



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Métodos analíticos e numéricos aplicados a resolução do Oscilador Harmônico Duplo

Acadêmico: Vítor Hugo Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 2 de fevereiro de 2021



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Métodos analíticos e numéricos aplicados a resolução do Oscilador Harmônico Duplo

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Bacharelado em Física sob a orientação do Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira.

Acadêmico: Vítor Hugo Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 2 de fevereiro de 2021

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Introdução	1
1 Revisitando o Oscilador Harmônico	3
1.1 O Oscilador Harmônico Simples	4
1.1.1 Solução para o Oscilador Harmônico Simples	5
1.1.2 Considerações sobre a energia	7
1.2 Refinando o OHS	8
1.2.1 O Oscilador Harmônico Duplo	9
2 Solução Analítica	13
2.1 Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem	13
2.1.1 Funções Matriciais	14
2.1.2 Autovalores e Autovetores	14
2.2 Resolvendo o Oscilador Harmônico Duplo	15
2.2.1 Primeiro modo normal	17
2.2.2 Segundo modo normal	18
2.2.3 Solução geral	19
3 Métodos Numéricos	21
3.1 Método de Runge-Kutta	21
3.1.1 Aplicando o Método de Runge-Kutta no OHD	24
3.2 Transformada de Fourier Discreta	27
4 Resultados	32
4.1 Método Analítico	33
4.2 Método Numérico	35
4.3 Comparação entre os métodos aplicados	36
Conclusões	42
A Código utilizados para as análises numéricas	43
Referências Bibliográficas	47

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a meus pais, João Xavier Ribeiro e Vilma Pires da Silva Ribeiro, que sempre apoiaram meus passos e me incentivaram a trilhar o caminho para alcançar os meus sonhos. Por todo amor e apoio oferecido durante esses anos que não foram fáceis, mas que acabaram sendo vencidos.

À meus professores e todos que fizeram parte de minha formação acadêmica, corrigindo e ensinando algo novo todos os dias. Em especial à meu orientador Breno Ferraz de Oliveira, que desde o meu primeiro ano de graduação se mostrou um grande professor. Por todo o suporte oferecido, pela chance deste e outros trabalhos e por me ajudar a enxergar um caminho para meu futuro.

À todos os meus amigos e familiares, que me acompanharam durante essa jornada. Principalmente àqueles que estiveram comigo desde o primeiro ano, passando pelas mesmas provas: Jhonatan, Matheus e Maurício, companheiros de todos os dias e todas horas. Obrigado pelas tardes estudando juntos, pelas risadas e discussões que acabaram facilitando cada dia que passou.

À Universidade Estadual de Maringá, pela oportunidade de fazer o curso que sempre tive vontade e por todas as outras oportunidades oferecidas em projetos e estágios. À Bateria Exataria, pela chance de me fazer ter contato com o ritmo e com coisas que vão além da graduação e dos muros da universidade.

Por fim, obrigado a todos que direta ou indiretamente, de alguma forma fizeram parte dessa história e que acabaram ajudando a tornar estes anos os melhores da minha vida até agora.

Resumo

Pode-se dizer, de certa forma, que a observação e descrição do movimento foi um dos primeiros atos que fez o homem pensar e refletir sobre a natureza. Seja o movimento das estrelas no céu ou de uma maçã que cai perto da superfície da Terra, a Mecânica Clássica constitui uma forma muito abrangente de compreender o universo a nossa volta e seus diferentes fenômenos. Com certos comportamentos sendo mais comuns que outros, o fenômeno de oscilações talvez seja o mais presente, de forma que em todas as áreas da ciência, algum tipo de oscilação pode ser observada. Nesse contexto, o sistema estudado é caracterizado como um tipo de oscilador acoplado, em que partículas se movem e interagem entre si a todo momento. Esse tipo de movimento varia em complexidade quando se aumenta o número de partículas interagentes e por isso soluções analíticas muitas vezes são de difícil acesso. Nesse sentido, além do método analítico, o problema em questão foi resolvido utilizando-se um método numérico implementado computacionalmente, como uma alternativa para sistemas mais complexos. A comparação entre os resultados obtidos foi realizada, mostrando a eficiência do método numérico no problema do oscilador harmônico acoplado.

Palavras chave: oscilações acopladas, Transformada de Fourier Discreta, Runge-Kutta.

Introdução

A Mecânica, de forma concisa, pode ser entendida pelo o estudo de como as coisas se movem. Ela consegue abranger desde os planetas completando sua órbita em torno do Sol até a descrição das vibrações de uma rede molecular, em materiais no estado sólido. Estudada primeiramente pelos gregos, até onde sabe-se, a mecânica grega representou um grande passo na evolução da ciência moderna [1]. O seu desenvolvimento durante os tempos consistiu de novas formulações que acabaram por compor aquilo que hoje chamamos de Mecânica Clássica, onde o intuito de descrever o movimento de corpos no espaço, como resultado das interações entre eles e com o mundo externo, se tornou uma ferramenta importante no objetivo de entender o mundo a nossa volta. De forma geral, quando fala-se em descrever o movimento de um corpo, pretende-se determinar quais as posições esse objeto ocuparia no espaço para qualquer valor de tempo [2].

Nesse contexto, a observação e comparação dos fenômenos que ocorrem em nosso universo, encontram dentro da mecânica clássica uma explicação, que embora algumas vezes não seja a melhor, é muito conveniente e permite entender diversos conceitos e princípios relacionados a eles. O oscilador harmônico simples (OHS), por exemplo, é provavelmente o caso mais importante de movimento em uma dimensão [3]. Ele representa o modelo mecânico mais elementar capaz de descrever os fenômenos oscilatórios, que por sua vez, são muito comuns no mundo em que vivemos. Assim, objetivando tornar esse modelo ainda mais amplo, a ideia de introduzir vários corpos interagindo num mesmo sistema, é validada por si só. Nesse tipo de situação, considera-se um sistema de osciladores harmônicos que possuem interações uns com os outros [2]. Apesar de a mecânica clássica ter sido substituída pela mecânica relativística e pela mecânica quântica em seus respectivos domínios [4], tal refinamento do OHS é utilizado como base para diversos estudos, alcançando desde a temática de moléculas e interações entre átomos e luz, até o formalismo de quasi-partículas, da área da mecânica quântica [2]- [4].

Ao levar adiante a ideia de várias partículas interagindo num mesmo sistema, não deixa de ser intuitivo o pensamento que ampliar o oscilador harmônico simples para um modelo mais abrangente, contendo oscilações acopladas, acaba por transformar o modelo inicial em algo mais complexo [5]. Nesse sentido, é certo que o tópico de equações diferenciais fará parte desta análise, representando matematicamente os fenômenos a serem estudados. No entanto, outros métodos também podem ser utilizados para a obtenção de resultados a partir do modelo proposto. No caso especial deste trabalho, tem-se por objetivo estudar as soluções para o Oscilador Harmônico Duplo(OHD). Tal sistema físico, caracterizado por duas massas estaticamente acopladas, representa um exemplo de oscilações acopladas que ainda possui certa simplicidade, mostrando-se uma oportunidade para compreender os aspectos gerais desse tipo de fenômeno.

Além da solução analítica encontrada para o sistema de equações diferenciais do OHD, utilizou-se de um método numérico implementado utilizando-se da linguagem de programação C para resolver o problema. O método escolhido consiste naquele desenvolvido

pelos matemáticos C. D. T. Runge e W. M. Kutta nos anos de 1900, que em homenagem a estes recebe o nome de Método de Runge-Kutta. Embora o nome apareça como um método único, ele consiste de uma família de métodos utilizados para resolver numericamente equações diferenciais. A utilização deste em conjunto com o desenvolvimento tecnológico alcançado pelos computadores, permitiu uma nova visão sobre problemas que antes apresentavam diversas dificuldades. Assim, mesmo sendo um método centenário, o método de Runge-Kutta continua sendo utilizado e pesquisado por matemáticos, engenheiros, químicos, físicos e muitos outros cientistas ao redor do mundo, por conta de seu alto nível de precisão e aplicabilidade [6]. Dessa forma, ele constitui uma opção muito útil na resolução não só de problemas mais simples como este, como também para sistemas mais complexos em que temos várias partículas acopladas se movendo simultaneamente.

Uma vez que os resultados gerados por este método numérico formarão uma série temporal, a presença de uma grande quantidade de dados como esta pode exigir que algumas análises extras sejam feitas, no intuito de obter propriedades intrínsecas a esta série. A Transformada de Fourier Discreta (TFD) é um exemplo de análise muito utilizada no ambiente da pesquisa, pois permite um entendimento maior sobre o comportamento de certos conjuntos de dados, favorecendo suas interpretações. Análises envolvendo Transformadas de Fourier possuem mais de 200 anos de história, tendo início com o físico e matemático Jean Baptist Fourier apresentando seus trabalhos sobre condução de calor na Academia de Paris. De forma geral a TFD constitui um método que pode ser aplicada a um conjunto de amostragem discretizado no tempo, possibilitando a obtenção de uma imagem das frequências em que estes dados aparecem [7].

No desenrolar deste trabalho, escolheu-se uma ordem de abordagem e de tratamento, em que o objetivo é apresentar o assunto de forma clara e um tanto intuitiva. Nesse contexto, o [capítulo 1](#) faz uma revisão do oscilador harmônico simples, resolvendo-o e discutindo-o, para depois apresentar o oscilador harmônico duplo e o modelo matemático que será empregado. No [capítulo 2](#) o foco é a resolução analítica do OHD, de forma que alguns tópicos utilizados, como matrizes e autovalores também são apresentados. Além da solução analítica, o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem foi utilizado com auxílio de métodos computacionais e se encontra descrito no [capítulo 3](#). Por fim, os resultados obtidos das duas soluções encontradas, analítica e numérica, são apresentados e comparados no [capítulo 4](#). As considerações finais e conclusões sobre os objetivos deste trabalho, encontram-se apresentadas na seção [Conclusões](#).

Capítulo 1

Revisitando o Oscilador Harmônico

Com o objetivo de entender como funcionam as coisas no nosso universo, torna-se missão para um cientista prever as leis que governam corpos e partículas no decorrer do tempo. Essa ideia se aplica, de forma geral, a diversas interpretações, porém procuremos manter o foco numa via mais elementar. A mudança mais simples possível de ser observada em uma partícula é a sua aparente mudança de posição em um determinado tempo, e isso é o que caracteriza o “movimento” [1].

O ramo da física que estuda como as coisas se movem é conhecido como Mecânica e sua abrangência vai desde o movimento dos planetas em torno do Sol até o movimento de um elétron num campo elétrico ou magnético. É difícil dizer com certeza quando o estudo da Mecânica começou, o que se sabe é que os gregos foram os primeiros a refletir sobre o movimento de uma maneira mais profunda, de forma que a Mecânica Grega representou um grande passo na evolução da ciência moderna. Partindo desse ponto inicial, o desenvolvimento destes conceitos ao longo do tempo permitiu que Galileu Galilei e Newton formassem a base da Mecânica que conhecemos e ensinamos nos dias de hoje [4].

Outras formulações para descrever o movimento também acabaram surgindo, alguns exemplos podem ser dados por meio de cientistas como o matemático e astrônomo francês Lagrange e o matemático irlandês Hamilton. A Lagrangiana e a Hamiltoniana possuem formas diferentes para representar a Mecânica mas que ao mesmo tempo são completamente equivalentes a de Newton [4]. Dessa maneira, o termo “Mecânica Clássica”, se refere de forma geral a estas três formulações que temos hoje e também denota o ramo da física que não aborda as novas teorias como a Mecânica Quântica [8].

Tudo em nosso universo se move e por assim ser, tais movimentos geram consequências que podem ser responsáveis pelos fenômenos mais improváveis. As mudanças nas posições de corpos e partículas, podem ser aplicados para explicar o movimento de uma nuvem, a propagação de calor em materiais ou quem sabe até mesmo as mudanças na mente de uma pessoa. De fato, não conhecemos uma maneira fácil de analisar as mudanças na mente, mas talvez até estas possam ser paralelas com o movimento de átomos dentro do cérebro [1]. A verdade sobre isso, é que ainda não temos conhecimento suficiente para entender como funciona a mente humana matematicamente, de maneira completa. Vários pesquisadores já estudam a possibilidade de tentar modelar o que pode ser considerado uma mente artificial, de forma que termos como "redes neurais" e "inteligência artificial" são amplamente utilizados e reforçam ainda mais essa ideia. Em geral, a complexidade por trás de tudo isso não tira o mérito de todos os modelos que a Mecânica já gerou. É a natureza elementar da Mecânica Clássica que possibilita sua grande aplicação e abran-

gência.

Dentro deste contexto, um dos fenômenos mais comuns no universo em que vivemos é o das oscilações. O movimento repetitivo de partículas é algo que pode ser observado em praticamente todo o lugar e em todas as áreas. O oscilador harmônico simples é um dos melhores exemplos que se pode dar para isso. Ele chega a ser classificado como o movimento mais importante de ser estudado em uma dimensão, e mesmo com sua grande importância, também caracteriza um dos problemas mais simples de se resolver [4].

Neste capítulo será feita uma revisão do oscilador harmônico simples (OHS) apresentando suas características e propriedades principais, bem como abordando os conceitos que o fazem ter uma relevância tão alta. Em seguida será apresentado um refinamento do OHS, que por sua vez, permite aumentar muito mais sua abrangência sobre os fenômenos físicos conhecidos. O intuito de começar por algo simplificado e gradualmente aumentar a complexidade, é possibilitar um entendimento maior sobre o assunto e facilitar a visão de comportamentos análogos nos mais diversos fenômenos.

1.1 O Oscilador Harmônico Simples

O OHS é o sistema que abre as portas para o estudo das oscilações. Ele é abordado desde o ensino médio nas escolas, geralmente sob o ponto de vista de uma massa presa a uma mola, de forma que seu movimento está restrito a direção horizontal. Num primeiro momento, a massa se encontra parada e a mola relaxada, o que caracteriza o ponto de equilíbrio do sistema, tal que a força exercida pela mola é nula. Caso a mola seja comprimida ou esticada, o sistema sentirá uma força restauradora que tende a trazer a massa para a posição de equilíbrio, iniciando o movimento oscilatório.

Para podermos descrever e entender esse sistema, iniciamos dizendo que as dimensões do corpo a ser estudado não serão consideradas, de forma que apenas levaremos em conta a posição do centro de massa deste corpo. Assim, como o centro de massa se encontra em uma posição pontual no que diz respeito a extensão do corpo, denotaremos por "partícula" toda vez que nos referirmos a essa massa que está sendo alvo de nossas observações. Com isso, consideremos então essa partícula de massa m presa a uma mola de constante elástica k , tal que $k > 0$. A posição x da partícula, ou seja, de seu centro de massa, será medida a partir da posição de equilíbrio. Dessa forma pode-se ilustrar a situação descrita como segue na Figura 1.1 abaixo:

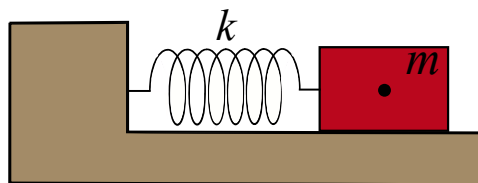


Figura 1.1: Esquema do sistema massa mola, em equilíbrio, que representa um movimento do tipo oscilador harmônico. Nesta representação temos a mola de contante elástica k e a caixa massa m . O ponto localizado ao centro da caixa representa o centro de massa da mesma.

No sistema a ser estudado, a mola obedecerá a lei de Hooke, que descreve a intensidade e direção da força aplicada à partícula, com dependência na distorção sofrida pela mola, que por sua vez, determinará o sentido de aplicação da força. Dessa maneira, a força é dita proporcional ao deslocamento da partícula e possui a forma

$$\vec{F}(x) = -kx \hat{i} \quad (1.1)$$

Da relação (1.1), percebe-se que quando $x = 0$ a força é nula, o que representa o ponto de equilíbrio. Para $x > 0$, ou seja, no caso de um deslocamento para a direita, a força será negativa, trazendo a partícula para a esquerda. Quando $x < 0$, tem-se um deslocamento para a esquerda, resultando em uma força positiva, que tende a mover a partícula para a direita. Tal descrição reflete o comportamento da força restauradora que atua nessa situação. É importante ressaltar, que neste caso, o $k > 0$, garante que no ponto $x = 0$ tenha-se um estado de equilíbrio estável, reafirmando a existência da força restauradora e do fenômeno de oscilações [4].

1.1.1 Solução para o Oscilador Harmônico Simples

Seguindo por essa análise, um dos pontos que mostra a relevância do oscilador harmônico simples é a dependência da força para com a posição, o que caracteriza um tipo importante de movimento dentro da Mecânica Clássica e também muito comum na natureza. Nessa linha, utilizando a formulação de Newton e assumindo a inexistência de forças dissipadoras (atrito), o movimento da partícula presa à mola pode ser descrito como segue:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.3)$$

A relação matemática dada por (1.3) é classificada como uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea, linear e a sua solução resulta na função que descreve o movimento da partícula, ou seja, as posições ocupadas por ela no decorrer do tempo [4]. Para resolver a (1.3), utilizaremos um método típico aplicado a equações diferenciais homogêneas de coeficientes constantes. Nesse processo, inicia-se procurando soluções da forma exponencial. Assim, supondo $x(t) = e^{\gamma t}$, em que γ é um parâmetro a ser determinado posteriormente [9], segue

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma^2 e^{\gamma t}. \quad (1.4)$$

Substituindo este resultado em (1.3), obtemos

$$\left(\gamma^2 + \frac{k}{m}\right)e^{\gamma t} = 0, \quad (1.5)$$

como $e^{\gamma t} \neq 0$, então

$$\gamma^2 + \frac{k}{m} = 0, \quad (1.6)$$

que é chamada Equação Característica para a equação diferencial (1.3). Desta relação, a fim de determinar o valor γ , segue

$$\gamma = \pm i\omega, \quad (1.7)$$

em que $\omega = \sqrt{k/m}$.

Dessa maneira, como é possível observar, as raízes de (1.6) são representadas por dois valores complexos distintos, fazendo com que a solução da equação diferencial dada por (1.3) seja da forma [9]

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (1.8)$$

Agora, perceba que desde que permitamos que as soluções para $x(t)$ sejam complexas, então, intuitivamente, as constantes arbitrárias C_1 e C_2 que multiplicam as soluções também o devam, garantindo que (1.8) seja uma solução geral para o problema estudado. Outro detalhe importante a ser considerado é o fato de tratarmos aqui um fenômeno físico cujos resultados devam fazer sentido no nosso universo, logo a solução obtida tem de fazer parte dos números reais. Para isso, deve-se escolher constantes multiplicativas de forma que a solução de $x(t)$ seja real. Assim, levemos em conta o fato de que a soma de dois números complexos somente será real, se um deles for o conjugado do outro [3]. Dessa forma, tomemos

$$C = a + bi; \quad (1.9a)$$

$$C^* = a - bi, \quad (1.9b)$$

Além disso, sabe-se também que $e^{i\omega t}$ é o complexo conjugado de $e^{-i\omega t}$, fato que pode ser observado facilmente quando reescreve-se estes termos utilizando a fórmula de Euler [10].

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \quad (1.10)$$

Com essa observação, conseguimos garantir que a solução para $x(t)$ seja real fazendo com que $C_1 = C$ e $C_2 = C^*$. A partir daqui, avaliando (1.8) com base nas relações (1.10) e (1.9), podemos escrever os números complexos que estamos trabalhando na representação polar (vide Figura 1.2), facilitando as manipulações que faremos em seguida:

$$C = a + ib = r e^{i\theta}; \quad (1.11a)$$

$$C^* = a - ib = r e^{-i\theta}, \quad (1.11b)$$

em que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a},$$

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \operatorname{sen} \theta.$$

Nesse caso, temos o seguinte resultado

$$x(t) = r e^{i\theta} e^{+i\omega t} + r e^{-i\theta} e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = r e^{i(\omega t + \theta)} + r e^{-i(\omega t + \theta)}$$

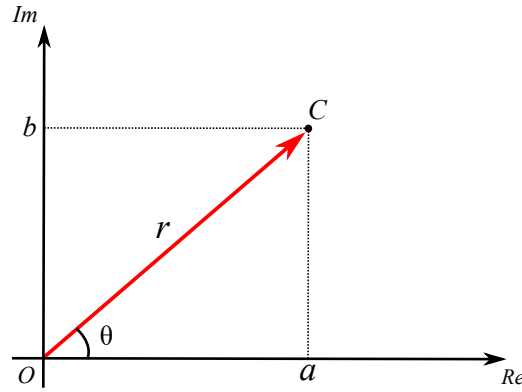


Figura 1.2: Representação de um número complexo via coordenadas polares utilizando o plano de Argand-Gauss. Neste sistema, um número complexo r é representado tal que o eixo das ordenadas corresponde a sua componente imaginária b do número complexo, enquanto o eixo das abscissas corresponde a componente real a .

Aqui, utilizando novamente a fórmula de Euler, pode-se reescrever $x(t)$ na forma mais conhecida

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta), \quad (1.12)$$

em que $A = 2r$.

Por fim, a relação obtida em (1.12) expressa a solução geral para a posição de uma partícula que representa um oscilador harmônico simples. As constantes A e θ são obtidas das condições iniciais do sistema, dependendo dos valores $x(t = 0)$ e $v(t = 0)$. Dessa forma, substituindo-se $t = 0$ em (1.12) e em sua primeira derivada temporal, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \theta; \\ v_0 &= -\omega A \text{sen}(\theta), \end{aligned}$$

resultando em

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad (1.13)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{v_0}{x_0 \omega} \right). \quad (1.14)$$

1.1.2 Considerações sobre a energia

Agora, com o objetivo de analisar as energias do sistema do Oscilador Harmônico Simples, perceba que o movimento da partícula, assim como descrito anteriormente, sugere a transformação da energia em dois tipos, sendo uma cinética, relacionada à velocidade, e outra potencial, relacionada à força elástica.

Para descrever a energia cinética, tem-se por definição a seguinte relação (na Mecânica Clássica) [3]:

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1.15)$$

em que v representa a velocidade da partícula. Dessa forma, na equação (1.15), fazendo a substituição da primeira derivada temporal de $x(t)$, chega-se a

$$T(t) = \frac{1}{2}m\omega A^2 \sin^2(\omega t + \theta) \quad (1.16)$$

No caso da energia potencial, a definição que se tem é “o trabalho realizado por uma força conservativa, para deslocar a partícula de um ponto x até um dado ponto x_s ”. Daí, tem-se a seguinte relação [3]:

$$U(x) = \int_x^{x_s} F(x')dx' = - \int_{x_s}^x F(x')dx' \quad (1.17)$$

No caso do OHS, como a força atuante no sistema é dada por (1.1), uma força conservativa, pode-se determinar a energia associada a essa força, obtendo como resultado [3]

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.18)$$

em que substituindo a solução para $x(t)$ expressa por (1.12), obtém-se

$$U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \theta) \quad (1.19)$$

Assim, dos resultados expressos em (1.16) e (1.19), pode-se escrever a energia total da partícula em qualquer tempo t pela soma

$$E = T + U = \frac{1}{2}kA^2, \quad (1.20)$$

visto que $\omega^2 = k/m$.

Como não há forças dissipativas no sistema, o resultado obtido é uma energia constante ao longo do tempo. Além disso, é possível observar que ambas as energias oscilam no intervalo entre 0 e $1/2kA^2$, com suas oscilações em fase, mas com amplitudes contrárias, ou seja, com oscilações defasadas de 90° , tal que quando U é máxima, T é zero e vice-versa, assim como é visível no gráfico da Figura 1.3 [4].

1.2 Refinando o OHS

Assim como foi observado, o oscilador harmônico simples consegue introduzir o conceito de fenômenos oscilatórios apresentando suas características básicas. A partir daí, para ampliar o escopo de abordagem destes fenômenos, um certo grau de complexidade deve ser adicionado, de forma que ao fazer isso, considera-se agora um sistema com vários graus de liberdade [10], onde estes estão relacionados a vários osciladores harmônicos que agem interagindo entre si, ou seja, osciladores que estão acoplados.

Os osciladores acoplados permitem descrever uma ampla gama de fenômenos, de forma que eles são a base de muitos modelos que explicam situações reais nas mais diversas áreas. De fato, a abrangência das oscilações acopladas consegue transcender a mecânica clássica, da qual ela nasce, auxiliando também no entendimento de alguns fenômenos quânticos. Dessa forma, o estudo dos osciladores acoplados permite não só compreender características mais gerais a respeito dos fenômenos oscilatórios, bem como ampliar nossa visão dos fenômenos dele recorrentes [2].

Devido ao alcance descrito para os osciladores acoplados, torna-se difícil descrever toda a teoria que os mesmos envolvem. Com isso, tem-se por objetivo neste trabalho abordar

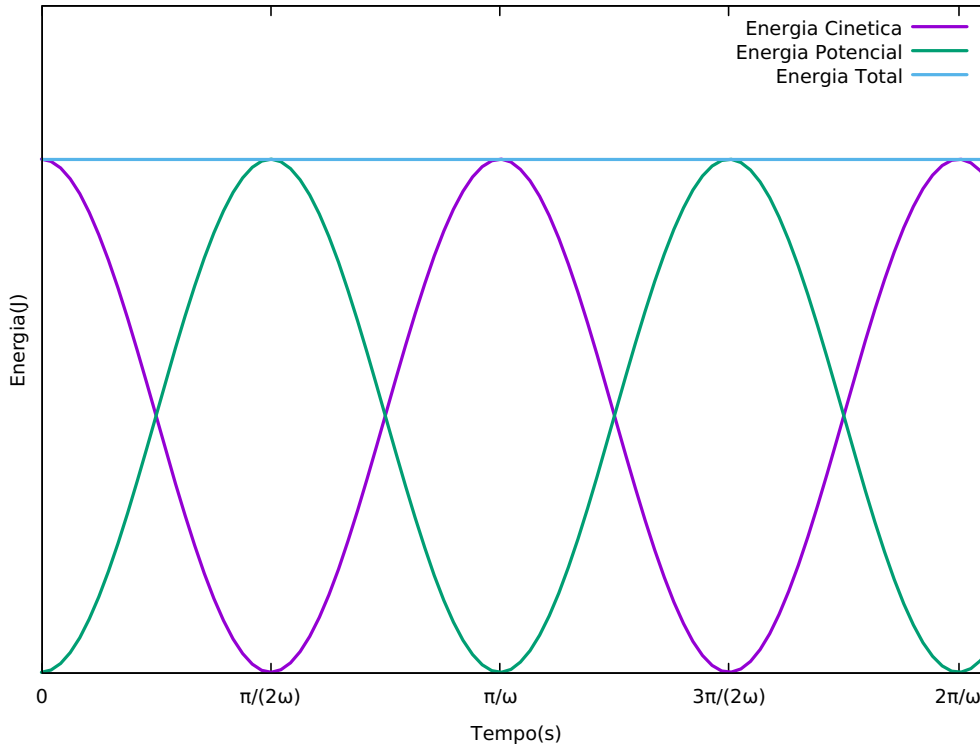


Figura 1.3: Representação do comportamento das energias no decorrer do tempo para o oscilador harmônico simples, em que a diferença de fase $\theta = 0$. O pico da energia cinética se dá quando a energia potencial é mínima e vice-versa, de forma que as posições dos picos no tempo varia de acordo com a frequência angular ω em que o sistema oscila. Dessa forma a energia total do sistema se mantém constante.

um dos sistemas mais simples de oscilações acopladas. Nesse contexto serão apresentados os conceitos principais relacionados a ele e também o formalismo básico necessário para conseguir descrevê-lo matematicamente.

1.2.1 O Oscilador Harmônico Duplo

Como um primeiro exemplo para o estudo das oscilações acopladas, consideremos duas massas m_1 e m_2 confinadas a um pequeno poço e anexadas a algumas molas, assim como demonstra o esquema da Figura 1.4 abaixo:

Na situação descrita e no decorrer deste trabalho, também utilizaremos o termo partículas para nos referir as massas que compõe o sistema do OHD, visto que assim como no caso do OHS, levou-se em conta somente a posição do centro de massa de cada corpo para realizarmos nossas observações. Além disso, também é fácil notar que o movimento de qualquer partícula acabará influenciando no movimento da outra, de forma que é impossível que uma delas se mova de maneira independente. Isso ocorre exclusivamente por conta da mola de constante elástica k_2 que tem o papel de acoplar as duas partículas.

Supondo então o movimento do sistema, pode-se representar a posição de cada uma das massas m_1 e m_2 , em nosso sistema de coordenadas, medindo-se o valor x_1 e x_2 , respectivamente, e também denotar as posições de equilíbrio de cada uma como sendo x_{01} e x_{02} . A partir daí, torna-se conveniente descrever o sistema em função dos deslocamentos de cada partícula, como segue representado na Figura 1.5:

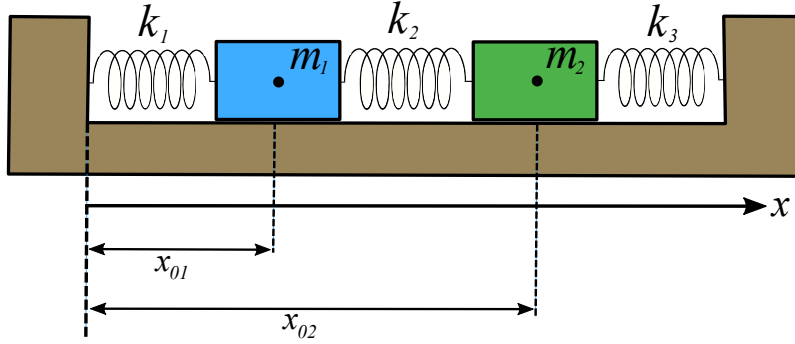


Figura 1.4: Esquema do sistema massa-mola que representa o oscilador harmônico duplo formado pelas duas massas m_1 e m_2 e pelas três molas de constantes elásticas k_1 , k_2 e k_3 . O ponto localizado no centro de cada uma das massas representa o centro de massa das mesmas. As posições indicadas como x_{01} e x_{02} caracterizam os respectivos pontos de equilíbrio do sistema.

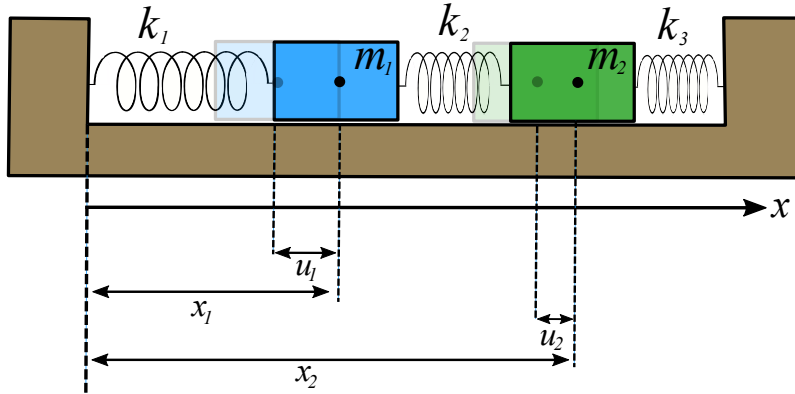


Figura 1.5: Esquema do oscilador harmônico duplo fora da condição de equilíbrio. Os parâmetros x_1 e x_2 indicam as posições reais de cada uma das massas, enquanto que os parâmetros u_1 e u_2 representam as posições relativas que as massas ocupam em relação às respectivas posições de equilíbrio.

$$u_1(t) = x_1(t) - x_{01} \quad (1.21)$$

$$u_2(t) = x_2(t) - x_{02} \quad (1.22)$$

Das forças que atuam sobre o sistema, podemos obter o esquema representado na Figura 1.6, em que cada partícula sofre a influência de duas forças de mesma direção e sentidos opostos. Para descrever esse sistema de forma completa, deve-se então caracterizar a posição de cada uma das partículas que o compõe para qualquer tempo. Dessa forma, como o oscilador harmônico duplo é constituído de duas partículas, podemos classificá-lo como um sistema com dois graus de liberdade, em que as soluções para $x_1(t)$ e $x_2(t)$ fornecem os parâmetros necessários para entendê-lo completamente. Nesse ponto, perceba que como $u_1(t) = x_1(t) - x_{01}$, tanto x_1 como u_1 são suficientes para descrever as posições da partícula 1, pois os dois termos são totalmente equivalentes a menos de uma constante.

Nesse contexto, seguindo pela formulação de Newton, temos que a equação de movi-

mento para cada partícula pode ser obtida a partir de:

$$m_i \ddot{u}_i(t) = \sum_{j=1}^n F_{ij}, \quad (1.23)$$

em que o subíndice i se refere à partícula que se toma para análise, \ddot{u}_i denota a derivada temporal de segunda ordem da coordenada u_i e F_{ij} representa cada uma das forças que agem sobre aquela partícula, tal que lê-se “a força em i devido a mola j ”. Nesse sentido, pode-se definir as forças na partícula 1 de acordo com o esquema representado na Figura 1.6

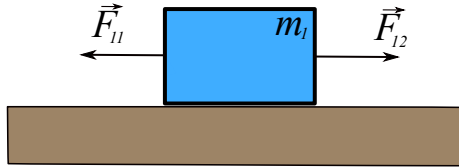


Figura 1.6: Esquema da representação vetorial das forças que atuam na partícula 1. A força \vec{F}_{11} é a força que atua na massa m_1 devido a mola de constante elástica k_1 . A força \vec{F}_{12} é a força que atua na massa m_1 devido a mola de constante elástica k_2 .

$$m_1 \ddot{u}_1(t) = F_{12} - F_{11}, \quad (1.24)$$

em que cada uma das forças pode ser medida a partir da compressão ou distensão de cada uma das molas [10]:

$$F_{12} = k_2(u_2 - u_1), \quad (1.25)$$

$$F_{11} = -k_1 u_1. \quad (1.26)$$

Dessa forma, pode-se substituir (1.25) e (1.26) em (1.24), definindo a equação de movimento da partícula 1 como:

$$m_1 \ddot{u}_1 = k_2 u_2 - (k_1 + k_2) u_1. \quad (1.27)$$

Seguindo de forma análoga para determinar o movimento da partícula 2, chega-se em um resultado semelhante expresso por:

$$m_2 \ddot{u}_2 = k_2 u_1 - (k_2 + k_3) u_2. \quad (1.28)$$

Aqui, fica claro que nenhuma dessas partículas pode se mover de forma independente, visto que em ambas as equações, o termo relativo a posição da outra partícula está presente. Portanto, a situação que estamos analisando é na verdade descrita por um sistema de equações diferenciais acopladas

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 = k_2 u_2 - (k_1 + k_2) u_1, \\ m_2 \ddot{u}_2 = k_2 u_1 - (k_2 + k_3) u_2, \end{cases} \quad (1.29)$$

em que o estado do sistema é definido a partir das duas funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, que satisfazem o sistema (1.29).

A experiência que obtivemos analisando inicialmente o oscilador harmônico simples indica que esse sistema seria capaz de descrever oscilações harmônicas, apresentando certas frequências características. Esse é um dos pontos importantes que será abordado nas soluções deste problema, em que a presença de frequências naturais gera os chamados modos normais de vibração [10].

Com o objetivo de tornar a situação descrita ainda mais elementar, no restante deste trabalho utilizar-se-á de uma aproximação para o sistema do oscilador harmônico duplo, em que serão consideradas partículas idênticas, ou seja, $m_1 = m_2 = m$, e que estejam acopladas por molas também idênticas, tal que $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Dessa forma, pode-se reescrever o conjunto de equações diferenciais (1.29) da seguinte forma:

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = ku_2 - 2ku_1, \\ m\ddot{u}_2 = ku_1 - 2ku_2, \end{cases} \quad (1.30)$$

Capítulo 2

Solução Analítica

A resolução do problema do oscilador harmônico duplo por meios analíticos envolve um conjunto de conceitos matemáticos desenvolvidos na teoria de equações diferenciais. Por conta disso, neste capítulo faremos uma introdução a tais conceitos abordando a temática “Sistemas de Equações Lineares” para em seguida, resolver o sistema (1.30), encontrando as soluções gerais que o satisfaçam.

2.1 Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Muitos problemas físicos acabam por envolver vários elementos separados, mas que ao mesmo tempo possuem algum tipo de vínculo entre si. O resultado disso, quando se descreve o problema matematicamente, corresponde a um sistema de equações diferenciais. Estes sistemas aparecem naturalmente em problemas que envolvem mais de uma variável dependente, em que cada uma delas é função de um mesmo parâmetro independente único. Um exemplo simples para ilustrar essa situação é o de um circuito elétrico do tipo *RLC*, onde pode-se mostrar que a diferença de potencial e a corrente são descritas pelo sistema abaixo [9]:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC} \end{cases} \quad (2.1)$$

em que L é a indutância, C a capacitância e R a resistência dos respectivos componentes do circuito. Além desse exemplo, existem muitas situações semelhantes em outras áreas da ciência, que quando descritas matematicamente, coincidam com um sistema de equações diferenciais.

Dentro desse contexto, o estudo de sistemas lineares de primeira ordem é particularmente importante, visto que equações de ordem superior sempre podem ser transformadas de forma a reduzir sua ordem. Ação essa, que também é necessária quando deseja-se tratar o problema numericamente [9].

Outro detalhe a ser citado, é que por questões teóricas e também computacionais, torna-se conveniente abordar uma formulação matricial quando se deseja resolver um problema de sistemas de equações diferenciais lineares. Para isso, alguns conceitos e resultados relacionados a álgebra matricial devem ser levados em conta [9]. Além dos

resultados e propriedades básicas esperados, como multiplicação, soma e matriz identidade, também utilizaremos conteúdos relacionados à funções matriciais, autovalores e autovetores.

2.1.1 Funções Matriciais

As funções matriciais surgem da necessidade de considerar vetores ou matrizes cujos elementos variam seguindo um parâmetro comum, ou seja, os elementos da matriz são funções de uma variável qualquer. Por exemplo:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Com isso em mente, também pode-se definir que $\mathbf{x}(t)$ ou $\mathbf{A}(t)$ sejam diferenciáveis se todos os seus elementos também o forem. Nesse caso, cada elemento de $d\mathbf{A}/dt$ é a derivada do elemento correspondente a \mathbf{A} , podendo denotar isto da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \frac{d}{dt}a_{ij}(t). \quad (2.3)$$

Um ponto interessante, também de se acrescentar, é que muitas das propriedades do cálculo elementar podem ser estendidas para o caso de funções matriciais [9], como por exemplo:

- $\frac{d}{dt}\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{C}\frac{d}{dt}\mathbf{A}$, em que \mathbf{C} é uma matriz constante;
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\mathbf{B}$;
- $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}$.

No entanto, é importante ressaltar que nas relações acima é preciso tomar um cuidado especial para que a ordem das multiplicações não se altere.

2.1.2 Autovalores e Autovetores

Muitas vezes, um sistema de equações diferenciais de coeficientes constantes pode ser visto como um tipo de transformação linear de matrizes. Por exemplo, considere a equação:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (2.4)$$

Nesse caso, ela pode ser entendida como uma transformação linear que transforma um determinado vetor \mathbf{x} em um novo vetor \mathbf{y} . Dentro desse contexto, vetores que são transformados em múltiplos de si mesmo possuem significativa importância para diversas aplicações, como por exemplo, para procurar os modos de vibração livre de um sistema conservativo com número finito de graus de liberdade, que por acaso é nosso objetivo.

Para encontrarmos tais vetores, supomos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, em que λ é um fator escalar de proporcionalidade e substituímos tal relação em (2.4):

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

que nos leva a

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0, \quad (2.6)$$

em que tal equação terá soluções não triviais se, e somente se, λ for escolhido de modo que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é um tipo de equação polinomial de grau n em λ e é dita equação característica da matriz A . Os valores de λ que fazem com que a equação seja satisfeita são chamados de autovalores da matriz \mathbf{A} e as soluções não nulas obtidas usando tal autovalor são chamadas de autovetores, associados àquele autovalor [9].

2.2 Resolvendo o Oscilador Harmônico Duplo

Depois dessa revisão de álgebra matricial, espera-se possuímos arcabouço suficiente para iniciar a resolução do sistema de equações diferenciais (1.30) que descreve o oscilador harmônico duplo. Para iniciar, é conveniente escrever tal sistema na forma matricial, como segue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}\mathbf{u}, \quad (2.8)$$

em que as matrizes presentes na equação são representadas por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}. \quad (2.9c)$$

É interessante falar que neste caso, a matriz representada por \mathbf{u} possui dois elementos pois o sistema analisado tem 2 graus de liberdade. Caso o sistema tivesse n graus de liberdade, teríamos então uma matrix com n elementos [4].

Ainda, perceba também que nas matrizes (2.9), o termo de massa \mathbf{M} é dado por uma matriz diagonal, ao passo que as constantes elásticas do sistema são expressas pela matriz \mathbf{K} cujos elementos da diagonal são não nulos, refletindo no acoplamento das equações de movimento geradas.

Nesse ponto, para continuarmos, a primeira observação que pode ser feita é a respeito da semelhança deste problema para com o oscilador harmônico simples e portanto, a presença de frequências características para as oscilações do sistema [10]. Nesse contexto, buscaremos uma solução para (1.30) na forma

$$u_1(t) = U_1 e^{i\omega t}; \quad (2.10a)$$

$$u_2(t) = U_2 e^{i\omega t}, \quad (2.10b)$$

em que desde já, devido a nossa experiência com o OHS, assumiremos que U_1 e U_2 sejam constantes complexas, tal que encontraremos a solução real futuramente [10].

Escrevendo este termo também numa forma matricial, temos:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{U} e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Dessa maneira substituindo (2.11) em (2.8), calculando as respectivas derivadas e simplificando o fator exponencial comum em todos os termos, o resultado obtido é

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} = -\mathbf{K} \mathbf{U}, \quad (2.12)$$

que pode ser escrito numa forma análoga a (2.6), como segue

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = 0. \quad (2.13)$$

A relação proposta pela equação acima é uma generalização para a equação do autovalor estudada na seção 2.1.2. Comparando a forma obtida com a expressa por (2.6), pode-se observar que neste caso, o auto-valor de interesse é dado por ω^2 . Não só isso, mas também é possível observar que neste exemplo, a matriz identidade foi substituída por outra forma diagonal representada na matriz massa \mathbf{M} [4].

Seguindo nesse caminho, podemos resolver a equação do auto-valor da mesma forma, calculando os resultados de ω que anulam o determinante da matriz coeficiente que acompanha o termo \mathbf{U} , a fim de encontrarmos as soluções não triviais para o mesmo.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \det \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

A solução para tal impasse é dada em dois valores de ω , de forma que as raízes da equação descrita pelo determinante são:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad (2.15a)$$

$$\omega_2 = \sqrt{3k/m}. \quad (2.15b)$$

Assim como comentado anteriormente, estas são as frequências características do sistema, de forma que as partículas que o constituem somente possam vibrar nestes valores e em nenhum outro [10].

Os movimentos descritos pelo sistema com quaisquer uma dessas frequências características é chamado de *modo normal de vibração*, ou ainda *modo característico* [10], e a solução para a posição das partículas em função do tempo pode ser calculada analisando uma a uma dessas frequências [4].

2.2.1 Primeiro modo normal

Para iniciarmos esta análise, escolhamos a primeira frequência normal como sendo $\omega_1 = \sqrt{k/m}$. Nesse caso, a equação do autovalor (2.13) toma a forma

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

em que agora, lê-se

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.17)$$

resultando no seguinte sistema de equações:

$$U_1 - U_2 = 0, \quad (2.18a)$$

$$-U_1 + U_2 = 0. \quad (2.18b)$$

Deste resultado, obtemos que $U_1 = U_2$ e também, como foi considerado desde o início que estes termos seriam complexos, podemos denota-los como $U_1 = U_2 = A_1 e^{i\phi_1}$, utilizando a mesma notação em coordenadas polares que foi apresentada no capítulo 1. Daí, de acordo com (2.11), temos que:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_1 t + \phi_1)}. \quad (2.19)$$

Perceba que a solução obtida até aqui corresponde a uma função complexa, de forma que para garantirmos uma solução real do oscilador harmônico duplo, deve-se considerar somente a porção real de (2.19). Assim, pela identidade de Euler expressa em (1.10), segue que

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1). \quad (2.20)$$

O resultado obtido então, corresponde ao primeiro modo normal de vibração das partículas, em que o sistema de equações

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (2.21a)$$

$$u_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (2.21b)$$

mostra uma oscilação em fase e de mesma amplitude. Tal movimento é idêntico ao apresentado pelo oscilador harmônico simples, de forma que neste caso, como podemos observar na Figura 2.1, as partículas se movem em conjunto, como se a mola que as liga não existisse, explicando por que a primeira frequência característica tem um valor equivalente ao do OHS.

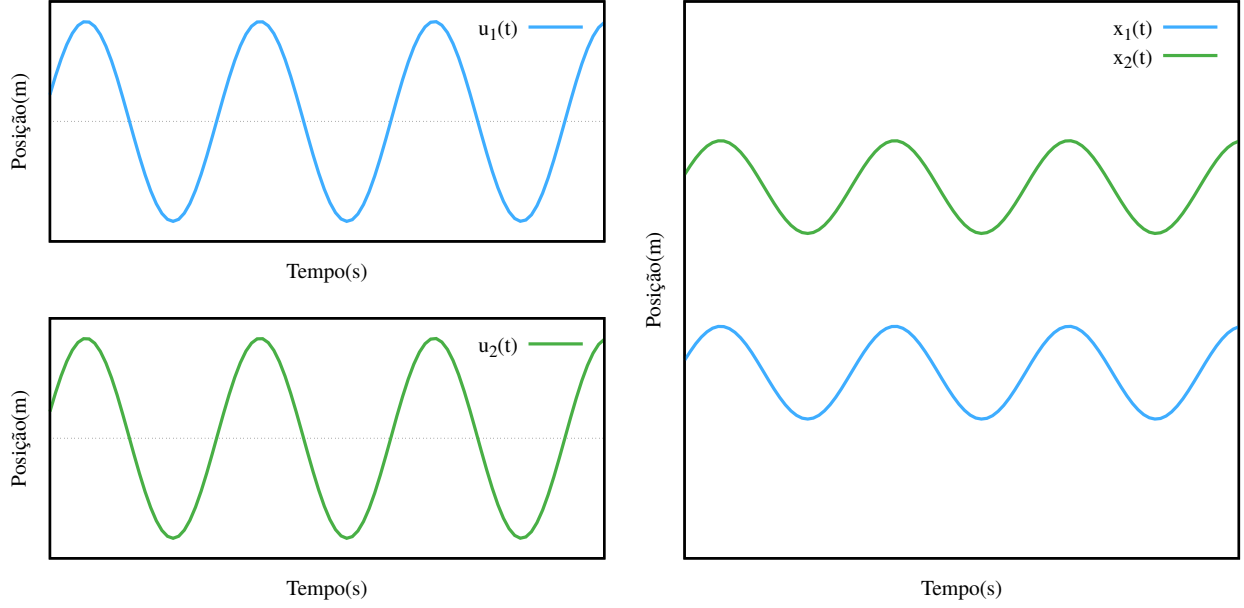


Figura 2.1: A esquerda estão representadas as soluções para as posições $u_1(t)$ e $u_2(t)$ respectivas a cada partícula, devido a frequência característica $\omega_1 = \sqrt{k/m}$. A direita pode-se observar a composição do movimento dentro do oscilador harmônico duplo.

2.2.2 Segundo modo normal

Agora, continuando a resolução deste problema, encontraremos a solução para o movimento que está relacionada ao segundo autovalor que obtemos, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. Substituindo esse resultado em (2.13), tem-se

$$(\mathbf{K} - \omega_2^2 \mathbf{M}) = \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Então, tomando um caminho semelhante ao que foi feito no estudo do primeiro modo normal de vibração, a equação para o autovalor, $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U}$, implicaria em

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.23)$$

que nos leva a $U_1 + U_2 = 0$, ou também, $U_1 = -U_2 = A_2 e^{i\phi_2}$, visto que as constantes U_1 e U_2 devem admitir uma forma complexa. Deste resultado, obtem-se

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} = \begin{bmatrix} A_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} e^{i(\omega_2 t + \phi_2)}, \quad (2.24)$$

que pode ser reescrito na forma

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (2.25)$$

obtendo como solução associada ao segundo segundo autovetor, o seguinte sistema de equações

$$u_1(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (2.26a)$$

$$u_2(t) = -A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (2.26b)$$

Perceba que neste caso a solução para o movimento das partículas nos mostra uma oscilação de mesma amplitude, porém com total diferença de fase. Isso pode ser observado na Figura 2.2, em que quando a partícula 1 apresenta um movimento no sentido positivo do eixo, a partícula dois apresenta um movimento contrário, no sentido negativo e vice versa. Outro detalhe possível de ser observado é que quando as duas molas que prendem as partículas as paredes do oscilador estão distendidas, a mola do meio, que conecta as partículas entre si, está comprimida duas vezes mais, resultando em uma força também duas vezes maior do que a aplicada pela mola distendida. Podemos interpretar tal fato observando o movimento do ponto de vista de uma das partículas, de forma que para cada uma, devido a simetria do sistema, é como se elas tivessem ligadas a uma mola de constante elástica igual a $3k$, o que explicaria o valor calculado para a frequência ω_2 [4].

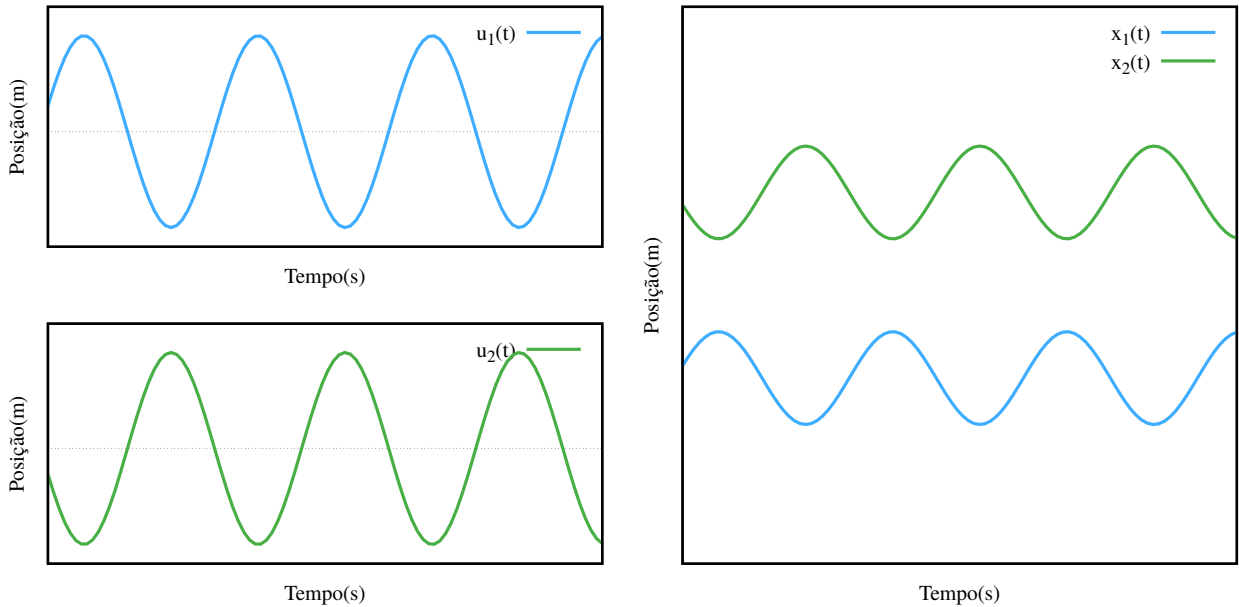


Figura 2.2: A esquerda estão representadas as soluções para as posições $u_1(t)$ e $u_2(t)$ respectivas a cada partícula, devido a frequência característica $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$. A direita pode-se observar a composição do movimento dentro do oscilador harmônico duplo.

2.2.3 Solução geral

Tendo em vista as duas soluções obtidas devido aos dois autovalores calculados, sabe-se que o sistema de equações inicial (1.30), ou também, sua forma matricial (2.8), são satisfeitos. Ainda, como a equação do movimento é linear e homogênea, então a soma das soluções obtidas separadamente, também será solução [4]:

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.27a)$$

$$u_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (2.27b)$$

ou ainda, mantendo uma notação matricial

$$\mathbf{u}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (2.28)$$

Tal solução geral é justificada no fato de a equação do movimento ser uma equação diferencial de segunda ordem para duas variáveis, $u_1(t)$ e $u_2(t)$, implicando que sua forma deveria conter quatro constantes de integração. Dessa maneira, qualquer solução para o sistema pode ser obtida com as constantes A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 sendo determinadas pelas condições iniciais propostas [4].

Os resultados gerados a partir da solução geral são difíceis de se visualizar e descrever, assim como é possível observar na Figura 2.3. O movimento de cada partícula é influenciado pela outra, fazendo com que as próprias frequências ω_1 e ω_2 se misturem e que o movimento em si nunca se repita, visto que $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$.

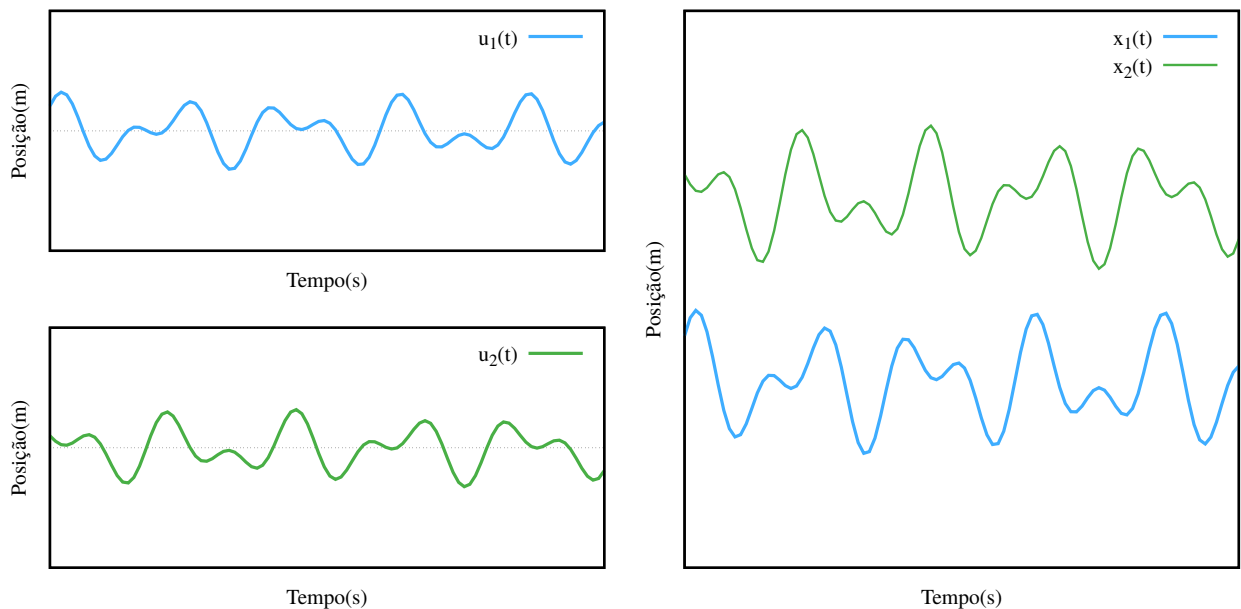


Figura 2.3: A esquerda estão representadas as soluções gerais para as posições relativas das funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$. A direita pode-se observar a posição real de cada partícula dentro do oscilador harmônico duplo.

Aqui vale mencionar ainda, que devido a essa complexidade no movimento das partículas acopladas, a obtenção de certas características do movimento como as frequências de oscilação, por exemplo, não é possível unicamente da observação dos dados, tal que uma análise extra se faz necessária. Isso é dito no contexto de que muitas vezes, ao analisarmos um conjunto de dados, não se tem previamente uma descrição matemática do mesmo, como foi o nosso caso. Dessa forma, utilizar de ferramentas que possibilitem extrair estas informações, como por exemplo a Transformada de Fourier, que revela as frequências características presentes em determinada função ou série temporal, acaba sendo um passo indispensável para interpretação e descrição dos fenômenos estudados.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Desde a primeira guerra mundial, o surgimento do computador e as consequentes facilidades obtidas em vários aspectos da vida, refletiram um crescimento das possibilidades que poderiam ser abordadas e desenvolvidas nos dias que se seguissem, de forma que problemas e situações antes consideradas de grande dificuldade, agora seriam objetivos alcançáveis com certa facilidade [11].

No que tange as ciências exatas e ao aparecimento de equações complexas que não apresentam soluções analíticas ou que, pelo menos até agora não foram resolvidas, isso representou uma ferramenta de grande potencial para análise e entendimento de fenômenos observáveis, sem que houvesse muitas simplificações de sua forma original.

Nesse contexto, o presente capítulo abordará alguns exemplos de métodos numéricos. Primeiramente, apresentando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, para então aplicá-lo na resolução do sistema de equações diferenciais que representa o oscilador harmônico duplo. Em seguida é apresentado a Transformada de Fourier e sua forma discretizada como método para análise de dados, utilizando-a nos resultados obtidos via solução numérica.

3.1 Método de Runge-Kutta

A utilização de métodos numéricos para resolver equações diferenciais permite que possamos obter uma aproximação precisa da solução de um problema de valor inicial (PVI) [9]. De forma geral, dividi-se os métodos para resolução dessas equações em duas classes, os métodos de passo único e os métodos de passos múltiplos. Nesse primeiro, por meio de um valor inicial $y(t_0) = y_0$, desenvolve-se toda a evolução dos dados, tal que partindo de certo ponto $t = t_n$, somente ele é necessário para calcular o valor aproximado da solução no próximo ponto da partição $t = t_{n+1}$. Para os métodos de passos múltiplos, de forma simples, utiliza-se mais de um ponto de partição para definir o próximo valor da função.

O método de Runge-Kutta, escolhido para resolver o sistema de equações diferenciais que esquematiza o oscilador harmônico duplo, é classificado como um método de passo único. O seu desenvolvimento surgiu inicialmente pela ideia de generalizar o método de Euler, ao permitir que várias avaliações da mesma partição fossem feitas antes de dar o passo para a próxima. Essa ideia é geralmente atribuída ao matemático alemão Carl David Tolmé Runge, de forma que as seguintes contribuições para o método foram realizadas pelo matemático, também alemão, Wilhelm Martin Kutta. Sendo este último responsável pela completa caracterização do conjunto de métodos de Runge-Kutta de quarta ordem

e por propor os primeiros métodos de ordem 5 [12].

Atualmente, o método de Runge-Kutta caracteriza na verdade uma classe de métodos, englobando inclusive os métodos de Euler e de Euler aprimorado. Nesse sentido, o foco de nossa atenção será dado para aquele que é chamado de método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem, de forma que no restante deste texto, iremos nos referir a ele somente como método de Runge-Kutta. Tal método foi rescolhido por ser relativamente simples de aplicar e suficientemente preciso para tratar muitos problemas de maneira eficiente. [9].

Dessa forma, o objetivo a ser desenvolvido pelo método escolhido é calcular uma solução aproximada para a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y), \quad (3.1)$$

na condição inicial

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.2)$$

Para isso, supomos que as funções trabalhadas são contínuas dentro do plano ty , de forma a também conter o ponto (t_0, y_0) . A partir daí, no intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ (aqui o valor h representa o tamanho do passo a ser considerado) contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução $y = \phi(t)$ para a equação diferencial nesse intervalo, podendo agora reescrevê-la como

$$\frac{d}{dt}\phi(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)] \quad (3.3)$$

A partir dela, também é possível aproximar a derivada na equação (3.3), pelo quociente de diferenças:

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \cong f[t_n, \phi(t_n)] \quad (3.4)$$

Assim, se substituirmos as igualdades $\phi(t_n) = y_n$ e $\phi(t_{n+1}) = y_{n+1}$ e resolvermos para y_{n+1} , obteremos a fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Como definido anteriormente também, a diferença entre uma partição t_{n+1} e t_n é dada pelo valor uniforme h para todo n . Com isso, denotando $f(t_n, y_n)$ por f_n então pode-se simplificar a (3.5) para

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

O método de Euler consiste em calcular repetidamente a equação (3.6) aplicando o resultado de cada passo, no cálculo do passo seguinte. Como solução, obtem-se uma sequência de valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ que aproximam a forma da solução $\phi(t)$ nos pontos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ [9].

Pela forma como foi desenvolvido o método de Euler, não é difícil observar que conforme diminuirmos o valor do passo h as respostas obtidas para a função $\phi(t)$ ficam cada vez mais precisas. Uma solução numérica, por sua vez, parte do pressuposto que esse intervalo não pode tender a zero e assim devemos escolher um valor específico, que minimiza o erro associado ao método utilizado.

Todos os métodos numéricos desenvolvidos para resolver equações diferenciais possuem erros, tal que o grande objetivo de pesquisadores que atuam nessa área é obter

os resultados mais precisos possíveis dentro dos problemas propostos. Nesse contexto, os erros provenientes de uma solução para um problema de valor inicial são divididos em dois grupos: *erros de discretização* e *erros de arredondamento*. Os erros de discretização são uma propriedade do método aplicado, enquanto que os erros de arredondamento são propriedades dos computadores e programas utilizados para desenvolver o método escolhido [13].

No método de Runge-Kutta, antes de efetuarmos o passo final para definir o valor aproximado da solução e partir para a próxima partição, ainda são feitas outras avaliações na partição em que se está. De forma que algumas dessas avaliações são realizadas considerando um passo intermediário, com valor igual a $h/2$. Esse detalhe, permite que a solução obtida via método de Runge-Kutta tenha uma resposta com precisão bem maior que o método de Euler.

De maneira mais específica, a solução via método de Runge Kutta possui uma relação que envolve uma média ponderada dos valores calculados para $f(t, y)$, tal que os pontos onde foram utilizados esses passos intermediários, possuem um peso maior:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right), \quad (3.7)$$

em que

$$k_{n1} = f(t_n, y_n), \quad (3.8a)$$

$$k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right), \quad (3.8b)$$

$$k_{n3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right), \quad (3.8c)$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \quad (3.8d)$$

Os termos k_{ni} , com $i = 1, 2, 3$ ou 4 representam os coeficientes angulares das retas tangentes a curva da solução, de forma que $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ caracteriza um coeficiente angular médio que é usado para determinar a variação do passo definitivo. Por conta desse processo, o erro de truncamento local para o método de Runge-Kutta é proporcional a h^5 , sendo duas ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler aprimorado e três ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler [9].

Assim como é possível observar em (3.8), o método de Runge-Kutta de quarta ordem consiste de quatro estágios diferentes para a validação de cada passo. Para uma observação geométrica mais concreta observe as figuras a seguir, que representam o método de Runge Kutta aplicado na curva expressa na Figura 3.1.

No primeiro estágio, representado na Figura 3.2, avalia-se o coeficiente angular k_{n1} no extremo esquerdo do intervalo definido por $[t_n; t_n + h]$. A partir daqui, cada uma das seguintes avaliações utilizará o resultado obtido no estágio anterior para determinação do novo coeficiente k_{ni} .

Em seguida, no segundo e terceiro estágios, são calculadas as respectivas aproximações para os coeficientes angulares k_{n2} e k_{n3} no ponto médio do intervalo, dessa forma, considerando um passo $h/2$, assim como mostrado nas Figuras 3.3a e 3.3b.

No último estágio, o coeficiente k_{n4} representa a quarta aproximação, sendo determinado no ponto $t_n + h$, caracterizado pela extrema direita do intervalo analisado, vide Figura 3.4.

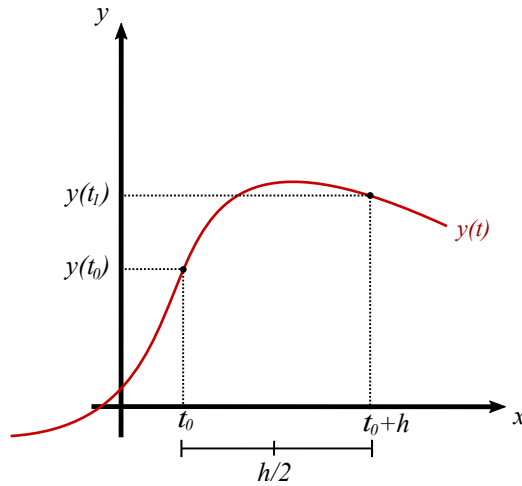


Figura 3.1: Representação esquemática de uma função qualquer.

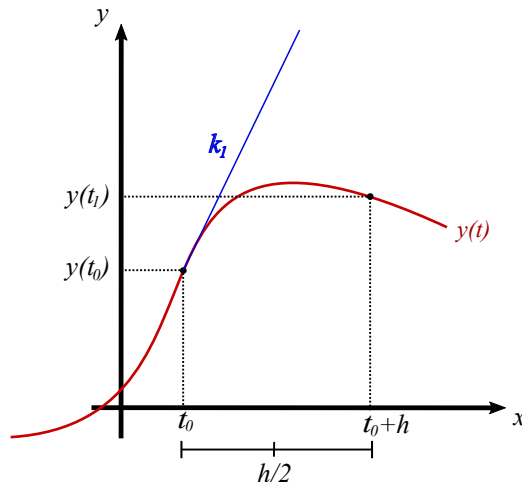


Figura 3.2: Representação esquemática do primeiro estágio do método de Runge-Kutta. Neste estágio avalia-se a reta tangente a curva no ponto t_0 obtendo-se o coeficiente angular k_1 .

Por fim, os quatro coeficientes determinados ao longo dos quatro estágios anteriores são aplicados no cálculo do coeficiente final, que por sua vez será utilizado para o passo definitivo na aproximação da função estudada, vide Figuras 3.5a e 3.5b.

3.1.1 Aplicando o Método de Runge-Kutta no OHD

Agora que o método de Runge-Kutta foi abordado e discutido, pode-se desenvolvê-lo utilizando como problema alvo o sistema de equações diferenciais que descreve o Oscilador Harmônico Duplo. No entanto uma pequena observação é necessária. Assim como foi mostrado, este método é utilizado para resolver equações diferenciais de primeira ordem, enquanto que as equações do sistema (1.30) são de segunda ordem. Nesse caso, será necessário, antes de aplicarmos o método, realizar uma redução de ordem nas equações do sistema. Ao fazer isso, utilizaremos o conceito de que $d^2x/dt^2 = dv/dt$, em que v é a variação da posição em relação ao tempo, ou seja, a velocidade. Com isso, reduzimos as equações de segunda ordem para x , transformando-as em equações diferenciais de primeira ordem para a velocidade e adicionamos duas novas equações da forma $dx/dt = v$

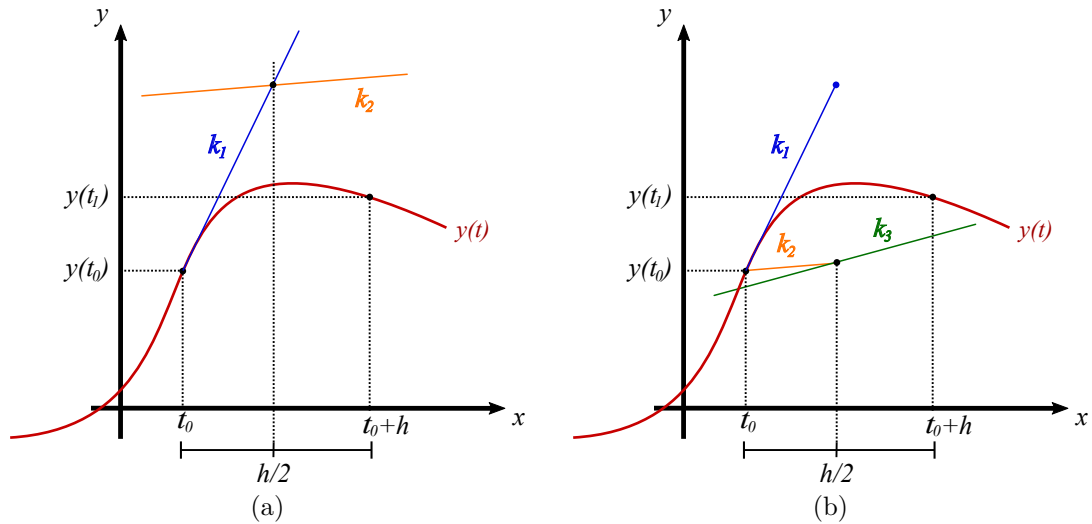


Figura 3.3: Representação esquemática dos estádio 2 e 3 do método de RK. Em (a) é possível observar o estágio 2, em que o coeficiente k_1 e a reta tangente definida por ele são aplicados ao ponto $t_0 + h/2$ para determinar o valor do coeficiente k_2 . De maneira semelhante, em (b), temos o estágio 3, no qual o valor de k_2 é utilizado no ponto t_0 e aplicado a $t_0 + h/2$ com o intuito de determinar o coeficiente k_3 . Estes estágios são os responsáveis por nomear o método como de "passo intermediário", visto que as análises são feitas ao dar-se um passo intermediário $h/2$ na partição em que se está.

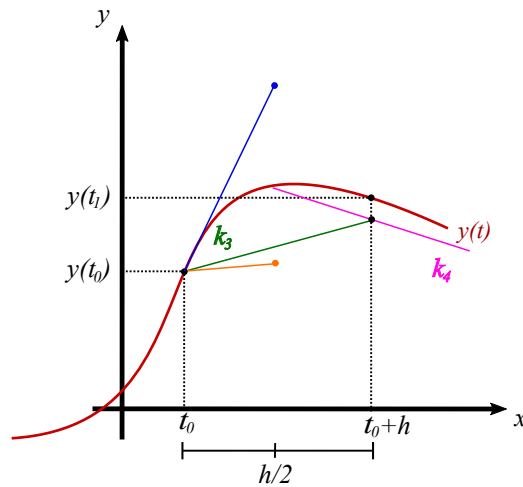


Figura 3.4: Representação esquemática do estágio 4 do método de RK. Aqui o coeficiente k_3 é aplicado, de maneira semelhante aos estágios anteriores, no ponto $t_0 + h$ (final da partição) para determinar o valor do coeficiente k_4 .

ao sistema, uma para cada partícula, no intuito de completar a ideia original de determinar a posição de cada uma no tempo. Como a posição utilizada no sistema de equações é a posição relativa, consideraremos o u em vez de x , chegando a

$$\begin{cases} m\dot{v}_1 = ku_2 - 2ku_1 \\ \dot{u}_1 = v_1 \\ m\dot{v}_2 = ku_1 - 2ku_2 \\ \dot{u}_2 = v_2 \end{cases} \quad (3.9)$$

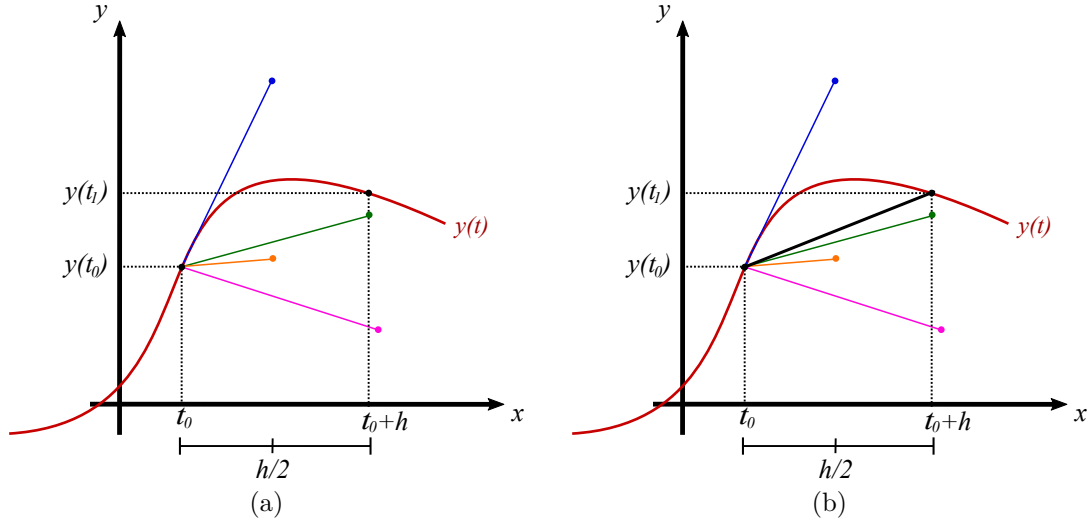


Figura 3.5: Representação esquemática em (a) das retas obtidas com cada um dos coeficientes determinados e em (b) do passo final, representado em preto, calculado através coeficiente definitivo via média ponderada dos coeficientes anteriores.

O que antes era descrito por duas equações de segunda ordem, agora passou a ser descrito por quatro equações de primeira ordem, possibilitando a utilização direta do método de Runge-Kutta na forma dada por (3.7). Sendo assim, deveremos aplicar o método para cada equação, tal que a utilização dele na determinação da velocidade e da posição resultará em

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right), \quad (3.10)$$

e

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \left(\frac{l_{n1} + 2l_{n2} + 2l_{n3} + l_{n4}}{6} \right), \quad (3.11)$$

em que o valor do passo h será determinado por meio do passo temporal Δt .

É importante perceber aqui que a solução da equação para a velocidade dependerá dos valores da solução para a posição de cada partícula, já que os coeficientes calculados pelo método são determinados em pontos diferentes da partição em que se está. Com isso, é necessário que se siga uma determinada ordem no cálculo dos coeficientes, de forma que passando por cada estágio do método, tenhamos os valores necessários para avaliar o estágio seguinte. Na solução do sistema do OHD, foi utilizada a seguinte ordem para determinação completa da solução de cada partição:

$$\begin{aligned} k_{1(n1)} &= f_1(u_1, u_2); \\ k_{2(n1)} &= f_2(u_1, u_2); \\ l_{1(n1)} &= v_1; \\ l_{2(n1)} &= v_2; \\ k_{1(n2)} &= f_1\left(u_1 + \frac{1}{2}\Delta t l_{1(n1)}, u_2 + \frac{1}{2}\Delta t l_{2(n1)}\right); \\ k_{2(n2)} &= f_2\left(u_1 + \frac{1}{2}\Delta t l_{1(n1)}, u_2 + \frac{1}{2}\Delta t l_{2(n1)}\right); \\ l_{1(n2)} &= v_1 + \frac{1}{2}\Delta t k_{1(n1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{2(n2)} &= v_2 + \frac{1}{2}\Delta t k_{2(n1)}; \\
k_{1(n3)} &= f_1(u_1 + \frac{1}{2}\Delta t l_{1(n2)}, u_2 + \frac{1}{2}\Delta t l_{2(n2)}); \\
k_{2(n3)} &= f_2(u_1 + \frac{1}{2}\Delta t l_{1(n2)}, u_2 + \frac{1}{2}\Delta t l_{2(n2)}); \\
l_{1(n3)} &= v_1 + \frac{1}{2}\Delta t k_{1(n2)}; \\
l_{2(n3)} &= v_2 + \frac{1}{2}\Delta t k_{2(n2)}; \\
k_{1(n4)} &= f_1(u_1 + \Delta t l_{1(n3)}, u_2 + \Delta t l_{2(n3)}); \\
k_{2(n4)} &= f_2(u_1 + \Delta t l_{1(n3)}, u_2 + \Delta t l_{2(n3)}); \\
l_{1(n4)} &= v_1 + \Delta t k_{1(n3)}; \\
l_{2(n4)} &= v_2 + \Delta t k_{2(n3)},
\end{aligned}$$

em que os termos 1 ou 2 no lado esquerdo do parenteses em cada índice, se refere a qual partícula está sendo tomada para análise. Ainda, como foi possível observar, os coeficientes da equação diferencial para a velocidade, só dependem explicitamente das posições relativas de cada partícula, não sendo necessário aplicar o passo temporal Δt diretamente na determinação dos coeficientes k_{ni} , mas sim na determinação das novas posições que as partículas ocupam dentro da partição analisada. Após determinados estes coeficientes, as soluções para a velocidade e posição são obtidas respectivamente por (3.10) e (3.11).

O cálculo dos valores numéricos da posição e velocidade, para cada intervalo de tempo, foram obtidos utilizando-se da modelagem matemática descrita acima, repetindo-a para cada passo temporal até completar um intervalo de tempo suficiente para que pudessemos ter uma visão geral do comportamento da solução. Isso foi feito por vias computacionais utilizando a linguagem de programação C.

3.2 Transformada de Fourier Discreta

Por meio da aplicação do método numérico de Runge-Kutta, é fácil perceber que o resultado obtido para o sistema de equações diferenciais não será uma equação por si só, mas sim uma sequência de números que representam os valores das posições que as partículas ocupavam em cada tempo, algo que chamamos de série temporal. Tais resultados, da forma como são expressos, necessitam de outros métodos de análise para que uma caracterização mais completa seja feita. Existem várias formas de analisar dados como estes, porém aquela que será abordada aqui, trata-se do método conhecido como Transformada de Fourier.

De forma geral, as análises obtidas utilizando-se as transformadas de Fourier correspondem a um estudo sobre como funções mais gerais podem ser representadas em termos de funções periódicas como senos e cossenos. Muitos problemas práticos que surgiram em advento do desenvolvimento da ciência envolvem fazer esse tipo de análise [7]. Ainda, de forma mais específica, quando tratamos de um conjunto de dados tal que não há uma função contínua e sim uma série temporal, a Transformada de Fourier Discreta (TFD) é a grande ferramenta que nos auxilia na interpretação dos resultados.

Estudos desse tipo, abrangendo análises de Fourier, possuem mais de 200 anos de história, de forma que antes mesmo de Jean Baptist Joseph Fourier apresentar sua primeira versão do conceito em um artigo sobre condução de calor em 1807, muitos outros já estudavam relações matemáticas que acabariam por estruturar a teoria que conhecemos hoje [7].

Nesse contexto, uma das relações matemáticas que representam a Transformada de Fourier possui a forma descrita pela equação abaixo. Aqui, é importante lembrar que há várias maneiras de definir a Transformada de Fourier, tal que as diferenças entre essas formas são triviais [10], mas a modo mais elementar é representada pelo que segue

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.12)$$

Tal transformação muda o espaço da função do domínio temporal, transportando-a para uma região de domínio das frequências. Dessa forma é possível visualizar quais são os valores de frequência recorrentes na função a ser estudada. No entanto, apesar de sua forma aparentemente simples, no presente trabalho não estamos analisando uma função contínua de domínio infinito e sim um conjunto de dados discretizado e limitado. Logo, precisaríamos de uma relação matemática equivalente que pudesse transportar nosso conjunto de amostragem do espaço temporal em que foi medido, para o espaço das frequências.

Dessa forma, a TFD é na verdade uma sequência de dados em vez de uma função de variável contínua, tal que ela é caracterizada por intervalos de frequência igualmente espaçados [14]. Ainda, da mesma maneira que nosso conjunto de amostragem, a TFD contém um número N finito de valores, equivalente ao número N de dados desse conjunto [15].

Assim, para chegarmos em uma equação da Transformada de Fourier Discreta é necessário fazer mudanças em alguns parâmetros. Primeiramente, considerando o eixo de frequência para representar o novo domínio da série a ser obtida, utilizaremos o intervalo $[0, 2\pi)$ para determinar os N pontos igualmente espaçados do domínio da frequência. Com isso, mudaremos a variável ω presente em (3.12), fazendo-a variar de acordo com um parâmetro f

$$\omega(f) = \frac{2\pi}{N}f, \quad (3.13)$$

em que $0 \leq f \leq N - 1$ e $f \in \mathbb{N}$.

Além dessa mudança de variáveis, é intuitivo perceber que num caso discreto e finito a integral deixa de atuar, de forma que, nesse caso, na verdade teríamos uma soma discreta sobre todos os valores. Sendo assim, ao aproximarmos a integral numericamente para um somatório e realizar as substituições propostas, chega-se a

$$G(f) = \sum_{n=0}^{N-1} g(t_n)e^{-i\frac{2\pi}{N}ft_n} \Delta t, \quad (3.14)$$

em que $\Delta t = T/N$, tal que T é a constante que representa o tempo total transcorrido do movimento e t_n é a representação discretizada da variável temporal t .

$$G(f) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(t_n)e^{-i\frac{2\pi}{N}ft_n}. \quad (3.15)$$

Da relação (3.15), a Transformada de Fourier Discreta, nesse nosso caso, será definida a menos da contante multiplicativa T [7], ou seja, a relação para a TFD será dada por

$$F(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(t_n)e^{-i\frac{2\pi}{N}ft_n}. \quad (3.16)$$

Através desta definição, algumas observações interessantes a respeito da TFD podem ser feitas. Note que em $F(f = 0)$, a transformada apresentará o valor médio da função

g_t , visto que nesse caso a exponencial assume valor unitário e a soma é feita sobre todos os valores de $t(n)$ presentes no nosso conjunto de amostragem. Além disso, devido as simetrias apresentadas pela exponencial complexa, ou de maneira mais específica, pelas simetrias observadas via fórmula de Euler (1.10), ao gerar o código que fará a aplicação deste método no conjunto de dados que serão gerados pelo método de Runge-Kutta, é possível realizar uma otimização, de forma que apenas metade das frequências serão varridas, levando à um tempo reduzido de execução do código.

Pode parecer difícil imaginar, mas a Transformada de Fourier Discreta representada na equação (3.16), apresenta diversas aplicações no mundo moderno. Expandindo além do escopo das pesquisas científicas, ela atua em qualquer área que utilize da análise de dados para obter informação, sejam esses dados em formato de números, sinais digitais ou até mesmo imagens. O poder da TFD nesse ramo, consiste não só da sua capacidade de observar características intrínsecas aos dados originais, mas também de poder manipular as informações presentes nesses tipos de dados [16].

Um exemplo visual e simples da aplicação da TFD pode ser dado ao observarmos a série temporal representada na Figura 3.6

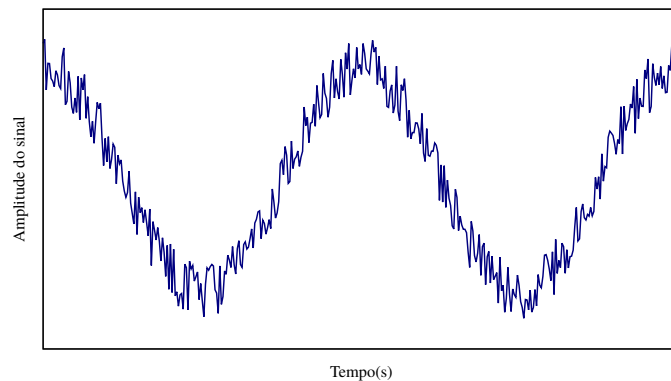


Figura 3.6: Série temporal exemplificando um sinal digital com ruídos.

Perceba que além de um comportamento característico de grande amplitude, o gráfico apresentado também mostra diversas oscilações menores que acabam por distorcer a imagem principal. Tal exemplo caracteriza um caso muito comum de sinal digital, de forma que além da mensagem primária, há a presença dessas variações menores, chamadas de ruídos. A aplicação da Transformada de Fourier nesse caso, consiste em “limpar” o sinal apresentado, excluindo os ruídos e deixando somente a mensagem primária de maior amplitude. Dessa forma, ao realizar a transformada obtém-se a imagem das frequências presentes no sinal original, que por sua vez, podem ser observadas na Figura 3.7.

Apesar de a primeira vista observarmos somente um pico de frequência na curva em vermelho escuro, caracterizando o sinal principal, ao ampliarmos o gráfico é possível observar a presença de diversos picos de menor intensidade (curva em azul escuro), que por sua vez são as representações dos ruídos no espaço das frequências. Nesse contexto, utilizando os dados gerados pela TFD e anulando qualquer frequência que não seja a principal (entre 5 rad/s e 6 rad/s), faz-se $F(\omega) = 0$, para todo $\omega > 6$. Ou seja, nesse caso, não haverá contribuição das frequências que não sejam as principais nos dados obtidos. Com isso, ao realizarmos a Transformada de Fourier Inversa, para sair do espaço das frequências e retornar ao domínio temporal, obtêm-se a série apresentada pela Figura 3.8a, caracterizando um “sinal limpo” quando comparado ao apresentado inicialmente (vide Figura 3.8b)

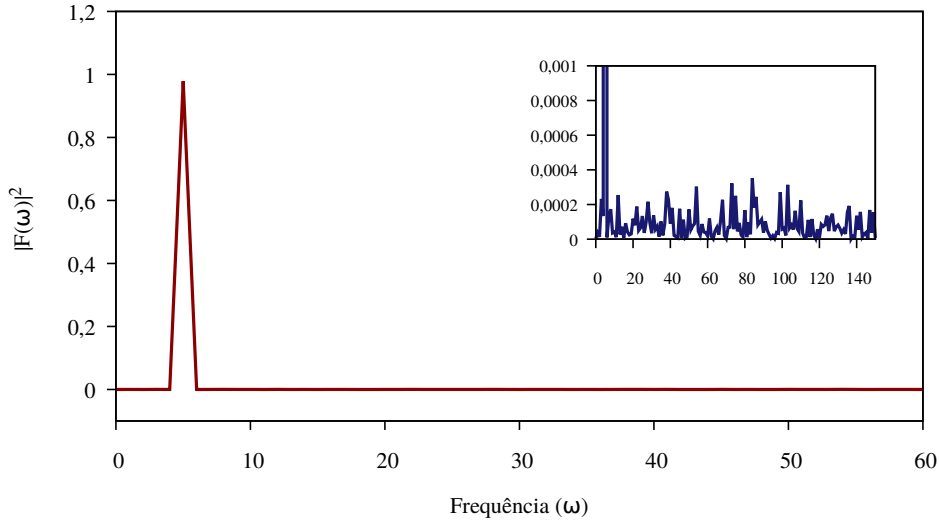


Figura 3.7: Resultado geral da Transformada de Fourier Discreta da série temporal estudada. Inserção: ampliação da curva gerada pela TFD, possibilitando a visualização dos picos de menor intensidade e que são responsáveis pelos ruídos observados.

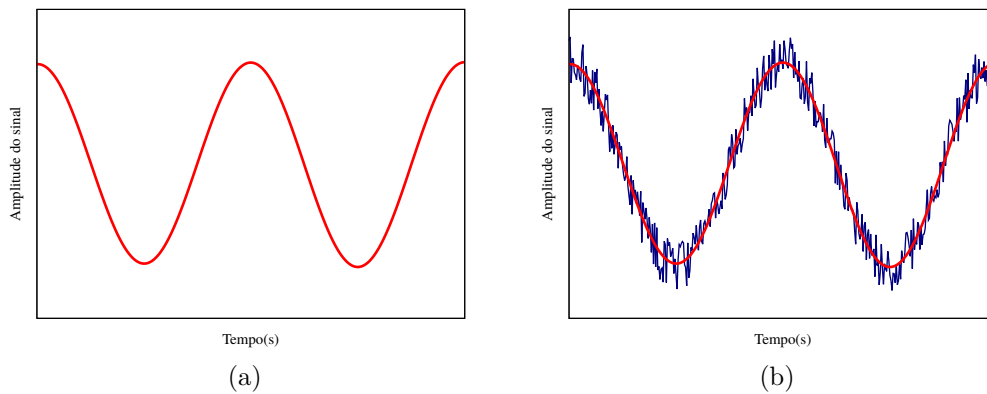


Figura 3.8: (a) Resultado da Transformada de Fourier Discreta Inversa depois do tratamento dos dados “limpando” o sinal original. (b) Comparação entre as duas séries temporais antes e depois do tratamento via TFD.

Uma aplicação prática do que foi feito nesse exemplo, pôde ser observada nas transmissões dos jogos da Copa do Mundo na África do Sul. Com a popularização da vuvuzela em 2009 e 2010, a intensidade dos sons produzidos por este instrumento começou a levantar certos pontos relacionados tanto a transmissão dos jogos, quanto à saúde e segurança da comunidade que estava em contato direto com as ondas sonoras por ele produzidos. A TFD entra nessa história no que diz respeito aos sinais digitais utilizados para transmitir o som dos estádios, gravado durante os jogos. Uma das características principais da vuvuzela é o seu som produzido em uma nota principal de aproximadamente 235 Hz, e primeiro sobretom em 465 Hz [17]. O conhecimento dessas frequências características permitiu que um filtro fosse aplicado sobre os sinais sonoros gravados a fim de que tais frequências fossem retiradas da gravação original. Tal filtro, utilizando como princípio básico a Transformada de Fourier Discreta, foi então utilizado por várias emissoras e transmissoras de sinais, no intuito de apagar o som da vuvuzela e deixar a experiência de

assistir ao jogo mais confortável.

Com isso, concluiu-se neste capítulo o estudo das principais ferramentas de cunho numérico que podem ser utilizadas para resolver o problema do Oscilador Harmônico Duplo, que é o foco deste trabalho. No próximo capítulo, utilizou-se destes métodos para obter os dados necessários a análise do OHD, bem como comparou-se tais resultados com aqueles obtidos via análise abordada no [capítulo 2](#).

Capítulo 4

Resultados

Assim como foi possível observar nas seções anteriores, o problema aqui analisado, trata-se de um PVI, ou seja, um problema de valor inicial. Dessa forma, com o objetivo de estudar o maior número de situações possíveis para o Oscilador Harmônico Duplo, variou-se as condições iniciais do sistema de três maneiras distintas de acordo com a tabela abaixo. Nesse contexto, foram fixadas as posições de equilíbrio de cada partícula em $x_{01} = 1,0$ m e $x_{02} = 2,0$ m.

	x_1 (m)	x_2 (m)	\dot{x}_{01} (m/s)	\dot{x}_{02} (m/s)
Condição inicial 1	0,5	2,3	0	0
Condição inicial 2	1,0	2,0	0,5	0
Condição inicial 3	0,5	2,0	0	0,5

Tabela 4.1: Valores de condição inicial ($t = 0$) utilizadas para análise dos métodos descritos

Essa variação das condições iniciais supõe situações cinemáticas diferentes, de forma que cada uma delas enfatiza uma característica do movimento. Na primeira condição, enquanto os corpos estão em repouso suas posições não coincidem com as de equilíbrio, enquanto que na condição 2, os corpos possuem uma velocidade inicial diferente de zero e tem suas posições equivalentes aos pontos de equilíbrio do sistema. Para a última condição inicial, uma mistura das ideias propostas nas condições anteriores é feita, de forma que tanto a velocidade inicial quanto a posição são fatores enfatizados para dar início ao movimento do sistema.

Além disso, como já mencionado anteriormente, com o intuito de facilitar os cálculos e simplificar as equações obtidas, utilizou-se da seguinte substituição sob os parâmetros do sistema

$$m = k = 1, \tag{4.1}$$

em que cada termo continuou apresentando suas dimensões características, podendo representá-las através das unidades de medidas de kg para a massa e N/m para a constante elástica.

A seguir, no restante do capítulo, estão apresentados os resultados obtidos para cada método, analítico e numérico, de acordo com cada condição inicial, bem como suas respectivas comparações.

4.1 Método Analítico

Resolvendo os problemas de condição inicial por vias analíticas, primeiramente utilizou-se o sistema de equações (2.27) que descreve o OHD aplicando os valores de condição inicial, com o intuito de determinar os coeficientes A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 . Para isso, utilizou-se da forma original do sistema de equações, que calcula a posição em função do tempo, e também suas derivadas temporais, que calculam a velocidade em função do tempo:

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (4.2a)$$

$$u_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \quad (4.2b)$$

$$\dot{u}_1(t) = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (4.2c)$$

$$\dot{u}_2(t) = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2). \quad (4.2d)$$

Tal ação visa definir, dentre a família de soluções possíveis, aquela que de fato descreve a situação em questão, tendo em vista que as diferentes condições iniciais levam a constantes diferentes. A partir disso, é importante ressaltar também que os termos u_1 e u_2 representam as posições relativas das partículas e por isso utilizou-se as relações (1.21) e (1.22) nos valores propostos, a fim de calcular as condições iniciais relativas.

Dessa forma, obteve-se os valores das constantes para cada uma das condições descritas na tabela 4.1, utilizando as relações de 4.2 para o tempo inicial $t = 0$. Ainda, a partir destes resultados, utilizou-se a solução definida para cada condição inicial e produziu-se os gráficos 4.1, 4.2 e 4.3 da posição em função do tempo:

Condição inicial 1:

$$x_1(0) = 0,5 \text{ m} \Rightarrow u_1(0) = -0,5 \text{ m/s}; \quad (4.3a)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{u}_1(0) = 0 \text{ m/s}. \quad (4.3b)$$

$$x_2(0) = 2,3 \text{ m} \Rightarrow u_1(0) = 0,3 \text{ m/s}; \quad (4.4a)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{u}_2(0) = 0 \text{ m/s}. \quad (4.4b)$$

$$A_1 = -\frac{0,1}{\cos(\phi_1)}; \quad (4.5)$$

$$A_2 = -\frac{0,4}{\cos(\phi_2)}; \quad (4.6)$$

$$\phi_1 = 0 \text{ ou } \pi; \quad (4.7)$$

$$\phi_2 = 0 \text{ ou } \pi. \quad (4.8)$$

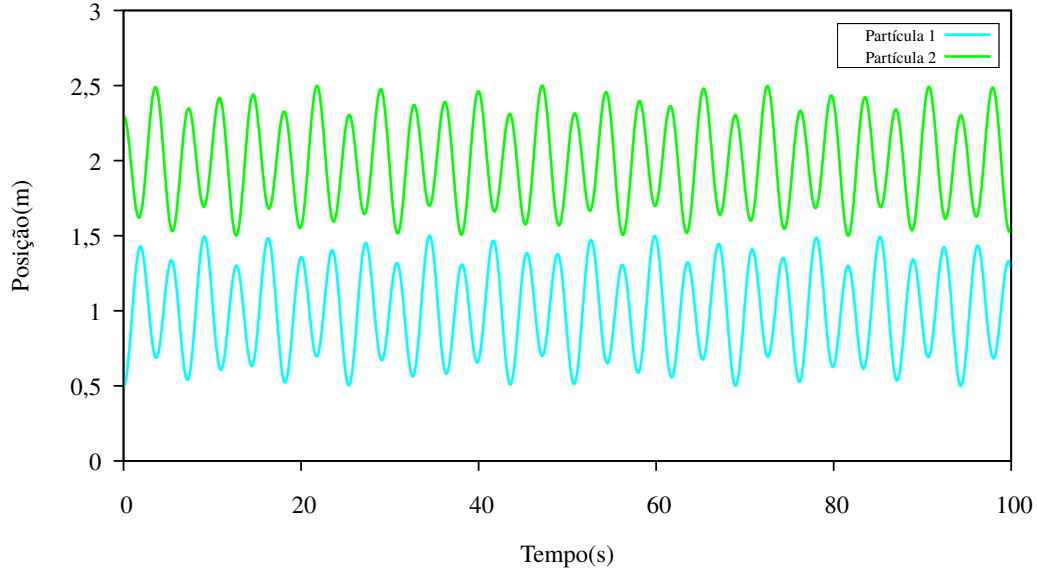


Figura 4.1: Resultados descritos pelo método analítico que descreve o OHD, tendo em vista as condições iniciais propostas em que $x_1(0) = 0,5 \text{ m}$, $x_2(0) = 2,3 \text{ m}$, $\dot{x}_1(0) = 0 \text{ m/s}$ e $\dot{x}_2(0) = 0 \text{ m/s}$

Condição inicial 2:

$$x_1(0) = 0 \text{ m} \Rightarrow u_1(0) = 0 \text{ m/s}; \quad (4.9a)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0,5 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{u}_1(0) = 0,5 \text{ m/s}. \quad (4.9b)$$

$$x_2(0) = 2,3 \text{ m} \Rightarrow u_1(0) = 0,3 \text{ m}; \quad (4.10a)$$

$$\dot{u}_2(0) = 0 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{u}_2(0) = 0 \text{ m/s}. \quad (4.10b)$$

$$A_1 = -\frac{0,5}{2\omega_1 \text{sen}(\phi_1)}; \quad (4.11)$$

$$A_2 = \frac{0,5}{2\omega_1 \text{sen}(\phi_2)}; \quad (4.12)$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}; \quad (4.13)$$

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}. \quad (4.14)$$

Condição inicial 3:

$$x_1(0) = 0,5 \text{ m} \Rightarrow u_1(0) = -0,5 \text{ m/s}; \quad (4.15a)$$

$$\dot{u}_1(0) = 0 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{u}_1(0) = 0 \text{ m/s}. \quad (4.15b)$$

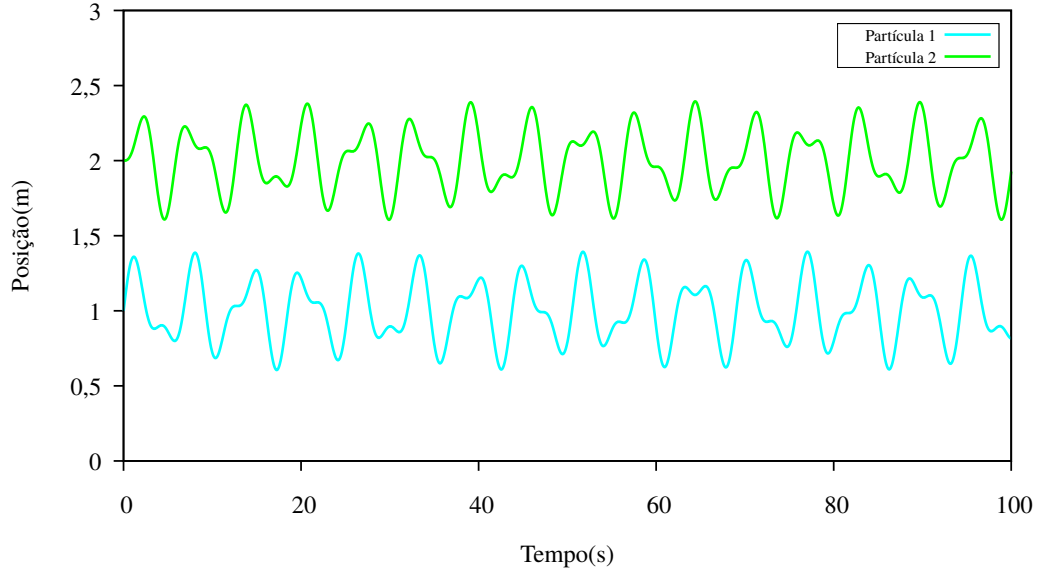


Figura 4.2: Resultados descritos pelo método analítico que descreve o OHD, tendo em vista as condições iniciais propostas em que $x_1(0) = 1,0\text{m}$, $x_2(0) = 2,0\text{m}$, $\dot{x}_1(0) = 0,5\text{m/s}$ e $\dot{x}_2(0) = 0\text{m/s}$

$$x_2(0) = 0\text{ m} \Rightarrow u_1(0) = 0\text{ m}; \quad (4.16a)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0,5\text{ m/s} \Rightarrow \dot{u}_2(0) = 0,5\text{ m/s}. \quad (4.16b)$$

$$A_1 = -\frac{0,5}{2 \cos(\phi_1)}; \quad (4.17)$$

$$A_2 = \frac{0,5}{2 \cos(\phi_2)}; \quad (4.18)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}(\omega_1^{-1}); \quad (4.19)$$

$$\phi_2 = \tan^{-1}(-\omega_2^{-1}), \quad (4.20)$$

em que $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \sqrt{3}$ de acordo com (2.15) e (4.1).

4.2 Método Numérico

Para a resolução do problema via método numérico, os resultados foram obtidos de maneira simples, ao implementar diretamente os valores para as condições iniciais no código produzido utilizando a linguagem de programação C. Para aplicação de tal método, fixou-se o tamanho da partição, ou seja, o intervalo Δt com o valor de 0,01 s. Aqui é importante reforçar que a escolha da partição $\Delta t = 0,01\text{ s}$ foi feita de forma intuitiva supondo-se que tal valor seria suficiente para desenvolver a solução do movimento sem grandes desvios, não obedecendo assim, a um critério específico. Dessa forma, as séries temporais que foram resultado das resoluções numéricas podem ser visualizadas nos gráficos 4.4, 4.5 e 4.6 representados abaixo. Nestes gráficos, preferiu-se utilizar a ideia intuitiva

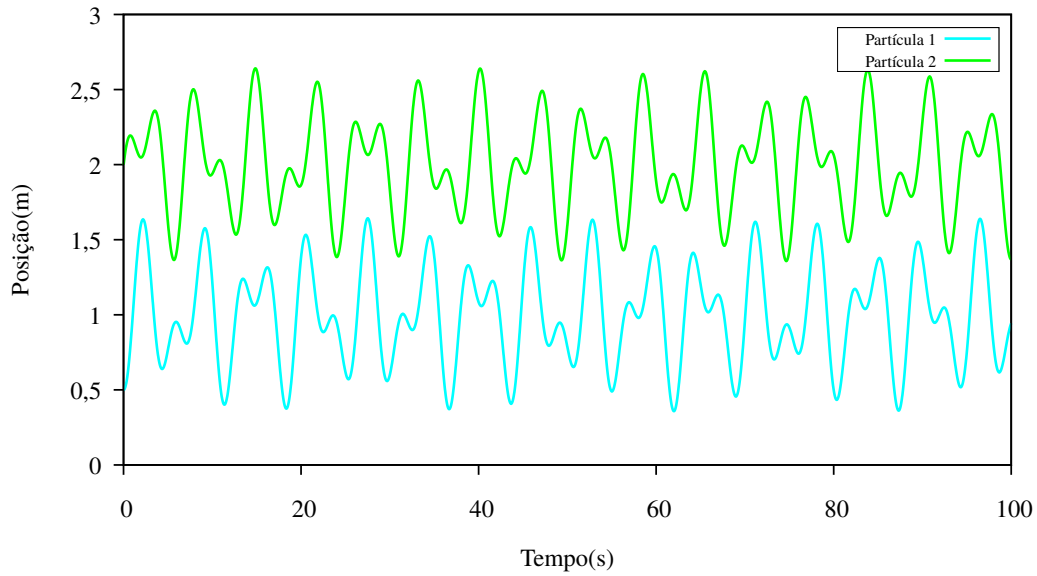


Figura 4.3: Resultados descritos pelo método analítico que descreve o OHD, tendo em vista as condições iniciais propostas em que $x_1(0) = 0,5$ m, $x_2(0) = 2,0$ m, $\dot{x}_1(0) = 0$ m/s e $\dot{x}_2(0) = 0,5$ m/s

de pontos igualmente espaçados no tempo como forma de diferenciá-los daqueles obtidos via solução analítica, que pressupõe uma solução contínua.

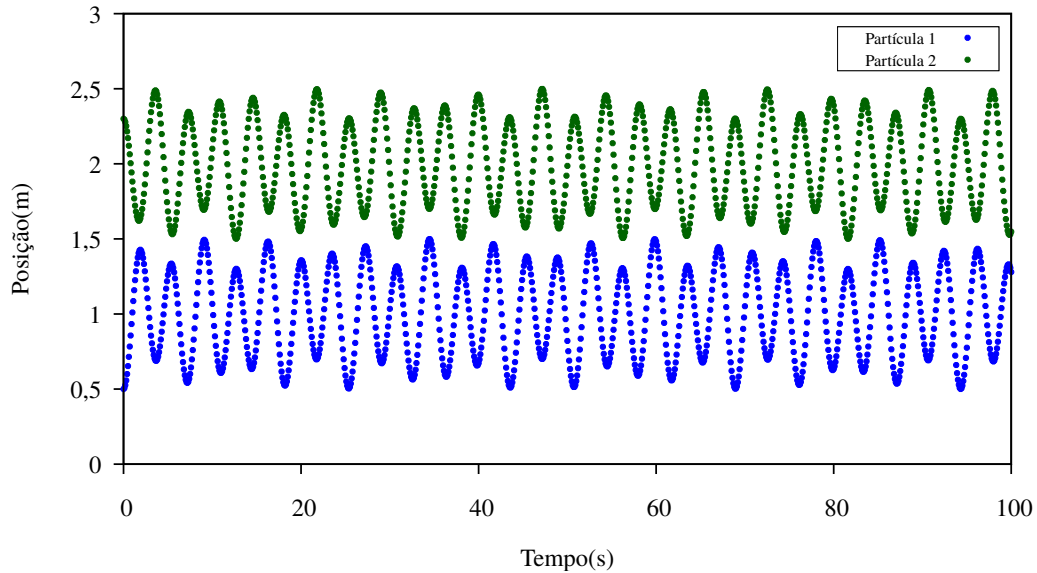


Figura 4.4: Resultados obtidos numericamente pelo método de Runge-Kuta de quarta ordem para a condição inicial 1 proposta.

4.3 Comparação entre os métodos aplicados

Intuitivamente, uma forma simples e direta utilizada para comparar os resultados obtidos, consiste na sobreposição dos gráficos mostrados anteriormente. Dessa forma,

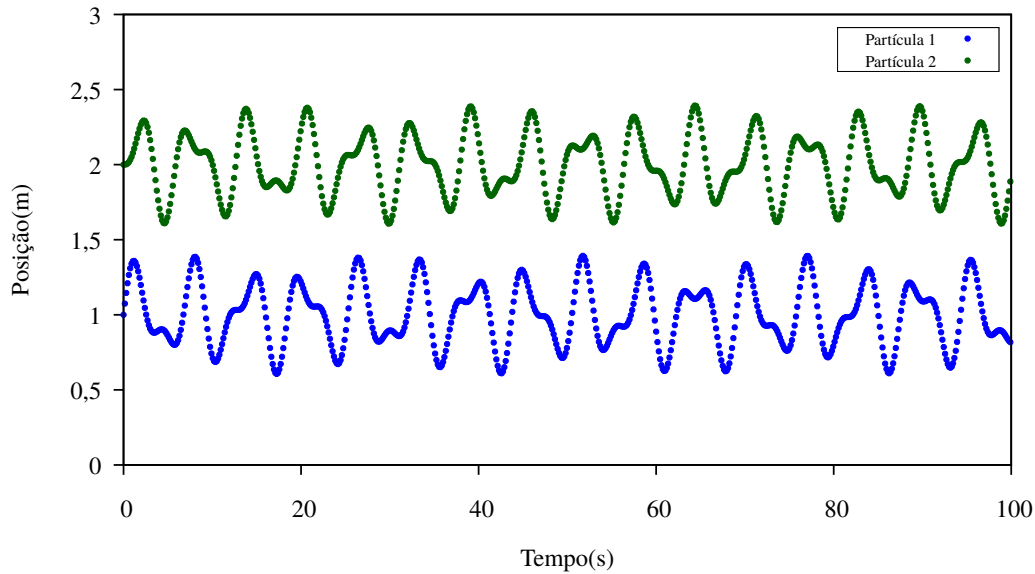


Figura 4.5: Resultados obtidos numericamente pelo método de Runge-Kuta de quarta ordem para a condição inicial 2 proposta.

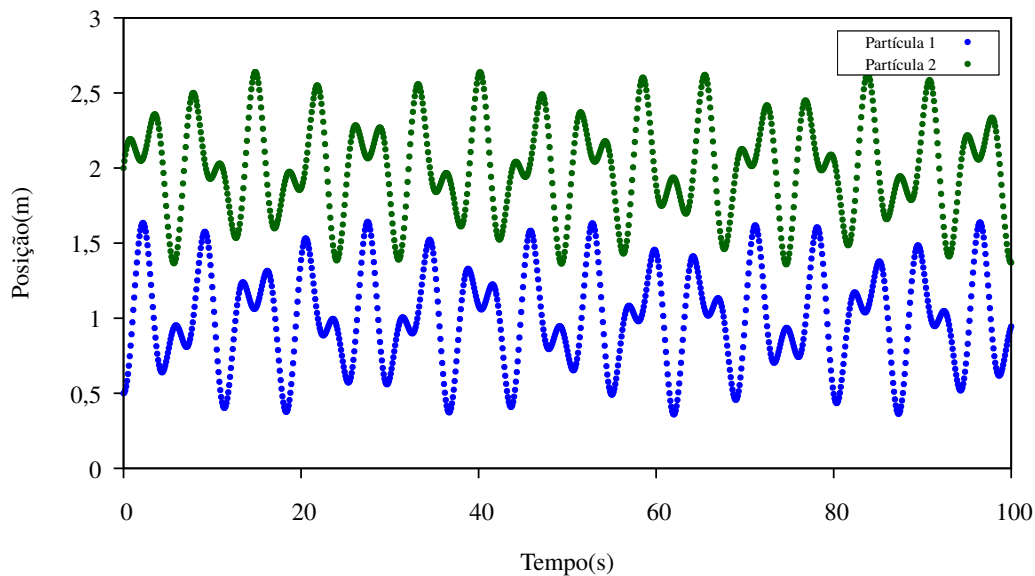


Figura 4.6: Resultados obtidos numericamente pelo método de Runge-Kuta de quarta ordem para a condição inicial 3 proposta.

como é possível observar nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9, não há grandes discrepâncias entre as curvas calculadas no que diz respeito a análise visual do gráfico.

Além desse tipo de análise, uma segunda comparação para os diferentes métodos pôde ser feita ao considerarmos as frequências características apresentadas por cada uma das curvas. No método analítico os valores das frequências aparecem naturalmente no desenvolvimento da resolução, como pode ser observado em (2.18). No processo numérico, esse parâmetro não é mostrado de forma explícita, tornando essa investigação algo necessário.

Para estimar os valores das frequências do movimento, utilizou-se da Transformada de Fourier Discreta nos dados da série temporal obtida via método de Runge Kutta. Os

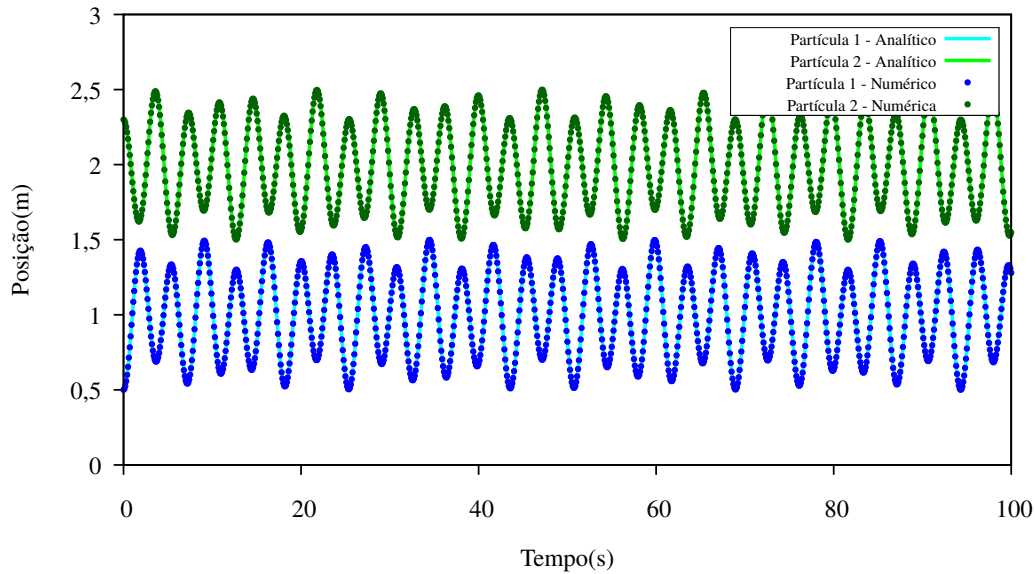


Figura 4.7: Sobreposição dos resultados obtidos via analítica e numérica para a condição inicial 1.

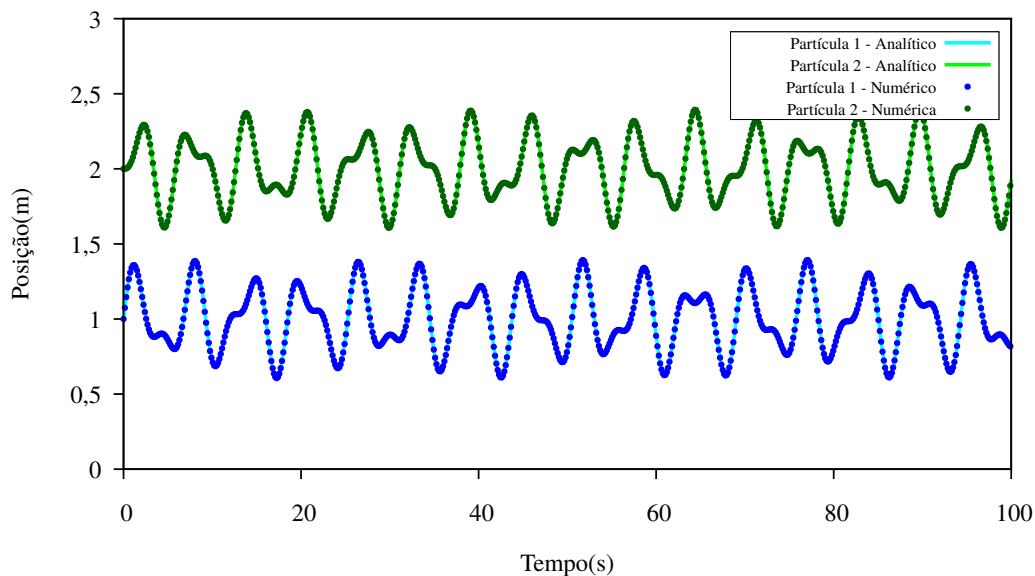


Figura 4.8: Sobreposição dos resultados obtidos via analítica e numérica para a condição inicial 2.

resultados dessa análise podem ser observados na Figura 4.11.

Aqui é importante justificar que a escolha do conjunto de amostragem para realizar tais análises foi feita de forma a diminuir o custo computacional da mesma, de maneira que priorizou-se intervalos de tempo menores. Inicialmente supos-se um intervalo temporal de 200 s no intuito de verificar se os picos de frequência esperados seriam os de maior destaque. Como é possível constatar na Figura 4.11, de maneira específica nos gráficos que apresentam os resultados das análises para as condições iniciais 1 e 2, apesar da maior dispersão nos dados no que diz respeito as frequências observadas, são nítidos os picos de maior intensidade para as frequências de valor 1 hz e $\sim \sqrt{3}$ hz, confirmando o

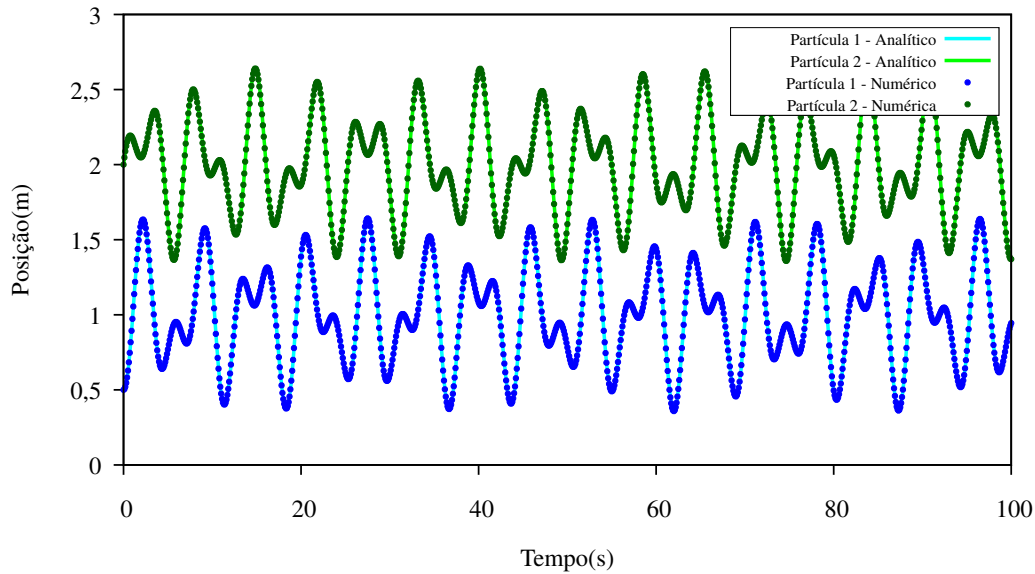


Figura 4.9: Sobreposição dos resultados obtidos via analítica e numérica para a condição inicial 3.

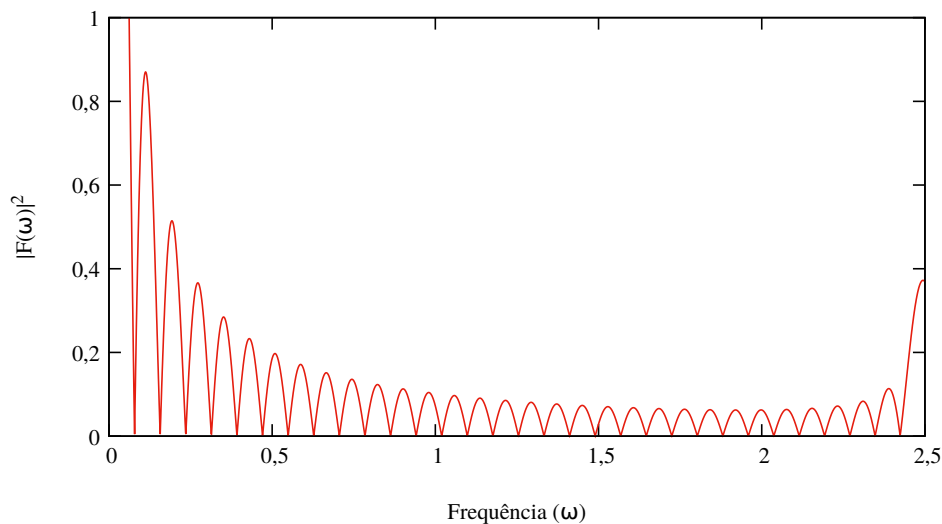


Figura 4.10: Resultado obtido para Transformada de Fourier Discreta dos dados gerados pela resolução numérica do OHD para uma série temporal de 200 s.

resultado esperado.

No entanto, as diferenças visuais nos gráficos em relação àquele da condição inicial 3, são apoiadas no fato de que devido a complexidade do movimento observado na Figura 4.9, uma série temporal maior foi necessária para análise, visto que em um tempo de 200s, a dispersão dos dados foi tamanha que os picos esperados não puderam ser visualizados, como demonstra o gráfico da Figura 4.10. Então escolheu-se para esta última condição, buscar uma dispersão mínima na observação das frequências. Assim, enquanto que o movimento relativamente simples das condições iniciais 1 e 2 requereu uma série temporal de 200 s, tendo 2×10^4 pontos para analisar, a série temporal da condição inicial 3 durou 10000s, gerando um total de 10^6 pontos, fazendo com que nesse caso a dispersão observada fosse mínima e os picos principais ficassem bem mais evidentes.

Apesar dessa diferença na análise dos resultados, como era esperado, os valores de frequência apresentados foram equivalentes aos fornecidos pelo método analítico. Por meio dos parâmetros (4.1), os valores obtidos foram $\omega_1 = 1$ rad/s e $\omega_2 = \sqrt{3}$ rad/s, que por sua vez, coincidem com os valores de frequência dos picos visíveis em cada gráfico.

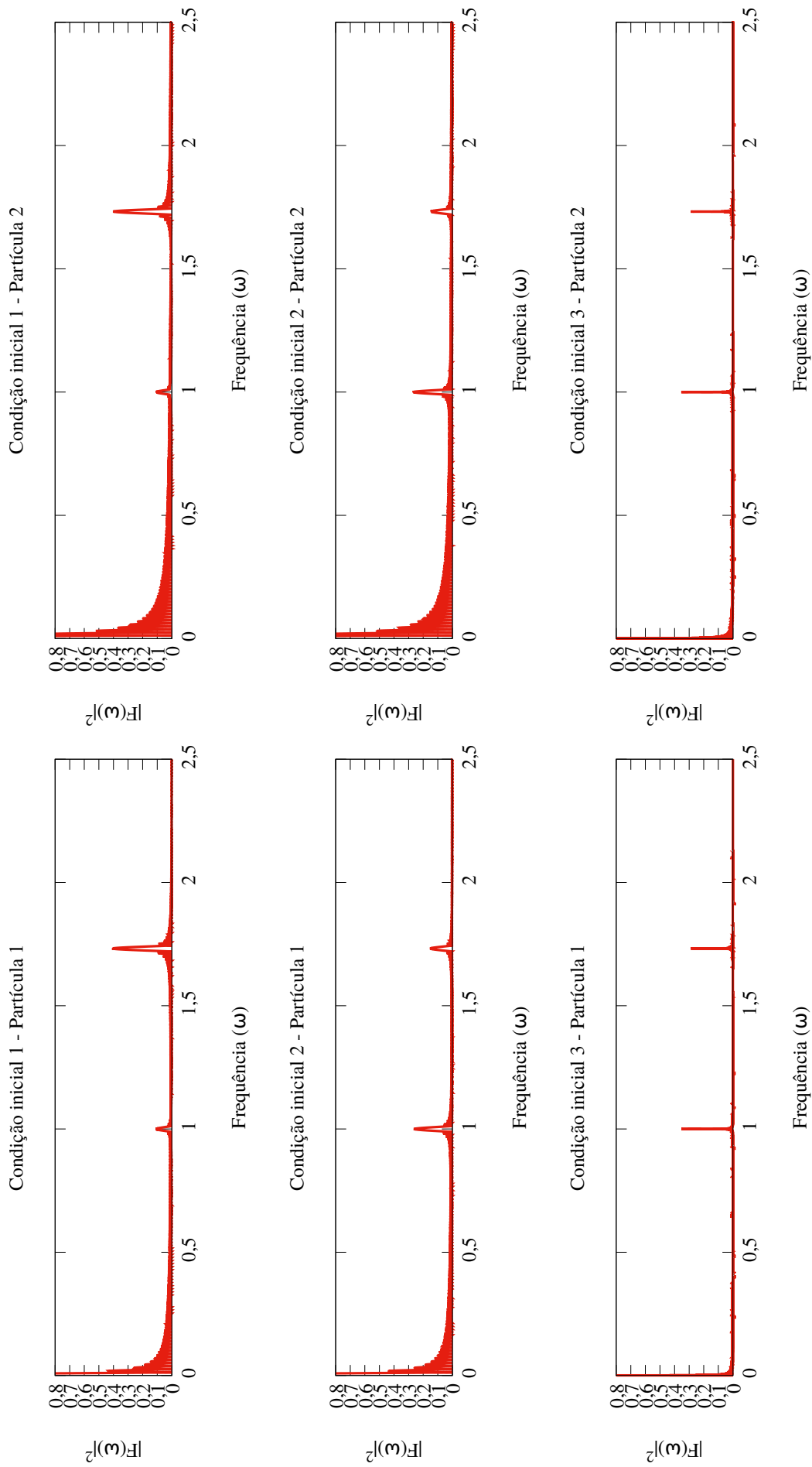


Figura 4.11: Resultados obtidos para a Transformada de Fourier Discreta em cada uma das séries temporais das condições iniciais propostas.

Conclusões

Neste trabalho estudou-se o Oscilador Harmônico Duplo, resolvendo-o sob dois métodos e aplicando a TFD para então comparar os resultados obtidos. Primeiramente, utilizou-se de métodos analíticos para o desenvolvimento de uma solução completa, em que observou-se que os parâmetros necessários para descrever o movimento, acabaram aparecendo de forma explícita durante a resolução. Em seguida, um estudo sobre métodos numéricos permitiu que outro caminho fosse tomado para resolver o problema. A implementação deste último via computacional, com auxílio da linguagem de programação C, garantiu uma otimização do processo de resolução, mostrando que a aplicação de computadores em problemas semelhantes é de grande utilidade. Os resultados obtidos para diferentes condições iniciais mostrou que o método numérico garante uma aproximação satisfatória para soluções dos chamados problemas de valor inicial. Assim, de forma geral, a utilização deste tipo de método, se mostra muito conveniente para análises de situações em que uma solução analítica para a modelagem matemática proposta não for possível, ou também for de difícil acesso. Não só isso, mas também a análise via Transformada de Fourier demonstrou grande aplicabilidade ao prever de forma precisa as frequências angulares dos modos normais de vibração do oscilador, de forma que a sua utilização na análise de dados, provindos de fenômenos dos quais não se tem um modelo matemático para estudo, pode auxiliar a obter alguns dos parâmetros que seriam necessários em sua descrição via linguagem matemática.

Apêndice A

Código utilizados para as análises numéricas

Seguem abaixo os dois códigos produzidos utilizando a linguagem de programação C que serviram de base para a análise numérica desenvolvida. Primeiramente o código que implementou o método de Runge Kutta de quarta ordem e em seguida tem-se o código utilizado para realizar a Transformada de Fourier sobre os dados obtidos do primeiro.

ohd.c

```
1 //compilação: gcc ohd.c -lm
2 //execução: ./a.out
3
4 #define t0 0.0
5 #define x01 1.0
6 #define x02 2.0
7 #define v01 0.0
8 #define v02 0.0
9
10 #include <stdio.h>
11 #include <stdlib.h>
12 #include <math.h>
13
14 double k1, k2, k3, m1, m2;
15
16 double f1(double u1, double u2){
17
18     return (u2-(k1+k3)*u1)/m1;
19 }
20
21 double f2(double u1, double u2){
22
23     return (u1-(k2+k3)*u2)/m2;
24 }
25
26 int main(){
```



```

27
28     double dt, v1, v2, x1, x2, u1, u2, t, tf;
29     double k11, k12, k13, k14, k21, k22, k23, k24;
30     double l11, l12, l13, l14, l21, l22, l23, l24;
31
32     FILE *file=fopen("num3.dat", "w");
33
34     x1=0.5;
35     x2=2.0;
36     v1=v01;
37     v2=v02;
38     u1=x1-x01;
39     u2=x2-x02;
40     t=t0;
41     k1=1.0;
42     k2=1.0;
43     k3=1.0;
44     m1=1.0;
45     m2=1.0;
46
47     fprintf(file, "%e %e %e %e %e\n", x1, x2, u1, u2, t);
48
49     dt=0.01;
50     tf=1*1e4;
51
52     while(t<=tf){
53
54         k11=f1(u1, u2);
55         k21=f2(u1, u2);
56         l11=v1;
57         l21=v2;
58         k12=f1(u1+0.5*dt*l11, u2+0.5*dt*l21);
59         k22=f2(u1+0.5*dt*l11, u2+0.5*dt*l21);
60         l12=v1+0.5*dt*k11;
61         l22=v2+0.5*dt*k21;
62         k13=f1(u1+0.5*dt*l12, u2+0.5*dt*l22);
63         k23=f2(u1+0.5*dt*l12, u2+0.5*dt*l22);
64         l13=v1+0.5*dt*k12;
65         l23=v2+0.5*dt*k22;
66         k14=f1(u1+dt*l13, u2+dt*l23);
67         k24=f2(u1+dt*l13, u2+dt*l23);
68         l14=v1+dt*k13;
69         l24=v2+dt*k23;
70
71         v1+=dt*(k11+2.0*k12+2.0*k13+k14)/6.0;
72         v2+=dt*(k21+2.0*k22+2.0*k23+k24)/6.0;
73         u1+=dt*(l11+2.0*l12+2.0*l13+l14)/6.0;
74         u2+=dt*(l21+2.0*l22+2.0*l23+l24)/6.0;

```

```

75     x1=u1+x01;
76     x2=u2+x02;
77     t+=dt;
78
79     fprintf(file, "%e %e %e %e %e\n", x1, x2, u1, u2, t);
80 }
81
82 fclose(file);
83 return 0;
84 }

```

fourier.c

```

1 //compilação: gcc fourier.c -O3 -lm -lgsl -lgslcblas
2 //execução: time ./a.out dados.dat $(wc -l dados.dat | cut -f1 -d" ")
3
4 #include<stdio.h>
5 #include<stdlib.h>
6 #include<math.h>
7 #include<complex.h>
8
9 int main(int argc, char **argv){
10
11     if(argc!=3){ printf("\n %s dados.dat n", argv[0]); }
12
13     int i, f, t, n;
14     double *f_t;
15     double complex *g_f;
16     double w;
17
18     FILE *arquivo;
19     arquivo = fopen(argv[1], "r");
20
21     n=atoi(argv[2]);
22
23     f_t=(double *) calloc(n, sizeof(double));
24     g_f=(double complex *) calloc(n, sizeof(double complex));
25
26     for(t=0; t<n; t++){
27
28         fscanf(arquivo, "%lf", &f_t[t]);
29
30     }
31     fclose(arquivo);
32
33     for(f=0; f<n/2; f++){
34         for(t=0; t<n; t++){
35             g_f[f]+=f_t[t]*cexp(-2.0*M_PI*I*f*(t*0.01)/n);

```

```
36     }
37     g_f[f]*=2.0/n;
38 }
39
40
41 g_f[0]*=0.5;
42
43 arquivo = fopen("1fourier31.dat", "w");
44
45 for(f=0; f<n/2; f++){
46     w=(2.0*M_PI*f)/(n);
47
48     fprintf(arquivo, "%e %e\n", w, cabs(g_f[f]));
49 }
50 fclose(arquivo);
51 free(f_t);
52 free(g_f);
53 return 0;
54 }
55 }
```

Referências Bibliográficas

- [1] Feynman, Leyton, and Sands, *Lectures on physics*, vol. Volume 1. AW, 2008.
- [2] A. S. Villar, *Notas de Aula de Mecânica Clássica*. Universidade Federal de Pernambuco, 2014/2015. Disponível em: <<http://fep.if.usp.br/~villar/2015mecanica1/mecclassica.pdf>> Acesso em 13 de Março de 2020.
- [3] K. R. Symon, *Mechanics*. AW, 3ed ed., 1971.
- [4] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [5] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole - Thomson Learning, 5ed ed., 2004.
- [6] G. Butcher, J. C. & Wanner, “Runge-kutta methods: some historical notes,” vol. 22, p. 113–151, 1996.
- [7] W. L. Briggs and V. E. Henson, *The DFT: An Owners’ Manual for the Discrete Fourier Transform*. Society for Industrial Mathematics, 1987.
- [8] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3ed ed.
- [9] R. C. D. William E. Boyce, *Elementary differential equations and boundary value problems*. Wiley, 7th ed ed., 2001.
- [10] E. Butkov, *Física Matemática*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1988.
- [11] W. Milne, *Numerical Calculus: Approximations, Interpolation, Finite Differences, Numerical Integration, and Curve Fitting*. Princeton Legacy Library, Princeton University Press, 2015.
- [12] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley-Blackwell, second edition ed., 2003.
- [13] G. Forsythe, M. Malcolm, and C. Moler, *Computer methods for mathematical computations*. Prentice-Hall series in automatic computation, Prentice-Hall, 1977.
- [14] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing (3rd Edition)*. Prentice Hall, 3rd ed., 2009.
- [15] B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*. Wiley, 1 ed., 1996.
- [16] P. S. R. Diniz, E. A. B. da Silva, and S. L. Netto, *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge University Press, 2 ed., 2010.

- [17] F. R. M. Pavan, F. B. Ferreira, M. T. M. Silva, and F. A. M. Cipparrone, *Conceitos sobre resposta em frequência - Notas de Aulas*. 2017.