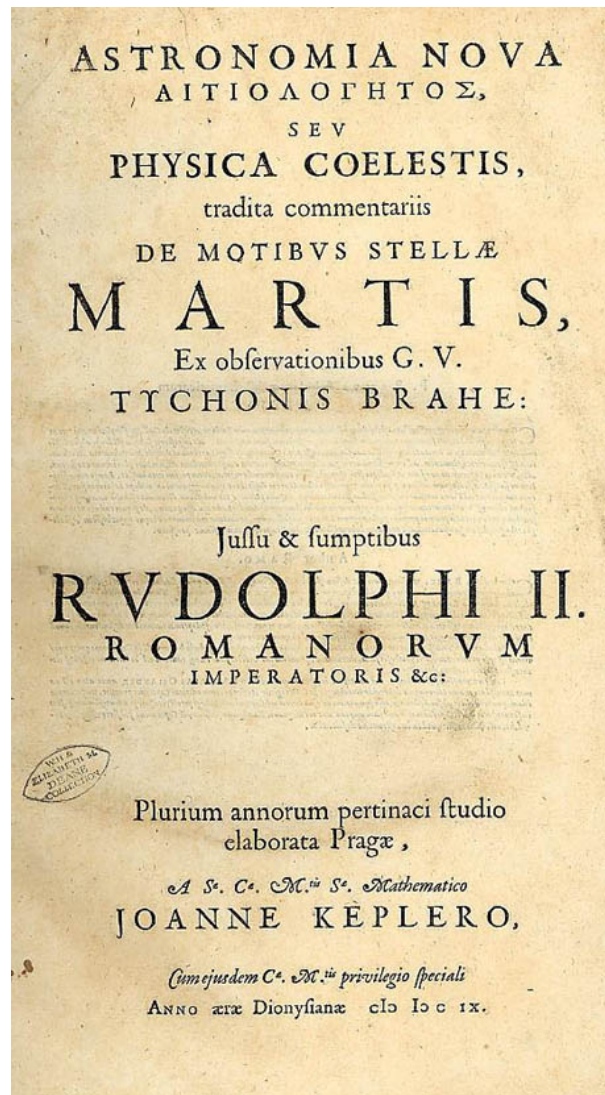


Figura 3.5: Capa da obra *Astronomia Nova* de Johannes Kepler.

Fonte: <<https://bit.ly/3n9bxNF>>

Durante esta obra, Kepler faz o uso dos dados observacionais coletados por Tycho em relação a órbita de Marte para discorrer de uma crítica ao próprio modelo proposto pelo ex-companheiro em prol de sua defesa ao modelo copernicano. O modelo ticomônico (Figura 3.6), consistia em todos os planetas girando em torno do sol, sendo que este, juntamente com a Lua orbitava a Terra, preservando o dogma aristotélico onde a Terra seria o centro de tudo.

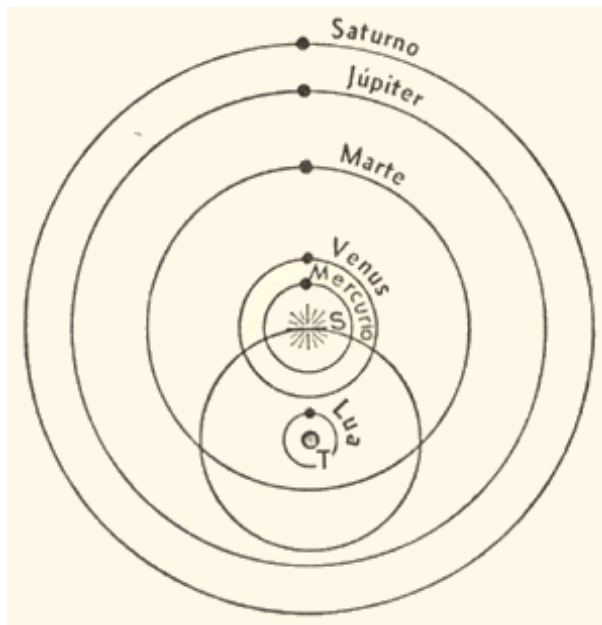


Figura 3.6: Modelo Tyconico.

Fonte: <[http://paje.fe.usp.br/~mef-pietro/pssc\\_parte03\\_pag53.htm](http://paje.fe.usp.br/~mef-pietro/pssc_parte03_pag53.htm)>

Ao longo das conclusões já citadas em *Mysterium Cosmographicum*, observamos que Kepler diz ter conhecimento de que Copérnico já tivera encontrado uma certa variação na velocidade dos planetas de acordo com suas distâncias em relação ao Sol, sendo assim, denota o Sol como o causador destes movimentos. Portanto, encontrada a força motriz destes deslocamentos, para Kepler não fazia sentido que houvesse uma segunda fonte de movimento causador para o trajeto do Sol (diante o esquema ticônico), ou seja, levando a conclusão do movimento da Terra e que este era também causado pelo Sol. Lembrando que nesse momento, encontramos um rompimento de suas ideias contra o dogma aristotélico, que afirmava que os corpos graves eram atraídos para o centro do universo, seus modelos eram baseados e nutridos de forças motrizes que agiam a distância, como traduz (ITOKAZU, 2006, p. 89):

*"Um ponto matemático, seja ele ou não o centro do mundo, não pode mover os corpos graves, nem de maneira efetiva e nem atuando como um objeto em direção ao qual eles tendem. (...) É impossível que a forma da pedra, ao mover seu corpo, busque um ponto matemático, o centro do mundo, sem consideração do corpo onde está localizado esse ponto. <sup>2</sup>"*

É interessante notar, que durante sua argumentação, Kepler expõe sua visão sobre os causadores desta força motriz, a gravidade, como traduz (ITOKAZU, 2006, p. 90):

<sup>2</sup>*Punctum mathematicum, sive centrum mundi sive non, nequit movere gravia neque effective neque objective, ut ad se accedant. (...) Impossibile est, ut forma lapidis, movendo corpus suum, quaerat punctum mathematicum aut mundi medium, citra respectum corporis in quo est illud punctum.* Traduzido por (ITOKAZU, 2006, p. 89).

"A gravidade é uma relação corpórea mútua entre corpos semelhantes para a união ou agrupamento (essa disposição das coisas também está presente na faculdade magnética); assim, a Terra atrai a pedra muito mais do que a pedra atrai a Terra. <sup>3</sup>"

Tanto essa visão sobre a gravidade quanto em relação ao Sol ser o causador destes movimentos, estava completamente inspirada pelo trabalho publicado em 1600 por William Gilbert: *De Magnete*, onde nesta obra o autor trabalha conceitos de magnetismo fazendo analogias como por exemplo, a Terra ser um imã gigante contendo dois pólos diferentes: *Magnus magnes ipse est globus terrestris* (O próprio globo terrestre é um grande imã), escreve Gilbert no *De Magnete* (Figura 3.7).

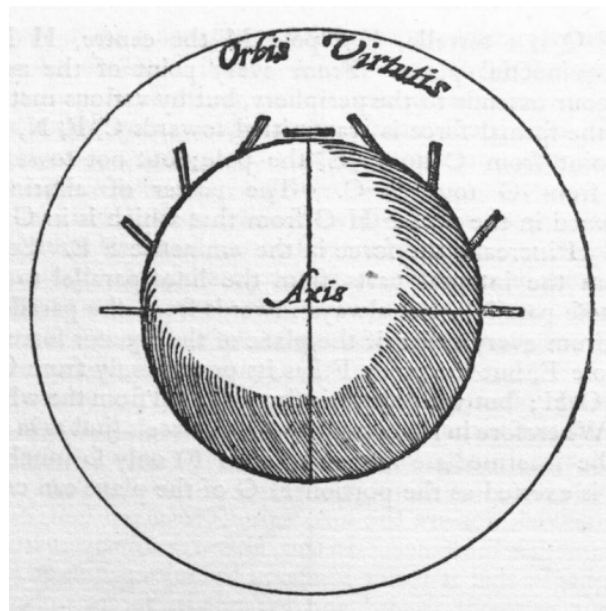


Figura 3.7: Esquema usado por Gilbert para representar o magnetismo terrestre.

Fonte: <<https://bit.ly/3dxktt1>>

Durante suas tentativas em descrever a órbita do planeta vermelho, Kepler tinha plena ciência de que os equantes descritos pelo modelo ptolomaico conflitavam com os dados observados. A partir disso, sua obra passa a ser dividida em dois objetivos principais, um sendo descrever a órbita da Terra para que através destes cálculos se obtenha o trajeto de Marte; e segundo, entender qual é o tipo de movimento que a Terra realiza em relação ao Sol.

Durante suas pesquisas, o astrônomo enfrentou diversas dificuldades e limitações matemáticas de sua época. Kepler, tendo conhecimento de que no afélio, a força motriz que tal planeta recebe é menor (implicando na redução de sua velocidade), e no periélio o efeito contrário acontece, Kepler engenhosamente elaborou métodos matemáticos para

<sup>3</sup> *Gravitas est affectio corporea, mutua inter cognata corpora ad unionem seu conjunctionem (quo rerum ordine est et facultas Magnetica) ut multo magis Terra trahat lapidem, quam lapis petit Terram.* Traduzido por (ITOKAZU, 2006, p. 90)

contornar suas limitações, onde estes futuramente seriam de grande influência para a construção de áreas como Cálculo Diferencial.

O astrônomo calculou a distância entre a Terra e o Sol por 180 pontos, em que esses pontos correspondiam a uma divisão de grau em grau da metade da órbita do planeta. Somando esses valores, o resultado fornecia o intervalo de tempo que a Terra levava para realizar metade da órbita total. Como este cálculo era muito mecânico e árduo de ser feito, Kepler em busca de facilitar consideravelmente seus cálculos, fez o uso de conceitos explorados anteriormente por Arquimedes, os quais relacionam a base do triângulo com sua altura e sua área. Através disso foi descrito e matematizado o que conhecemos hoje como “lei das áreas”, a qual afirmava que o raio vetor descreve áreas iguais em tempos iguais.

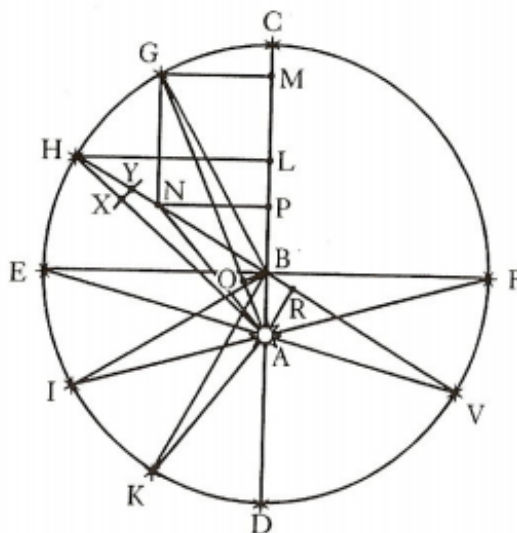


Figura 3.8: Esquema utilizado por Kepler exibindo a variação assimétrica, que causa o conflito entre a lei das áreas e o paradigma circular.

Fonte: (ITOKAZU, 2006, p. 173).

Neste ponto, é importante notar que, por motivos didáticos, atualmente a lei das áreas é conhecida como “Segunda Lei de Kepler”, porém historicamente, observamos que esta lei é primordial em relação a forma elíptica, e foi formulada antes daquilo que conhecemos como "Lei das órbitas" ou "Primeira Lei de Kepler".

Seguidamente em sua obra, Kepler introduz uma ideia que talvez seja considerada a mais importante e revolucionária do *Astronomia Nova*, a quebra do dogma da circularidade. Este dogma, provindo de razões religiosas, persistiu na humanidade por muito tempo. Sustentado pela Igreja, o conceito consistia principalmente em afirmar, com base nos trabalhos de Aristóteles, que todos os movimentos planetários dos quais observamos, tem sua órbita descrita como um círculo perfeito. Visto que este princípio estava amplamente

estabelecido e enraizado, Kepler, para levantar questionamentos acerca deste dogma, fez o uso do grande reconhecimento que Tycho tinha entre a comunidade acadêmica, expondo seus dados como base de argumentação, já que esta precisava ser muito consistente e rígida.

Utilizando os resultados coletados por seu ex-companheiro, Kepler aplica métodos dos quais já tinha desenvolvido anteriormente em seu trabalho, que consiste em manipulações geométricas a fim de demonstrar como os dados obtidos em relação à órbita de Marte não conseguem ser descritos por uma trajetória circular.

Kepler, mesmo sabendo de sua não circularidade, encontrou grande dificuldades ao tentar descrever com exatidão qual seria este trajeto. Durante seus cálculos, trocou cartas para discutir suas ideias, realizou novas manipulações geométricas, tirou novas medições chegando até a modelar alguns esquemas que faziam o uso de epiciclos (Figura 3.9).

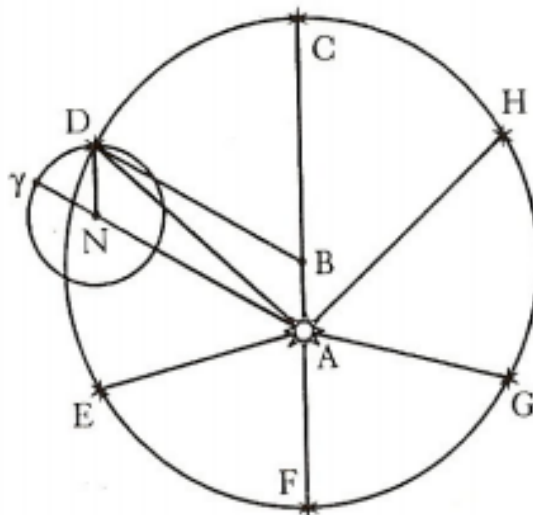


Figura 3.9: Modelo geométrico utilizado por Kepler que fazia o uso de epiciclos.

Fonte: (ITOKAZU, 2006, p. 186).

Durante 4 anos de sua vida, este foi seu objeto de estudo principal, e é neste período que encontramos seu primeiro registro, em uma carta, onde o astrônomo considerou a trajetória como uma elipse: “Assim o caminho de Marte é em verdade uma elipse, cortada uma lúnula da metade da largura daquela relativa à elipse anterior.” (ITOKAZU, 2006, p. 184)<sup>4</sup>

Então, logo após esta longa caminhada, Kepler conseguiu descrever a órbita de Marte como uma elipse em sua forma matemática exata. Mais tarde, generalizou sua descoberta, a qual hoje conhecemos como “Primeira Lei de Kepler”, que é responsável por descrever as trajetórias elípticas dos planetas ao redor do Sol.

<sup>4</sup>Itaque omnino Martis via est Ellipsis, resecta lunula dimidia latitudinis pristinae Ellipseos. Traduzido por (ITOKAZU, 2006, p. 184)



## 4 *Harmonices Mundi*

### 4.1 Introdução

Após a publicação de *Astronomia Nova*, Kepler se via motivado e pedia a Deus para que o libertasse dos estudos relacionados à astronomia, pois sua vontade era voltar novamente a atenção para a harmonia do universo, como já havia iniciado em *Mysterium Cosmographicum*. E foi seguindo esta linha de pensamento que o astrônomo publicou outra de suas grandes obras: “*Harmonices Mundi*”(1619).

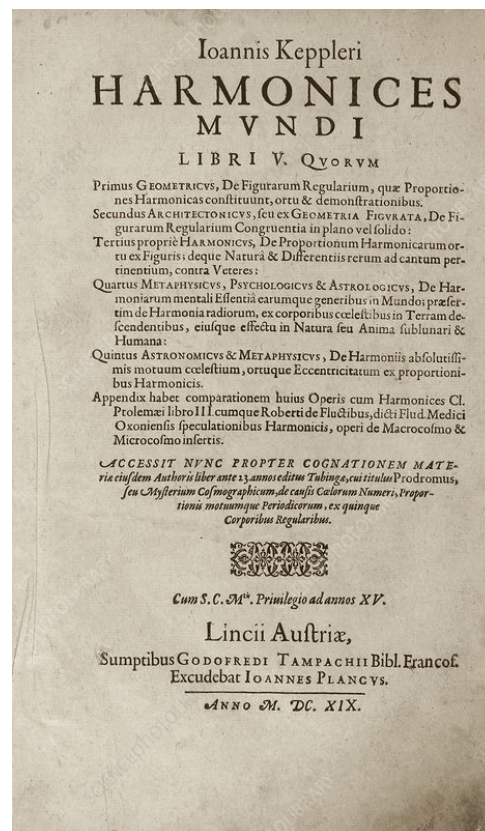


Figura 4.1: Capa da obra *Harmonices Mundi*, de Johannes Kepler.

Fonte: <<https://www.sciencephoto.com/media/720377/view/-harmonices-mundi-1619->> Acesso em: 1 fev. 2021

Inicialmente, *Harmonices Mundi* foi pensado para ser uma continuação de sua primeira obra, explorando e discutindo as obras de *De Caelo, Et Corruptione* e *De Generatione* de Aristóteles, além de resgatar alguns conceitos prévios de *Mysterium*

*Cosmographicum*. Essa obra se dividiu em 5 partes, onde nelas: o primeiro tinha como objetivo discutir a geometria e a construção de figuras geométricas analisando suas proporções harmônicas; o segundo, ainda sobre a geometria, visava discutir as figuras regulares; o terceiro buscava foco completamente nas relações harmônicas, sobre razões e proporções destas figuras; o quinto explorava a Metafísica, voltando a resgatar a Astronomia, descrevendo como os movimentos celestes são completamente harmônicos.

O objetivo principal de Kepler ao escrever sua obra, era, através da geometria, música, astrologia e astronomia, unificar uma única ideia a qual trouxesse uma causalidade para o segredo por trás do universo. Kepler, sendo o sucessor de Platão em conceitos desse gênero, foi um divisor de águas para a ciência. Após seus trabalhos, conforme (KOESTLER, 1989, p. 270), “a ciência se divorcia da religião, a religião da arte, a substância da forma e a matéria do espírito”.

Neste capítulo, voltaremos a atenção especificamente para a última parte da obra, pois é nesta que Kepler faz o uso de conceitos harmônicos anteriormente citado pelos pitagóricos, explora suas motivações em relação ao descobrimento de sua “terceira lei” e apresenta a sua conclusão sobre a música das esferas celestes.

## 4.2 A música das esferas

Kepler durante suas análises sobre as harmonias, resgata os estudos feitos pelos pitagóricos relacionados às proporções musicais, as quais já foram exploradas neste trabalho  $L/2$ ,  $2L/3$ ,  $3L/4$ . Porém, para os pitagóricos, assim como toda a essência do universo, essas relações provinham especificamente dos números, suas características e causas eram sucintamente numéricas, o que fazia com que os pitagóricos enxergassem sua beleza. Portanto, a visão do astrônomo não se alinhava a Pitágoras nesse sentido, já que Kepler assim como anteriormente destacado em *Mysterium Cosmographicum*, enxergava Deus como um Deus geômetra e não puramente numérico. Sendo assim, ele critica e aponta os pitagóricos como não detentores do real motivo e causa dessas relações.

Guiado por esse viés harmônico, Kepler em seu quinto capítulo, se viu desafiado. Como enxergar e sistematizar a harmonia do universo enquanto seus próprios estudos anteriores afirmavam que os movimentos celestes eram completamente assimétricos e irregulares? (os quais afirmavam órbitas elípticas e velocidades variáveis para os corpos celestes). A resposta, assim como em obras anteriores do autor, estava na grande quantidade de tentativas.

Inicialmente, o astrônomo supôs razões harmônicas aos períodos de revolução dos planetas. Errado. Kepler, imaginou encontrar uma série harmônica dos números que descreviam os tamanhos ou volumes dos planetas. Não encontrou. Tentou arranjar a maior e menor distância em relação ao Sol de cada planeta. Falhou. Após, explorou as diferentes velocidades extremas dos planetas. Ainda não. Seguindo, tentou as variações de tempo

de cada planeta ao percorrer a unidade de comprimento de sua órbita. Sem resultado. Então, por fim, encontrou! Mudando seu ponto de vista, transferindo o referencial para o centro do mundo, Kepler examinou as variações das velocidades angulares de cada planeta desconsiderando a distância, e com isso, acabou encontrando resultados mais satisfatórios do que o esperado.

A relação que tanto buscava estava presente na proporção entre essas velocidades angulares. Tomando como exemplo Saturno, no afélio, se movia à velocidade de  $106''$ , já no periélio, à  $135''$ . Portanto, nessa proporção,  $106/135$ , aproximamos com uma diferença de  $2''$ , encontramos  $4/5$ , representando um intervalo de terça maior. Portanto, para Kepler, isso não era apenas uma coincidência, já que quando realizava os cálculos para os outros diferentes planetas, encontrava diferentes proporções as quais todas remetiam aos intervalos musicais: para Júpiter encontramos  $6/5$  (terça menor), Marte  $3/5$  (quinta), etc. Além disso, algo mais interessante poderia ser extraído de seus dados.

Sabemos que Kepler fez o uso como base, da escala Mersenne, onde: uníssonos ( $1/1$ ), oitava ( $2/1$ ), quinta ( $3/2$ ), quarta ( $4/3$ ), terça maior ( $5/4$ ), terça menor ( $6/5$ ), sexta maior ( $5/2$ ) e sexta menor ( $8/5$ ). Ou seja, caso façamos os mesmos cálculos partindo do planeta mais exterior, Saturno, no periélio, encontraremos a escala menor, já no afélio, a escala maior. Então, como os planetas têm suas velocidades angulares variáveis em toda sua órbita, cada um deles atingiria (ao longo de seu movimento de translação), um certo conjunto de notas, sendo essas (Tabela 4.1):

<b>Planeta</b>	<b>Notas musicais</b>
Saturno	Sol, Lá, Si, Lá, Sol
Júpiter	Sol, Lá, Si bemol, Lá, Sol
Marte (aproximado)	Fá, Sol, Lá, Si bemol, Dó, Si bemol, Lá, Sol, Fá
Terra	Sol, Lá bemol, Sol
Vênus	Mi (uníssonos)
Mercúrio	Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó, Ré, Mi, Dó, Sol, Mi, Dó

Tabela 4.1: Planetas e respectivas notas musicais.

Fonte: (CASEMIRO, 2007, p. 147)



Figura 4.2: Notas musicais correspondentes aos planetas.

Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=WihmsRinpQU>>

Além disto, ainda afirma que em certo momento, onde todos os planetas estivessem em seus pontos extremos, um moteto<sup>1</sup> seria formado, em que Saturno e Júpiter seriam o baixo, Marte o tenor, a Terra e Vênus o contralto e Mercúrio seria o soprano. Logo, através disso, estava justificado o motivo da excentricidade das órbitas serem como são, e como resultado ainda, se encontrou-se o que ficou conhecido como “A música das esferas” (KOESTLER, 1989, p. 272):

*"Os movimentos celestes nada mais são do que um canto contínuo para várias vozes (percebido pela inteligência, não pelo ouvido); uma música que, através de tensões discordantes através de síncopes e cadências, por assim dizer (como os homens as empregam na imitação de tais discordâncias naturais), progride para certas cláusulas planejadas de antemão, quase de seis vozes, e com isso estabelece marcos no imensurável curso do tempo."*

### 4.3 Terceira Lei

Como toda construção de escala e relações de intervalos musicais eram construídas a partir de relações de proporções matemáticas, não é de se surpreender que Kepler tenha feito durante seus cálculos, o uso de logaritmos. Sendo um estudo publicado por John Napier em sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614), os logaritmos foram uma importante e poderosa ferramenta para Kepler em suas buscas por harmonias e proporções, visto que este método facilita consideravelmente os cálculos, possibilitando encontrar de forma mais simples, relações as quais envolviam operações exponenciais.

Para Kepler, a principal aplicação dos algoritmos em seus cálculos, foi quando aplicou o método na relação entre a distância dos planetas ao sol e seu período de translação. Para exemplo, usamos Marte, onde sua distância em relação ao Sol é de aproximadamente 1,52 UA e seu período de translação é de 687 dias, o qual corresponde a aproximadamente 1,88 do período de translação da Terra, assim sendo, aplicamos logaritmo:

<sup>1</sup>Composição polifônica sacra

$$\frac{\log(1,52)}{\log(1,88)} \approx 1,5 = \frac{3}{2} \quad (4.1)$$

$$\frac{2\log(1,52)}{3\log(1,88)} \approx 1 \quad (4.2)$$

Utilizando os dados da Tabela 4.2:

Planeta	Distância do sol (UA)	Período de translação em relação a Terra
Mercúrio	0,38	0,24
Vênus	0,72	0,62
Marte	1,52	1,88
Júpiter	5,20	11,86
Saturno	9,53	29,49

Tabela 4.2: Planetas e períodos translacionais.

Fonte: <<https://bit.ly/2QzA3eG>> e <<https://bit.ly/3gp0mPK>> Acesso em: 15 fev. 2021

podemos realizar os mesmos cálculos como exemplificado acima, e obteremos o mesmo resultado para todos os planetas. Logo, podemos afirmar que: seja  $T_1$ ,  $R_1$  e  $T_2$ ,  $R_2$ , períodos de translação e distância da órbita respectivamente de planetas genéricos orbitando o mesmo corpo, então:

$$\frac{2\log(T_1)}{3\log(R_1)} = \frac{2\log(T_2)}{3\log(R_2)} \quad (4.3)$$

então, usando as propriedades logarítmicas:

$$\frac{\log(T_1^2)}{\log(R_1^3)} = \frac{\log(T_2^2)}{\log(R_2^3)} \quad (4.4)$$

ou seja,

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad (4.5)$$

assim, generalizando,

$$\frac{T^2}{R^3} = K \quad (4.6)$$

onde  $K$  terá seu valor dependente do sistema considerado. Veremos sua importância um pouco a frente. Portanto, seu edifício estava completo, estava descrita a lei que conhecemos hoje como “Terceira lei de Kepler”, a lei harmônica.

## 5 Legado de Kepler

Hodiernamente, quando estudamos as leis de Kepler, é comum que tenhamos uma visão muito linear e bem estabelecida (através de definições) sobre estas leis. Porém, estamos equivocados não somente no fato de invertermos suas ordens (Primeira e Segunda Lei), e sim também em seu destaque diante as obras de Kepler.

Em *Harmonices Mundi*, a terceira lei vai ganhar seu espaço apenas nos capítulos finais do livro, em que neste mesmo, sua primeira lei é apenas mencionada de forma breve e a segunda nem citada. Para a ciência, estas leis representam o que conhecemos como cosmologia moderna, mas para Kepler, apenas três das infinitas estrelas em um universo cheio delas. Quando analisamos as causas e motivos que levaram Kepler a tais feitos, chega a soar de certa forma esquizofrênico. Tantas descobertas e resultados encontrados completamente guiados por crenças e convicções sobre um mistério deixado por Deus na criação do universo, o qual Galileu e seus contemporâneos chegaram até a questioná-lo: *"Isto é ciência ou numerologia?"* (COHEN, 1960, p. 156)

Por que estava nos objetivos de Deus que os planetas deveriam se mover em forma elíptica? Por que a área descrita pelo raio-vetor tinha conexão com a velocidade dos planetas? Qual era a implicação desta relação de cubos e quadrados nos períodos e distância dos corpos? Diante de tantos questionamentos, era visível a desconexão das leis e resultados encontrados por Kepler. A causa disso é especificamente técnica, pois sem o cálculo diferencial e a geometria analítica, as leis parecem apenas assuntos relacionados, porém órfãos.

Entretanto, devemos observar, na história da ciência, como as ideias podem se tornar completamente independentes e maiores que seus idealizadores, como ressalta (KOESTLER, 1989, p. 276):

*"Não podemos fugir ao sentimento, - escreveu Henrique Henz - de terem essas fórmulas matemáticas uma vida independente e uma inteligência própria, de serem mais sábias do que nós, mais sábias até do que os seus próprios descobridores, de tirarmos delas mais do que nelas foi posto originalmente."*

Com Kepler não foi diferente, toda essa conexão e importância seria claramente enxergada futuramente com as publicações e elaboração da Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton.

Newton (1643 - 1727), é indiscutivelmente uma das figuras mais importantes que a ciência já teve. Criador do cálculo diferencial; teorema do binômio; fundamentos dos cálculos das variações; entre outros diversos descobrimentos na área de óptica, o seu auge está na publicação dos *Principia* (1687). A importância desta publicação para este trabalho está no fato de que para a elaboração de sua Lei da Gravitação, Newton inseriu em seus cálculos a Lei Harmônica de Kepler.

Diante de tantas informações e dados aparentemente desconexos, encontrados por grandes nomes como: Robert Hooke, Edmund Halley e Sir Christopher Wren, Newton resolveu o problema vigente, encontrou uma única força universal que englobava e respondia ao questionamentos da época, como destacado por (COHEN, 1960, p. 180):

*"[...] Newton dá o golpe de mestre, mostrando que uma única força universal conserva os planetas em suas órbitas ao redor do Sol, mantém os satélites em suas órbitas, faz com que os objetos caiam da maneira como observamos, mantém os objetos na Terra e causa as marés [...]"*

Essa força pode ser expressa matematicamente por:

$$F = G \frac{mm'}{d^2} \quad (5.1)$$

em que  $m$  e  $m'$  são as respectivas massas dos corpos que estão interagindo,  $d$  a distância entre eles e  $G$  a constante gravitacional universal.

No momento da idealização desta força, Newton já havia chegado à conclusão, através de suas outras publicações que:

$$\frac{F}{a} = m \quad (5.2)$$

onde  $F$  é uma dada força,  $a$  a aceleração, e  $m$  uma certa constante a qual era proporcional ao volume, que futuramente seria conhecida como massa. Além disso, muito se discutia sobre a força exercida pelo Sol sobre um planeta ser inversamente proporcional ao quadrado da distância:

$$F \propto \frac{1}{d^2} \quad (5.3)$$

$$F = K \frac{1}{d^2} \quad (5.4)$$

A partir disso, supomos um globo de massa  $m$  e velocidade  $v$  se movendo em um círculo de raio  $r$ . Newton, verificou, da mesma forma que Christiaan Huygens (1629-1695), que a aceleração central desse globo será dada pela expressão:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5.5)$$

Então, como já dito anteriormente:

$$\frac{F}{a} = m \quad (5.6)$$

$$F = ma \quad (5.7)$$

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (5.8)$$

Logo, seja  $T$  o período para o globo realizar uma volta circular completa de raio  $r$ , podemos escrever a velocidade como:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (5.9)$$

Teremos, portanto:

$$F = m \frac{1}{r} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 \quad (5.10)$$

$$F = m \frac{1}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad (5.11)$$

É neste ponto que devemos destacar a genialidade de Newton. Conhecendo os trabalhos e distinguindo o que conhecemos como as Leis de Kepler, Newton enxergou neste ponto, uma possibilidade de inserir a lei harmônica em sua expressão, visto que esta já tinha sido observada e novamente calculada por ele em relação às luas de Júpiter. Então, multiplicando sua expressão por  $r/r$  temos:

$$F = m \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \frac{1}{r} \frac{r}{r} \quad (5.12)$$

$$F = 4\pi^2 \frac{mr^3}{T^2 r^2} \quad (5.13)$$

$$F = \frac{4\pi^2 m}{r^2} \frac{r^3}{T^2} \quad (5.14)$$

Observando então que  $r^3/T^2$  assim como descrito por Kepler, para todos os planetas do Sistema Solar, apresentava o valor de uma constante  $K$ , então:

$$F = \frac{4\pi^2 K m}{r^2} \quad (5.15)$$

Então por fim, caso multipliquemos a expressão por  $M_s/M_s$ , onde  $M_s$  é a massa do Sol, encontraremos:



$$F = \left[ \frac{4\pi^2 K}{M_s} \right] \frac{M_s m}{r^2} \quad (5.16)$$

como  $M_s$  também é constante, temos:

$$\frac{4\pi^2 K}{M_s} = G \quad (5.17)$$

reescrevendo então, para casos não restritos ao Sol e sim a qualquer corpo de massa  $m'$ , temos:

$$F = G \frac{mm'}{d^2} \quad (5.18)$$

a qual denominamos a Força Gravitacional Universal, onde  $G$  é a constante gravitacional universal.

## 6 Conclusão

Quando falamos sobre História da Ciência, é comum que as transposições didáticas como livro didático e os professores, tenham uma visão de certa forma equivocada sobre o assunto. Estigmatizados por paradigmas, diante (NEVES, 2000a, p. 557), os quais são completamente presentes no meio escolar, os professores discutem a história da ciência como uma sequência absoluta e linear de fatos, deixando de lado toda a pluralidade e controvérsia de pensamentos que haviam na época das idealizações discutidas.

Porém, em qual ponto ocorre este deslize? Se buscarmos referências epistemológicas da ciência, encontraremos uma resposta na obra *A estrutura das revoluções científicas*, de Thomas S. Kuhn. O autor defende que os principais papéis dos historiadores científicos estão resumidos em dois: o primeiro se resume em discutir e determinar quando e qual o responsável por cada fato que veio a anteceder até a criação de uma teoria ou lei científica; o segundo, trata sobre explorar e discutir a quantidade de erros, superstições, mitos e “delírios” que induziram e motivaram tal cientista as suas conclusões. A partir disto, é simples enxergar que nas poucas e únicas páginas de espaço que a história da ciência tem em um livro didático, apenas o primeiro passo (resumidamente) é seguido.

Se tomarmos como exemplo algumas ideias discutidas no decorrer do trabalho a respeito da astronomia, é comum que sejam sequenciado os fatos, atribuindo todas as descobertas relacionadas à Terra (dimensões, posição, etc...) aos modelos discutidos (Ptolomaico, Copernicano e Ticônico), descrevendo-os como um sendo consequência do outro e assim por diante. E é neste ponto que devemos nos atentar a não enxergar a ciência como uma sequência de fatos e sim como uma pluralidade de ideias, visto que todos estes modelos (além de muitos outros) e ideias já tinham sido introduzidos pela humanidade muito antes do que normalmente se é discutido.

Tycho apresentava um modelo que antes já esteve presente por conta de Heráclides do Ponto, o qual afirmou que a Terra se movia ao redor de seu eixo e os céus permaneciam em repouso. O sistema Copernicano, tão referenciado por Kepler, fez sua primeira aparição com Aristarco de Samos, já apresentando uma ideia onde a Terra e os planetas se moviam ao redor do Sol. O modelo Ptolomaico, é mais reconhecido por alguma de suas origens, sendo mencionado em seus primórdios por Anaximandro, que acreditava em uma Terra como centro do universo coberta por um céu esférico, juntamente de Anaxágoras de Clazômena, que propôs a sucessão dos astros celestes. Esse modelo geocêntrico ganhou

sua força principalmente com Platão, que preferia explicar os movimentos através da rotação da esfera celeste, e logo após, principalmente com Aristóteles. Aristóteles com seus conceitos de corpos pesados e leves, mundo sublunar e supralunar, através de seus modelos, estabeleceu diversos paradigmas.

Para (KUHN, 1998, p. 220), os paradigmas são definidos como “cercas” para o pensamento, delimitando até onde os pensamentos poderiam fluir. Durante este trabalho conseguimos analisar precisamente as quebras de paradigmas feitas por Kepler, em relação ao movimento da Terra, a perfeita circularidade proposta por Platão, além de cumprir o objetivo de enxergar alguns de seus erros, equívocos, fé e motivações para tais conquistas, as quais também derivam precisamente de múltiplos conhecimentos anteriores, principalmente dos pitagóricos, os quais também tinham suas motivações baseadas no misticismo.

## Referências Bibliográficas

AS escalas musicais. São José dos Campos - SP: DAS - Divisão de Astrofísica, 2009. Disponível em: <[http://www.das.inpe.br/~alex/FiscadaMusica/fismus\\_escalas.htm?fbclid=IwAR2PS1yP0DruRfp52DD46-HeG65Zcfwx6H9HdKgXYxrWaJR7dCdT0CXhAsM](http://www.das.inpe.br/~alex/FiscadaMusica/fismus_escalas.htm?fbclid=IwAR2PS1yP0DruRfp52DD46-HeG65Zcfwx6H9HdKgXYxrWaJR7dCdT0CXhAsM)>. Acesso em: 3 out. 2020.

BARTELMEBS, R. C. Resenhando as estruturas das revoluções científicas de Thomas Kuhn. **Revista Ensaio**, Belo Horizonte - MG, v. 14, p. 351 – 358, set-dez 2012.

BORGES, M. F. Matemática e religiosidade: O episódio de Johannes Kepler. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI. 2013**. Curitiba - PR: [s.n.], 2013. p. 1–15.

CASEMIRO, R. **Consonâncias Planetárias**: Apresentação e fundamentação da "terceira lei" do movimento planetário no livro v do *Harmonices Mundi* (1619) de Johannes Kepler (1571 - 1630). Dissertação (História da Ciência) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2007.

CERQUEIRA, F. V. *et al.* A música e o fantástico na Grécia Antiga o imaginário, entre mito e filosofia. **Per Musi**, Belo Horizonte - MG, p. 1–28, mai. 2017.

COHEN, I. B. **O nascimento de uma nova física**. São Paulo - SP: Edart, 1960.

GIORGILLI, A. **The Unaccomplished perfection of Kepler's world**. Milano, Italy, 2020.

GOTO, M. Física e música em consonância. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Londrina - PR, v. 31, n. 2, p. 2307/1 – 2307/8, 26 jun. 2009.

GUIMARÃES, A. P. Os 400 anos de de magnete. **Ciência Hoje**, v. 28, p. 74 – 77, 2000.

ITOKAZU, A. G. **Astronomia Nova**: a história da guerra contra Marte como exposição do método astronômico de Kepler. Tese (Filosofia e Ciências Humanas) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2006.

JOHANNES Kepler (1571-1630). Disponível em: <<http://plato.if.usp.br/1-2003/fmt0405d/apostila/renasc7/node5.html>>. Acesso em: 03 set. 2020.

KEPLER. **Carta de Johannes Kepler a Michael Mästlin em Tübingen**. 1604. Citações traduzidas a partir da versão disponível em: <[https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-31662003000200006](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662003000200006)>. Acesso em: 12 dez. 2020.

- KEPLER e a dança dos planetas. Clickideia. [S.l.]: Click Ideia, 2009. Disponível em: <[http://www.clickideia.com.br/portal/conteudos/c/34/17393?fbclid=IwAR2yUG2HV0BHs6BzhJDUukwgo1t\\_2n32evP7TNLct\\_Eh3i6ptvX\\_vXRlbXE](http://www.clickideia.com.br/portal/conteudos/c/34/17393?fbclid=IwAR2yUG2HV0BHs6BzhJDUukwgo1t_2n32evP7TNLct_Eh3i6ptvX_vXRlbXE)>. Acesso em: 2 fev. 2021.
- KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Porto Alegre - RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- KOESTLER, A. **O Homem e o Universo**. São Paulo - SP: IBRASA, 1989.
- KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. São Paulo - SP: Perspectiva, 1998.
- LUIZ, C. dos Santos *et al.* Matemática e música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, Portugal, p. 271–293, 2015.
- MAGALHÃES, A. de P. **Matéria Elétrica e Forma Magnética**: Experimentos e concepções de William Gilbert no *De Magnete*. Tese (História da Ciência) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2007.
- MEDEIROS, A. Entrevista com Kepler: Do seu nascimento à descoberta das duas primeiras leis. **Física na Escola**, v. 3, n. 2, p. 20 – 33, 2002.
- NEVES, M. C. D. A Terra e sua posição no universo: formas, dimensões e modelos orbitais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Maringá - PR, v. 22, n. 4, p. 557 – 567, 06 jul. 2000.
- NEVES, M. C. D. Uma investigação sobre a natureza do movimento ou sobre uma história para a noção do conceito de força. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Maringá - PR, v. 22, n. 4, p. 544 – 556, 15 set. 2000.
- PAULA, W. O. **O que é a música e como ela funciona para os humanos?** [S.l.]: Só Científica, 2020. Disponível em: <<https://socientifica.com.br/o-que-e-a-musica-e-como-ela-funciona-para-os-humanos>>. Acesso em: 18 set. 2020.
- PEINADO, M. R. S. de S. O ensino do trivium e do quadrivium, a linguagem e a história na proposta de educação agostiniana. **Imagens da Educação**, Maringá - PR, v. 2, p. 1–10, 2012.
- PEREIRA, M. do C. **Matemática e Música de Pitágoras aos dias de hoje**. Monografia (Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, 2013.
- PRAXEDES, G.; PEDUZZI, L. O. Q. Tycho Brahe e Kepler na escola: uma contribuição à inserção de dois artigos em sala de aula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Florianópolis - SC, v. 31, n. 3, p. 3601/1 – 3601/10, 16 set. 2009.
- SANTOS, M. C. A. A lição de Heráclito. **Trans/Form/Ação**, Marília - SP, v. 13, p. 1–9, 1990.
- STEPHENSON, B. **The Music of the Heavens**: Kepler's harmonic astronomy. Princeton, New Jersey - USA: Princeton University Press, 1994.

VIEIRA, R. F. F. **Intervalos melódicos: diferentes estratégias de aprendizagem.** Dissertação (Ensino de Música) — Escola Superior de Música Artes e Espectáculos do Instituto Politécnico do Porto, Porto, Portugal, 2015.