



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Estudo do modelo Johansen-Ledoit-Sornette de bolhas financeiras

Acadêmico: Thibor Rafael Ribeiro Bernardon

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 18 de maio de 2021



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Estudo do modelo Johansen-Ledoit-Sornette de bolhas financeiras

TCC apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Breno Ferraz de Oliveira, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Thibor Rafael Ribeiro Bernardon

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 18 de maio de 2021

The only surprise about the economic crisis of 2008 was that it came as a surprise to so many

Joseph E. Stiglitz, *Freefall*

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 O modelo	3
1.1 Dinâmica de preços	4
1.2 O mercado como um modelo de Ising em uma rede quadrada	5
1.3 Fractalidade, leis de potência e fenômenos críticos	6
1.4 Rede hierárquica em diamante	9
1.5 Invariância de escala discreta e a correção da log-periodicidade	9
2 Testando o modelo	12
2.1 Dados	12
2.1.1 Bolha da internet	12
2.1.2 Bolha atual	12
2.2 Algoritmo genético	13
2.3 Método de Levenberg-Marquardt	13
2.4 Algoritmo Híbrido	13
2.5 Resultados	14
2.5.1 Bolha da Internet	14
2.5.2 Nasdaq atualmente	14
Conclusões	18
A Integração da lei de potência com a correção log-periódica	19
B Código usado para realizar o teste do modelo	20
Referências Bibliográficas	22

Agradecimentos

Meu sinceros agradecimentos a todos os professores que fizeram parte do meu processo de formação, em especial ao prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira pela orientação, disponibilidade e paciência. Gostaria também de agradecer minha namorada, Maria Luiza, pelo apoio contínuo desde meus tempos de engenharia mecânica. Sem ela este trabalho nunca teria sido feito e eu nem sei onde estaria agora. Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer todos meus amigos, em especial Luiz e Maurício por todas as horas de discussão e leitura realizadas.

Resumo

Neste trabalho estudamos o desenvolvimento do modelo Johansen-Ledoit-Sornette (JLS) inicialmente proposto em meados da década de 90 para prever a ocorrência de grandes terremotos e, posteriormente, generalizado para tratar de bolhas do mercado financeiro. Inicialmente modelamos o mercado financeiro como uma rede Ising quadrada a fim de obtermos uma primeira aproximação. Posteriormente, uma rede hierárquica em diamante foi considerada de modo a capturar o comportamento dos mercados modernos. Por fim, na segunda parte do trabalho, utilizamos dados da *Nasdaq* e o método de Levenberg-Marquardt juntamente com um algoritmo genético para testar a validade do modelo.

Palavras chave: física, sistemas complexos, econofísica.

Abstract

In this work we studied the development of Johansen-Ledoit-Sornette's model, firstly proposed in the middle of the 90's to predict large earthquake occurrences and later generalized to treat financial market bubbles. Initially we modelled the market as a square lattice Ising model in order to obtain a first approximation. Posteriorly, a hierarchical diamond lattice was considered in order to capture today's market behavior. Lastly, in the second part of this work, we used data from Nasdaq and Levenberg-Marquardt's method coupled with a genetic algorithm to test the model's validity.

Keywords: physics, complex systems, econophysics.

Introdução

Ao longo da história e, principalmente, com o aumento da capacidade computacional, muitas foram as tentativas de se prever o comportamento dos mercados de ações. Mas as possibilidades são muitas e as correlações, se existirem, duram um tempo inversamente proporcional a velocidade das transações, cada dia mais rápidas e com empresas disputando vantagens de milissegundos.

Este trabalho, porém, não se concentra em prever preços ou a simples subida e descida do mercado, ele busca ir além, motivado pelas recentes crises e devaneios econômicos cada vez mais frequentes, com o objetivo de compreender as causas de fenômenos tão grandes e catastróficos, assim como os terremotos, objeto de estudo original do modelo, que são os *crashes* do mercado financeiro.

O filme "A Grande Aposta" de 2015 ilustra muito bem esse poder destruidor. Durante a inflação da bolha imobiliária de 2007-2008 os grandes bancos, se aproveitando de um *boom* no preço dos imóveis, emprestaram a pessoas com pouco score de crédito hipotecas a juros baixos, porém variáveis. Virtualmente, qualquer pessoa nos EUA podia financiar e refinar sua casa. Não obstante, os bancos utilizaram então estes empréstimos para gerar um produto secundário, os contratos garantidos por hipoteca [1]. Na prática, estavam juntando vários contratos de alto risco, porém diversificados o suficiente para que tivessem a aparência de seguros. Estes contratos eram então negociados entre os bancos e utilizados como garantia entre eles. Porém, com a queda da demanda imobiliária, o refinanciamento das hipotecas se tornou mais difícil, a inadimplência aumentou e com isso os juros também subiram, levando a um aumento maior ainda na inadimplência. De uma hora pra outra trilhões de dólares haviam evaporado. O resultado, desemprego em massa e, apenas nos EUA, quase dez milhões de pessoas perdendo suas casas [2].

Motivados por acontecimentos como estes, nos propomos a utilizar da física para entender problemas aparentemente não-físicos, em uma área conhecida como econofísica [3]. Neste trabalho em específico visamos identificar padrões exponenciais de crescimento nos índices das bolsas de valores e, com base nisso, tentamos calcular um provável ponto em que ocorrerá uma transição de fase no mercado, normalmente na forma de uma queda abrupta e incomum nos preços, permitindo uma avaliação mais realista dos riscos inerentes ao mundo das finanças.

No [primeiro capítulo](#) trataremos das bases do modelo Johansen-Ledoit-Sornette (JLS), primeiramente modelando uma dinâmica de preços considerando-se um processo de Martingale, então imaginaremos o mercado como um modelo de Ising quadrado a fim de obtermos uma primeira aproximação. Posteriormente, uma rede mais complexa será considerada de modo que a hierarquia dos mercados modernos seja levada em consideração nos cálculos, culminando na derivação da lei de potência com correção log-periódica.

Seguidamente, no [capítulo dois](#), utilizaremos dados da *Nasdaq* antes do estouro da bolha da Internet para verificar a validade do modelo em uma bolha bem documentada. Por fim, testaremos a capacidade de previsão do modelo utilizando dados atuais da *Nasdaq*.

Toda a parte computacional será feita utilizando um algoritmo genético híbrido, com um algoritmo genético alimentando as soluções iniciais do método de Levenberg-Marquardt. A linguagem Python será usada tanto para pré-processar os dados disponíveis, porém sem alterá-los de forma alguma, quanto para rodar os algoritmos de ajuste do modelo.

Capítulo 1

O modelo

Compreender a formação e o comportamento das bolhas financeiras não é um assunto de interesse exclusivo apenas de acadêmicos e economistas. No Brasil as Entidades Fechadas de Previdência Complementar, popularmente conhecidas como Fundos de Pensão, compõem um mercado de 974 bilhões de reais (13,6% do PIB do país) [4] em setembro de 2020, com mais de 18% desse total investido em aplicações de renda variável [5]. Grandes variações no mercado podem fazer com que a solvência (a capacidade de pagar as pensões dos beneficiários) desses fundos seja afetada, assim tendo o potencial para atingir milhões de brasileiros.

A existência de mercados financeiros e especulativos remonta a Florença do século XIV [6], porém a primeira bolsa de valores moderna se estabeleceu em outra parte da Europa, em Amsterdã, no começo do século XVII, local também da primeira grande bolha financeira de que se têm registro, a Tulipomania [7]. A especulação foi de Novembro de 1636 até Fevereiro de 1637 [8]. Como é de costume entre os apostadores, a confiança começou alta, todos ganhavam. Um mesmo bulbo era vendido e revendido inúmeras vezes. Muitos ficaram ricos de repente e todos imaginavam que isso duraria para sempre [9]. Pessoas venderam todas suas propriedades a preços abaixo do mercado para entrar na mania das Tulipas, porém, assim como começou, a histeria terminou - subitamente. Tulipas como a da figura 1.1, que antes valiam milhares de florins, agora são negociadas por menos de um décimo do que antes fora comum.

Quase quatrocentos anos depois, ninguém sabe ao certo o que começou nem que informação estourou a bolha e o mesmo é verdade para as especulações modernas, nas quais mesmo análises *post-mortem*¹ são inconclusivas em relação ao que causou o *crash*² [11]. Neste capítulo abordaremos algumas hipóteses que tentam explicar e prever a ocorrência desses eventos.

¹análise realizada após o estouro da bolha, visando entender quais foram as causas do evento.

²queda repentina e significativa no valor de uma ação ou índice.[10]



Figura 1.1: Ilustração datada do século XVII de uma tulipa *Semper Augustus* [12]. Em um momento da Tulipomania podia-se trocar um bulbo dessa flor por cinco hectares de terra [13].

1.1 Dinâmica de preços

Primeiramente vamos definir o valor fundamental de uma ação qualquer em um mercado ideal onde não existem dividendos nem taxas de juros, $p(t) = 0$. Portanto, qualquer valor $p(t) > 0$, deviante do valor fundamental do ativo, indica a presença de uma bolha.

Antes de efetivamente escrevermos a dinâmica de preços que usaremos, precisamos definir uma variável

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (1.1)$$

que chamaremos de taxa de falha, ou seja, dado que o *crash* ainda não ocorreu, qual a chance dele acontecer no próximo instante de tempo. Alternativamente, também podemos escrever $h(t) = f(t)/R(t)$, com $f(t)$ sendo a função densidade de probabilidade de ocorrer uma falha (*crash*) e $R(t) = 1 - F(t)$ a função de sobrevivência, ou seja, a probabilidade total menos a probabilidade, $F(t)$, de ocorrer uma falha [14]. Assim, segue que a dinâmica de preços deverá ser

$$dp = \mu(t)p(t)dt - \kappa p(t)dj \quad (1.2)$$

com κ sendo a porcentagem da queda de preço e j um processo de salto que vale 0 antes do *crash* e 1 depois. De modo a encontrarmos $\mu(t)$ consideramos que os preços respeitam um processo de Martingale, ou seja: dado todo o histórico de $p(t)$, o melhor preditivo para o estado $t + 1$ é o próprio estado em t . Julgamos válida também a hipótese do mercado eficiente, isto é, o preço de uma ação reflete toda a informação disponível sobre ela naquele instante de tempo [3]. Dessa forma,

$$E[dp] = \mu(t)p(t)dt - \kappa p(t)[P(dj = 0) \times (dj = 0) + P(dj = 1) \times (dj = 1)] = 0. \quad (1.3)$$

Como $P(dj = 1)$ é a probabilidade de ocorrer um *crash* no próximo instante de tempo, então

$$\mu(t) = \kappa h(t) \quad (1.4)$$

Substituindo $\mu(t)$ na equação (1.2) e levando em consideração que queremos encontrar a dinâmica antes do *crash*, somos conduzidos a

$$\ln[p(t)] = \kappa \int_{t_0}^t h(t)dt. \quad (1.5)$$

Ou seja, conforme $h(t)$ cresce, $p(t)$ deve crescer cada vez mais rápido de modo a compensar os investidores pelo risco de um *crash* eminente [15]. De modo a resolvermos a equação (1.5) e encontrarmos a dinâmica de preços do sistema, nós precisamos entender o comportamento da função $h(t)$. Para isso, recorreremos a uma analogia com o modelo de Ising em duas dimensões: primeiramente em uma rede quadrada e então considerando uma geometria que leva em conta a existência de certos níveis hierárquicos.

1.2 O mercado como um modelo de Ising em uma rede quadrada

O modelo Johansen-Ledoit-Sornette (JLS) parte do princípio de que, essencialmente, existem dois tipos de agentes que compõem o mercado financeiro: racionais e irracionais. Os racionais são homogêneos, técnicos, coordenados e avessos ao risco [16, 17]. Enquanto isso, os irracionais podem ser descritos, nas palavras de Keynes, como "espíritos animais", cujas ações são predominantemente movidas por impulso [18], comprando quando os preços sobem e vendendo quando caem, em um comportamento chamado *feedback* positivo [19], cuja ação será tratada neste trabalho como mecanismo principal na formação e destruição das bolhas financeiras.

Começemos imaginando o mercado como sendo composto por uma rede de $i = 1, \dots, I$ agentes irracionais, com $N(i)$ sendo o número de indivíduos conectado com i , cada qual podendo assumir apenas dois possíveis estados, $s_i \in \{-1, 1\}$. Podemos interpretar esses estados como 'comprar' e 'vender' [11]. Definimos então que s_i é dado por:

$$s_i = \text{sign}\left(K \sum_{j \in N(i)} s_j + \sigma \epsilon_i\right), \quad (1.6)$$

em que temos que K é uma constante que governa a tendência de imitação entre os *traders*, s_j é o estado atual de j , σ dirige a propensão idiossincrática, que favorece a desordem, dos indivíduos e ϵ_i é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída [20]. Valores maiores de K levam a uma maior homogeneidade no sistema e a ordem tende a imperar, já σ grande indica uma tendência ao caos. Neste ponto podemos traçar uma analogia com o modelo de Ising em duas dimensões, porém, ao invés de uma temperatura crítica para a transição paramagnética-ferromagnética, temos um valor crítico K_c que separa os diferentes regimes [20]. Quando $K < K_c$ o caos impera e temos um dia normal na bolsa, assim, se definirmos

$$M = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I s_i \quad (1.7)$$

como a média dos estados, teremos que $\mathbb{E}[M] = 0$ ou, em outras palavras, as ações de compra e venda, na média, se anulam. Porém, ao passo que K se aproxima de K_c a organização tende a aumentar e devemos ver a formação de grupos agindo juntos até que, quando $K > K_c$, teremos todos os agentes no mesmo estado, -1 ou +1 e um sistema extremamente sensível a qualquer perturbação. Esse fenômeno no campo da economia comportamental é chamado de comportamento de manada que ocorre quando a opinião própria do indivíduo é engolida pela influência dos pares que compõem a sua rede de contatos [21, 22]. Tal padrão comportamental é uma das peças fundamentais do modelo JLS, pois, agindo com informações limitadas, pode parecer racional para um *trader* seguir a movimentação geral do seu círculo de influência.

No modelo de Ising, durante a já mencionada transição paramagnética-ferromagnética, a quantidade que melhor descreve a tendência de uma partícula imitar o estado de outra é a *susceptibilidade* magnética [23]. Da mesma forma podemos considerar a existência de alguma forma de susceptibilidade no modelo JLS. De modo mais formal, adicionemos uma constante G , análoga a um campo magnético externo, à equação (1.6)

$$s_i = \text{sign}\left(K \sum_{j \in N(i)} s_j + \sigma \epsilon_i + G\right). \quad (1.8)$$

Quando $G > 0$, há um favorecimento ao estado $+1$ e, de forma similar, para $G < 0$ temos uma maior chance de encontrarmos o estado -1 . Assim, a susceptibilidade será a sensibilidade do estado médio a alterações na influência global do sistema [11],

$$\chi = \left. \frac{d\mathbb{E}[M]}{dG} \right|_{G=0}. \quad (1.9)$$

1.3 Fractalidade, leis de potência e fenômenos críticos

Pontos têm dimensão zero, linhas dimensão um e planos dimensão dois. Agora, o que aconteceria se pegássemos uma linha de comprimento 1, a dividíssemos nos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, assim retirando o terço do meio, e então repetíssemos n vezes o mesmo processo com as partes restantes? Este é o processo feito para se construir o conjunto de Cantor [24]. Após n iterações teríamos um conjunto com $N_n = 2^n$ segmentos, cada qual com comprimento $l_n = (1/3)^n$. Intuitivamente, quando pensamos em $n \rightarrow \infty$, chegamos a conclusão de que a quantidade de segmentos vai ao infinito e a dimensão a zero, porém tal resultado não nos fornece muita informação e nem nos traz uma distinção entre esse conjunto complexo de elementos e um simples ponto. Daí surge a necessidade de definirmos uma dimensão fractal, ou seja, uma quantidade que meça a taxa com a qual o número de elementos, N_n , se prolifera com a resolução $1/l_n$ [25]:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln (1/l_n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631, \quad (1.10)$$

uma dimensão que se encontra entre a de um ponto e de uma reta.



Figura 1.2: As seis primeiras iterações do conjunto de Cantor [26].

Generalizando, temos que uma dada função $O(x)$, com x sendo um parâmetro de controle, não se altera quando mudamos a escala de x . Ou seja, quando $x \rightarrow \lambda x$, existe $\mu(\lambda)$ tal que

$$O(x) = \mu O(\lambda x) \quad (1.11)$$

e cuja solução, com $\alpha = -\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}$, é a lei de potência

$$O(x) = Cx^\alpha. \quad (1.12)$$

Podemos notar então que a razão da função em diferentes escalas é uma constante que independe do valor de x adotado [25]

$$\frac{O(\lambda x)}{O(x)} = \lambda^\alpha. \quad (1.13)$$

Porém não é apenas em objetos como o conjunto de Cantor em que vemos a emergência da fractalidade. Ela pode ser também observada na escala alométrica usada para descrever a relação entre a massa e o metabolismo entre diferentes animais ou então na formação de nuvens, nas origens dos epicentros de terremotos, no espalhamento de doenças e em transições de fase. Mais especificamente, quando estudamos uma transição de fase no modelo de Ising vemos que o comportamento da susceptibilidade é da forma

$$\chi \approx A(K_c - K)^{-\gamma} \quad (1.14)$$

Assim, quando K se aproxima de K_c podemos ver o surgimento de *clusters* de spins com mesma orientação, o comportamento fractal tomando forma e o sistema se tornando muito sensível a qualquer perturbação [25]. De fato, quando $K \rightarrow K_c$ temos que a susceptibilidade tende ao infinito. Essas são algumas das características dos fenômenos críticos.

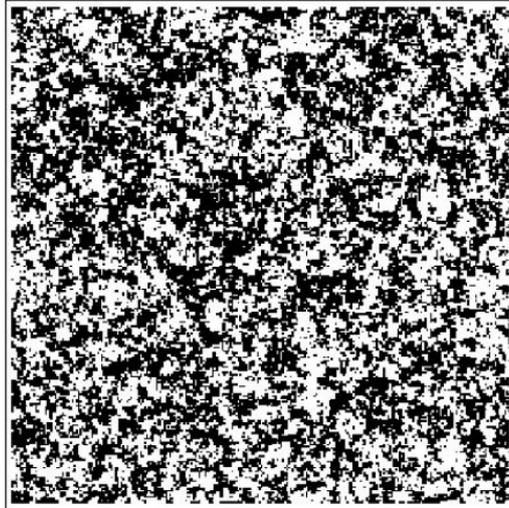


Figura 1.3: Sistema com $K < K_c$ [27].

Outra peculiaridade marcante da criticalidade é o comportamento da função de correlação indo ao infinito com $K = K_c$. Isso se dá justamente por conta da formação de estruturas fractais, ou seja: surgem elementos auto-similares em todas as escalas do sistema e, assim, a influência entre um spin e outro, que antes era local, torna-se global. Desta forma, um conjunto que antes estava em desordem torna-se rapidamente ordenado e homogêneo.

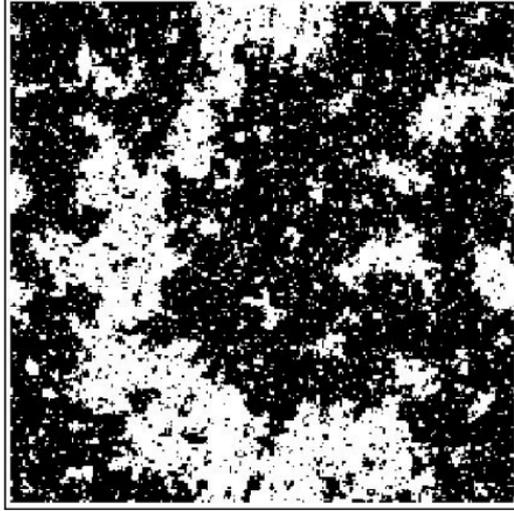


Figura 1.4: Sistema com K próximo de K_c . Podemos observar a emergência de estruturas fractais e de *clusters* exibindo o mesmo estado [27].

É exatamente aqui onde traçamos o paralelo entre a susceptibilidade e a taxa de falha, $h(t)$. No mercado antes de um *crash* vemos o mesmo comportamento de um modelo de spin quando este se torna ferromagnético. Observamos, primeiramente, um desordenamento com pedidos de compra e venda se anulando na média, porém, quando a tendência de imitação aumenta começamos a ver a formação de *clusters* de *traders* compartilhando da mesma estratégia de compra ou venda. Na proximidade do ponto crítico, o sistema fica tão instável que qualquer ação de compra ou venda pode desestabilizá-lo e desencadear o *crash*.

Notemos, porém, que nossa dinâmica de preços encontra-se em função de t , não de K . Para contornarmos este problema, vamos supor K movendo-se muito devagar para que possamos usar uma expansão de Taylor ao redor do ponto crítico. Definindo $K(t_c) = K_c$, então vamos ter que $K_c - K \approx \mathbb{C} \times (t_c - t)$ e portanto

$$h(t) \approx B' \times (t_c - t)^{-\alpha}, \quad (1.15)$$

com $0 < \alpha < 1$ [11].

Assim, podemos utilizar (1.15) para resolver (1.5):

$$\begin{aligned} \ln[p(t)] &= \kappa \int_{t_0}^t B'(t_c - t)^{-\alpha} dt \\ &= \frac{-\kappa B'}{1 - \alpha} \left[(t_c - t)^{1-\alpha} \right]_{t_0}^t \\ &= \frac{-\kappa B'}{1 - \alpha} \left[(t_c - t)^{1-\alpha} - (t_c - t_0)^{1-\alpha} \right] \end{aligned}$$

Se para $t = t_c$ escrevermos o preço no ponto crítico $\ln p(t_c) = B(t_c - t_0)^m$, com $B = -\frac{\kappa B'}{1-\alpha}$ e $m = 1 - \alpha$, então [20]

$$\ln p(t) = \ln p(t_c) + B(t_c - t)^m \quad (1.16)$$

É válido notar que (1.16) é o resultado de uma simplificação, pois consideramos agentes que se conectam apenas com seus pares mais próximos, sem levar em consideração as diferenças de influência entre os *traders*.

1.4 Rede hierárquica em diamante

Se pensarmos na configuração do mercado global vamos ver um mar de simples *traders* exercendo entre si basicamente a mesma influência, porém em certas regiões da nossa rede teremos bancos, *hedge funds* e fundos de pensão cuja influência no mercado é ordens de grandeza maior do que a de um simples agente.

Para modelarmos essa configuração de forma um pouco mais realista, iremos construir uma rede hierárquica em diamante. Começemos considerando dois agentes conectados entre si, portanto temos uma ligação e dois agentes. Então, substituímos essa conexão por quatro novos *links* formando um diamante. Os dois pontos originais agora estão situados em vértices diametralmente opostos e os outros vértices estão ocupados por dois novos *traders*. Repetimos a operação e cada um desses quatro *links* é substituído por quatro novas conexões, novamente formando um diamante [20]. A figura 1.5 oferece um auxílio visual que ajuda a entender melhor esse processo. Após n iterações vamos ter $N = \frac{2}{3}(2 + 4^n)$ agentes e 4^n conexões entre eles.

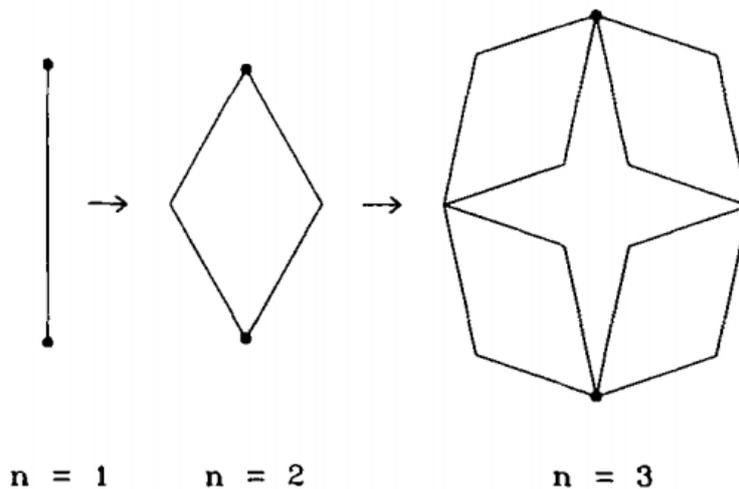


Figura 1.5: Três primeiras iterações do processo de construção da rede hierárquica em diamante [28].

A maior parte dos *traders* terá apenas dois vizinhos, os agentes originais terão 2^n e o restante terá algo entre esses dois valores [11]. Tal configuração parece capturar melhor a natureza do problema, pois leva em conta que a movimentação de grandes *players* tem muito mais influência do que a de um pequeno investidor, tal qual um tsunami gera mais estragos do que uma pequena onda.

As propriedades desse sistema são basicamente as mesmas descritas nas seções anteriores, a principal diferença será a presença de um expoente crítico complexo na equação (1.15).

1.5 Invariância de escala discreta e a correção da log-periodicidade

De modo a desenvolvermos completamente o modelo JLS precisamos analisar a rede hierárquica em diamante pelos olhos do Grupo de Renormalização que busca, de forma

sucinta, decompor um problema envolvendo um grande número de agentes em problemas menores, mais simples e que compreendem uma menor quantidade de elementos. Tal análise só é possível na presença de uma invariância de escala discreta, ou seja: a magnificação, λ , na observação do sistema deverá assumir apenas valores específicos. Por exemplo, o conjunto de Cantor exibe fractalidade apenas quando $\lambda_p = 3^p$. Se tentarmos observá-lo com qualquer outro λ que não seja uma potência de 3 não seríamos capazes de visualizar a autossimilaridade do conjunto, o que significa que temos a presença de uma invariância de escala discreta [25].

No nosso problema, queremos inicialmente estudar como a influência de um agente sobre outro nos leva a um ponto crítico e a uma mudança de fase. Para isso usaremos a transformação

$$K' = \phi(K) \quad (1.17)$$

do grupo de renormalização. A função de K' no sistema é nos levar de uma magnificação 2^p a uma 2^{p-1} . A figura 1.6 fornece um recurso visual que torna o entendimento desse conceito mais fácil.

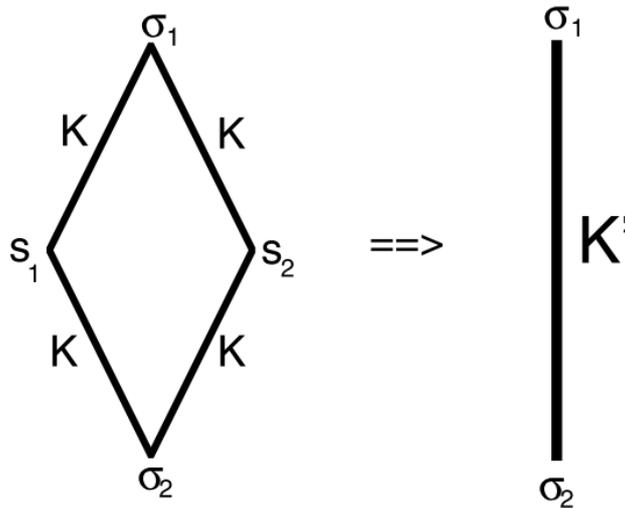


Figura 1.6: A aplicação de K' em uma dada iteração da rede nos leva de uma magnificação 2^p a uma 2^{p-1} [25].

A energia livre do sistema pode então ser escrita como

$$f(K) = g(K) + \frac{1}{\mu} f(\phi(K)). \quad (1.18)$$

Se definirmos $f_0(K) = g(k)$ e $f_{n+1}(K) = g(K) + \frac{1}{\mu} f_n(\phi(K))$ para todo n inteiro e positivo, então podemos escrever [29]

$$f_n(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^n} g[\phi^n(K)]. \quad (1.19)$$

Quando $K = K_c$ o somatório (1.19) diverge [30], então, se escrevermos

$$\left. \frac{d\phi}{dK} \right|_{K_c} = \lambda, \quad (1.20)$$

somos levados a concluir que a k -ésima derivada de $f(K)$ é

$$\frac{d^k f_n(K)}{dK^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^n} \frac{d^k}{dK^k} g[\phi^n(K)], \quad (1.21)$$

cujo termo genérico $(\frac{\lambda^k}{\mu})^n$ diverge para valores grandes o suficiente de k (contanto que $\lambda > 1$ [31]). Ou seja, essa é justamente a definição de ponto crítico já que a k -derivada de f em K_c é infinita.

Portanto, para $0 < m < 1$,

$$f(K) \propto (K_c - K)^m. \quad (1.22)$$

Utilizando (1.20) para linearizar a transformação (1.17) ao redor do ponto crítico nos leva a $K' = \phi(K) = K_c + \lambda(K - K_c)$ e assim, finalmente substituindo (1.22) em (1.18) chegamos a $(K_c - K)^m = \frac{1}{\mu}(K_c - K')^m$, ou então

$$(K_c - K)^m = \frac{1}{\mu} [\lambda(K_c - K)]^m, \quad (1.23)$$

que prontamente nos diz que $\lambda^m = \mu$. De modo a obtermos a solução geral para m usamos a identidade $e^{2\pi ni} = 1$ e portanto

$$m = \frac{\ln \mu}{\ln \lambda} + \frac{2\pi ni}{\ln \lambda}. \quad (1.24)$$

Como estamos apenas interessados na parte real do expoente, então $\Re[(K_c - K)^{\alpha+i\omega}] = (K_c - K)^\alpha \Re[e^{i\omega \ln(K_c - K)}] = (K_c - K)^\alpha \cos(\omega \ln(K_c - K))$, onde $\alpha = \frac{\ln \mu}{\ln \lambda}$ e $\omega = \frac{2\pi n}{\ln \lambda}$. A forma mais geral de $f(K)$ será então a série de Fourier

$$f(K) = (K_c - K)^\alpha \left\{ a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega \ln(K_c - K) + \Psi) \right\} \quad (1.25)$$

Sabendo que a derivada segunda da energia livre nos dá a susceptibilidade, mantendo a analogia da seção 1.3 e considerando apenas a correção de primeira ordem da série de Fourier, encontramos

$$h(t) \approx B(t_c - t)^{-\alpha} + C(t_c - t)^{-\alpha} \cos(\omega \ln(t_c - t) + \psi') \quad (1.26)$$

que substituída em (1.5) e já integrada (ver Apêndice A) nos permite chegar em

$$\ln p(t) = A + B(t_c - t)^m \left[1 + C(\cos(\omega \ln(t_c - t) + \psi)) \right], \quad (1.27)$$

em que p é o valor do ativo no tempo t , A é o \ln do preço no tempo crítico t_c , B o aumento de $\ln p(t)$ ao longo do tempo, ω é a frequência das oscilações durante o crescimento da bolha e ϕ é um parâmetro de fase. Desta forma, considerando o caráter hierárquico da rede conseguimos introduzir uma correção log-periódica na equação (1.16).

Para que a consistência do modelo seja mantida, $B < 0$ e $m < 1$, o que implica que a taxa de perigo, $h(t)$, acelera no tempo. E ainda, $m > 0$ garante que os preços permaneçam finitos para todo tempo [20]. É também sugerido considerar as condições $6 \leq \omega \leq 13$ e $0 \leq \psi \leq 2\pi$ por conta da alta taxa de ruído dos dados normalmente utilizados para o ajuste do modelo [20, 32, 33, 34].

Capítulo 2

Testando o modelo

2.1 Dados

Os dados utilizados neste capítulo foram retirados diretamente do Yahoo Finance [35] e não passaram por nenhuma limpeza, a não ser o corte da janela de tempo desejada feita utilizando-se a biblioteca *pandas* da linguagem Python.

2.1.1 Bolha da internet

No dia 19 de agosto de 1995 foi lançado o *IPO* (Oferta Pública Inicial em português) da Netscape, uma empresa cujo único produto era um navegador para ser usado na ainda engatinhando Internet. Até ser lançada na bolsa a empresa ainda não havia obtido um histórico de retornos sólidos para justificar uma análise fundamentalista, porém, no primeiro dia de vendas, abrindo a US\$28, cada papel chegou a US\$75, fechando a US\$58. Poucos meses depois cada ação já estava sendo negociada a US\$170 [36]. Estava dado o início da Bolha da Internet. Esse modelo de IPO acabou se popularizando e falhas de precificação acabaram sendo frequentes, com subsidiárias valendo mais do que as próprias "empresas-mãe" [37]. Por ser altamente composta de empresas de tecnologia, julgamos que o índice *Nasdaq* é ideal para se estudar a bolha da internet. Nos nossos testes usaremos o fechamento do índice entre 01/12/1998 e 25/02/2000, cerca de dois meses antes da data reconhecida como a do *crash*.

2.1.2 Bolha atual

Mesmo com a crise global do coronavírus, após o susto inicial de março de 2020, quando em um mesmo dia vários *circuit breakers* (pausa momentânea nas negociações após alguma queda abrupta de 10% ou mais) foram acionados, a bolsa norte-americana recuperou-se rapidamente, atingindo máximas históricas em tempo recorde. Ainda não há consenso sobre a existência de uma bolha atualmente [38, 39], então usaremos o modelo JLS como uma ferramenta diagnóstica, não apenas preditiva. Novamente o índice *Nasdaq* será utilizado, porém com quatro janelas de tempo, todas com dados de fechamento e começando em 23/03/2020 e indo até 09/04/2021, 16/04/2021, 23/04/2021 e 30/04/2021.

2.2 Algoritmo genético

O algoritmo genético é uma técnica de otimização baseada na seleção natural de Darwin. A finalidade é reduzir o erro da chamada função objetivo,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n [y(t_i) - \tilde{y}_i(t_i, p)]^2. \quad (2.1)$$

Em outras palavras, o método busca minimizar a diferença entre os dados reais, $y(t_i)$ e os valores gerados pelo modelo $\tilde{y}_i(t_i, p)$, para isso é gerada uma população contendo n indivíduos, cada um representando uma possível solução. Cada membro dessa população é então ordenado de forma que o mais bem colocado é aquele que melhor minimiza o erro da equação (2.1). Entre esses indivíduos mais aptos ocorre então a reprodução: o material genético, ou seja, a solução, de cada par é recombinado respeitando uma taxa definida de mutação, gerando então um novo membro dessa população. Esse processo é feito entre todos os membros mais bem colocados. A segunda geração passa pelo mesmo processo da anterior e assim sucessivamente até que a melhor solução seja encontrada. Uma das principais vantagens do algoritmo genético é que nenhuma solução inicial precisa ser informada, assim um conhecimento prévio dos melhores parâmetros não é necessário [33].

2.3 Método de Levenberg-Marquardt

Similar ao algoritmo genético, o método de Levenberg-Marquardt também visa minimizar a equação (2.1) para isso utilizando uma combinação dos métodos do gradiente [40], que atualiza os parâmetros na direção oposta ao gradiente da função objetivo, e de Gauss-Newton [41], que assume χ^2 como sendo quadrático próximo da melhor solução. O parâmetro λ é utilizado para decidir qual será a estratégia adotada a cada iteração, com valores baixos indicando o uso de Gauss-Newton e altos o método do gradiente [42].

Iniciamos o algoritmo com λ grande e uma solução inicial p . Uma perturbação h é aplicada a p e a princípio o método do gradiente é adotado. Se em uma iteração $\chi^2(p + h) > \chi^2(p)$ então λ aumenta. Do contrário, λ diminui e o método de Gauss-Newton passa a ser usado até que uma solução satisfatória seja encontrada [42].

2.4 Algoritmo Híbrido

Testar o modelo JLS envolve ajustar a equação (1.27), altamente não linear, a dados do mercado financeiro. Pela característica do problema, se utilizarmos apenas um algoritmo podemos correr o risco da solução ficar presa em um mínimo local com parâmetros resultantes não ideais. Com isso em mente, decidimos utilizar um algoritmo genético para estimar os parâmetros iniciais a serem utilizados pelo método de Levenberg-Marquardt.

Foram utilizados o algoritmo genético e o método de Levenberg-Marquardt das bibliotecas `scikit-opt` e `scipy.optimize`, respectivamente. O código na linguagem Python se encontra disponível no [apêndice B](#).

2.5 Resultados

2.5.1 Bolha da Internet

O método descrito na seção anterior foi utilizado para ajustar a equação (1.27) a dados da Nasdaq entre 01/12/1998 e 25/02/2000. Os resultados podem ser observados na tabela 2.1. O valor encontrado para t_c foi de 341, enquanto a data reconhecida como a do *crash* equivale ao dia de negociação de número 349 em relação às datas utilizadas em nosso ajuste. O gráfico 2.1 fornece um recurso visual que ajuda a ilustrar a previsão do modelo.

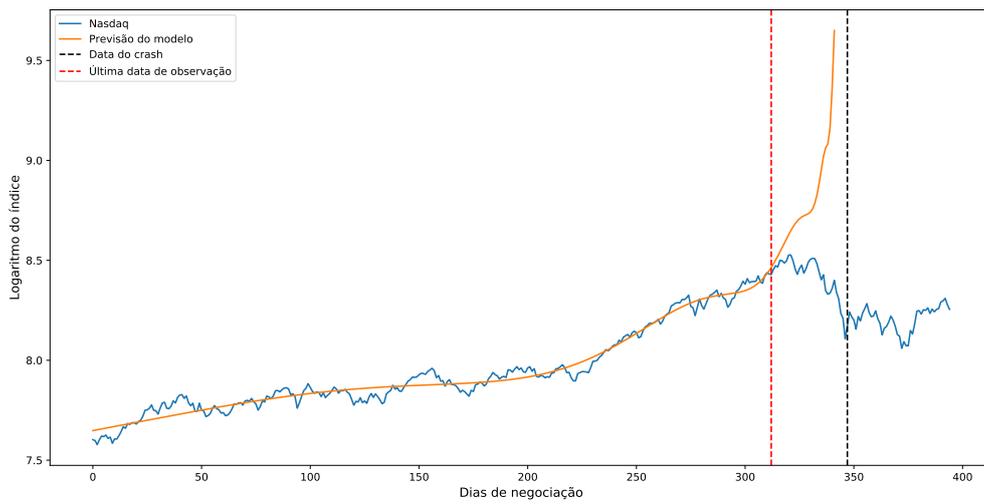


Figura 2.1: Gráfico do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados da bolha da internet. Os parâmetros podem ser encontrados na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Tabela com o resultado do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados da Bolha da Internet

A	B	C	t_c	m	ω	ψ	χ^2
11,56	-2,18	-0,03	341	0,1	4,8	1,72	0,42

É interessante que, mesmo com um erro quadrado relativamente grande, observando-se a figura 2.1, notamos que o modelo foi capaz de realizar um bom trabalho ao descrever os dados.

2.5.2 Nasdaq atualmente

Novamente foi utilizado o método descrito na seção 2.4, desta vez com dados da Nasdaq em quatro janelas de tempo, todas começando em 23/03/2020 e indo até 09/04/2021, 16/04/2021, 23/04/2021 e 30/04/2021. Os resultados podem ser observados na tabela 2.2. Os valores encontrados para t_c estão entre 311 e 719, este tendo sido encontrado usando-se a janela de tempo que vai até 16/04/2021, porém notamos que os parâmetros

encontrados para este ajuste estão ordens de grandeza defasados em relação ao restante dos resultados e, assim, especulamos que é possível tal solução ser fruto de um mínimo local encontrado pelo algoritmo. Se levarmos em conta a maior parte das datas encontradas e as convertermos para um formato mais amigável, o período calculado para a mudança de regime encontra-se entre junho e agosto de 2021. Se levarmos em conta o resultado da semana do dia 16/04/2021, este período estende-se de junho de 2021 até meados de 2022. Vale ressaltar, porém, que estas estimativas não significam necessariamente um *crash*, e sim que, dado os parâmetros encontrados pelo modelo, as datas mais prováveis da saída desse estado de bolha encontram-se nesse período de tempo, não sendo esta, de forma alguma, uma certeza.

Tabela 2.2: Tabela com o resultado do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados da Nasdaq entre março de 2020 e abril de 2021.

t_1	A	B	C	t_c	m	ω	ψ	χ^2
09/04/2021	9,70	$-3,62 \times 10^{-3}$	$-5,06 \times 10^{-4}$	311	0,90	7,61	$2,91 \times 10^{-15}$	0.32
16/04/2021	12,63	$-1,15 \times 10^{-1}$	$5,35 \times 10^{-3}$	719	0,48	8,77	$6,28 \times 10^0$	0.35
23/04/2021	9,81	$-3,63 \times 10^{-3}$	$-3,98 \times 10^{-4}$	367	0,90	10,64	$4,23 \times 10^{-17}$	0.32
30/04/2021	9,71	$-3,47 \times 10^{-3}$	$-4,63 \times 10^{-4}$	327	0,90	8,66	$1,83 \times 10^{-14}$	0.36

Abaixo temos os gráficos provenientes dos ajustes feitos nas quatro janelas de tempo.

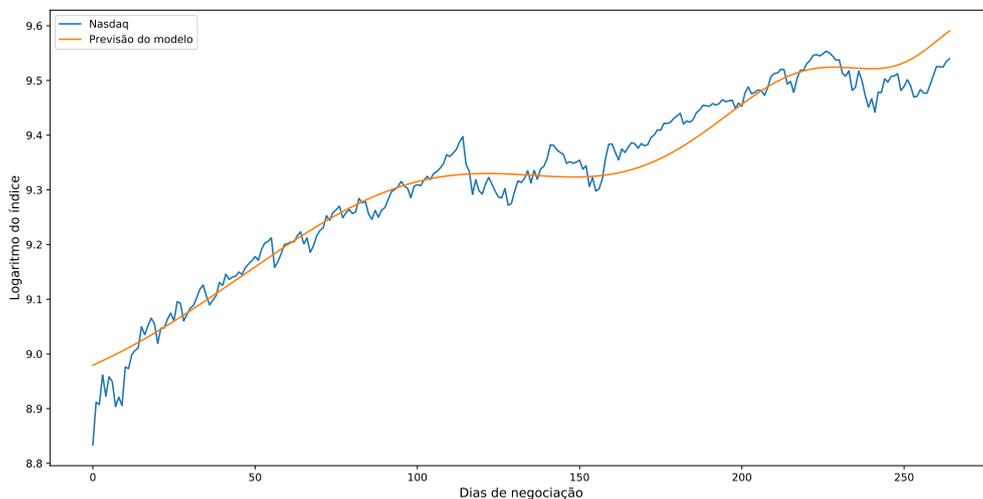


Figura 2.2: Gráfico do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados do índice Nasdaq entre 23/03/2020 e 09/04/2021. Os parâmetros podem ser encontrados na tabela 2.2.

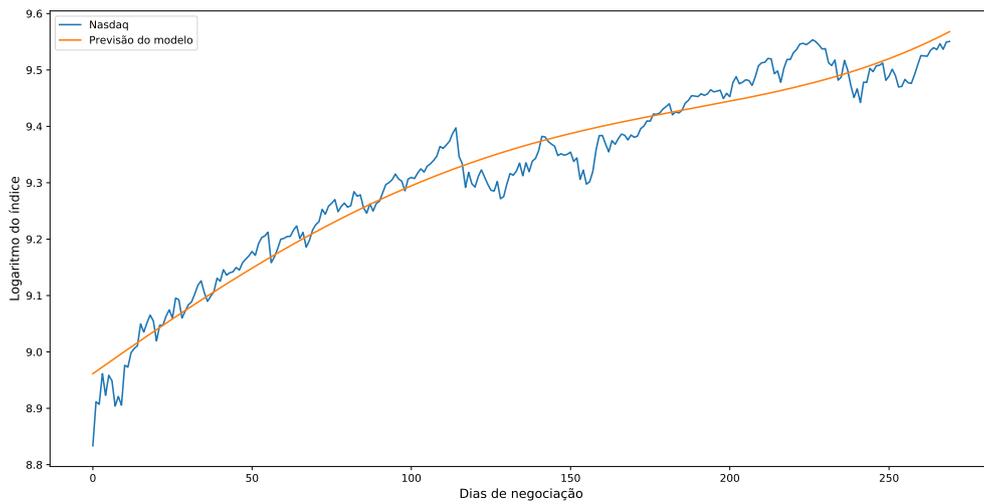


Figura 2.3: Gráfico do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados do índice Nasdaq entre 23/03/2020 e 16/04/2021. Os parâmetros podem ser encontrados na tabela 2.2.

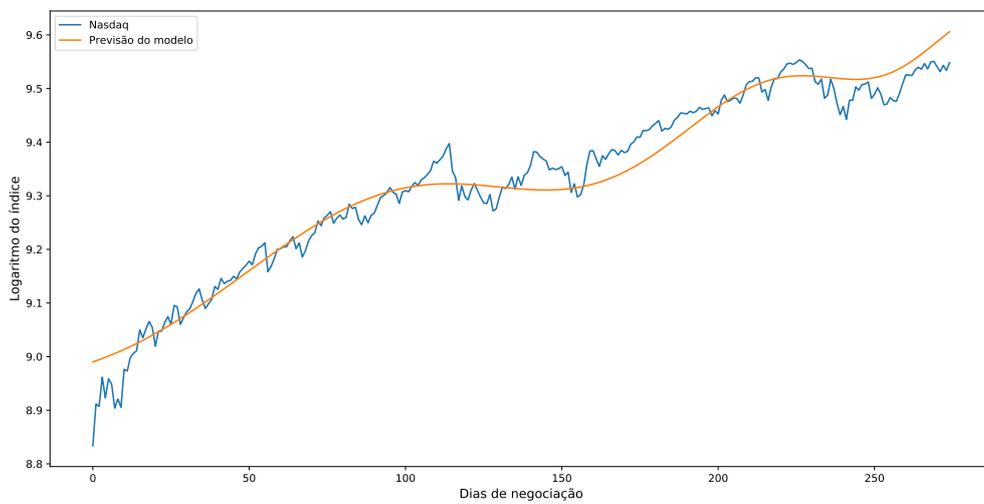


Figura 2.4: Gráfico do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados do índice Nasdaq entre 23/03/2020 e 23/04/2021. Os parâmetros podem ser encontrados na tabela 2.2.

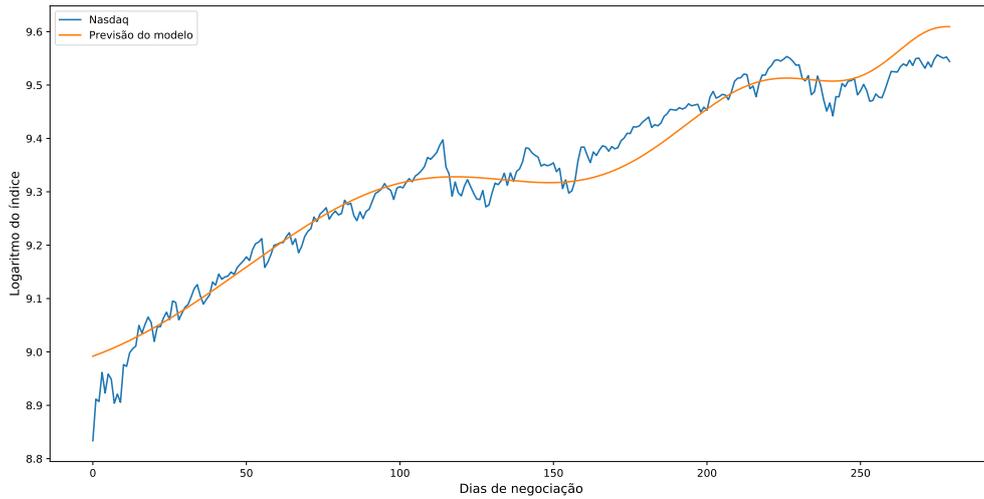


Figura 2.5: Gráfico do ajuste da equação (1.27) utilizando-se os dados do índice Nasdaq entre 23/03/2020 e 30/04/2021. Os parâmetros podem ser encontrados na tabela 2.2.

Notamos também que, dado o erro quadrado e considerando-se que estamos aqui modelando os dados utilizando uma equação que busca caracterizar uma bolha financeira, no período entre março de 2020 e abril de 2021 a Nasdaq encontra-se em uma situação de bolha, apresentando crescimento exponencial e oscilações log-periódicas visíveis.

Conclusões

Neste trabalho estudamos o modelo Johansen-Ledoit-Sornette a partir de suas bases físicas, desenvolvendo-o completamente a partir da analogia do mercado financeiro com o modelo de Ising em uma rede hierárquica em diamante. Fomos capazes também de escrever um algoritmo genético híbrido que ajusta a equação do modelo a dados reais de bolsas de valores. Os resultados obtidos foram satisfatórios, porém, em decorrência da natureza altamente não linear da equação (1.27), possuindo diversos parâmetros independentes, estes devem ser interpretados com cautela, devendo ser utilizados mais como uma ferramenta de alerta e análise de risco do que como uma estratégia de negociação.

Por fim, em trabalhos futuros gostaríamos de aprofundar os testes do modelo, utilizando janelas de tempo variáveis a fim de obtermos resultados estatísticos ainda mais robustos. Além disso, imaginamos ser interessante estudar a capacidade do modelo descrever o comportamento de mercados emergentes, de criptomoedas e de *commodities*, bem como fenômenos de *short squeeze* como o das ações da Gamestop em janeiro de 2021.

Apêndice A

Integração da lei de potência com a correção log-periódica

Como mencionado no [Capítulo 1](#), substituindo (1.26) em (1.5) temos

$$\ln p(t) = \kappa \int_{t_0}^t \left\{ B'(t_c - t')^{-\alpha} \left[1 + C' \cos(\omega \ln(t_c - t') + \psi') \right] \right\} dt'$$

Substituindo $\theta(t') = \omega \ln(t_c - t') + \psi'$ e integrando

$$\ln p(t) = -\kappa B' \left[(t_c - t)^{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} + \frac{C'}{(1-\alpha)^2 + \omega^2} (\omega \sin \theta(t) + (1-\alpha) \cos \theta(t)) \right\} \right]_{t_0}^t$$

Com $m = 1 - \alpha$

$$\begin{aligned} \ln p(t) = \kappa B' & \left[(t_c - t_0)^m \left\{ \frac{1}{m} + \frac{C'}{m^2 + \omega^2} (\omega \sin \theta(t_0) + m \cos \theta(t_0)) \right\} \right. \\ & \left. - (t_c - t)^m \left\{ \frac{1}{m} + \frac{C'}{m^2 + \omega^2} (\omega \sin \theta(t) + m \cos \theta(t)) \right\} \right] \end{aligned}$$

Definindo $A = \ln(p_{t_c}) = \kappa B' \left[(t_c - t_0)^m \left\{ \frac{1}{m} + \frac{C'}{m^2 + \omega^2} (\omega \sin \theta(t_0) + m \cos \theta(t_0)) \right\} \right]$

$$\ln p(t) = A - \frac{\kappa B'}{m} (t_c - t)^m \left[1 + \frac{C'}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} (\cos(\theta(t) + \psi'')) \right]$$

Finalmente, escrevendo $B = -\frac{\kappa B'}{m}$, $C = \frac{C'}{\sqrt{m^2 + \omega^2}}$ e $\psi = \psi' + \psi''$, chegamos a

$$\ln p(t) = A + B(t_c - t)^m \left[1 + C(\cos(\omega \ln(t_c - t) + \psi)) \right] \quad (\text{A.1})$$

Apêndice B

Código usado para realizar o teste do modelo

```
from sko.GA import GA #biblioteca contendo algoritmo genético
from scipy.optimize import curve_fit #biblioteca contendo Levenberg-Marquardt
import numpy as np
import pandas as pd
from matplotlib import pyplot as plt

def JLS(t, a, b, tc, m, c, w, psi):
    modelo= a + np.power(tc - t, m)*b
    + np.power(tc - t, m)*(np.cos(w * np.log(tc - t) + psi))*c
    return modelo

def obj_fun(r): #essa será a função que o algoritmo genético vai otimizar
    a, b, tc, m, c, w, psi = r
    residual = np.square(JLS(t,a, b, tc, m, c, w, psi) - p).sum()
    return residual

t = #vetor contendo as datas
p = #vetor contendo os preços
p = np.log(p) #o modelo usa o logaritmo dos preços
t= np.linspace(0, len(t)-1, len(t)) #passando as datas para dias de negociação

limite_i = [a0, b0, tc0, m0, c0, w0, psi0]#definir os limites inferiores do modelo
limite_s = [a1, b1, tc1, m1, c1, w1, psi1]# #definir os limites superiores do modelo
ga = GA(func=obj_fun, n_dim=7, size_pop=1000, max_iter=500,prob_mut=0.4,
lb = limite_i, ub= limite_s)

melhores_param, residual = ga.run() #roda o algoritmo genético e recebe os melhores
#parâmetros e o residual

limites = [[a0, b0, tc0, m0, c0, w0, psi0],
            [a1, b1, tc1, m1, c1, w1, psi1]]
#precisamos definir os limites que Levenberg-Marquardt vai utilizar
#scipy usa uma sintaxe diferente da biblioteca de algoritmo genético
```

```
valor_inicial = melhores_param
#usamos os melhores parâmetros do algoritmo genético para alimentar LM

fit = curve_fit(JLS, t, p, valor_inicial, bounds= limites, maxfev=5000)

ans, __ = fit
#então extraímos os valores ajustados
fit_a, fit_b, fit_tc, fit_m, fit_c, fit_w, fit_psi = ans
```

Bibliografia

- [1] Julia Kagan. *Mortgage-Backed Security (MBS)*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/m/mbs.asp>. (accessado: 15/04/2021).
- [2] Colleen Shalby. *Mortgage-Backed Security (MBS)*. URL: <https://www.latimes.com/business/la-fi-financial-crisis-experiences-20180915-htlstory.html>. (accessado: 15/04/2021).
- [3] Rosario Mantegna e H. Stanley. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Vol. 53. 2000. DOI: [10.1063/1.1341926](https://doi.org/10.1063/1.1341926).
- [4] Lucas Bombana. *No embalo da retomada dos mercados, fundos de pensão sobem 6,2% em 12 meses, até setembro*. URL: <https://www.infomoney.com.br/onde-investir/no-embalo-da-retomada-dos-mercados-fundos-de-pensao-sobem-62-em-12-meses-ate-setembro/>. (accessado: 15/01/2021).
- [5] Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (ABRAAP). Acesso em: 2020-15-01. 2020. URL: http://www.abrapp.org.br/Consolidados/Consolidado%5C%20Estat%5C%C3%5C%ADstico_09_2020_.pdf.
- [6] Fernand Braudel. *The Wheels of Commerce (Civilization and Capitalism: 15Th-18th Century - Volume 2)*. University of California Press, 1992.
- [7] Pengfei Wang e Yi Wen. “Speculative Bubbles and Financial Crises”. Em: *American Economic Journal: Macroeconomics* 4(3) (2012).
- [8] James E. McClure e David Chandler Thomas. “Explaining the timing of tulipmania’s boom and bust: historical context, sequestered capital and market signals”. Em: *Financial History Review* 24(2) (2017).
- [9] John Kenneth Galbraith. *A Short History of Financial Euphoria*. Penguin Books Ltd, 1994.
- [10] Will Kenton. *Crash*. URL: <https://www.investopedia.com/terms/c/crash.asp>. (accessado: 15/04/2021).
- [11] Anders Johansen, Oliver Ledoit e Didier Sornette. “Crashes at Critical Points”. Em: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 03(2915) (1998).
- [12] Wikipedia. *Semper Augustus Tulip 17th century*. 2020. URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Semper_Augustus_Tulip_17th_century.jpg&oldid=422760457.
- [13] Charles Mackay. *Extraordinary popular delusions and the madness of crowds*. Maestro Reprints, 2014.
- [14] NIST/SEMATECH. *e-Handbook of Statistical Methods*. 2012. DOI: <https://doi.org/10.18434/M32189>.

- [15] Olivier Blanchard. “Speculative bubbles, crashes and rational expectations”. Em: *Economics Letters* 3 (1979).
- [16] John Y. Campbell e Kyle Albert S. “Smart Money, Noise Trading and Stock Price Behaviour”. Em: *Review of Economic Studies* (1993).
- [17] Jukka Ilomäki. “Animal Spirits and Risk in Financial Markets”. Em: *Journal of Banking and Financial Economics* (2018).
- [18] Robert J. Shiller. “Speculative Asset Prices.” Em: *The American Economic Review* (2014).
- [19] J. B. De Long et al. “Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation”. Em: *The Journal of Finance* (1990).
- [20] D. Fantazzini e P. Geraskin. “Everything You Always Wanted to Know about Log Periodic Power Laws for Bubble Modelling but Were Afraid to Ask”. Em: *Munich Personal RePEc Archive* 47869 (2013).
- [21] Michelle Baddeley et al. “Herding in Financial Behaviour”. Em: (2012).
- [22] Maria Andersson, Ted Martin Hedesström e Tommy Gärling. “A Social-Psychological Perspective on Herding in Stock Markets”. Em: *Journal of Behavioral Finance* 15 (2014). DOI: [10.1080/15427560.2014.941062](https://doi.org/10.1080/15427560.2014.941062).
- [23] J. Jhun, P. Palacios e J.O. Weatherall. “Market Crashes as Critical Phenomena?” Em: *Synthese* 195 (2017), pp. 4477–4505.
- [24] Shailesh A. Shirali. “Fractal dimension and the Cantor set”. Em: *Reson* 19 (2014), pp. 1000–1004.
- [25] Didier Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences*. Springer, 2006.
- [26] Wikipedia. *Cantor set in seven iterations*. 2020. URL: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Cantor_set_in_seven_iterations.svg&oldid=508725486.
- [27] Didier Sornette. *Why Stock Markets Crash (Critical Events in Complex Financial Systems)*. Princeton University Press, 2003.
- [28] F. T. Lee e M. C. Huang. “Ising Model in an External Field on a Hierarchical Lattice”. Em: *Journal of Statistical Physics* 75 (1994).
- [29] Didier Sornette e Charles G. Sammis. “Complex Critical Exponents from Renormalization Group Theory of Earthquakes: Implications for Earthquake Predictions”. Em: *Journal de Physique I* 5.5 (1995), pp. 607–619. DOI: [10.1051/jp1:1995154](https://doi.org/10.1051/jp1:1995154).
- [30] Bernard Derrida, Jean-Pierre Eckmann e Ayse Erzan. “Renormalisation groups with periodic and aperiodic orbits”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 16 (1999), p. 893. DOI: [10.1088/0305-4470/16/5/009](https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/5/009).
- [31] H. Saleur, C. G. Sammis e D. Sornette. “Discrete scale invariance, complex fractal dimensions, and log-periodic fluctuations in seismicity”. Em: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 101.B8 (1996). DOI: <https://doi.org/10.1029/96JB00876>.
- [32] Vladimir Filimonov e Didier Sornette. “A stable and robust calibration scheme of the log-periodic power law model”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392 (2013). DOI: [10.1016/j.physa.2013.04.012](https://doi.org/10.1016/j.physa.2013.04.012).
- [33] Emilie Jacobsson. “How to predict crashes in financial markets with the Log-Periodic Power Law”. Em: (2009).

- [34] David Brée e Nathan Joseph. “Testing for financial crashes using the Log Periodic Power Law model”. Em: *International Review of Financial Analysis* 30 (2013). DOI: [10.1016/j.irfa.2013.05.005](https://doi.org/10.1016/j.irfa.2013.05.005).
- [35] *Yahoo Finance*. URL: <https://finance.yahoo.com/>. (accessado: 10/04/2021).
- [36] William Quinn e John D. Turner. *Boom and Bust: A Global History of Financial Bubbles*. Cambridge University Press, 2020.
- [37] J. Delong e Konstantin Magin. “A Short Note on the Size of the Dot-Com Bubble”. Em: *National Bureau of Economic Research, Inc, NBER Working Papers* (2006).
- [38] FINSUM. *Why the Market is Not in a Bubble*. URL: <https://www.nasdaq.com/articles/why-the-market-is-not-in-a-bubble-2021-02-16>. (accessado: 01/04/2021).
- [39] Adam Shell. *Are Stocks in a Bubble?* URL: <https://www.kiplinger.com/investing/stocks/%20tocks-to-buy/602443/are-stocks-in-a-bubble>. (accessado: 01/04/2021).
- [40] HASKELL B. CURRY. “THE METHOD OF STEEPEST DESCENT FOR NON-LINEAR MINIMIZATION PROBLEMS”. Em: *Quarterly of Applied Mathematics* 2 (1944).
- [41] Serge Gratton, Amos Lawless e Nancy Nichols. “Approximate Gauss–Newton Methods for Nonlinear Least Squares Problems”. Em: *SIAM Journal on Optimization* 18 (2007).
- [42] H. Gavin. “The Levenberg-Marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems”. Em: 2013.