Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Introdução à Teoria dos Jogos e Jogos Evolucionários

Acadêmico: Matheus Henrique dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 21 de maio de 2021

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Introdução à Teoria dos Jogos e Jogos Evolucionários

TCC apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Breno Ferraz de Oliveira , como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Matheus Henrique dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 21 de maio de 2021

Sumário

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram a chegar até aqui de alguma forma. Agradeço aos meus pais, Josiley Aparecida de Jesus dos Santos e Anderson Barbosa dos Santos e à minha irmã, Maria Clara dos Santos, por serem meu porto seguro e sempre estarem me apoiando e me incentivando a seguir com meus sonhos e objetivos.

Agradeço a todos os meus professores e todos que fizeram parte de minha formação acadêmica, fazendo com que eu construísse meu conhecimento cada vez mais. Em especial ao meu orientador Dr. Breno Ferraz de Oliveira, por todo o apoio oferecido, sendo sempre muito prestativo e me proporcionando a chance deste e de outros trabalhos, além de me incentivar a seguir evoluindo meu conhecimento a cada dia.

Agradeço à todos os meus amigos e familiares, em especial àqueles que estiveram comigo desde a minha entrada na graduação, passando pelos mesmos desafios: Jhonatan, Vítor, Maurício e Alexandre, companheiros de sempre. Obrigado pelo apoio nas matérias complicadas, pelas tardes estudando juntos, pelas risadas e discussões que acabaram facilitando toda a caminhada até aqui. Agradeço também aos meus amigos Marcos, Ana Paula e Victória, por todas as risadas e momentos de diversão.

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá, pela oportunidade de fazer o curso que sempre tive vontade e por todas as outras oportunidades oferecidas em projetos e estágios, aos quais tiveram grande importância para minha formação profissional. Agradeço também a todos os outros projetos fora da universidade que tive a oportunidade de participar, me ajudaram muitas vezes a desestressar um pouco depois de períodos longos de estudo, além de enriquecer meu conhecimento em áreas diferentes. Por fim, meu muito obrigado a todos que, de alguma forma, fizeram parte da minha jornada e me ajudaram a tornar estes anos incríveis.

Resumo

O surgimento da cooperação entre indivíduos é uma das grandes questões em aberto da ciência, a qual usa de diversas teorias para se conseguir explicar este fenômeno. Dentre elas temos as denominadas Teoria dos Jogos e a Teoria dos Jogos Evolucionários, que usam de análises de jogos para explicar fenômenos recorrentes na natureza e na sociedade. O objetivo deste trabalho é fazer uma introdução à Teoria dos Jogos e à Teoria dos Jogos Evolucionários, apresentando qual intuito de suas criações, os principais conceitos e aplicações. Primeiramente apresentamos uma fundamentação teórica da Teoria dos Jogos, seguida dos principais conceitos e aplicações. Posteriormente apresentamos conceitos físicos por trás da Teoria dos Jogos Evolucionários, a fundamentação da teoria e aplicações da mesma. Por fim, discutimos um exemplo de jogo evolucionário apresentado no artigo *"Evolutionary Prisoner's Dilemma game on a Square Lattice"*, acompanhado de sua análise e resultados. Para a análise deste exemplo usamos técnicas de Monte Carlo, obtendo resultados do artigo analisado.

Palavras chave: Teoria dos Jogos, Dilema social, Dilema do prisioneiro, Equilíbrio de Nash, *payoff*, Jogos Evolucionários.

Abstract

The emergence of cooperation between individuals is one of the great open questions of science, which uses several theories to explain this phenomenon. Among them we have the so-called Game Theory and Evolutionary Game Theory, which use game analysis to explain recurring phenomena in nature and in society. The objective of this work is to make an introduction to Game Theory and Evolutionary Game Theory, presenting the purpose of its creation, the main concepts and applications. First, we present a theoretical foundation of the theory, followed by the main concepts and applications. Subsequently we present physical concepts behind the Evolutionary Game Theory, the foundation of the theory and its applications. Finally, we discuss an example of an evolutionary game presented in the article ‘’ Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice ”, accompanied by its analysis and results. For the analysis of this example we used Monte Carlo techniques, obtaining results the same to the analyzed article.

Keywords: Game Theory, Social Dilemma, Prisoner's Dilemma, Nash Balance, *payoff*, Evolutionary Games.

Introdução

Durante toda a história da vida na Terra, os seres vivos que surgiram estão sempre interagindo de alguma forma, seja com outras ou mesmo com suas próprias espécies. Nos primórdios da vida tivemos interações entre pequenas comunidades de microorganismos, em que aqueles que se saíram melhor, prevaleceram e evoluíram para os primeiros seres vivos da Terra. Com o tempo os seres vivos se adaptaram em diferentes espécies, que por sua vez entraram em conflito pela sobrevivência, surgindo assim sistemas de presa e predador. Muitas espécies foram se extinguindo, enquanto outras foram se adaptando e gerando novas espécies mais aptas à sobrevivência com o passar do tempo.

Em meio a esse ambiente hostil surgiram as primeiras espécies que futuramente se tornariam os primeiros seres humanos, dentre elas temos o *Homo neanderthalensis*, o *Homo erectus* e o *Homo sapiens*. Essas espécies entraram em conflito durante muito tempo, porém a que conseguiu prevalecer sob as outras foi o *Homo sapiens*, pois, diferente das outras espécies, esta conseguiu se adaptar melhor ao ambiente, desenvolveu melhor o cérebro para realizar novas funções e conseguiu formar grandes grupos de indivíduos. O marco principal para este feito foi a chamada ‘’Revolução criativa“ ocorrida há 45 mil anos, pois foi a partir dela que o *Homo sapiens* começou a desenvolver melhor o manuseio de objetos e a fabricação de ferramentas, possibilitando com isso a construção de armas, formas rudimentares de representação cultural como as pinturas rupestres e o desenvolvimento da linguagem, algo que foi de extrema importância para o desenvolvimento da espécie.

Posteriormente, os indivíduos da espécie *Homo sapiens* continuaram evoluindo e se impondo perante as outras espécies de seres vivos até chegarmos aos seres humanos atuais, os chamados *Homo sapiens sapiens*. Porém, além de entrar em conflito com outras espécies, os seres humanos também passaram a entrar em conflitos frequentes com indivíduos de sua própria espécie, como podemos notar em diversas guerras que ocorreram durante toda a história, em que em todas elas temos como alicerce o objetivo de lucrar de alguma forma [1].

Essas interações entre diferentes indivíduos ao longo das eras, sendo eles de espécies iguais ou diferentes, podem ser lidas como sendo uma espécie de jogo. Os jogadores seriam os próprios indivíduos, as adaptações destes ao longo do tempo e as ações tomadas por eles podem ser associadas a estratégias e, não menos importante, o prêmio final que os mesmos recebem pelas suas estratégias é dito como o *payoff* do jogo. Dessa forma, podemos analisar inúmeras situações, como conflito entre espécies de seres vivos, países que estão em guerra, empresas disputando o mercado econômico, ou até bilionários egocêntricos disputando quem tem mais poder de domínio. Esta área de estudo é denominada de Teoria dos Jogos e se baseia em associar sistemas reais como se fossem jogos com jogadores, estratégias e *payoffs*, para a partir disso explicar o comportamento desses sistemas de forma matemática [2].

A Teoria dos Jogos foi de extrema importância para a análise matemática de conflitos estratégicos, favorecendo com isso a elaboração de diversas estratégias militares, muitas delas usadas durante a Guerra Fria, sendo uma das mais famosas a análise do chamado ''Jogo da Galinha". Neste jogo temos dois jogadores, cada um em seu automóvel, ambos em uma pista reta onde cada um deles se encontra em uma extremidade da pista. Estes dois jogadores começam a se movimentar ao mesmo tempo, um de encontro ao outro, cada um deles tendo duas opções de estratégia nesta situação: desistir ou não desistir. O jogador que opta por desistir desvia o caminho para não se chocar com o outro jogador, enquanto o jogador que opta por não desistir segue em direção ao outro jogador. Caso ambos os jogadores optem por não desistir, ambos acabam perdendo tudo com o choque ocasionado pelas suas estratégias. Por outro lado, se apenas um jogador opta por desistir, aquele que não desiste ganha enquanto o outro sai derrotado.

Este jogo retrata exatamente a situação que o mundo se encontrava durante a Guerra Fria, pois ambos os países em guerra, EUA e URSS, tinham em mãos bombas nucleares, as quais gerariam uma catástrofe global se ambos optassem por lançar as bombas. A partir disso, concluiu–se que, se um dos jogadores arrancasse o volante do carro e mostrasse isso, ou seja, demonstrasse que nada o faria mudar de opinião quanto ao ataque nuclear, o jogador adversário desviaria o caminho por se preocupar com o perigo iminente. Esta análise juntamente com políticas externas aplicadas pelos governos dos dois países fez com que a URSS recuasse e evitou com isso o temido confronto nuclear, que geraria danos irreversíveis em ambos os lados [3].

Este trabalho, portanto, irá tratar os principais fatores e conceitos que levaram à elaboração da Teoria dos Jogos, assim como o conceito de Jogos Evolucionários. No capítulo 1 serão discutidas as principais ideias que levaram à formulação da teoria dos jogos, passando por diversos acontecimentos históricos até chegar à formulação da teoria. Posteriormente, no capítulo 2, será apresentada a teoria dos jogos, como ela funciona, jogadores, estratégias e análises do dilema social, dilema do prisioneiro e equilíbrio de Nash. Em seguida, no capítulo 3 faremos uma breve revisão de sistemas dinâmicos e introduziremos o conceito de Jogos Evolucionários, dando exemplos de aplicações. Por fim, no capítulo 4 será apresentada uma aplicação de um Jogo Evolucionário utilizando um sistema dinâmico referente ao Dilema do Prisioneiro, juntamente com os resultados obtidos através de métodos computacionais, seguindo com as considerações finais nas conclusões.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica da Teoria dos Jogos

Quando paramos para analisar as relações que temos com outras pessoas durante a vida, sejam elas no trabalho, em casa ou em qualquer outro lugar, estamos sempre nos posicionando e fazendo escolhas que afetam a nós e às outras pessoas em pequenas ou grandes proporções. Em situações simples ou complexas, como escolher uma roupa para um evento, investir na bolsa de valores ou até mesmo entrar em guerra com outro país, estamos sempre fazendo escolhas que determinam nossas ações e ganhos [4].

Todas essas relações, chamadas neste trabalho de jogos, são baseadas em dois ou mais agentes que interagem entre si, ambos com capacidade de tomar decisões, visando de alguma forma alcançar algum fim lucrativo por meio desta interação. Este fenômeno é algo observado durante toda história da humanidade e foi apresentado e debatido inúmeras vezes.

1.1 Platão e a batalha de Délio

Um dos primeiros registros a respeito de um jogo vem de Platão (428/427 – 348/347 a.C.) (Figura 1.1), um dos filósofos mais conhecidos de toda a história.

Figura 1.1: Platão (à esquerda) e Aristóteles (à direita). Detalhe do afresco "Escola de Atenas", obra pintada por Rafael Sanzio (1483 - 1520), entre 1509 e 1510 [5].

Entre seus inúmeros diálogos, em que na maioria temos como personagem principal seu mestre Sócrates, destaca-se o diálogo Laques, onde além de tratar principalmente de coragem, Platão fala a respeito da batalha de Délio.

A batalha de Délio foi uma das batalhas desenvolvidas durante a Guerra do Peloponeso (431 – 404 a.C.), envolvendo as cidades gregas de Atenas e Esparta. Usando o contexto desta batalha, Platão traz uma reflexão muito interessante a respeito do comportamento dos soldados. Ele descreve uma situação em que a cidade de Délio está sendo atacada por um exército e a primeira linha de defesa de soldados está conseguindo conter o ataque. Um soldado que está na defesa da cidade, mas que não está na primeira linha de defesa, observa a batalha e chega aos seguintes raciocínios:

- Caso ele vá ajudar os soldados da primeira linha de defesa ele pode acabar se ferindo gravemente durante a batalha, portanto, seria melhor ficar na sua posição atual.

- Caso ele não vá ajudar a primeira linha de defesa e o exército inimigo consiga vencê-la, ele terá que enfrentar o exército inimigo em menor número e a chance de se ferir gravemente será muito maior.

O soldado observa que, em ambos os raciocínios existe a possibilidade de ele acabar se ferindo gravemente na batalha, seja essa possibilidade alta ou baixa. A partir disso ele desenvolve um outro raciocínio que seria fugir da cidade, assim, pensando apenas em seu bem estar, ele evitaria qualquer risco. Platão conclui que, se um soldado pensou dessa forma é muito provável que os outros soldados também desenvolvam esse mesmo pensamento, assim a guerra já estaria perdida antes mesmo de começar.

Platão traz neste diálogo a mentalidade de um soldado que faz suas escolhas de acordo com uma estratégia que visa seu benefício próprio, porém ao mesmo tempo essa estratégia não gera um benefício ao grupo e pode inclusive prejudicar o grupo de alguma forma [2].

1.2 Hernán Cortez e a conquista do México

No século XVI o conceito de jogo também esteve presente na história, desta vez relacionada com o conquistador espanhol Hernán Cortez e a conquista do México (Figura 1.2). Em 1519, quando Hernán Cortez chegou as terras do México elas eram dominadas pelo Império Asteca, cuja população era muito maior que o exército de espanhóis que desembarcaram em terra.

A diferença de número de soldados e o ambiente hostil levaram Cortez a pensar em voltar para os navios e retornar à Espanha, constatando também que grande parte do exército espanhol tinha essa mesma idéia. Porém, ele estava determinado a seguir com seus planos de conquista e traçou uma estratégia para isso. Após o desembarque ele ordenou que todos os navios fossem queimados, assim não existiria possibilidade dos exércitos retornarem à Espanha. Cortez acreditava que com isso os soldados lutariam com muito mais bravura e afinco, a fim de cumprir com a missão e conquistar o Império Asteca.

Figura 1.2: Hernán Cortez e o exército espanhol chegando ao México e encontrando o Império Asteca [6].

A estratégia de Hernán Cortez também gerou um efeito colateral, pois quando os astecas viram os espanhóis queimando os navios eles ficaram receosos com a confiança de vitória do exército espanhol. Isso fez com que os astecas inicialmente fugissem ao invés de ter a iniciativa de atacar primeiro, dando assim uma vantagem para o exército espanhol que acabou vencendo a batalha por isso. Cortez com sua estratégia evitou que os soldados espanhóis agissem pensando apenas em seu bem pessoal e, por consequência disso, prejudicassem todo o grupo [2].

1.3 Thomas Hobbes e o mundo ideal

Outro filósofo muito conhecido é o inglês Thomas Hobbes (1588 – 1679) (Figura 1.3), que desenvolveu diversos pensamentos relacionados a interações entre agentes de um grupo. Em sua obra mais importante denominada *Leviatã* é discutido o conceito de Estado, frisando qual seria a necessidade e sua relação com a liberdade individual dos cidadãos.

Para Hobbes, o mundo ideal seria aquele em que todos têm liberdade, onde todos podem fazer o que quiserem de acordo com suas vontades individuais, porém, existem situações em que seria necessário a cooperação entre os indivíduos para alcançar um objetivo.

A partir disso temos um exemplo, Judas e João, tem o objetivo de cada um construir uma casa pra si, e para alcançar esse objetivo decidem se unir para construir juntos uma casa de cada vez. Após a construção da primeira casa, Judas, que já tem onde morar, decide trair João e não o ajudar a construir a casa dele. Após isso, Judas fica com medo de que João roube sua casa, então decide comprar uma arma para se proteger, por outro lado, João começa a desconfiar que Judas está planejando outras formas de prejudicá-lo e também decide comprar uma arma para se proteger, além de contratar alguns capangas para ir atrás de Judas. Em resposta, Judas também contrata capangas para ir atrás de João, gerando com isso uma espécie de ciclo de ódio. Podemos notar que, a ideia inicial de cooperação acaba gerando um conflito inicial, que posteriormente acaba se tornando um círculo vicioso e destrutivo, gerando a destruição da sociedade.

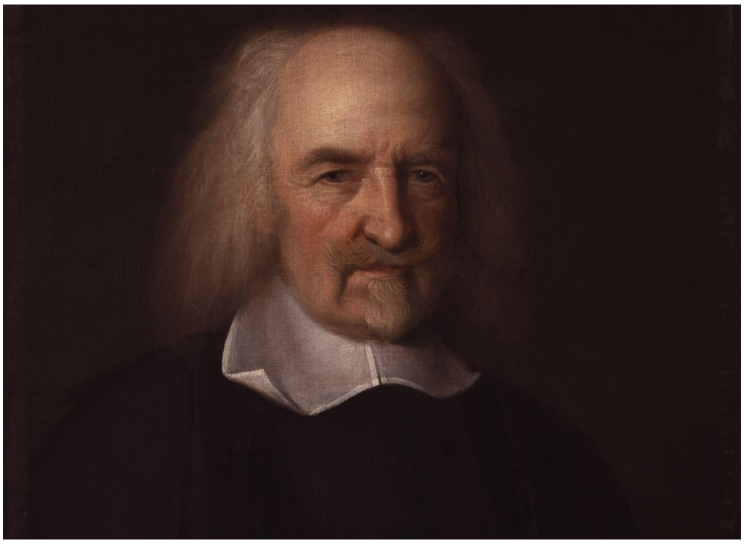


Figura 1.3: Retrato de Thomas Hobbes, pintado por John Michael Wright (1617–1694), entre os anos de 1669 e 1670 [7].

Thomas Hobbes diz que esse processo das pessoas traírem umas as outras gera uma desconfiança mútua e, por consequência, gera o colapso da sociedade, pois não há como as pessoas prosperarem dessa forma. Segundo ele, a única forma de se conter essa interação perniciosa das pessoas imorais que não cumprem os tratos, seria através da tirania, em que as pessoas que não cumprirem os tratos perderiam a vida. Hobbes leva em consideração as expectativas, os desejos e a forma com que as pessoas agem umas com as outras para desenhar sua teoria política, generalizando que as pessoas agem com a intenção de um fim lucrativo, sem se importar com as consequências que isso irá gerar aos seus companheiros [8].

1.4 Consolidação da teoria

A partir dos exemplos históricos apresentados até aqui, chegamos ao chamado Dilema Social, que trata dos principais problemas que surgem das escolhas dos indivíduos. O dilema social é uma das bases da teoria dos jogos que iremos discutir mais a frente, sendo uma espécie de armadilha que faz com que os indivíduos sejam prejudicados coletivamente a partir de escolhas que visam benefício individual.

Em 1830 surgiram os primeiros pensamentos voltados a criar o que seria a Teoria dos Jogos em si, sendo um dos pioneiros a tratar desse assunto o matemático e economista francês Antoine Augustin Cournot (1801 - 1877) (Figura 1.4). Como economista, Cournot buscava uma análise do mercado e de suas competições, e com esse intuito criou um método de análise conhecido como modelo de Cournot [9], que destacava o problema do duopólio e do oligopólio, algo que hoje em dia é muito usado em análises de mercado.

Figura 1.4: Retrato de Augustin Cournot [10].

Posteriormente, em 1913, o matemático e filósofo Ernst Zermelo (1871 - 1953) (Figura 1.5) desenvolveu um estudo sobre o jogo de xadrez. O Teorema de Zermelo, [11] criado por ele, se baseava em dois jogadores que faziam movimentos alternadamente, em que um dos dois jogadores deveria ter uma estratégia de vitória. Ele assegurava a vitória ou ao menos um empate ao jogador que tomasse a estratégia de vitória primeiro.

Figura 1.5: Retrato de Ernst Zermelo [12].

Finalmente, em 1928, o matemático John Von Neumann (1903 - 1957) (Figura 1.6) publicou um artigo muito importante tratando da Teoria dos Jogos. Neste artigo ele afirma que todo jogo finito de Soma-zero [1] com dois participantes possui uma solução em estratégias mistas, porém para demonstração ele usou de topologia e análise funcional, algo que gerou uma difícil compreensão de suas ideias. Em 1937 ele apresentou uma nova

[1]Jogos finitos de Soma-Zero são definidos como jogos com um número finito de movimentos, cujo *payoff* final dos jogadores é equivalente a zero.

demonstração de sua teoria utilizando o teorema do ponto fixo de Brouwer [13], desta vez deixando mais clara sua análise. John von Neumann era um estudioso de muitas áreas da ciência e tinha bastante interesse em estudos relacionados a economia, por isso em 1944 se juntou ao economista Oskar Morgenstern (1902 - 1977) (Figura 1.7) e publicou o livro *"The Theory of Games and Economic Behaviour"* [14], difundindo com isso o estudo da Teoria dos Jogos na matemática aplicada e economia, além de abrir a possibilidade de desenvolver esta teoria em diversas outras áreas.

Figura 1.6: Fotografia de John von Neumann [15].

Figura 1.7: Fotografia de Oskar Morgenstern [16].

No livro, von Neumann e Morgenstern exercem uma grande contribuição para a formalização do conceito de jogo, algo que já era presente na sociedade e debatido, porém ainda não possuía uma formalização em sua definição. Eles definiram primeiramente uma base axiomática para a teoria da utilidade, a qual define a recompensa que os jogadores podem receber ao participar de um jogo. Além disso, eles definiram os jogos de soma-zero, sendo estes caracterizados por ter dois jogadores, em que um deles ganha se e somente se o outro perde. Introduziram também uma versão de jogo chamada de jogos cooperativos, em que por meio da colaboração entre os jogadores ambos poderiam sair com recompensas [14].

Os estudos relacionados a Teoria dos Jogos continuaram se desenvolvendo até 1950, quando John Forbes Nash Jr. introduziu o conceito de pontos de equilíbrio à Teoria dos Jogos, algo que após um tempo foi definido como Equilíbrio de Nash. Posteriormente, em 1994, Nash junto de John Charles Harsanyi (1920 - 2000) e Reinhard Selten (1930 - 2016), receberam o prêmio Nobel de Economia pela generalização do Equilíbrio de Nash ao longo do tempo, aplicando este conceito a sistemas dinâmicos e descrevendo seu comportamento.

A Teoria dos Jogos continua em desenvolvimento até os dias atuais, estendendo-se a diversas áreas do conhecimento como Biologia, Economia, Política e Estatística. Esta teoria nos possibilita a resolução de vários problemas, assim como também possibilita o surgimento de outros problemas a serem estudados.

Capítulo 2

Teoria dos Jogos

2.1 Como funciona um jogo

Para que exista um jogo, primeiramente, deve existir um conflito, alguém ou algo que construa a relação entre os participantes. Cada participante de um jogo é chamado de jogador, sendo dessa forma um aglomerado de participantes chamado de grupo de jogadores. Os jogadores são os encarregados pela escolha das estratégias do jogo e estão distribuídos entre beneficiados e prejudicados pelo resultado do jogo.

Quando tratamos de um jogo, há sempre um objetivo por parte do jogador para que se incline a participar, algo que ele almeja alcançar. Este objetivo é denominado de Recompensa (*payoff*), que seria a remuneração almejada pelos jogadores ao participar de um jogo.

O jogo em si ocorre em um meio onde se encontram os jogadores e onde ocorre as relações entre eles, sendo estas de diferentes tipos. A primeira forma de relação entre os jogadores é a interação, sendo descrita como toda ação que determinado jogador faz que afete de alguma forma os outros jogadores. Dentro do jogo, os jogadores sempre visam adquirir a melhor recompensa possível, para isso eles devem desenvolver a melhor estratégia possível e isso envolve considerar todos os fatores do jogo e desenvolver diversos raciocínios. Por meio da estratégia do jogo, os jogadores direcionam suas ações para alcançarem as recompensas, sempre partindo da premissa de que se deseja obter a melhor recompensa possível [17].

2.2 Jogadores

Em todo jogo desenvolvido se faz necessário a presença de participantes que ditam o desenrolar do jogo, realizam as ações e recebem as recompensas. Estes participantes, como já citamos anteriormente, são chamados de jogadores e são os principais responsáveis por fazer com que o jogo ocorra.

A palavra "jogador" geralmente é associada a algum indivíduo que esteja disputando algo com outro com o intuito de ganhar alguma coisa, porém dentro da teoria dos jogos essa concepção de jogador é muito mais abrangente e pode ser configurada de diversas formas dependendo da dinâmica do jogo. Por exemplo, quando aplicamos a teoria dos jogos na economia os jogadores podem ser associados a empresários diferentes ou até mesmo a empresas que se enquadram no contexto do jogo analisado. Na política os jogadores podem ser grupos governamentais, cidades ou países com interesses políticos diferentes e na biologia os jogadores podem ser associados a indivíduos ou até mesmo a populações inteiras de indivíduos de espécies diferentes.

Dentro da teoria dos jogos o conceito de jogadores pode se adaptar de acordo com o jogo analisado, podendo representar desde um único indivíduo como também um coletivo de indivíduos, desde que mantenha seu principal fundamento. O jogador é o responsável por elaborar estratégias que determinam o destino do jogo, sendo isso uma parte essencial para seu desenvolvimento [17].

2.3 Estratégias

Dentro do jogo, os jogadores realizam ações responsáveis pelo desenvolvimento do jogo, ou seja, de acordo com a ação realizada o jogo pode seguir caminhos e resultados diferentes. As ações realizadas pelos jogadores são chamadas de estratégias e estão diretamente associadas aos interesses do jogador durante o jogo.

O objetivo dos jogadores dentro do jogo é ter o melhor resultado possível ao final, para isso eles desenvolvem diversas estratégias diferentes que ditam suas ações e escolhas, podendo dessa forma as estratégias de um dos jogadores entrarem em conflito com as estratégias de outro jogador oponente, em que aquele com a melhor estratégia se sobressai. Temos dois perfis de estratégias diferentes, denominados de estratégias puras e estratégias mistas. Um jogo de estratégias puras é caracterizado por todas as estratégias terem a mesma probabilidade de ocorrerem no jogo. Um jogo de estratégias mistas é caracterizado por termos probabilidades diferentes associadas às estratégias.

Esses conceitos ficam mais evidentes quando observamos um jogo de RPG[1] de mesa. Neste jogo utilizamos dados de 20 lados para determinar o êxito das ações dos personagens. Jogando com um dado comum, podemos notar que a probabilidade de se obter cada valor no dado é a mesma de $\frac{1}{20}$ ou 5% para todos os jogadores, caracterizando assim um jogo de estratégias puras. Por outro lado, se um dos jogadores deste jogo de RPG estiver utilizando um dado viciado, cujos valores $18, 19$ e 20 têm maiores chances de aparecer, por exemplo, a probabilidade de se obter esses últimos valores ou os outros dezessete valores possíveis no dado será diferente, caracterizando com isso um jogo de estratégias mistas.

Dentro de um jogo podemos diferenciar ainda dois tipos de estratégias, entre elas temos as dominantes, que são aquelas relacionadas a jogadores que, por meio de suas ações, se sobressaem perante os outros e as dominadas, que são relacionadas aos jogadores que não têm uma resposta efetiva à estratégia dominante dos oponentes [17].

2.4 *Payoff*

O principal fator que leva indivíduos a se tornarem jogadores, competindo ou cooperando dentro de um jogo é aquilo que vão alcançar no final. Os jogos sempre levam a um resultado para os jogadores denominado como recompensa ou *payoff*, podendo ser bom ou ruim dependendo da estratégia adotada pelo jogador.

Dependendo do jogo analisado a ideia de *payoff* pode ser amplamente adaptada, por exemplo, como descrito por Yuval Noah Harari em seu best-seller Sapiens [1], quando tratamos em Biologia de uma briga de espécies, aquela que se adapta melhor ao ambiente acaba se sobressaindo perante outras espécies e passando seu genoma adaptado para as

[1] Role-Playing Game.

próximas gerações. Nesse sistema as diferentes espécies são os jogadores e as formas como cada espécie consegue se adaptar ao ambiente são as estratégias que elas escolhem, a fim de chegar ao *payoff* do jogo da evolução, sendo este o domínio e preservação de uma espécie perante as outras que coexistiram.

Não existe um argumento exato que define como os *payoffs* são determinados, eles são estabelecidos de acordo com cada jogo e cada situação, adequando-se às mais variadas formas, de acordo com as necessidades.

2.5 Notações utilizadas

Os principais conceitos para a formulação de um jogo são os jogadores, as estratégias escolhidas e os *payoffs* adquiridos. Para uma formalização matemática destes conceitos utilizamos as seguintes notações:

- **Jogadores:** um grupo de jogadores, quando não especificado, pode ser definido como um conjunto de n jogadores dado por $J = \{1, 2, 3, ..., n\}$, para $n \geq 2$, , pois um jogo necessariamente deve possuir dois ou mais jogadores. Note que cada número esta associado a um jogador.

- **Estratégias:** sendo $i \in J$, definimos com s_i uma estratégia atribuída ao jogador i.

- **Perfil de estratégia pura:** considerando um jogo com n jogadores, o perfil de estratégia pura será um vetor $s = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_n\}$, que representa as estratégias relacionadas a cada jogador.

- **Perfil de estratégia mista:** considerando um jogo com n jogadores, o perfil de estratégia mista será um vetor de probabilidades $p_k = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$, sendo $p \geq 0$, $k = 1, 2, 3, ..., n$ e $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$

- **Conjunto de estratégias:** sendo $i \in J$, definimos como S_i um conjunto de estratégias atribuídas ao jogador i.

- **Conjunto de estratégias total:** considerando um jogo com n jogadores, cada um deles com um conjunto de estratégias S_i, definimos o conjunto com todas as estratégias puras do jogo como o produto cartesiano $S = \{S_1 \times S_2 \times S_3 \times ... \times S_n\}$.

- ***Payoff*:** considerando um jogo com n jogadores, o resultado de um jogo é dado pela chamada função utilidade U_i, que relaciona o conjunto de estratégias S_i escolhidas pelo jogador i a um número real P que representa o *payoff* do jogador, sendo isto representado como $U_i(S_i) = P$, sendo $P \in \mathbb{R}$. Quando o *payoff* depende da estratégia de mais de um jogador, a função U passa a depender do conjunto de estratégias de todos os jogadores que interferem e, é definida como $U = U(S_i, S_j)$, sendo $i, j \in J$ [4].

Para esclarecer estes conceitos, observe o seguinte exemplo:
Exemplo 2.1 Considere dois jogadores, Maurício (Jogador 1) e Alexandre (Jogador 2), cada um deles com duas estratégias possíveis. As estratégias possíveis de Maurício são A e B, enquanto as estratégias possíveis de Alexandre são C e D. Dessa forma, de acordo com as notações estabelecidas, pode-se definir que o conjunto de estratégias de Maurício será $S_1 = \{A, B\}$ e o conjunto de estratégias de Alexandre será $S_2 = \{C, D\}$. Com isso, tem-se os seguintes *payoffs* possíveis neste jogo: $U(A, C), U(A, D), U(B, C), U(B, D)$.

2.6 Representação de um jogo

Tratando os jogos referentes à Teoria dos Jogos como objeto de estudo, existe a necessidade de visualizá-los de modo que favoreça a análise e a compreensão do sistema. Com esse propósito, existem duas formas de representação de um jogo, sendo elas a Forma Normal e a Forma Extensiva. Essas formas de visualização são utilizadas para representar diferentes tipos de jogos, em que cada um deles depende dos jogadores, estratégias e *payoffs* [17, 18].

2.6.1 Forma Normal

A Forma Normal, também chamada de Forma Estratégica, é a representação mais simples de um jogo e é caracterizada por meio de uma tabela que relaciona as estratégias de cada jogador participante. Por ser um meio simples, direto e que armazena muita informação é a forma mais comum de encontrarmos representações de jogos.

Na tabela associada a esta forma de jogo, um jogador é representado pelas linhas e o outro é representado pelas colunas, assim cada estratégia de cada jogador será representa ou por uma linha ou por uma coluna respectivamente. Por exemplo, em um jogo com dois jogadores denominados de Jogador A e Jogador B, cada jogador pode escolher entre as estratégias X e Y, dessa forma este jogo pode ser representado pela Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Tabela com a relação entre as estratégias escolhidas pelos jogadores e seus respectivos *payoffs*.

Jogador A/Jogador B	X	Y
X	(1,2)	(3,4)
Y	(5,6)	(7,8)

Dessa forma os *payoffs* desse respectivo jogo são dados a partir das intersecções das linhas com as colunas da tabela, atribuindo valores diferentes de acordo com a combinação das estratégias de cada jogador. No caso em que o Jogador A escolhe a estratégia X e o Jogador B escolhe a estratégia X, temos o *payoff* de $(1, 2)$, que significa que o Jogador A recebeu 1 e o Jogador B recebeu 2. De forma análoga podemos analisar todos os *payoffs* possíveis de acordo com a escolha de estratégia de cada jogador.

Exemplo 2.2 Jhonatan e Vítor estão em um jogo em que cada um escreve um valor em um papel e depois fazem a soma entre os valores que cada um escolheu. Jhonatan pode escolher um valor entre os números 1 e 2 e Vítor pode escolher um valor entre os números $1, 2$ e 3. Ao final, caso a soma resulte em um valor par Jhonatan vence e, caso a soma resulte em ímpar, quem vence é Vítor. Considerando que o *payoff* do jogador vencedor é 5 e o *payoff* do jogador perdedor é 0, pode-se representar este jogo pela seguinte tabela:

Tabela 2.2: Tabela com a relação entre as estratégias escolhidas pelos jogadores e seus respectivos *payoffs* de acordo com o **Exemplo 2.2**.

Vítor/Jhonatan	1	2
1	(0,5)	(5,0)
2	(5,0)	(0,5)
3	(0,5)	(5,0)

Analisando a Tabela 2.2, podemos notar que para Vítor não faz diferença escolher o número, pois independente de sua escolha a sua chance de vitória será sempre de 50%. Porém, para Jhonatan vale mais a pena optar pela escolha do número 1, pois pela Tabela 2.2 fica claro que esta escolha possui maiores chances de gerar a vitória do jogo. Note que, a partir deste exemplo, podemos notar a grande importância da tabela para a organização e a análise dos dados, sendo este método importante para analisarmos o Dilema do prisioneiro posteriormente.

2.6.2 Forma Extensiva

A Forma Extensiva traz uma representação mais dinâmica de um jogo por meio de uma espécie de "árvore", relacionando as estratégias escolhidas pelos jogadores aos *payoffs* gerados por elas. Um jogo nesta forma se inicia a partir de uma raiz e, após cada escolha de estratégia dos jogadores, essa raiz vai se dividindo em diferentes ramos, em que cada ramo representa uma estratégia diferente. Após cada mudança de estratégia, mais ramos surgem até que ao final desses ramos temos o *payoff* referente à escolha de estratégias dos jogadores.

Para exemplificar vamos usar o **Exemplo 2.2** em sua forma extensiva, dado pela Figura 2.1.

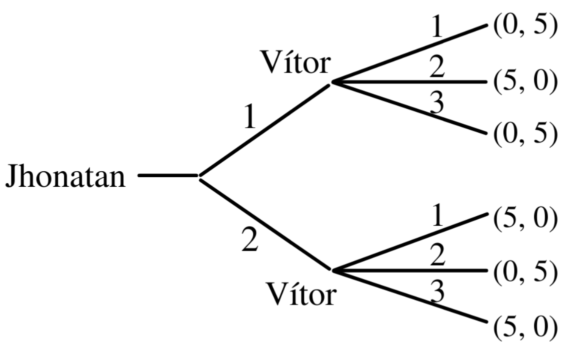


Figura 2.1: Representação da forma extensiva do jogo apresentado no Exemplo 2.2.

2.6.3 Jogos Simétricos e Assimétricos

Jogos Simétricos são aqueles em que os *payoffs* dos jogadores dependem exclusivamente das estratégias escolhidas, independente dos jogadores que as escolheram. Caso os jogadores forem trocados e os *payoffs* não se alterarem, ou seja, quando há intercâmbio entre as estratégias, o jogo é considerado simétrico. Geralmente este tipo de jogo é associado às representações padronizadas do Jogo da Galinha e do famoso Dilema do Prisioneiro, ao qual vamos nos aprofundar posteriormente neste trabalho.

Jogos Assimétricos são aqueles em que existem diferentes tipos de estratégia para cada jogador participante. Neste tipo de jogo as estratégias não são intercambiáveis e, como exemplo, temos o Jogo ultimato [19] ao qual cada tipo de jogador possui tipos específicos de estratégias.

2.6.4 Jogos de Soma zero e Soma diferente de zero

Jogos de Soma-Zero são caracterizados pelo *payoff* final dos jogadores ser igual a zero. Neste tipo de jogo, para cada combinação de estratégias que os jogadores escolherem, a soma dos *payoffs* de cada jogador ao final do jogo sempre será zero, ou seja, um jogador só lucra a partir do prejuízo de outro jogador. Este tipo de jogo pode ser exemplificado no famoso jogo de Poker [20], pois o vencedor recebe exatamente a soma do prejuízo dos jogadores perdedores. Outro exemplo que pode ser associado a este tipo de jogo são os clássicos jogos de tabuleiro xadrez e damas.

Jogos de soma diferente de zero são aqueles em que não necessariamente o ganho dos jogadores é igual à soma do prejuízo dos perdedores. Neste tipo de jogo, alguns resultados tem *payoffs* maiores ou menores que zero. A grande maioria dos jogos apresentados neste trabalho são de soma diferente de zero, como os *"Public Good Games"* (PGG) e o já mencionado Dilema do Prisioneiro.

2.6.5 Jogos Simultâneos e Sequenciais

Jogos simultâneos ou estáticos são aqueles em que os jogadores, a partir do momento que tomam uma decisão, ignoram as decisões do restante dos jogadores. Neste tipo de jogo os jogadores podem tomar suas respectivas decisões ao mesmo tempo ou em tempos diferentes, porém, o que realmente caracteriza este tipo de jogo é que os jogadores não sabem das estratégias tomadas pelos seus adversários no momento de suas próprias decisões.

Jogos sequenciais ou dinâmicos são aqueles em que os jogadores têm conhecimento das decisões de seus antecessores, ditando a partir disso suas próprias escolhas. Não é necessário um grande conhecimento, por exemplo se um jogador a partir das escolhas de seus antecessores souber que não pode realizar uma ação específica, já pode ser considerado um tipo de jogo sequencial.

Dentro dos jogos sequenciais existem subconjuntos de jogos, sendo caracterizados de acordo com o conhecimento dos jogadores a respeito das decisões dos outros jogadores. Jogos dinâmicos em que todos os jogadores conhecem os movimentos dos outros jogadores são denominados jogos de informação perfeita. Por outro lado, quando os jogadores não sabem exatamente os movimentos e decisões dos outros jogadores, mas sim uma probabilidade sobre essas preferências, os jogos são denominados jogos de informação imperfeita. Além disso, existem também jogos denominados jogos de informação completa, nestes os jogadores têm informações sobre as estratégias e *payoffs* dos outros jogadores, porém não conhecem seus movimentos.

A diferença entre jogos simultâneos e sequenciais pode ser visualizada em sua representação nas diferentes formas discutidas anteriormente. A forma normal é usada para representar jogos simultâneos, e a forma extensiva é usada para representar jogos sequenciais.

2.6.6 Jogos Infinitamente longos

Geralmente, jogos estudados pela teoria dos jogos tem números finitos de movimentos, com a finalidade de favorecer a análise, porém quando se lida com matemática não existem limites. Existe uma teoria matemática, criada a partir dos estudos de Ernst Zermelo, denominada de teoria dos conjuntos, que se dedica a estudar conjuntos de elementos que podem ser reunidos de acordo com certos requisitos.

Dentro dos estudos dessa teoria estão os denominados jogos infinitamente longos, que tratam de jogos cujas ações realizadas pelos jogadores podem ter um número infinito de movimentos. Estes jogos são particularmente interessantes para análise de estratégias dos jogadores a partir do axioma da escolha de Zermelo [11], obtendo com isso consequências importantes para a teoria descritiva dos conjuntos.

2.7 Dilema Social

Em um mundo onde espécies são moldadas pela competição e, apenas aquelas que melhor conseguem se adaptar prevalecem, como a cooperação pode surgir entre esses indivíduos e se manter perante essa competição? De acordo com a revista *Science*, esta é uma das 125 grandes incógnitas da ciência para os cientistas do séc XXI que até hoje não temos uma resposta [21], pois mesmo que a cooperação entre indivíduos dentro de um mesmo sistema seja algo bom para o coletivo, em um sistema de competição a traição acaba sendo muito mais benéfica.

Como vimos anteriormente, o Dilema Social é uma das bases da Teoria dos Jogos e já era discutido mesmo antes de sua formulação formal, pois se baseia diretamente no comportamento humano. Como descrito por Thomas Hobbes, em sua obra clássica "Leviatã" [8] e Harari em seu *best-seller* "Sapiens" [1], o ser humano durante toda a história sempre buscou recompensas individuais acima das coletivas na grande maioria das situações. Dilema Social é uma espécie de armadilha coletiva, em que todos os participantes são incentivados individualmente a agir ignorando as consequências sociais de suas ações. Desse modo, os indivíduos que decidem fazer uma escolha a fim de um possível ganho pessoal, acabam de alguma forma saindo prejudicados e podem acabar com resultados até piores do que aqueles que eles tinham antes da escolha [22].

O jogo de Dilema Social pode ser dividido por dois fatores importantes:

- A traição entre os jogadores gera um *payoff* maior para o jogador traidor;
- Quando todos os indivíduos trapaceiam, o *payoff* para todos os jogadores é menor do que caso cooperassem;

Analisando um jogo de Dilema Social, o coletivo de jogadores participantes prospera e recebe boas recompensas quando existe cooperação entre eles, porém quando um dos jogadores decide não cooperar e trair os outros jogadores, ele acaba se favorecendo da coletividade dos demais sem necessariamente arcar com os custos de ajudar os outros jogadores.

O maior problema gerado por este Dilema surge quando todos os indivíduos percebem que trair o comportamento cooperativo do grupo gera uma recompensa maior e, a partir disso, todos os jogadores passam a trair os outros, gerando com isso um fenômeno chamado "Tragédia dos comuns". Quando todos os jogadores passam a ser traidores, deixa de existir a cooperação, gerando o colapso do grupo e com isso as piores recompensas para todos os jogadores remanescentes.

Podemos notar de forma clara vários exemplos da Tragédia dos comuns, um deles é nas discussões políticas atuais entre os países a respeito da implementação de ideias para o uso sustentável dos recursos naturais. Neste exemplo, o país que aceitar a implementação destas ideias e assim cooperar com os demais países, estará se dispondo a diminuir a emissão de poluentes vindos de indústrias a fim de um bem coletivo. Um dos impactos negativos disso será na diminuição da atividade econômica do país, pois terá que arcar com os gastos que essa diminuição de emissão gera. Por outro lado, países que forem oportunistas e não implementarem ideias de sustentabilidade, irão usufruir do mesmo benefício dos demais países que adotaram a política, porém suas atividades econômicas não serão prejudicadas e, inclusive, podem ter um aumento devido a queda na atividade dos outros países. Depois de um tempo, outros países também irão perceber que não respeitar as políticas sustentáveis gera um lucro individual maior e também irão trair o coletivo, aumentando suas atividades econômicas. Em algum momento, todos os países terão abandonado totalmente as ideias sustentáveis, gerando com isso o colapso do grupo e problemas ambientais muito mais agravantes do que os anteriores.

Quando um dos jogadores decide trair os demais e não cooperar o ganho individual é maior, porém o ganho coletivo do grupo diminui e isso, posteriormente, acaba gerando o colapso do jogo. Este Dilema é amplamente trabalhado em diversos tipos de exemplos, dos mais cotidianos como escolher entre jogar uma embalagem de salgadinho no lixo ou no chão, até exemplos mais complexos, como uma potência mundial escolher entre atacar ou não uma nação vizinha.

A literatura utiliza-se de diversas metáforas para descrever dilemas sociais, dentre elas podemos apontar as duas principais sendo a análise de jogos com múltiplos jogadores, como a Tragédia dos comuns, e jogos que tratam do dilema entre dois jogadores, como o Dilema do Prisioneiro.

2.8 Dilema do Prisioneiro

O jogo do Dilema do Prisioneiro é uma implementação teórica e prática de como podemos aplicar a Teoria dos Jogos em diferentes tipos de assunto, principalmente em coisas relacionadas a política, guerras, economia e conflitos econômicos. A formulação desse jogo contou com a colaboração de três estudiosos, os matemáticos americanos Merril M. Flood (1908 – 1991) e Melvin Dresher (1911 – 1992) e também o matemático canadense Albert Tucker (1905 – 1995).

Os matemáticos Merril e Dresher trabalhavam em uma empresa estadunidense chamada Rand Corporation, uma empresa sem fins lucrativos responsável por fornecer informações estratégicas ao governo dos Estados Unidos, desenvolvendo análises e pesquisas principalmente para o Departamento de Defesa. Por já estarem inseridos em pesquisadas relacionadas à própria Teoria dos Jogos para fins econômicos e principalmente militares, o refinamento de alguns conceitos elaborados por eles foi extremamente importante para a evolução deste estudo e favoreceu a análise de diversos outros estudos diferentes a partir desta teoria.

O modelo do Dilema do Prisioneiro se baseia na aplicação da Teoria dos Jogos e faz referência aos chamados jogos de soma não nula. Existem diversos tipos do jogo do Dilema, porém a formulação clássica e mais simples foi criada por Albert Tucker com o tema da pena de prisão, algo que acabou gerando o nome Dilema do Prisioneiro [2].

A Teoria dos Jogos é uma análise estratégica de como os jogadores envolvidos em um determinado jogo avaliam uns aos outros, com o intuito de atingir um determinado resultado. Cada um dos jogadores, de forma independente, quer que seu resultado aumente ao máximo sem se importar com o resultado dos outros jogadores. Esse comportamento favorece o surgimento de Jogos de soma não nula ou também chamados de Jogos diferentes de zero, em que neste tipo de jogo o ganho de um dos jogadores não necessariamente corresponde à perda dos outros. Esta característica é determinante no modelo clássico do Dilema do prisioneiro, que pode ser descrito pelo seguinte exemplo:

1. Dois indivíduos são presos em flagrante por um determinado crime, porém estes mesmos indivíduos também são suspeitos de ter cometido um outro crime.

2. Ainda faltam evidências para provar a culpa por esse segundo crime, porém a polícia pode condená-los a até 2 anos pelo crime em flagrante.

3. Ambos os suspeitos estão presos em celas separadas e serão interrogados separadamente, e durante os interrogatórios, a polícia propõe a cada um dos suspeitos as seguintes opções:

    - Se o suspeito interrogado confessar e seu parceiro em seu respectivo interrogatório não confessar, então o confessor estará livre e seu parceiro cumprirá 10 anos de prisão.
    - Se ambos confessarem, os dois suspeitos cumprirão 5 anos de prisão cada um.
    - Se nenhum dos suspeitos confessar, ambos cumprirão 2 anos de prisão pelo crime em flagrante.

De acordo com a resposta dos indivíduos no interrogatório, podemos associar uma Matriz de Pagamento, sendo esta responsável por atribuir o *payoff* de cada jogador de acordo com suas respostas. Para determinar o *payoff* dos jogadores são analisadas todas as possibilidades possíveis e distribuídas na forma das seguintes funções:

Tabela 2.3: Tabela com a relação entre a pontuação e o *payoff* dos jogadores.

Pontuação	*payoff*
0 pontos	10 anos de prisão
2 pontos	5 anos de prisão
3 pontos	2 anos de prisão
4 pontos	Liberdade

- Caso o suspeito interrogado confesse e seu parceiro não confesse, o confessor recebe 4 pontos e seu parceiro não pontua.

- Caso o suspeito interrogado confesse e seu parceiro também confesse, ambos os confessores recebem 2 pontos.

- Caso o suspeito interrogado não confesse e seu parceiro confesse, o interrogado não pontua e seu parceiro recebe 4 pontos.

- Caso o suspeito interrogado não confesse e seu parceiro também não confesse, ambos os suspeitos recebem 3 pontos.

Dentro deste tipo de jogo, a estratégia de ambos os jogadores é sempre buscar o melhor resultado possível, ou seja, todas as vezes que existirem opções, os jogadores analisam e escolhem aquela opção que ao final do jogo irá proporcionar o maior *payoff*. A partir disso podemos relacionar aos *payoffs* deste jogo uma Matriz de pagamento para os suspeitos interrogados, chamados neste caso de *Jogador* 1 e *Jogador* 2. Os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} da matriz indicam os *payoffs* dos jogadores, de acordo com a escolha de estratégia de cada um deles.

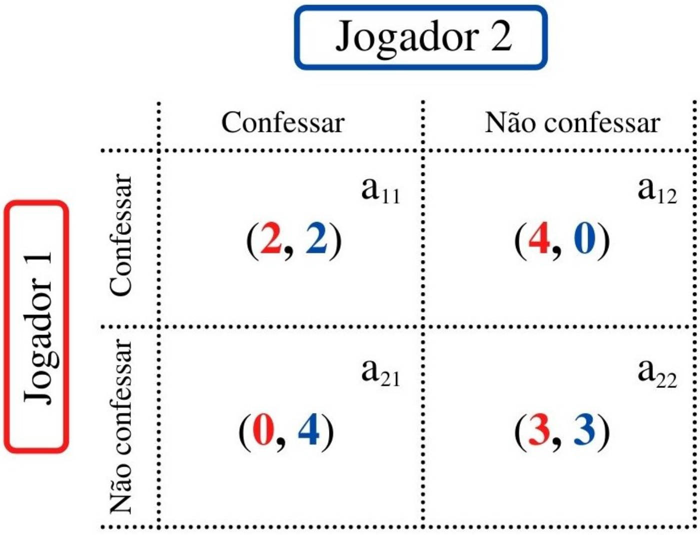


Figura 2.2: Matriz de Pagamento do Jogo do Dilema do Prisioneiro.

Analisando primeiramente o *Jogador* 1, no caso 1, em que o *Jogador* 2 confessa o crime tem-se duas opções para o *Jogador* 1: caso ele confesse recebe 2 pontos e caso não confesse não pontua. Como os jogadores sempre buscam a maior pontuação possível, a escolha do *Jogador* 1 nesta primeira análise é de confessar, como representado na Figura 2.3.

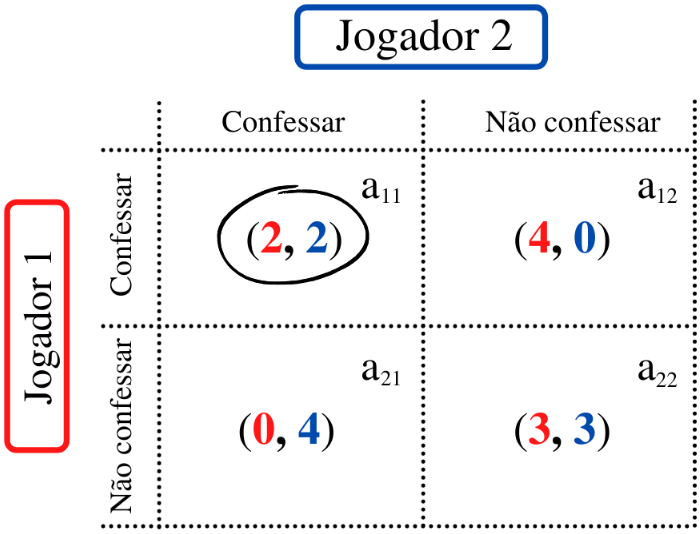


Figura 2.3: Análise do caso 1 do Jogo do Dilema do Prisioneiro para o *Jogador* 1.

Agora analisando o caso 2, em que o *Jogador* 2 não confessa o crime, tem-se também duas opções para o *jogador* 1: caso ele confesse recebe 4 pontos e caso não confesse recebe 3 pontos. Da mesma forma que na análise anterior, o *Jogador* 1 irá optar pela estratégia que gera a ele o maior *payoff* possível, portanto, também irá optar por confessar o crime neste caso, como retratado na Figura 2.4.

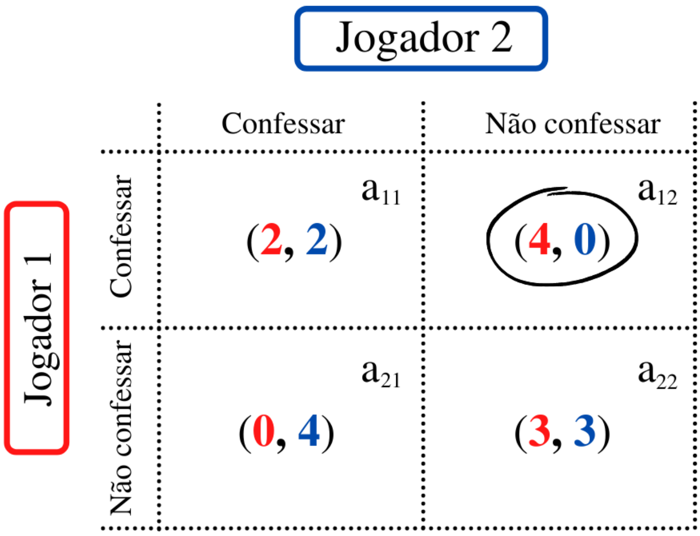


Figura 2.4: Análise do caso 2 do Jogo do Dilema do Prisioneiro para o *Jogador* 1.

Em ambas as análises de respostas do *Jogador* 1, nota-se que a melhor escolha possível para ele é a de confessar o crime, pois pensando de forma individual esta gera o melhor *payoff* em ambas as possibilidades de resposta do *Jogador* 2. Dessa forma, a solução do jogo para o *Jogador* 1 é dada pela Figura 2.5.

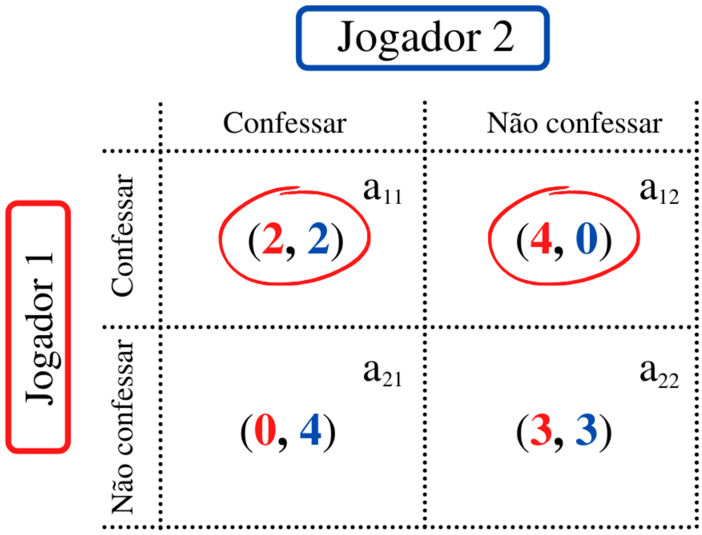


Figura 2.5: Análise do resultado do Jogo do Dilema do Prisioneiro para o *Jogador* 1.

Em jogos baseados na Teoria dos Jogos sempre são analisadas todas as possibilidades, e isso se aplica da mesma forma no jogo do Dilema do Prisioneiro. Analisando da mesma forma agora para o *Jogador* 2, no caso 1, em que o *Jogador* 1 confessa o crime tem-se duas opções para o *Jogador* 2: caso ele confesse recebe 2 pontos e caso não confesse, não pontua. Como os jogadores sempre buscam a maior pontuação possível, a escolha do *Jogador* 2 nesta primeira análise é de confessar, como representado na Figura 2.6.

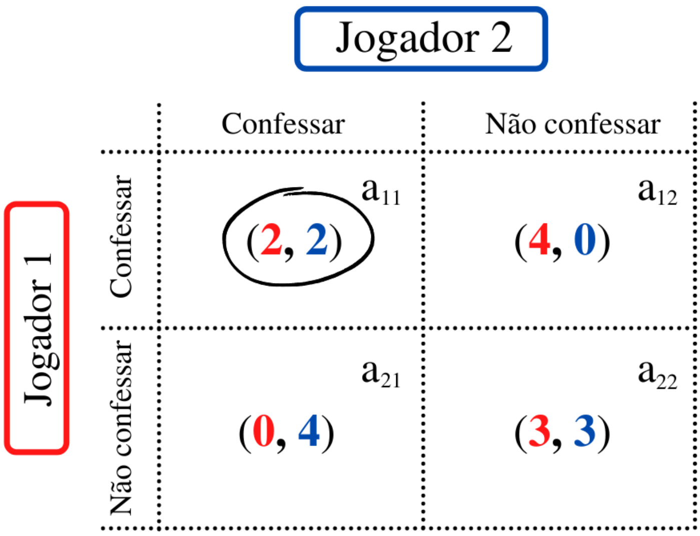


Figura 2.6: Análise do caso 1 do Jogo do Dilema do Prisioneiro para o *Jogador* 2.

Agora analisando o caso 2, em que o *Jogador* 1 não confessa o crime, tem-se também duas opções para o *jogador* 2: caso ele confesse recebe 4 pontos e caso não confesse recebe 3 pontos. Da mesma forma que na análise anterior, o *Jogador* 2 irá optar pela estratégia que gera a ele o maior *payoff* possível, portanto, também irá optar por confessar o crime neste caso, como retratado na Figura 2.7.

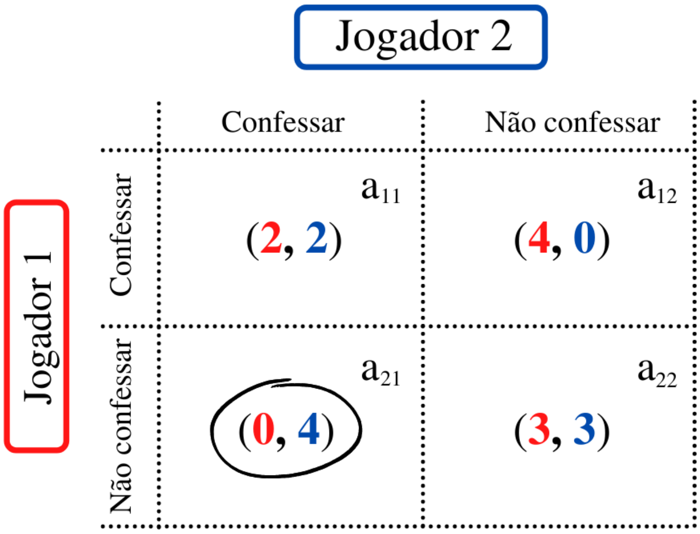


Figura 2.7: Análise do caso 2 do Jogo do Dilema do Prisioneiro para o *Jogador* 2.

Assim, da mesma forma que para o *Jogador* 1, nota-se que a melhor escolha possível para o *Jogador* 2 é a de confessar o crime, pois esta gera o maior *payoff* individual possível. A solução do jogo para o *jogador* 2 é dada pela Figura 2.8.

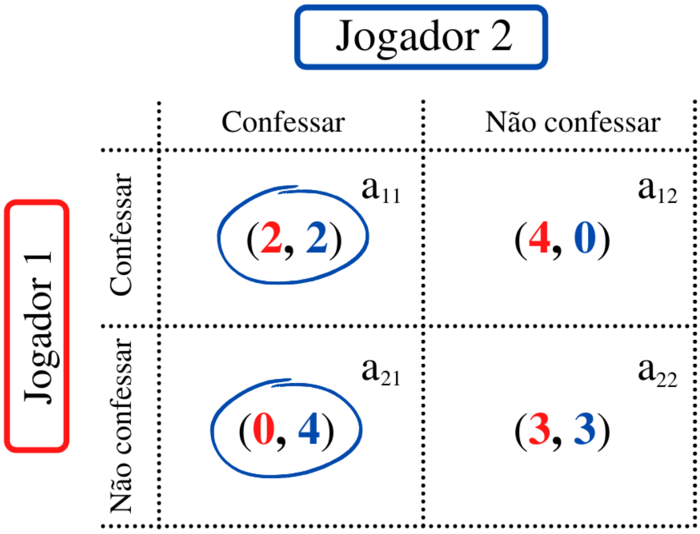


Figura 2.8: Análise do resultado do Jogo do Dilema do Prisioneiro para o *Jogador* 2.

Ambos os jogadores analisados, ao final do jogo chegam a conclusão de que, pensando de forma individual, é muito mais vantajoso confessar do que não confessar. Dessa forma o resultado do jogo pode ser descrito pela seguinte matriz de pagamento representada pela Figura 2.9.

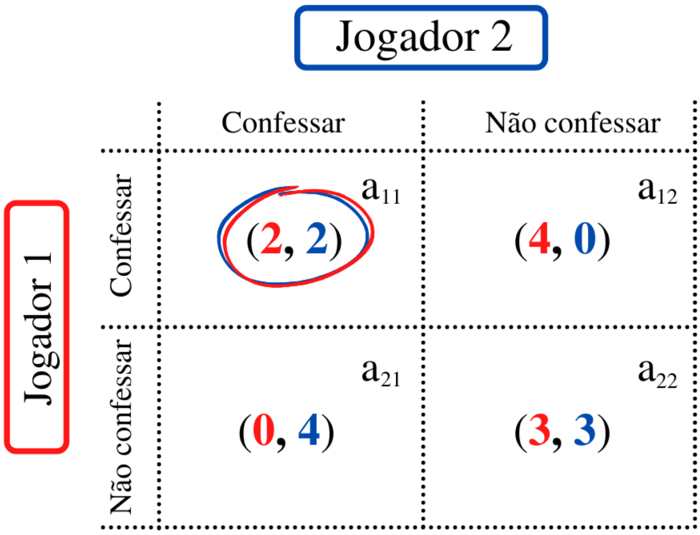


Figura 2.9: Análise de resultado do Jogo do Dilema do Prisioneiro.

O resultado obtido esta de acordo com a estratégia seguida pelos jogadores, de forma que estratégias que visam a maximização do ganho individual acima do coletivo acabam gerando resultados piores, pois eliminam qualquer tipo de acordo ou visão de benefício mútuo que possa existir no jogo. Para que um grupo atinja um melhor resultado de equilíbrio, existe uma exigência de que os indivíduos não busquem uma melhor pontuação individual, e sim uma melhor pontuação coletiva, ou seja, se houver uma cooperação entre os indivíduos o resultado final do jogo será melhor para todo o grupo. Este conceito de bem estar coletivo é descrito pelo chamado Equilíbrio de Nash.

2.9 Equilíbrio de Nash

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática, ou seja, busca sempre a maximização do resultado com ganhos e perdas. Porém, ao analisar jogos como o Dilema do Prisioneiro, percebe-se que, quando os jogadores cooperam entre eles, o ganho coletivo é muito maior e supera o individual e, com isso, o bem estar do grupo é garantido.

Existe uma corrente filosófica chamada Utilitarismo, fundada por Jeremy Bentham (1748 - 1832) e John Stuart Mill (1806 - 1873) (Figura 2.10), sendo uma teoria moral que defende o ponto de vista de que a cooperação entre os indivíduos em uma sociedade gera muito mais benefícios coletivos, superando assim os benefícios individuais. “Agir sempre de forma a produzir a maior quantidade de bem-estar” ou “Ações são boas quando tendem a promover a felicidade, e más, quando tendem a promover o oposto da felicidade” são frases ditas por Bentham e Mill em suas respectivas obras “Uma Introdução aos Princípios da Moral e da Legislação” (1789) [23] e “Utilitarismo” (1861) [24] que exemplificam bem a ideia dessa doutrina filosófica, sendo esta uma das chaves para a compreensão do que será proposto posteriormente por Nash.

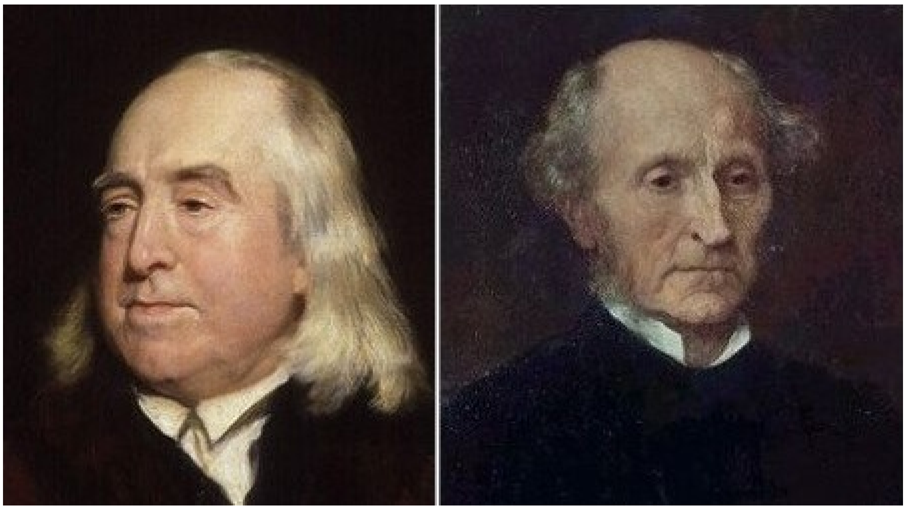


Figura 2.10: Retratos de Jeremy Bentham (à esquerda) e John Stuart Mill (à direita) [25].

O Utilitarismo também é conhecido como uma filosofia consequencialista, pois é a partir das consequências que as escolhas geram que é avaliado se elas foram boas ou ruins. Essa abordagem moral acaba dependendo muito das circunstâncias de cada situação, podendo a cooperação nem sempre levar a melhor opção dependendo do caso. Por exemplo, supondo um professor que esteja dando aula para uma turma de 20 alunos, que não estão com vontade de assistir a aula e querem ficar conversando sobre outros assuntos. Neste caso o professor tem duas opções, cooperar com a vontade dos alunos de ficar conversando e dar uma aula ruim ou exercer a função que se espera de um professor e dar uma boa aula, desagradando os alunos, mas lhes entregando aquilo que precisam, gerando portanto uma consequência melhor nesta segunda opção.

Neste exemplo, temos uma circunstância em que não seria adequado agradar ao grupo, por isso na Teoria dos Jogos devemos sempre analisar com cuidado o que o grupo deseja ganhar e sob quais circunstâncias o grupo quer a solução do jogo.

Quando tratamos de um sistema econômico, a solução de um jogo é, muitas vezes, associada ao chamado ponto de equilíbrio, que é quando o sistema se encontra estável. Este mesmo princípio pode ser encontrado em um sistema físico, em que um sistema está estável quando todas as forças internas ao sistema se equilibram e assim o deixam "em repouso", até que seja perturbado por uma força externa, como dito por Don Ross em seu estudo intitulado "Game Theory" [2]. Tanto na economia quanto na mecânica clássica, os conceitos de equilíbrio funcionam como ferramentas de análise e não previsões do que esperamos observar. É possível manter esse entendimento de equilíbrios no caso da Teoria dos Jogos.

No Dilema do Prisioneiro analisado anteriormente, o resultado da matriz de pagamento que representamos como $(2, 2)$, indicando deserção mútua, foi considerado a "solução" para o jogo. Quando tratamos de ponto de equilíbrio, o que chamamos de "solução" é analisado pelo denominado Equilíbrio de Nash.

John Forbes Nash Jr. (1928 – 2015) (Figura 2.11) foi um matemático estadunidense que lutava contra a esquizofrenia, porém sua força de vontade e amor pelos estudos foram maiores que qualquer empecilho que sua doença pudesse trazer. Ele trabalhou e contribuiu em diversos estudos a respeito de geometria diferencial, equações diferenciais parciais e, principalmente, Teoria dos Jogos.

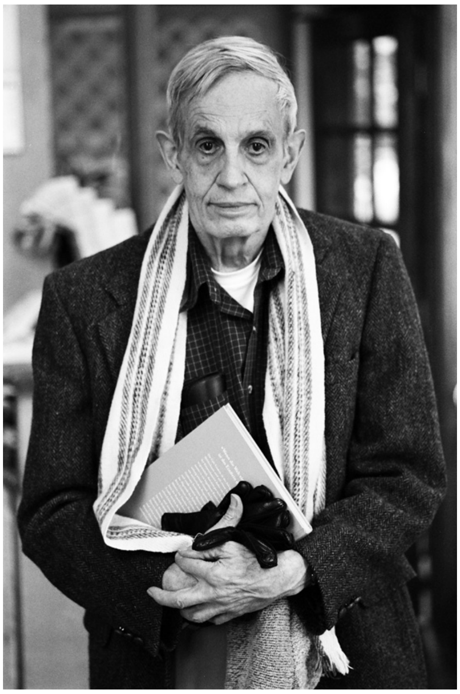


Figura 2.11: Fotografia de John Forbes Nash Jr. [26].

John Nash era considerado brilhante e venceu diversos prêmios em sua carreira, como o Prêmio Teoria John von Neumann e o Prêmio Leroy P. Steele, porém o ápice de sua carreira ocorreu em 1994, quando venceu o prêmio Nobel de Economia pela sua contribuição à Teoria dos Jogos, em seu trabalho intitulado “Teorema da imersão de Nash” [27]. Em seus estudos John Nash analisou principalmente o jogo do Dilema do Prisioneiro. Nele os jogadores desenvolvem estratégias de dominância do jogo, pois todos têm sempre o objetivo de conseguir o maior *payoff* possível. Estratégias dominantes são representadas matematicamente como:

$$U(s_i') > U(s_i) \tag{2.1}$$

em que o *payoff* gerado pela função U a partir da estratégia dominante s_i' é maior que o *payoff* gerado a partir da estratégia dominada s_i.

A idéia de sempre buscar o maior *payoff* é denominado como racionalidade econômica do jogador, ou seja, a forma como o jogador pensa a fim de obter um lucro maior. Essas estratégias de dominância do jogo de cada jogador acabam se anulando e isso traz uma espécie de ponto de equilíbrio para os jogadores, dessa forma nenhum deles acaba recebendo nem o máximo e nem o mínimo *payoff*, mas sim um mesmo valor intermediário por consequência de ambos usarem estratégias dominantes. [28]

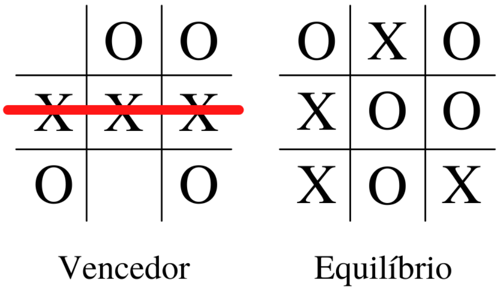


Figura 2.12: Análise do resultado do Jogo do velha.

É possível notar, de forma clara, este tipo de interação no famoso “Jogo da velha”. Neste jogo temos dois jogadores, ambos buscando a vitória em cima da derrota de seu adversário, ou seja, só existem as opções de vencedor e de perdedor. Porém, existe a opção de empate neste jogo, sendo esta considerada como o ponto de equilíbrio do jogo, pois não há nem vencedor e nem perdedor e ambos os jogadores obtêm o mesmo resultado, como podemos notar na Figura 2.12.

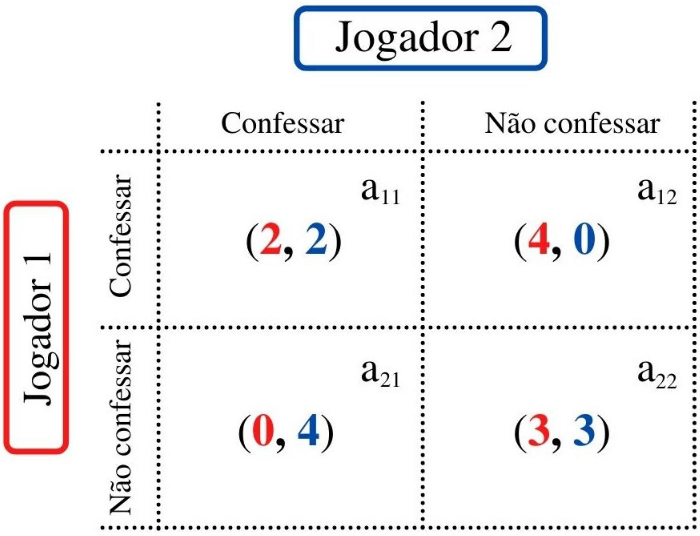


Figura 2.13: Matriz de Pagamento do Dilema do Prisioneiro.

Porém, ao analisar os *payoffs* possíveis, Nash observou que quando ambos os jogadores decidem não confessar também chegariam a um ponto de equilíbrio que lhes daria *payoffs* intermediários melhores que aqueles analisados anteriormente, como podemos notar no elemento a_{22} da Figura 2.13. Para se chegar a este equilíbrio era necessário alterar a racionalidade do jogador, ou seja, a forma com que ele escolhe suas estratégias e opera no jogo. A racionalidade na teoria dos jogos, de acordo com Don Ross [2], é analisada a partir de 3 requisitos:

1. Avaliar resultados, a fim de ordená-los de acordo com as contribuições que eles trazem ao bem estar do agente.

2. Calcular caminhos que levam aos resultados, no sentido de caracterizar as ações realizadas que terão a probabilidade de levar a determinados resultados.

3. Selecionar ações que trarão os melhores resultados ao agente, de acordo com as escolhas de ações dos outros agentes.

Caso algum desses requisitos não seja cumprido, o jogador é considerado como irracional. Para se alcançar o resultado $(3, 3)$, dado na matriz de pagamento, seria necessário que houvesse algum tipo de cooperação entre os jogadores, ou seja, ao escolher uma determinada estratégia o jogador teria que esperar que o outro jogador escolha uma estratégia que colabore com a dele. Isso na teoria dos jogos é chamado de *"Cheap Talk"* ou "Conversa fiada", que se trata de uma situação em que ambos os jogadores, dentro de uma colaboração, podem se trair a qualquer momento, ou seja, caracteriza um estado de instabilidade do sistema de indivíduos.

O Equilíbrio de Nash define que a melhor escolha para os indivíduos é feita de forma racional, trazendo o melhor resultado para todos de forma estável e sem grandes riscos de perda. Por isso, a situação mais provável de Equilíbrio de Nash se encontra no elemento a_{11} e não no elemento a_{22}, mesmo que $a_{11} < a_{22}$.

Capítulo 3

Dinâmica de Sistemas e Jogos Evolucionários

A Teoria dos Jogos é uma área de estudos que possibilita diversas aplicações, dentre elas está a relação de interação entre indivíduos dentro de sistemas. Quando temos um sistema de indivíduos que evolui com o tempo, ou seja, um sistema dinâmico de indivíduos, relacionamos esse sistema com a Teoria dos Jogos a partir de um denominado Jogo Evolucionário.

3.1 Revisão de Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos, como o próprio nome sugere, trata de sistemas que apresentam uma certa dinâmica envolvida. Dinâmica está diretamente relacionada a evolução temporal, portanto, sistemas que envolvem algum tipo de evolução são considerados sistemas dinâmicos, como um corpo que cai em decorrência da gravidade, a mudança climática ou até mesmo o movimento de planetas.

Os primeiros estudos relacionados a sistemas dinâmicos surgiram com o matemático francês Jules-Henri Poincaré (1854 - 1912) (Figura 3.1). Poincaré contribuiu com praticamente todas as áreas da matemática e fundou muitas delas como a Teoria das funções Automorfas, Topologia Algébrica e, principalmente, Sistemas Dinâmicos. Além disso seus estudos contribuíram muito com a Física na formulação da Relatividade Restrita e na área da Astronomia, em que descobriu a tão famosa Teoria do Caos, revolucionando com essa descoberta toda a Mecânica Celeste [29].

Figura 3.1: Fotografia de Jules-Henri Poincaré [30].

Para a formulação da área de Sistemas Dinâmicos, Poincaré iniciou seus estudos a partir da teoria das equações diferenciais. Esta teoria diz que a maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida analiticamente e, por consequência desse fato, Poincaré quis ir além em seus estudos.

Quando modelamos um fenômeno físico a partir de equações diferenciais, a ideia principal é obter com isso análises globais deste fenômeno, como o que vai acontecer com o sistema depois de determinado tempo. Por exemplo, consideremos um pêndulo simples oscilando, cujo comprimento seja l, massa m e arco descrito pelo vetor $\vec{x} = l\theta\hat{\theta}$, como ilustrado na Figura 3.2. A aceleração do pêndulo neste caso é dada pela segunda derivada temporal da função do espaço percorrido por ele, isto é,

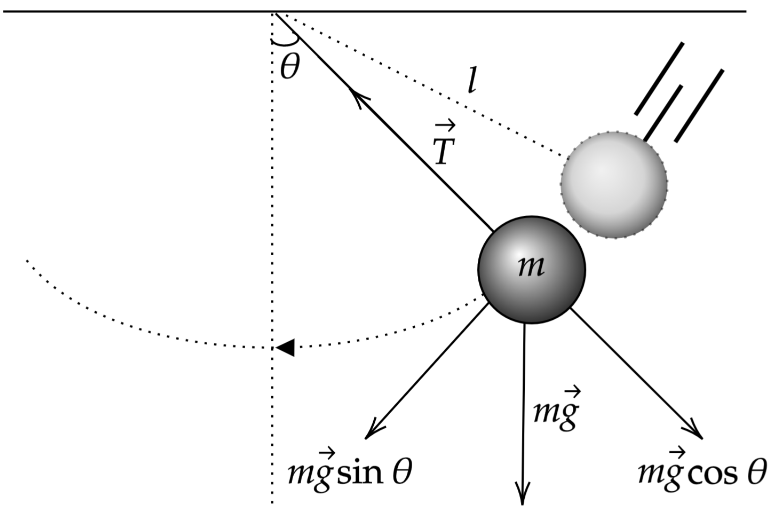


Figura 3.2: Representação esquemática de um pêndulo simples de massa m e comprimento l.

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta}. \tag{3.1}$$

Podemos definir a força resultante $\vec{F_R}$ relacionada ao movimento deste pêndulo a partir da Segunda Lei de Newton, isto é,

$$\vec{F_R} = m\vec{a} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta}. \tag{3.2}$$

As forças que atuam no pêndulo são a força Peso $\vec{P}$ e a força de Tração $\vec{T}$, dadas por:

$$\vec{P} = mg\cos\theta\hat{r} - mg\sin\theta\hat{\theta}. \tag{3.3}$$

$$\vec{T} = -mg\cos\theta\hat{r}. \tag{3.4}$$

A partir da soma entre as equações (3.3) e (3.4), podemos notar que a força resultante deste sistema também pode ser dada por

$$\vec{F_R} = -mg\sin\theta\hat{\theta} \tag{3.5}$$

Igualando as equações (3.2) e (3.5), podemos definir a equação que descreve o movimento do pêndulo como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\hat{\theta} = 0, \tag{3.6}$$

com a força restauradora sendo proporcional a $\sin\theta$.

Esta equação diferencial é não-linear e requer alguns métodos especiais para ser resolvida, porém para Poincaré o que realmente interessava era a resolução qualitativa do problema. A informação de maior importância neste caso era de que, depois que o pêndulo inicia seu movimento oscilatório, após determinado tempo ele acaba perdendo energia por atrito e parando. Para se obter essa informação não é necessário a resolução da equação diferencial, apenas sua interpretação. Por isso, Poincaré defende que mais importante do que resolver uma equação é descrever qualitativamente o comportamento das suas soluções. Em sua obra *"Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle"* (1881) [31], ele traz diversas ferramentas criadas por ele para a resolução qualitativa de problemas.

Baseando-se nessa análise qualitativa das equações diferenciais, Poincaré fundou a área de estudos denominada de Sistemas Dinâmicos, em que a partir da análise de equações diferenciais, é possível caracterizar sistemas que mudam com o tempo. Dessa forma, podemos modelar e fazer previsões do comportamento de diversos sistemas fora do equilíbrio.

3.2 Aplicações de Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos, na física, é o estudo da relação entre as forças atuantes sobre corpos e a variação temporal do estado destes corpos, associados a essas forças. Desse modo, podemos fazer uma analogia com populações de indivíduos, em que a dinâmica de populações é o estudo da variação no tempo do estado de uma determinada população, como a mudança de número ou densidade de indivíduos quando submetidos a uma determinada ação. Estas ações, podem ser no sentido de aumentar, diminuir ou mesmo manter o tamanho da população constante.

Este conceito pode ser atribuído a diversos sistemas de indivíduos, aplicando-se a sistemas físicos, biológicos, financeiros, entre outros. Alguns exemplos de aplicações de sistemas dinâmicos para a análise de populações de indivíduos são o Modelo Malthusiano e o Modelo de Lotka-Volterra.

3.2.1 Modelo Malthusiano

O modelo Malthusiano, criado pelo estatístico e economista Thomas Robert Malthus (1766 - 1834), em sua obra intitulada "Primeiro Ensaio" [32], busca descrever a evolução do número e da densidade de indivíduos de uma determinada população. Ele observou que a evolução temporal de uma população tinha quatro fatores a serem analisados, sendo estes as taxas de natalidade, mortalidade, migração e imigração. Dessa forma, considerando $p(t)$ a densidade populacional, ou seja, o número de indivíduos por área de uma determinada população em um tempo t, podemos associar a equação diferencial que descreve a evolução dessa população como

$$\frac{dp(t)}{dt} = \text{Natalidade} - \text{Mortalidade} - \text{Emigração} + \text{Imigração}. \tag{3.7}$$

De forma mais simples, podemos considerar um sistema em que não exista emigração e imigração de indivíduos e que as taxas de Natalidade e Mortalidade são diretamente proporcionais à densidade populacional por constantes positivas X e Y respectivamente, assim podemos reescrever a equação diferencial (3.7) como:

$$\frac{dp(t)}{dt} = Xp(t) - Yp(t). \tag{3.8}$$

Analisando a equação (3.8), podemos notar que se tivermos $X > Y$, ou seja, uma taxa de Natalidade maior que a taxa de Mortalidade, a população tende a crescer. Porém, se tivermos $Y > X$, ou seja, uma taxa de Mortalidade maior que a taxa de Natalidade, a população tende a diminuir. De acordo com essa análise de comportamento, podemos definir uma solução para a equação (3.8) na forma de uma exponencial,

$$p(t) = p_0 e^{(X-Y)t}, \tag{3.9}$$

em que p_0 é a densidade populacional inicial desse sistema.

Para uma análise em intervalos de tempo pequenos, o modelo Malthusiano se mostra muito eficiente para fazer previsões do comportamento de sistemas. Entretanto, para intervalos de tempo maiores, ele não se mostra tão eficaz, por não levar em consideração outros fatores, além das taxas de natalidade e mortalidade, que favorecem a evolução do sistema. Porém, apesar de limitado, o modelo Malthusiano ainda é considerado de extrema importância, pois foi o primeiro modelo a analisar o crescimento exponencial de populações, algo que podemos notar de forma muito clara em nossa realidade atual [33].

3.2.2 Modelo de Lotka-Volterra

O modelo de Lotka-Volterra geralmente é usado pra caracterizar sistemas biológicos, mais especificamente sistemas com a dinâmica de presa e predador entre espécies.

Este modelo matemático começou a ser fundamentado em 1925 pelo matemático italiano Vito Volterra (1860 - 1940), descrito de forma clara em sua obra *"Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations"* [34], em que ele analisou a distribuição de peixes em um período de proibição de pesca, numa determinada região do mar Adriático. Ele notou que houve um aumento do número de tubarões e a diminuição do número de outros peixes na região, ou seja, um aumento de predadores e diminuição de presas durante esse período de proibição. A partir disso, Volterra elaborou um modelo matemático, utilizando equações diferenciais para descrever o comportamento da população de peixes.

Na mesma época, o matemático americano Alfred J. Lotka (1880 - 1949) também desenvolveu um modelo matemático para explicar a dinâmica de predador e presa, em sua obra intitulada *"Elements of Physical Biology"* [35]. Portanto, como os modelos destes dois estudiosos foram criados de forma independente, o conjunto de equações destes modelos é conhecido atualmente como Equações de Lotka-Volterra [36].

As equações de Lotka-Volterra dizem respeito a um par de equações diferenciais que definem a dinâmica do sistema, sendo elas

$$\frac{dp(t)}{dt} = X_p p(t) - Y_p p(t) P(t), \tag{3.10}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = X_P p(t) P(t) - Y_P P(t), \tag{3.11}$$

em que $p(t)$ e $P(t)$ nos dão a densidade de presas e predadores respectivamente, X_p e Y_p são as taxas de crescimento e decrescimento das presas, enquanto X_P e Y_P são as taxas de crescimento e decrescimento dos predadores.

Ao dividirmos a equação (3.11) pela equação (3.10), chegamos a uma relação entre presa e predador dada por

$$\frac{(X_p - Y_p P)}{P} dP = \frac{(X_P - Y_P p)}{p} dp. \tag{3.12}$$

Podemos supor que as densidades p e P têm valores iniciais p_0 e P_0 respectivamente. Assim, ao integrarmos a equação (3.12) nos intervalos $[p_0, p]$ e $[P_0, P]$ chegamos à equação

$$X_p \ln(\frac{P}{P_0}) - Y_p(P - P_0) = Y_P \ln(\frac{p}{p_0}) + X_P(p - p_0). \tag{3.13}$$

Podemos reescrever a equação (3.13) como:

$$P^{X_p} p^{Y_P} e^{(-Y_p P - X_P p)} = P_0^{X_p} p_0^{Y_P} e^{(-Y_p P_0 - X_P p_0)}, \tag{3.14}$$

e na forma compacta temos

$$f(X_p, Y_p, P) f(X_P, Y_P, p) = f(X_p, Y_p, P_0) f(X_P, Y_P, p_0). \tag{3.15}$$

A partir da equação (3.15), podemos fazer uma análise semelhante à do modelo Malthusiano citado anteriormente, em que também teremos uma solução no espaço de fase na forma de uma exponencial, dada por

$$f(X, Y, k) = k^X e^{-Yk}. \tag{3.16}$$

Com este conjunto de equações diferenciais podemos caracterizar a dinâmica de sistemas de indivíduos, em que temos indivíduos que serão predados e indivíduos que serão predadores. Geralmente, a análise numérica desses sistemas fica a cargo de métodos que envolvem simulações computacionais, em que a partir destas simulações podemos produzir gráficos com as variações de densidade de indivíduos de acordo com parâmetros determinados, possibilitando assim análises como o domínio de um tipo de indivíduo e a extinção de outro, como veremos posteriormente.

3.3 Jogos Evolucionários

A Teoria dos Jogos possibilita diversas aplicações e várias análises de diferentes sistemas de indivíduos, porém, esta teoria é genérica em certos pontos e impossibilita algumas situações. Quando lidamos com sistemas que tendem a mudar de acordo com alguns parâmetros, usamos uma outra teoria baseada em Teoria dos Jogos, chamada de Teoria dos Jogos Evolucionários.

A Teoria dos Jogos Evolucionários possibilita a análise de sistemas de indivíduos com possibilidades de cooperação e conflito. A base desta teoria veio do biólogo britânico John Maynard Smith (1920 – 2004) que, a partir da Teoria dos Jogos, desenvolveu um estudo para analisar como comportamentos de cooperação surgiam em populações de animais irracionais [37]. Maynard deixou de lado a análise de interações únicas entre apenas dois jogadores, dedicando-se a analisar todo o sistema dinâmico de indivíduos, ou seja, a evolução temporal da população de jogadores estrategistas, englobando com isso todas as interações possíveis.

3.3.1 Modelo

Baseando-se em equações diferenciais de dinâmica de populações e nos conceitos da Teoria dos Jogos, Maynard conseguiu criar um modelo que descrevia a evolução temporal de um sistema biológico. No sistema analisado, os indivíduos se reproduziam de acordo com taxas de reprodução, associadas a um parâmetro fixo do sistema chamado de aptidão, ou seja, os indivíduos só podiam se reproduzir se fossem aptos a isso de acordo com um determinado parâmetro.

Maynard relacionou esses princípios com os fundamentos da Teoria dos Jogos, em que associou os diferentes tipos de indivíduos aos jogadores, as estratégias seriam novas características que poderiam surgir nestes indivíduos, e o *payoff* de cada estratégia desenvolvida por eles seria a aptidão para se reproduzir dos indivíduos. Dessa forma, foi possível uma espécie da dinâmica evolutiva das estratégias, pois caso as estratégias dos jogadores permitissem a reprodução, significaria que eles eram aptos a se reproduzir, portanto, as estratégias que não levavam a essa aptidão eram descartadas e não eram repassadas.

Neste modelo, cada tipo de indivíduo tem uma determinada aptidão associada, porém, como a reprodução só é possível se houver interação entre dois indivíduos, a aptidão passa a depender também de uma dinâmica entre os indivíduos do sistema. Desse modo, a aptidão deixa de ser um parâmetro fixo para cada tipo de indivíduo e passa a ser um parâmetro dinâmico do sistema, englobando assim todos os tipos de indivíduos presentes neste sistema. Dessa forma, temos uma espécie de seleção natural dentro do sistema, pois indivíduos que desenvolverem estratégias dominantes serão mais aptos a se reproduzir do que indivíduos que desenvolverem estratégias dominadas, gerando com isso o domínio de determinados tipos de indivíduos e a extinção de outros [38].

3.3.2 Modelo Matemático

De acordo com os conceitos de Jogos sequenciais e Estratégias mistas, abordados no capítulo 2, podemos representar este modelo de forma matemática. Supondo um grupo de N jogadores, cada um deles podendo escolher entre estratégias dadas por um vetor $\vec{s} = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Sendo N_i o número de jogadores que optaram pela estratégia s_i, podemos determinar a frequência de escolha das estratégias na população de jogadores como um vetor $\vec{f}$, dado por

$$\vec{f} = \left(\frac{N_1}{N}, \frac{N_2}{N}, ..., \frac{N_n}{N}\right). \tag{3.17}$$

Para facilitar a análise do jogo, vamos definir o vetor associado à estratégia escolhida s_i como sendo um vetor unitário, com todos os seus componentes iguais a zero, exceto seu i-ésimo componente que será igual a 1. A partir disso, podemos definir o *payoff* associado às estratégias escolhidas como sendo

$$U(s_i, \vec{f}) = \vec{s_i} \cdot P \cdot \vec{f}. \tag{3.18}$$

em que P é a matriz de pagamento, com os *payoffs* atribuídos às estratégias escolhidas no jogo. Com isso, o jogador que opta pela estratégia s_i recebe um *payoff* equivalente à média de ter jogado com todos os outros jogadores do sistema, ou seja, levando em consideração todas as possíveis interações.

Além disso, podemos definir também o conceito de estratégias dominantes e o Equilíbrio de Nash do sistema, sendo este dado quando ambos os jogadores que interagem optam por estratégias dominantes $\vec{f^*}$, de forma que

$$\vec{f^*} \cdot P \cdot \vec{f^*} \geq \vec{f} \cdot P \cdot \vec{f^*}, \tag{3.19}$$

em que o maior *payoff* é atribuído a jogadores que optam pelas estratégias dominantes.

A partir do momento em que o sistema alcança o Equilíbrio de Nash, dificilmente os jogadores tenderão a mudar de estratégias novamente, pois isto os levaria a um *payoff* menor que o atual. Este conceito é chamado de Estratégia Evolucionariamente Estável, que seria um perfil de estratégias dominantes resistentes a invasões de outras estratégias [37].

3.3.3 Regra Evolucionária

Estabelecido que o sistema de indivíduos do jogo é um sistema dinâmico, ou seja, a população de jogadores muda seu perfil de estratégias no decorrer do jogo, podemos definir a dinâmica do sistema a partir de uma regra evolucionária.

A regra evolucionária associada a um sistema de indivíduos é o que determina como essa população de jogadores poderá mudar seu perfil estratégico no decorrer do jogo. Existem diversos modelos de regras evolucionários, cada uma delas de acordo a dinâmica envolvida no jogo a ser analisado, dentre as mais estudadas temos a chamada Regra do Replicador ou Equação do Replicador. Esta regra define que, em um sistema de indivíduos, o crescimento de um determinado tipo de indivíduo está associado à diferença de aptidão desses indivíduos em relação à aptidão média de todo o sistema. Ou seja, o crescimento de jogadores que usam determinada estratégia está associado à diferença entre o *payoff* que eles recebem e o *payoff* médio de todos os jogadores. Desse modo, podemos caracterizar a regra evolutiva como

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = p_i(U_i - \bar{U}). \tag{3.20}$$

em que $p_i(t)$ representa a densidade de jogadores que jogam utilizando a estratégia i, U_i representa o *payoff* associado à estratégia i e $\bar{U}$ representa a média do *payoff* total de todos os jogadores.

Também podemos reescrever a equação (3.20) de acordo com a equação (3.18), ficando com

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = p_i\left(\vec{s_i} \cdot P \cdot \vec{f} - \vec{f} \cdot P \cdot \vec{f}\right). \tag{3.21}$$

Assim, a Regra do Replicador nos diz que jogadores tendem a mudar de estratégia quando uma estratégia se mostra mais bem sucedida que a sua, ou seja, quando um jogador X nota que um jogador Y, com estratégia diferente da dele, recebe um *payoff* maior que o dele, o jogador X tende a replicar a estratégia do jogador Y. Este conceito é de grande importância para a análise do jogo Evolucionário do Dilema do Prisioneiro [38].

Capítulo 4

Jogo Evolucionário do Dilema do Prisioneiro

A partir das informações acerca da Teoria dos Jogos, dinâmica de populações e Teoria dos Jogos Evolucionários abordadas até aqui, podemos aplicar esses conhecimentos no jogo do Dilema do Prisioneiro. A solução deste jogo é dada quando ambos os indivíduos, a partir de seus pensamentos egoístas, escolhem a estratégia que trará o maior *payoff* individual e ambos acabam tendo um resultado não tão satisfatório, como demonstrado no capítulo 2.

Vimos então que, pelo Equilíbrio de Nash, o ponto de equilíbrio deste jogo era alcançado quando ambos os jogadores decidiam confessar ou também quando ambos decidiam não confessar. Porém, esta segunda opção era impossível, pois era contrária ao comportamento egoísta provindo da racionalidade econômica dos jogadores, cujo pensamento é o de sempre buscar o melhor resultado individual possível. Para alcançar o melhor *payoff* possível, dado pelo Equilíbrio de Nash, seria necessário que houvesse algum tipo de comportamento colaborativo entre os jogadores, de forma que isso não entrasse em colapso com a racionalidade econômica dos mesmos. Este comportamento pode ser analisado quando tratamos o Dilema do Prisioneiro como um Jogo Evolucionário.

O então chamado Jogo Evolucionário do Dilema do Prisioneiro é usado para estudar o surgimento de cooperação entre indivíduos egoístas. O pioneiro deste estudo foi o cientista político estadunidense Robert Axelrod (1943), a partir de seu livro publicado em 1984 intitulado *"The Evolution of Cooperation"* [39], o qual fez com que a abordagem deste estudo se tornasse uma ferramenta muito importante nas áreas de Biologia, Economia, Ciências políticas e do comportamento.

4.1 Estrutura do jogo

De acordo com o artigo *"Evolutionary Prisoner's Dilemma Game on a Square Lattice"* [40], de György Szabó e Csaba Toke, podemos simplificar o jogo do prisioneiro de forma que os jogadores e seus vizinhos podem ter dois tipos de estratégias, cooperar (C) ou desertar (D), o que comparando com nossa análise anterior desse mesmo jogo seria o equivalente às estratégias de não confessar e confessar, respectivamente. Dessa forma, podemos diferenciar os jogadores em dois tipos, aqueles que decidem optar pela estratégia de cooperar chamados de cooperadores, e aqueles que decidem optar pela estratégia de desertar, chamados de desertores. Os *payoff*s são dados a partir das escolhas de estratégias dos jogadores e podem ser representados a partir de uma Matriz de Pagamento 2×2.

Neste jogo temos 4 possibilidades de *payoff*, sendo estas representadas pelos valores R, P, T e S, em que temos,

- R: situação em que ambos os jogadores que interagem são cooperadores.
- P: situação em que ambos os jogadores que interagem são desertores.
- T: "Tentação de Desertar", é a situação em que o jogador analisado é desertor, enquanto seu vizinho é cooperador.
- S: "Pagamento do Otário", é a situação em que o jogador analisado é cooperador, enquanto seu vizinho é desertor.

Estes valores formam a Matriz de Pagamento deste jogo, representada na Figura 4.1, respeitando as condições $T > R > P > S$ e $2R > T + S$, pois necessariamente a interação T deve ter a maior recompensa no jogo e a interação S deve ter a menor recompensa.

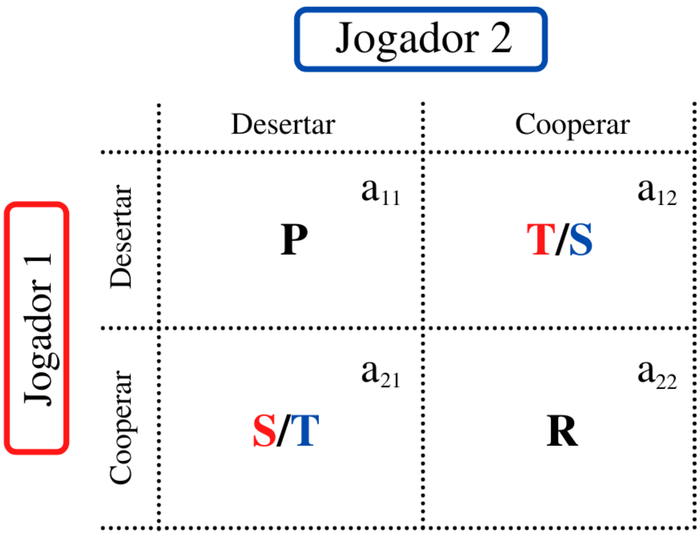


Figura 4.1: Matriz de Pagamento do jogo evolucionário do Dilema do Prisioneiro.

Neste jogo, a decisão por uma cooperação mútua dos jogadores conduz a um *payoff* total maior, enquanto que uma decisão por desertar dos jogadores conduz a um *payoff* individual maior, porém gera um *payoff* total menor, pois o *payoff* individual maior dos desertores está diretamente associado à diminuição da média do *payoff* dos cooperadores.

Os jogadores são analisados dentro de uma determinada região, onde podem interagir com eles mesmos e com seus vizinhos. Dependendo da estratégia que seus vizinhos adotam e da remuneração que esta estratégia gera, os jogadores podem migrar de uma estratégia para outra, ou seja, este jogo funciona de acordo com uma evolução temporal que altera o sistema de indivíduos de acordo com suas interações, assim como na Regra do Replicador apresentada no capítulo 3.

Este tipo de modelo se baseia no chamado Autômato Celular, que se trata de um modelo de evolução temporal, cujo estado do indivíduo depende da análise do estado dos indivíduos ao seu redor. Um outro exemplo de aplicação deste modelo é o chamado Jogo da Vida, criado por John Horton Conway (1937 - 2020) em 1970, cuja finalidade era explicar o comportamento de células em sistemas evolutivos [41].

4.2 Modelo

No modelo analisado, os jogadores estão localizados em uma malha quadrada e só podem escolher entre duas estratégias simples, sempre cooperar ou sempre desertar [40].

A Matriz de Pagamento que representa os *payoff* deste jogo é mais simples, pois devido à simplificação as únicas interações que nos interessam são as de cooperadores com cooperadores (R) e desertores com cooperadores (T). As interações restantes tem o valor zero atribuído ao *payoff*, ou seja, $P = S = 0$. Às interações entre cooperadores é atribuído o *payoff* $R = 1$ e às interações entre desertores e cooperadores é atribuído o *payoff* $T = b$, de forma que a Matriz de Pagamento seja representada de acordo com a Figura 4.2, com $b > 1$.

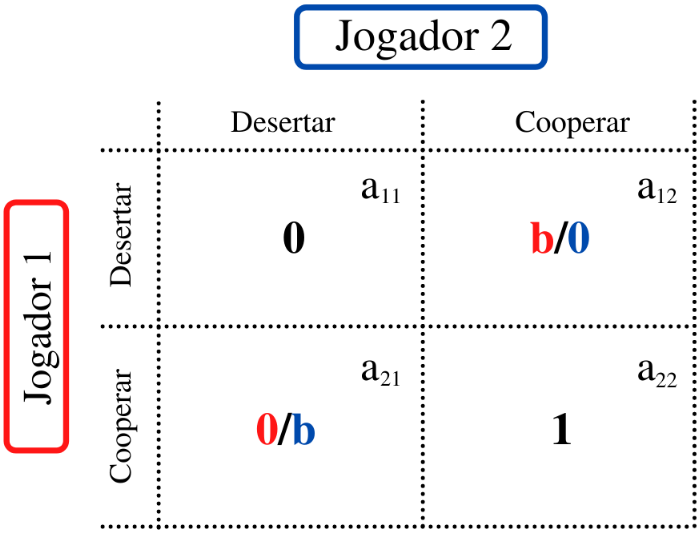


Figura 4.2: Matriz de Pagamento do jogo evolucionário do Dilema do Prisioneiro de acordo com o modelo simplificado.

Os valores de *payoff* são dados de acordo com apenas uma interação, portanto, o valor de *payoff* total dos jogadores é dado pela soma dos *payoffs* atribuídos a todas as interações de cada jogador.

A partir dessa distribuição de *payoffs*, analisamos dois sistemas diferentes. No primeiro sistema analisamos apenas as interações do jogador com seus primeiros vizinhos, sendo assim o *payoff* de um desertor cercado por cooperadores é de $4b$, enquanto o *payoff* de um cooperador cercado por cooperadores é de 5, de acordo com a Matriz de Pagamento. No segundo sistema analisamos as interações do jogador com seus primeiros vizinhos e também com seus segundos vizinhos, dessa forma os *payoffs* dos desertores e cooperadores cercados de cooperadores serão $8b$ e 9 respectivamente.

Para determinar a regra evolucionária desse jogo, chamamos o jogador analisado de jogador X e seus respectivos vizinhos de jogadores Y. Assim, determinamos o *payoff* atribuído ao jogador X como P_X e o *payoff* atribuído ao jogador Y como P_Y.

Após uma rodada de interações, o jogador X escolhido compara seu *payoff* obtido após as primeiras interações com o *payoff* obtido pelos seus vizinhos. Caso haja algum vizinho com *payoff* maior que o seu, ou seja, $P_X < P_Y$, o jogador X tem a inclinação de mudar sua estratégia para a estratégia do jogador Y. Dessa forma, a regra evolucionária W define a probabilidade do jogador X mudar para a estratégia do jogador Y, de acordo com seus respectivos *payoffs*. Ou seja, W determina a probabilidade dos indivíduos do sistema alternarem entre cooperadores ou desertores, dependendo dos valores de P_X e P_Y dos mesmos. Assim podemos escrever a regra evolucionária deste sistema como

$$W = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{-(P_Y - P_X)}{k}\right]}, \tag{4.1}$$

sendo o fator k denominado de fator de irracionalidade. Esse fator faz com que os jogadores tenham uma pequena probabilidade de mudar de estratégia sem seguir um raciocínio lógico, ou seja, um jogador X tem uma pequena chance de mudar para a estratégia de um jogador Y mesmo que $P_X > P_Y$ ou manter sua estratégia mesmo que $P_X < P_Y$. Quando maior for o fator k, mais irracional será o sistema, portanto, mais mudanças de estratégia irão ocorrer durante as interações, como podemos notar pela Figura 4.3, em que temos a probabilidade de mudança de estratégia (W) em função da diferença de *payoff* entre o jogadores (x).

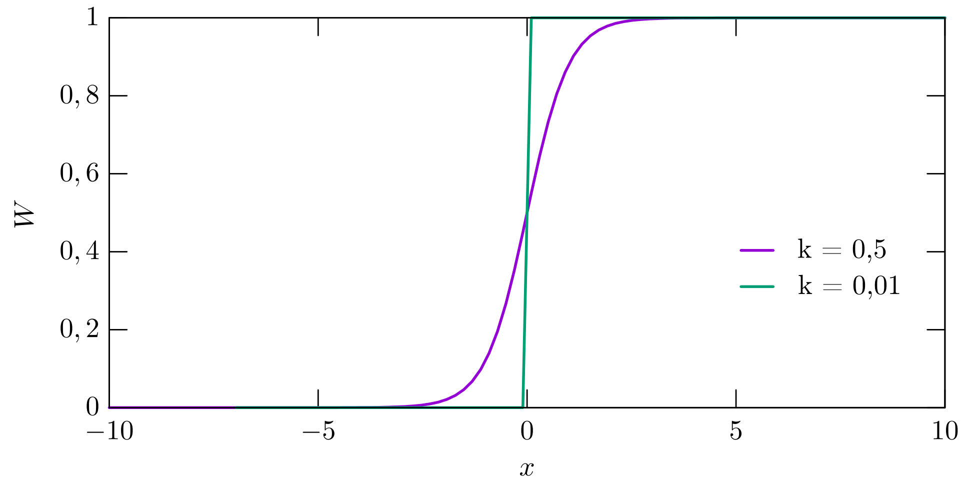


Figura 4.3: Gráfico da probabilidade de mudança de estratégia (W) em função da diferença de *payoff* dos jogadores (x), para diferentes valores de k.

Para as análises numéricas do jogo utilizamos o método de simulações de Monte Carlo (MC), em que introduzimos amostragens aleatórias, ou seja, posições e estratégias aleatórias e aplicamos simulações utilizando a regra evolucionária. Para as simulações MC, fixamos o valor de k e o valor de b, de forma que $k < 1$. Porém, fizemos várias simulações em que em cada uma delas aumentamos o valor de b, e com isso foi possível determinar a densidade de cooperadores c e a densidade de desertores d dentro do sistema, de acordo com a variação de b. Além disso, variamos o tamanho L do sistema de $L = 100$ a $L = 1000$, pois se fez necessário um sistema relativamente grande para contornar os erros estatísticos nas regiões críticas, sendo estas quando o sistema tende a ter só cooperadores ($c \to 1$) ou quando o sistema tende a ter só desertores ($c \to 0$) [40].

4.3 Resultados

Como vimos anteriormente, a dinâmica do sistema de indivíduos está diretamente relacionada com a regra evolutiva do jogo, e essa está relacionada com o *payoff* dos indivíduos. No caso deste jogo, o *payoff* dos indivíduos que optam pela estratégia de desertar depende do valor b, portanto, ao variarmos este valor mudamos a dinâmica do sistema.

O jogo possibilita, a princípio, dois estados diferentes para o sistema, a cooperação uniforme ($c = 1$) e a deserção uniforme ($c = 0$). Analisando primeiramente o estado de cooperação uniforme, para que a grande maioria dos jogadores opte pela estratégia de cooperar, o *payoff* dos cooperadores deve ser maior que o *payoff* dos desertores dado por b. Com o propósito de resolver este problema, definimos um valor limite b_1, sendo $b_1 > 1$. Este valor limite funciona como um parâmetro para a mudança de estratégia dos jogadores, pois enquanto tivermos $b < b_1$ significa que o *payoff* total dos desertores ainda será inferior ao *payoff* total dos cooperadores, portanto qualquer aglomerado de desertores deixa de existir nessas condições.

Agora analisando o estado em que temos uma deserção mútua, para que a grande maioria dos jogadores opte pela estratégia de desertar, o *payoff* dos desertores deve ser superior ao *payoff* dos cooperadores. Assim, da mesma forma que para o estado anterior, definimos um valor limite b_2, tal qual para $b > b_2$ os indivíduos ficam mais propensos a se tornar desertores e os cooperadores deixam de existir nessas condições.

Além dos dois estados citados até aqui, podemos observar também a existência de um estado de coexistência entre cooperadores e desertores, possibilitado quando temos o valor b sendo $b_1 < b < b_2$. Na Figura 4.4 podemos observar os estados mencionados que o sistema pode se encontrar.

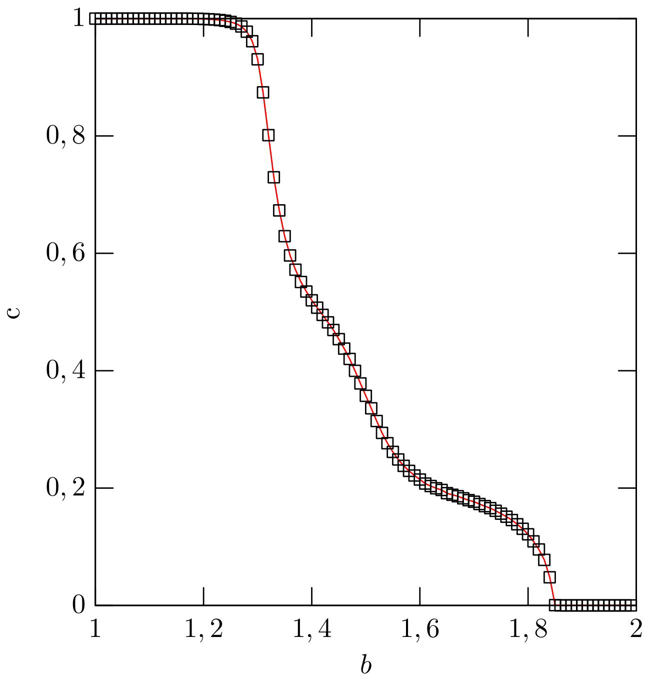


Figura 4.4: Gráfico da densidade de cooperadores c em função de b, com valor de k fixo em $k = 0,1$.

A densidade de cooperadores, com o fator k fixado em $k = 0,1$, começa decaindo lentamente com a variação de b, ou seja, no estado em que temos $b_1 < b < b_2$ existe a coexistência. Porém, após b ultrapassar o valor limite b_2, a densidade de cooperadores tem uma queda brusca.

A partir do resultado das simulações de MC, podemos identificar um comportamento em degrau nos gráficos de densidade de cooperadores c em função de b. Este comportamento fica mais evidente quando atribuímos valores cada vez menores à k, pois dessa forma a mudança irracional de estratégia será cada vez menor, como podemos notar comparando a Figura 4.5 e a Figura 4.6.

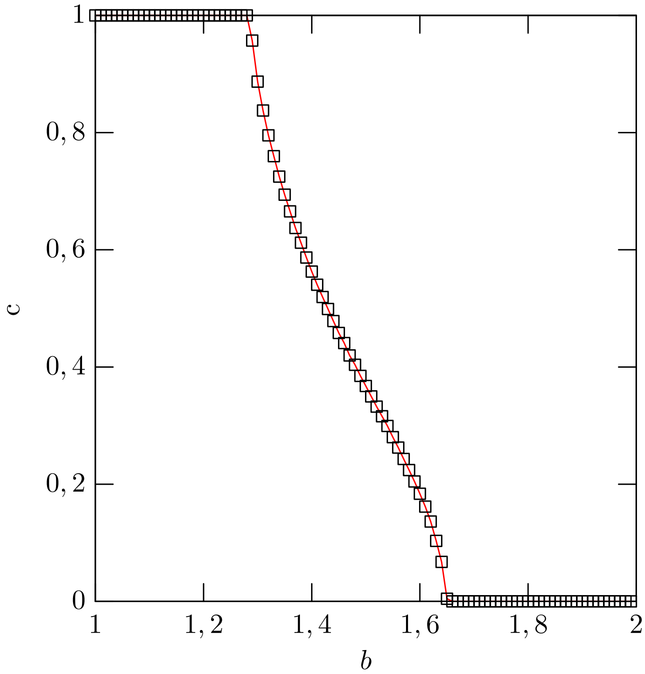


Figura 4.5: Gráfico da densidade de cooperadores c em função de b, com valor de k fixo em $k = 0,7$.

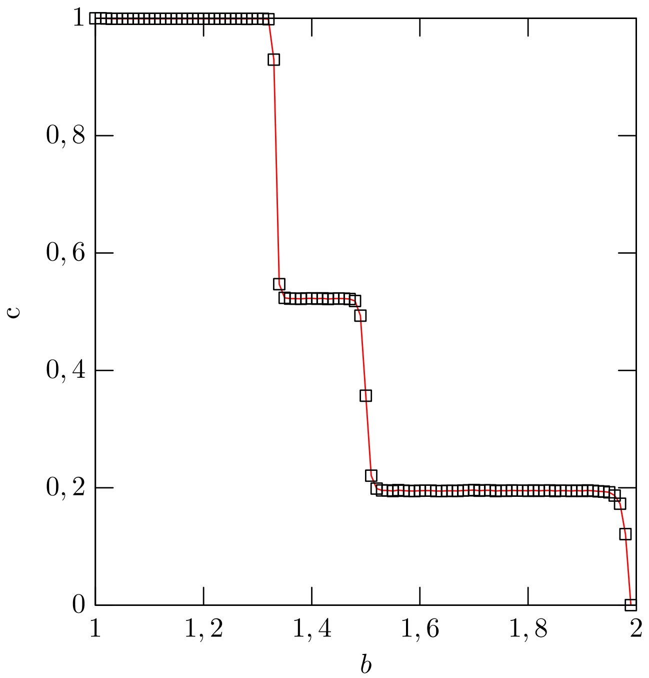
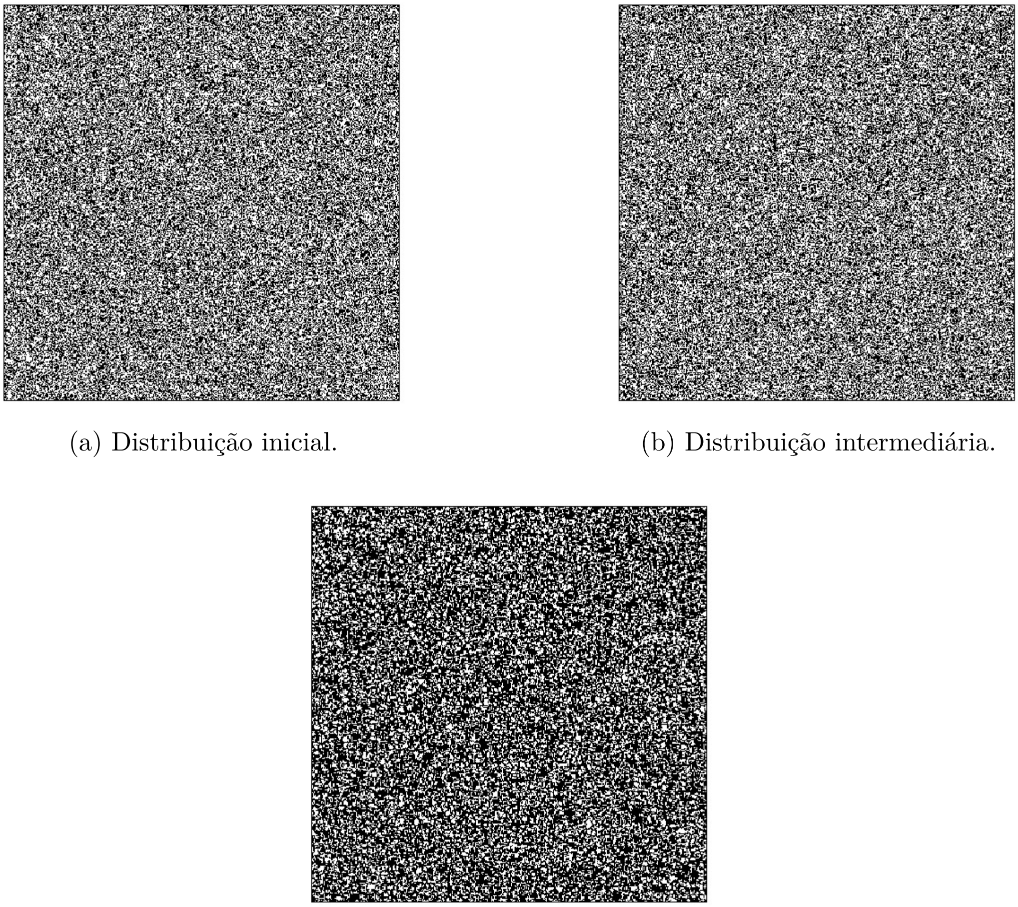


Figura 4.6: Gráfico da densidade de cooperadores c em função de b, com valor de k fixo em $k = 0,01$.

Além disso, é possível também fazer uma análise a partir das distribuições iniciais e finais do sistema. Inicialmente temos 10.000 indivíduos distribuídos de forma aleatória em uma malha $L = 400$, com k fixo em $k = 0,1$. A partir desta distribuição, fizemos 8.000 gerações para cada simulação variando o valor de b, que seria o equivalente a jogar este jogo 8.000 vezes mudando o valor de b para cada vez.

Ao analisar o resultado das simulações de MC, podemos notar que para o b variando entre valores abaixo de 1.5 temos a presença mútua de cooperadores e desertores, ou seja, o estado com $1 < b < 1.5$ pode ser considerado um estado de coexistência, como podemos ver pela comparação dada pela a Figura 4.7.

Figura 4.7: Distribuição de cooperadores (em branco) e desertores (em preto), com $1 < b < 1,5$ e valor de k fixo em $k = 0,1$, após 8.000 gerações. Note que neste caso temos um estado de coexistência de cooperadores e desertores.



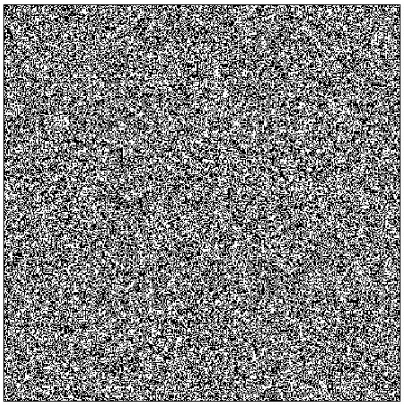
(a) Distribuição inicial.

(b) Distribuição intermediária.

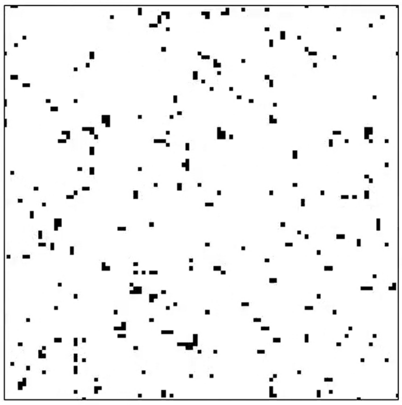
(c) Distribuição final.

Para o b variando entre valores abaixo de $1,15$, os cooperadores prevalecem sob os desertores, ou seja, temos um estado de cooperação mútua para $b < 1,15$. Portanto, podemos concluir que o valor limite b_1, que determina a mudança de estratégia neste caso, está associado a valores próximos de $b_1 = 1,15$, como podemos observar a partir da comparação pela Figura 4.8, com as distribuições iniciais e finais do sistema respectivamente.

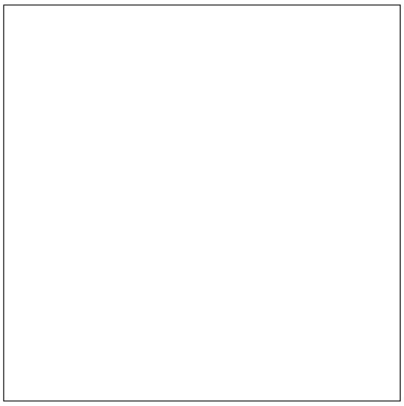
Figura 4.8: Distribuição de cooperadores (em branco) e desertores (em preto), com $1 < b < 1,15$ e valor de k fixo em $k = 0,1$, após 8.000 gerações. Note que neste caso temos um estado de cooperação mútua, em que com um número alto de gerações conseguimos contornar o fator k na distribuição final e eliminar totalmente a densidade de desertores, restando apenas os cooperadores (em branco).



(a) Distribuição inicial.



(b) Distribuição intermediária.

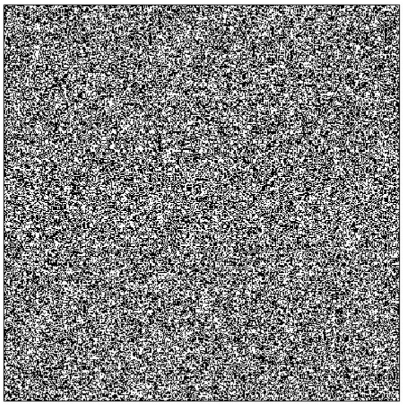


(c) Distribuição final.

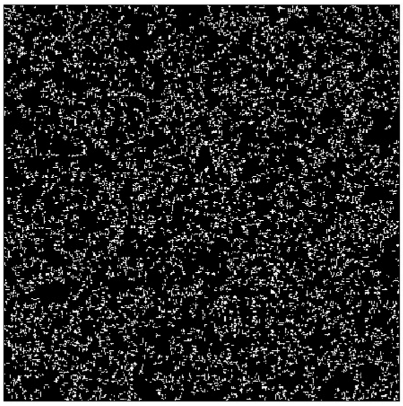
Por fim, ao analisarmos a densidade de cooperadores para o b variando entre valores acima de $1,5$, podemos notar uma queda acentuada na densidade de cooperadores em comparação com a de desertores, caracterizando assim um estado de deserção mútua para $b > 1,5$.

A partir disso, podemos concluir que o valor limite b_2, que determina a mudança de estratégia neste caso, se encontra próximo a valores de $b_2 = 1,5$, como podemos observar a partir da comparação dada pela Figura 4.9, com as distribuições iniciais e finais do sistema, respectivamente.

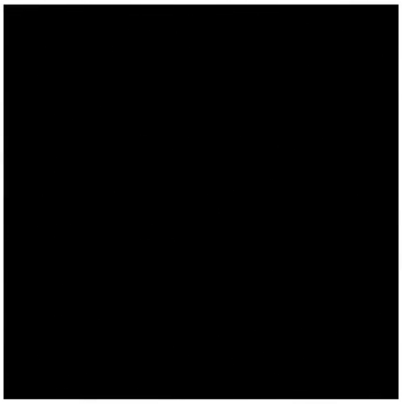
Figura 4.9: Distribuição de cooperadores (em branco) e desertores (em preto), com $1 < b < 2$ e valor de k fixo em $k = 0,1$, após 8.000 gerações. Note que neste caso temos um estado de deserção mútua, em que com um número alto de gerações conseguimos contornar o fator k na distribuição final e eliminar totalmente a densidade de cooperadores, restando apenas os desertores (em preto).



(a) Distribuição inicial.



(b) Distribuição intermediária.



(c) Distribuição final.

Conclusões

Neste trabalho fizemos uma Introdução à Teoria dos Jogos, indo desde a formação do pensamento referente à análise de jogos até a consolidação da teoria. Trabalhamos os principais conceitos referentes a jogadores, estratégias, *payoffs* e diferentes tipos de jogos, além de também desenvolvermos algumas análises de diferentes tipos de jogos, em especial a análise do Dilema Social, Dilema do Prisioneiro e a situação de Equilíbrio de Nash. Além disso, fizemos uma breve revisão a respeito de Sistemas Dinâmicos, explicando a origem dessa área de estudos e a aplicação da mesma em alguns modelos como o modelo Malthusiano e o modelo de Lotka-Volterra. Em seguida, introduzimos a Teoria de Jogos Evolucionários, decorrendo desde a formação da teoria até os conceitos e as aplicações da mesma. Por fim, reproduzimos o modelo de um Jogo Evolucionário do Dilema do Prisioneiro, descrito no artigo "Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice". Com o auxílio de um método computacional, e utilizando linguagem de programação C e simulações de Monte Carlo, conseguimos plotar gráficos com informações numéricas muito semelhantes aos do artigo original e, com isso, realizamos as devidas análises de comportamento do sistema.

Entre as perspectivas de trabalhos futuros, pretendemos continuar trabalhando a análise de jogos estudados pela Teoria dos Jogos e pela Teoria dos Jogos Evolucionários, em especial os denominados Public Good Games (PGG). Este tipo de jogo trata de comportamentos cooperativos de grupos com incentivos a deserção, e sabendo disso estamos trabalhando na reprodução desse tipo de jogo em um sistema sem malha e considerando o movimento dos jogadores, a fim de trabalhar com um sistema cada vez mais próximo de algo real.

Apêndice A

Código utilizado para as análises

Como discutido no Capítulo 4, a análise numérica do problema foi feita a partir de um método computacional, utilizando linguagem de programação em C e simulações de Monte Carlo. Seguem abaixo os códigos produzidos, utilizando a linguagem de programação C, que serviram como base para a análise numérica do Jogo Evolutivo do Dilema do Prisioneiro.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <gsl/gsl_rng.h> // biblioteca dos números aleatórios

#define Ni 400   // tamanho da rede em i
#define Nj 400  // tamanho da rede em j
#define NG 8000 // n. de gerações (tempo)
#define NS 2 // n. de simulações
```

```c
#include "../pd.h"

void op(int , int *); // função output (saída)
void ic(gsl_rng *, int *); // função para a condicao inicial

int main(int argc, char **argv){

  int i, j, ii, jj, t, gd; // gd -> grid
  int ativo, vizinho, temp;
  int *phi;
  double *po;
  int id, ie, ia, ib;
  double b;
  int X, Y;
  double W;
  double K;
  double acao;
  double *c;
  double dc;
```

```
  double sc;
  int ns;
  int bi;

  phi= (int *) calloc(Ni*Nj, sizeof(int)); // criação de um vetor (rede)
  po = (double *) calloc(Ni*Nj, sizeof(double));
  c = (double *) calloc(NS, sizeof(double));

  if(argc==2){
    gsl_rng_default_seed= atoi(argv[1]);
  }else{
    gsl_rng_default_seed= time(NULL);
  }
  gsl_rng *w= gsl_rng_alloc(gsl_rng_taus);
  //revervando espaço na memória para o gerador de número aleatórios


  b = 1.0; //parametro de payoff dos desertores
  K = 0.5; //parametro de irracionalidade


  bi = 1;

//  ic(w, phi);
//  op(0, phi);


  while(b < 2.00){

  printf("%d\n \n", bi);

  for(i = 0; i < NS; i++){
  c[i] = 0.0;
  }

  ns = 0;
  //Inicio das NS simulações
  while(ns<=NS){

  ic(w, phi);

  //início da fase transiente
  for(t= 0; t < NG+1; t++){

    gd = 0;

    while(gd < Ni*Nj ){

```

```
      i= gsl_rng_uniform(w)*Ni;
      j= gsl_rng_uniform(w)*Nj;

      X= i*Nj+j;

      vizinho = gsl_rng_uniform(w)*4;

    switch(vizinho){
      case 0:
        Y = ((i+1)%Ni)*Nj+j;
        ii = (i+1)%Ni;
        jj = j;
      break;
      case 1:
        Y = ((i-1+Ni)%Ni)*Nj+j;
        ii = (i-1+Ni)%Ni;
        jj = j;
      break;
      case 2:
        Y = i*Nj+(j+1)%Nj;
        ii = i;
        jj = (j+1)%Nj;
      break;
      default:
        Y = i*Nj+(j-1+Nj)%Nj;
        ii = i;
        jj = (j-1+Nj)%Nj;

    }

    po[X] = 0.0;    // payoff do jogador X
    po[Y] = 0.0;    // payoff do jogador Y

    // matriz de pagamento

    ativo = X;

      ie = ((i-1+Ni)%Ni)*Nj+j;
      id = ((i+1)%Ni)*Nj+j;
      ia = i*Nj+(j+1)%Nj;
      ib = i*Nj+(j-1+Nj)%Nj;

      if((phi[ativo])==1){

        po[ativo]+=1.0; // auto-interação

        if((phi[ie])==1){ // esquerda
```

```
          po[ativo]+=1.0;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }
        if((phi[id])==1){ // direita
          po[ativo]+=1.0;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }
        if((phi[ia])==1){ // acima
          po[ativo]+=1.0;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }
        if((phi[ib])==1){ //abaixo
          po[ativo]+=1.0;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }

      }else{

        po[ativo]+=0.0; // auto-interação

        if((phi[ie])==1){ // esquerda
          po[ativo]+=b;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }
        if((phi[id])==1){ // direita
          po[ativo]+=b;
        }else{
        po[ativo]+=0.0;
        }
        if((phi[ia])==1){ // acima
          po[ativo]+=b;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }
        if((phi[ib])==1){ // abaixo
          po[ativo]+=b;
        }else{
          po[ativo]+=0.0;
        }


      }

```

```
        ativo = Y;

          ie = ((ii-1+Ni)%Ni)*Nj+jj;
          id = ((ii+1)%Ni)*Nj+jj;
          ia = ii*Nj+(jj+1)%Nj;
          ib = ii*Nj+(jj-1+Nj)%Nj;

          if((phi[ativo])==1){

            po[ativo]+=1.0; // auto-interação

            if((phi[ie])==1){ // esquerda
              po[ativo]+=1.0;
            }else{
              po[ativo]+=0.0;
            }
            if((phi[id])==1){ // direita
              po[ativo]+=1.0;
            }else{
              po[ativo]+=0.0;
            }
            if((phi[ia])==1){ // acima
              po[ativo]+=1.0;
            }else{
              po[ativo]+=0.0;
            }
            if((phi[ib])==1){ //abaixo
              po[ativo]+=1.0;
            }else{
              po[ativo]+=0.0;
            }

          }else{

            po[ativo]+=0.0; // auto-interação

            if((phi[ie])==1){ // esquerda
              po[ativo]+=b;
            }else{
              po[ativo]+=0.0;
            }
            if((phi[id])==1){ // direita
              po[ativo]+=b;
            }else{
            po[ativo]+=0.0;
            }
            if((phi[ia])==1){ // acima
              po[ativo]+=b;
```

```
          }else{
            po[ativo]+=0.0;
          }
          if((phi[ib])==1){ // abaixo
            po[ativo]+=b;
          }else{
            po[ativo]+=0.0;
          }


        }

      W = (1.0)/(1.0 + exp(-((po[Y]-po[X])/K)) );
      // probabilidade de X mudar o comportamento de acordo com o vizinho Y

      acao = gsl_rng_uniform(w);

      if(acao < W){

        temp = phi[Y];
        phi[X] = temp;

        // phi[X] = phi[Y]
      }

      gd+=1;
    }

  }//Fim do transiente


  //    op(bi, phi);



  // cálculo do número de cooperadores em cada uma das simulações
  for(i=0; i< Ni; i++){
      for(j=0; j<Nj;j++){

        if((phi[i*Nj+j]) == 1){

          c[ns]+=1.0;

        }

      }
    }

```

```
      printf("Número de cooperadores da simulação %d = %e\n", ns, c[ns]);

    ns+=1;
     } //Fim das NS simulações

    printf("%d\n \n", bi);
    bi+=1;
    sc = 0.0;
    for(i = 0; i < NS; i++){
    sc += c[i];
    }

    sc = sc/NS;

    printf("Número médio de cooperadores %e\n", sc);



    // Cálculo da densidade média depois das NS simulações
    dc = sc/(Ni*Nj); // densidade de coperadores

    printf("Densidade de cooperadores %e para o valor de b=%e\n \n", sc, b);

    FILE *file=fopen("c.dat", "a");
    fprintf(file, "%e %e\n", dc, b);
    fclose(file);

    b = b + 0.01;

    }

    gsl_rng_free(w);
    free(phi);
    free(po);
    return 0;
  }
```

Referências Bibliográficas

[1] Y. N. Harari, *Sapiens: Uma breve história da humanidade*. Edição de bolso, 2018.

[2] D. Ross, "Game theory," 2008. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/game-theory/> Acesso em 28 Mar. 2021.

[3] T. C. Schelling, *The strategy of conflict*. The President and Fellows of Harvard College, 1960.

[4] A. B. Carlos, *Teoria dos Jogos Evolucionários*. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2018.

[5] Disponível em: <https://pgl.gal/platao-educacao-harmonica-integral/> Acesso em 28 Mar. 2021.

[6] Disponível em: <https://bit.ly/31ZhUJN> Acesso em 28 Mar. 2021.

[7] Disponível em: <https://bit.ly/3a0ytt3>Acesso em 28 Mar. 2021.

[8] T. Hobbes, *Leviatã*. Clube de autores, 2020.

[9] Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Antoine-Augustin-Cournot> Acesso em 28 Mar. 2021.

[10] Disponível em: <https://www.hetwebsite.net/het/profiles/cournot.htm> Acesso em 28 Mar. 2021.

[11] M. C. N. Santos, "Principais axiomas da matemática," Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2014.

[12] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ernst_Zermelo> Acesso em 28 Mar. 2021.

[13] O. M. Xavier, "A origem da teoria dos jogos e a existência de equilíbrio em nash," Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2013.

[14] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Golden Keys Success, 2020.

[15] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann> Acesso em 28 Mar. 2021.

[16] Disponível em: <https://bit.ly/3s8FbU2> Acesso em 28 Mar. 2021.

[17] K. Dutta, *Strategies and Games – Theory and Practice*. The MIT Press, 1999.

[18] B. A. Sartini, *Notas de Aula da segunda Bienal da SBM*. Universidade Federal da Bahia, 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf.

[19] Disponível em: <http://estrategiasdedecisao.com/jogo-ultimato/> Acesso em 28 Mar. 2021.

[20] Disponível em: <https://academiaconhcmnt.blogs.sapo.pt/649.html> Acesso em 28 Mar. 2021.

[21] Disponível em: <https://www.sciencemag.org/site/feature/misc/webfeat/125th/> Acesso em 28 Mar. 2021.

[22] C. KirschbaumI and T. IwaiII, "Game theory and microsociology: avenues of collaboration," 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1415-65552011000100009> Acesso em 28 Mar. 2021.

[23] J. Bentham and S. Mill, *Uma Introdução Aos Princípios Da Moral E Da Legislação*. Hunter Books, 1974.

[24] J. S. Mill, *Utilitarismo*. Hunter Books, 2017.

[25] Disponível em: <https://1000wordphilosophy.com/2014/05/15/introduction-to-consequentialism/> Acesso em 28 Mar. 2021.

[26] Disponível em: <https://bit.ly/3uEQiFW> Acesso em 28 Mar. 2021.

[27] A. CapistranoI and P. Odon, "Introduction to nash's theorem and braneworlds," 2010. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172010000100005.

[28] Disponível em: <http://www.anpec.org.br/encontro2008/artigos/200807020859020-.pdf> Acesso em 28 Mar. 2021.

[29] M. Viana, *Notas de aula Jornadas de Iniciação Científica 2012*. IMPA, 2012. Disponível em: <http://w3.impa.br/~viana/out/Poincare2012.pdf.

[30] Disponível em: <http://haceralgoconlasmanos.blogspot.com/2019/05/poincare-y-el-misterio-creativo.html> Acesso em 28 Mar. 2021.

[31] H. Poincar, *Mémoire sur les Courbes Définies par Une équation Différentielle*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1881.

[32] T. R. Malthus, "Essay on the principle of population," 1798. Disponível em: <https://www.filosofiaclinicaflorianopolis.com/ensaio-sobre-o-principio-de-populacao-thomas-robert-malthus/.

[33] J. A. R. da Cunha, "Evolution of physical processes in models of population dynamics," 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172017000300402.

[34] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations.* Dover Publications, 2005.

[35] A. J.Lotka, *Elements of Physical Biology.* Andesite Press, 2015.

[36] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge University Press; 1st edition, 1998.

[37] J. M. Smith and G. R. Price, "The logic of animal conflict," 1973.

[38] M. A. Amaral, *Teoria dos jogos evolucionários e o surgimento da cooperação: dinâmicas inovativas e jogos mistos.* Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo horizonte - MG, 2017.

[39] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation.* Basic Books, New York, 1984.

[40] G. Szabo and C. Toke, "Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice," 1998.

[41] Disponível em: <https://codelogica.wordpress.com/2018/02/17/jogo-da-vida-2/> Acesso em 28 Mar. 2021.