



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## Grupos de Lie e Aplicações na Física

Acadêmico: Luiz Felipe Demétrio

Orientador: Prof. Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

Maringá, 19 de novembro de 2020



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## Grupos de Lie e Aplicações na Física

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física, da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Luiz Felipe Demétrio

Orientador: Prof. Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

Maringá, 19 de novembro de 2020

*"The scientist does not study nature because it is useful to do so. He studies it because he takes pleasure in it, and he takes pleasure in it because it is beautiful."*

Henri Poincaré

*"In our search for new ideas, beauty plays many roles. It's a guide, a reward, a motivation. It's also a systematic bias."*

Sabine Hossenfelder

# Agradecimentos

Agradeço à professora Elenice Vaz e à OBMEP por me mostrarem o quão prazeroso pode ser estudar, o que tornou possível chegar tão longe no curso de Física. A minha família, em especial a meus pais e a meus avós Waldemiro e Dora Demétrio pela ótima educação e pelo apoio fornecido sempre que precisei, e também aos meus amigos, cujas conversas foram indispensáveis para compreender os conceitos estudados. Por último, mas não menos importante, agradeço a meus professores ao longo da graduação pelo conhecimento fornecido, e em particular a meu orientador Miguel Jorge Bernabé Ferreira pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

*Obrigado a todos.*

# Resumo

O presente trabalho trata sobre grupos de Lie, álgebras de Lie e algumas de suas aplicações na Física. Sua importância reside em sua capacidade de modelar matematicamente o abstrato conceito de simetria, o que lhes confere aplicações em diversas áreas de pesquisa avançada. Primeiramente, fazemos uma introdução à teoria de grupos e à noção de variedade, com foco em exemplos. Em seguida, apresentamos a noção de grupos contínuos e sua relação com as álgebras de Lie, com alguns exemplos importantes sendo estudados. Com isso, analisamos aplicações de grupos de Lie em áreas conhecidas da Física: o Grupo de Galileu na Mecânica Clássica; os grupos de translações espaciais, temporais e rotações na Mecânica Quântica; o Grupo de Poincaré na Teoria da Relatividade. Por fim, apresentamos uma aplicação de teoria de grupos em Teoria Clássica de Campos, que é a derivação da interação eletromagnética a partir do grupo  $U(1)$ . O uso de grupos em tais casos é relevante porque exigir a invariância as leis da Física sob a ação de determinado grupo facilita encontrar sua forma.

Palavras-chave: Grupos de Lie, Álgebras de Lie, Simetria.

# Abstract

The present work deals with Lie groups, Lie algebras and some of its applications in Physics. Their importance rests on their capability of mathematically modeling the abstract concept of symmetry, which gives them applications in a variety of advanced research areas. First, an introduction to Group Theory and the notion of manifold is given, with emphasis on examples. Then, the notion of continuous groups and their relation with Lie algebras is presented, with some key examples being studied. After, some applications of Lie groups in common areas of Physics are presented, in particular the Galilei Group in Classical Mechanics, the rotations, spatial and temporal translation groups in Quantum Mechanics, and the Poincaré Group in Special Relativity. In the end, an application of Lie groups in Classical Field Theory is presented, which is the derivation of the electromagnetic interaction with the  $U(1)$  group. The use of groups in such cases is relevant because the demand of invariance of the laws of Physics under the action of a group makes it easier to find their explicit form.

Key-words: Lie Groups, Lie Algebras, Symmetry.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>4</b>
<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Noções preliminares e motivações</b>	<b>14</b>
1.1 O conceito de Grupo . . . . .	14
1.2 Exemplos e comparações . . . . .	17
1.3 Noção de Variedade . . . . .	22
<b>2 Grupos de Lie e Álgebras de Lie</b>	<b>25</b>
2.1 Grupos contínuos . . . . .	25
2.2 Espaço tangente e geradores . . . . .	27
2.3 Álgebras de Lie . . . . .	29
2.4 Formalismo para Grupos de Lie . . . . .	35
2.5 Classificação de grupos de matrizes . . . . .	36
<b>3 Alguns grupos de Lie relevantes para a Física</b>	<b>38</b>
3.1 O grupo $U(1)$ . . . . .	38
3.2 O grupo $SO(2)$ . . . . .	39
3.3 O grupo $SO(3)$ . . . . .	41
3.4 O grupo $SU(2)$ . . . . .	43
3.5 O grupo $O(1,1)$ . . . . .	45
3.6 O grupo $SO(1,3)$ . . . . .	49
<b>4 Grupos na Mecânica Clássica</b>	<b>52</b>
4.1 Leis de conservação . . . . .	53
4.2 Homogeneidade espacial e conservação do momento linear . . . . .	55

4.3	Isotropia do espaço e conservação do momento angular . . . . .	57
4.4	Simetria temporal e conservação da energia . . . . .	60
4.5	Grupo dos <i>boosts</i> de Galileu . . . . .	62
4.6	Grupo Geral de Galileu e Referenciais Inerciais . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Grupos na Mecânica Quântica</b>	<b>68</b>
5.1	Álgebra dos Operadores . . . . .	68
5.2	Álgebra dos operadores momento linear e translações . . . . .	69
5.3	Álgebra dos operadores momento angular e rotações . . . . .	71
5.4	Grupo dos operadores de evolução temporal . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Grupos na Teoria da Relatividade</b>	<b>74</b>
6.1	O Grupo de Lorentz em uma dimensão . . . . .	75
6.2	O Grupo de Lorentz em 3 dimensões . . . . .	79
6.3	O Grupo de Poincaré e a Geometria do Espaço-Tempo . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Simetrias de Gauge em Teorias de Campos</b>	<b>88</b>
7.1	Teorias de Campos . . . . .	89
7.2	Eletromagnetismo Clássico . . . . .	92
7.3	Transformações de Gauge na equação de Schrödinger . . . . .	98
7.4	Construção da interação eletromagnética a partir do grupo $U(1)$ . . . . .	101
	<b>Considerações Finais</b>	<b>105</b>



# Lista de Figuras

1.1	Rotação de uma carta de baralho . . . . .	14
1.2	Carta de baralho espelhada . . . . .	15
1.3	Triângulo de Sierpinski . . . . .	15
1.4	Rotação de um vetor . . . . .	21
1.5	Gráfico da função $\cos(x)$ . . . . .	22
1.6	Função de Weierstrass . . . . .	23
1.7	Esfera . . . . .	23
1.8	Paraboloide . . . . .	24
1.9	Planos tangentes a esfera . . . . .	24
2.1	Sophus Lie . . . . .	25
2.2	Grupo dos complexos unitários . . . . .	26
2.3	Geradores de um grupo de Lie . . . . .	28
2.4	Produto vetorial . . . . .	30
2.5	Esquema visual para calcular o produto vetorial entre os versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . . . . .	31
2.6	Circunferência unitária e da reta real . . . . .	35
3.1	Grupo $U(1)$ . . . . .	39
3.2	3-esfera . . . . .	44
3.3	Grupo $O(1, 1)$ . . . . .	47
3.4	Rotação hiperbólica . . . . .	48
4.1	Princípio da Mínima Ação . . . . .	52
4.2	Espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$ . . . . .	53
4.3	Emmy Noether . . . . .	54
4.4	Coordenadas cilíndricas e esféricas . . . . .	58
4.5	Momento angular $\vec{L}$ . . . . .	59
4.6	Galileu Galilei . . . . .	62
4.7	Transformação de Galileu . . . . .	63
6.1	Transformações de Lorentz como rotações . . . . .	79

6.2	Cone de Luz . . . . .	84
6.3	Hermann Minkowski . . . . .	85
7.1	Hermann Weyl . . . . .	89
7.2	Paul Dirac . . . . .	90

# Lista de Tabelas

1.1	Possíveis combinações de operações do grupo composto pelo elemento 1 e $(-1)$ . . . . .	18
1.2	Possíveis combinações de operações do grupo composto pelos números pares e ímpares . . . . .	19
2.1	Classificação de alguns tipos de matrizes . . . . .	36
2.2	Classificação de alguns grupos de matrizes . . . . .	37
4.1	Simetrias e leis de conservação . . . . .	54
7.1	Interações fundamentais e seus respectivos Grupos de Lie . . . . .	103
7.2	Leis da física e respectivos grupos . . . . .	105

# Introdução

No estudo da natureza, é útil introduzir certas ideias matemáticas para representar noções abstratas. Os números, por exemplo, foram criados para representar a ideia de quantidade. Um conjunto de duas laranjas não é o mesmo que um de duas maçãs, mas a quantidade é a mesma e se encontra associada ao número 2. De forma análoga, os vetores foram criados para representar deslocamentos e as funções para representar relações entre grandezas.

Uma outra noção abstrata muito comum na natureza é a de simetria, relacionada a propriedades de objetos que não mudam quando esses sofrem certos tipos de transformações. Um cilindro, por exemplo, é simétrico por rotações em torno de seu eixo, uma vez que mantém a mesma forma quando rotacionado em torno de seu eixo, porém não é simétrico quando rotacionado em torno de um eixo transversal.

A simetria é algo muito presente na natureza, aparecendo em diversos padrões biológicos - como nossos próprios rostos - ou em formações naturais - como [flocos de neve](#). Da mesma forma, a simetria é algo recorrente em diversos sistemas estudados na Física, sendo interessante conhecê-las, uma vez que isso nos dá o conhecimento de quais transformações não os alteram, permitindo trabalhar com a forma mais simples para a análise.

Assim como as de ideias quantidade, deslocamentos e relações podem ser representadas matematicamente, as simetrias também podem. Os objetos que fazem isso recebem o nome de grupos, sendo definidos como conjuntos que satisfazem algumas propriedades. Dessa forma, um bom entendimento de teoria de grupos facilita o estudo de simetrias e, conseqüentemente o estudo de muitos fenômenos físicos.

No caso dos sistemas estudados em Física, é comum se encontrar as chamadas simetrias contínuas, modeladas por um tipo específico de grupo conhecido como grupos de Lie. Em particular, tais grupos podem ser usados para descrever propriedades de invariância das leis da Física, tornando assim mais fácil encontrar a forma dessas leis, fato que ocorre desde a Mecânica Clássica até a Mecânica Quântica e Relatividade. Um exemplo de grande sucesso da aplicação de teoria de grupos na Física é oferecer uma forma simples de encontrar as leis matemáticas que descrevem as interações fundamentais da natureza, conseguindo prever muitos resultados observados nos aceleradores de partículas modernos. Dessa forma, o estudo de teoria de grupos é extremamente interessante e relevante, motivando o desenvolvimento deste trabalho.

A apresentação deste texto está exposta da seguinte forma: No Capítulo 1 é feita uma introdução às noções matemáticas de grupos e variedades. Neste capítulo damos um enfoque para os exemplos e para o fato de que objetos aparentemente distintos podem ser entendidos como aspectos de um mesmo grupo. No Capítulo 2, unimos as noções de grupo

e variedade para apresentar a noção de grupos de Lie e sua relação com as álgebras de Lie, que representam propriedades infinitesimais dos grupos associados. Com o objetivo de introduzir as ferramentas matemáticas e depois focar apenas em aplicações físicas, no Capítulo 3 apresentamos alguns exemplos importantes de grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie que aparecem na Física.

Com as principais ferramentas apresentadas, dedicamos os próximos capítulos a mostrar os diferentes contextos em que os grupos de Lie são encontrados na Física. No Capítulo 4, apresentamos os grupos da Mecânica Clássica, sendo demonstrado que estes são apenas partes de um grupo maior chamado Grupo de Galileu - que representa as principais simetrias da Mecânica Clássica - e a partir dele construímos a lagrangiana para partículas clássicas livres. No Capítulo 5, construímos os principais grupos da Mecânica Quântica a partir das álgebras de Lie dos operadores sobre o comutador. No Capítulo 6 estudamos as transformações de Lorentz da Teoria da Relatividade no contexto da teoria de grupos, com tal método sendo usado para obter um entendimento mais profundo da geometria do espaço-tempo relativístico. Por fim, no Capítulo 7 estudamos as chamadas simetrias de gauge, definidas como simetrias que ocorrem em Teorias de Campos. Foi apresentado um método para descrever interações fundamentais baseadas nos grupos associados a elas e, como exemplo, construímos a interação eletromagnética a partir do grupo  $U(1)$ .

# Capítulo 1

## Noções preliminares e motivações

Neste capítulo, será estudada a ideia de grupo, com enfoque em exemplos. O objetivo será mostrar que objetos muito distintos podem apresentar semelhanças quando analisados como grupos. Por fim, é apresentada a noção de variedade e como analisar se um conjunto é ou não uma variedade.

### 1.1 O conceito de Grupo

Ao se analisar alguns sistemas, podemos ver que estes não são afetados por certos tipos de transformações. Uma carta de baralho, por exemplo, não muda quando rotacionada em  $180^\circ$ , como pode-se ver na Figura 1.1. É importante ressaltar que nem todas as transformações preservam a simetria de um sistema, a mesma carta ser submetida a uma reflexão, ela não mantém a mesma forma, o que pode ser visualizado na Figura 1.2, e portanto as reflexões não são simetrias em cartas de baralho.

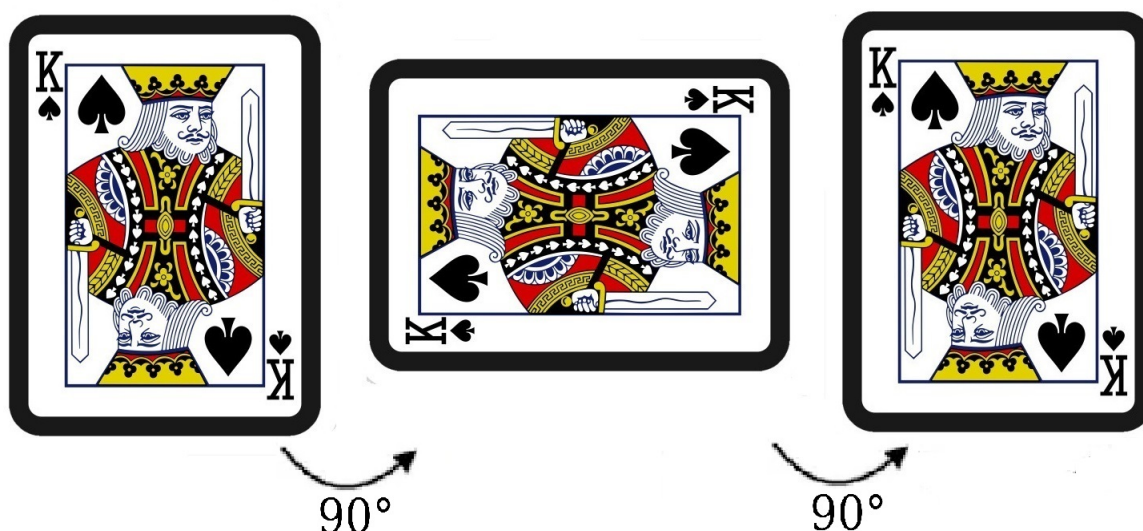


Figura 1.1: rotação de uma carta de baralho. Imagem feita pelo autor no site [Lucid.app](#) [Inc08].

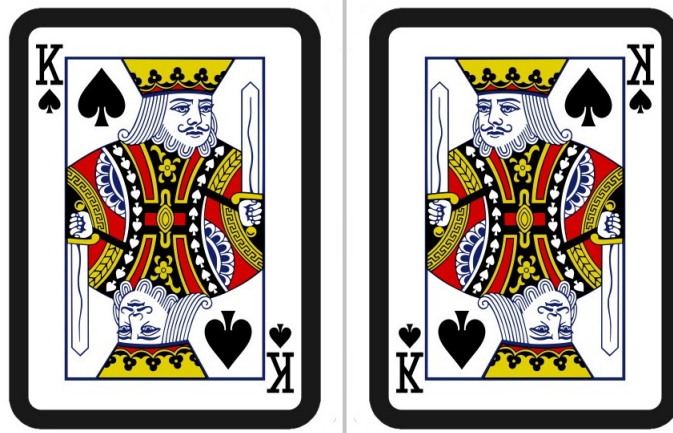


Figura 1.2: carta de baralho espelhada. Feito pelo autor no site [Lucid.app](https://lucid.app).

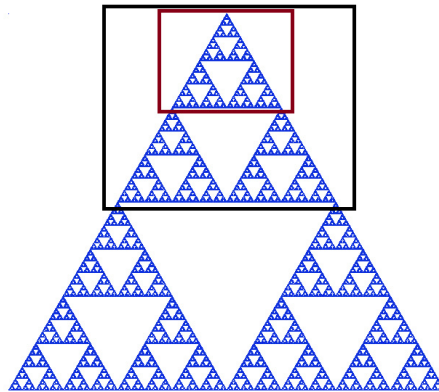


Figura 1.3: triângulo de Sierpinski. Fonte: [Coding, math, art](#).

Além das rotações e reflexões existem vários outros tipos de transformações que podem ser simetrias, como por exemplo transformações por escala, como o caso do triângulo de Sierpinski da Figura 1.3. Entretanto, nem todas as simetrias são visuais. Por exemplo, ao se somar uma fase de  $2\pi$  na função cosseno, está se mantém invariante

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad (1.1.1)$$

ou seja, a função cosseno é simétrica com relação a esta transformação. Em particular, esta simetria ainda pode ser visualizada graficamente como deslocar a função por  $2\pi$ , porém este nem sempre é o caso para simetrias definidas algebricamente.

Ao estudar um sistema físico, é conveniente entender suas simetrias, pois isso permite ter uma ideia da liberdade que temos de modificar a forma que o estudamos sem afetar seu comportamento. Isso nos permite usar tais simetrias para analisar o sistema da forma mais simples possível, sem perder informações. Como exemplos, podemos citar o ato de calcular as órbitas de planetas: pode-se calculá-las tanto em relação à Terra, ou em relação ao Sol, o que facilita muito o processo.

Como ressaltado, as simetrias podem ser extremamente abstratas, como veremos quando forem analisadas as aplicações Físicas em capítulos posteriores. Isso eventual-

mente pode tornar complicado de se trabalhar diretamente com elas. Com tais observações em mente, torna-se relevante identificar as propriedades compartilhadas por todas as simetrias. É nesse contexto que é conveniente definir a noção de um grupo, pois é algo comum a todas as simetrias. Para fazer isso, vamos analisar um exemplo motivacional.

**Exemplo 1.1.1. Resolução de uma equação do 1º grau.**

Ao resolver um sistema numérico, normalmente somamos números de ambos os lados, porém preservando a relação de igualdade. Para perceber isso, vamos resolver um, porém explicitando os passos [Soc13]:

$$x + 1 = 2, \tag{1.1.2a}$$

$$(x + 1) + (-1) = 2 + (-1), \tag{1.1.2b}$$

$$x + (1 - 1) = 1, \tag{1.1.2c}$$

$$x + 0 = 1, \tag{1.1.2d}$$

$$\implies x = 1, \tag{1.1.2e}$$

note que cada operação realizada preservou a igualdade, mantendo uma simetria da equação.

Ao realizar cada passo, foi necessário que, em ordem [Soc13]:

1. O resultado de uma soma de números seja também um número;
2. O fato de podermos realizar a operação de soma em qualquer ordem, conhecido como **associatividade**;
3. O fato de um número mais seu oposto resultar em zero, propriedade conhecida como **existência do elemento inverso**;
4. Ao somar um número com zero(0), o resultado ser o próprio número. Devido a isso, chamamos o zero de **elemento neutro** da soma;

Existem vários outros conjuntos com as mesmas propriedades, com alguns exemplos simples sendo [GM01]:

1. Os números reais  $\mathbb{R}$  e complexos  $\mathbb{C}$  sobre a soma usual  $+$ ;
2. Os números reais  $\mathbb{R}$  e complexos  $\mathbb{C}$  menos o 0 (pois ele não possui inverso) sobre o produto usual  $\cdot$ ;
3. As matrizes quadradas invertíveis  $N \times N$  sobre o produto matricial;

Dessa forma, para estudar conjuntos com tais propriedades quando equipados com uma operação  $\bullet$ , podemos abstrair tais ideias, e chamar qualquer conjunto que as satisfaça de um **grupo**. Formalmente, um grupo é um conjunto  $G$  equipado com uma operação  $\bullet$ , que possui as seguintes propriedades [GM01][Soc13]:



1. **Operação interna:** se  $g_1, g_2 \in G$ , então  $g_1 \bullet g_2 \in G$ , isto é, operações entre elementos do grupo resultam em elementos do grupo;

2. **Associatividade:** se  $g_1, g_2, g_3 \in G$  então

$$(g_1 \bullet g_2) \bullet g_3 = g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3),$$

ou seja, a **ordem das operações** entre os elementos não importa;

3. **Elemento Neutro:** existe  $1 \in G$  tal que para todo  $g \in G$ ,

$$g \bullet 1 = 1 \bullet g = g,$$

em outras palavras, sempre existe um elemento do grupo que não afeta os outros elementos;

4. **Elemento oposto:** para todo  $g \in G$ , existe  $g^{-1} \in G$  tal que

$$g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = 1,$$

dessa forma, para todo elemento, existe um oposto e, ao combinar os dois, o resultado é o elemento neutro;

Note que em grupos não se exige a propriedade de comutatividade

$$g_1 \bullet g_2 = g_2 \bullet g_1,$$

isto é, de poder trocar a **ordem dos elementos** nas operações. Esta contrasta com a associatividade, a qual permite a troca da ordem das operações, mas não dos elementos. Grupos em que a comutatividade é válida são chamados de grupos abelianos, enquanto aqueles onde ela não é válida são chamados de não-abelianos.

Neste momento é válido refletir sobre a vantagem de se fazer uma definição para conceitos tão simples. A tal questionamento pode-se argumentar o seguinte: explicitar tais propriedades nos permitirá aplicar as mesmas noções para diferentes conjuntos e objetos mais abstratos, que a princípio seriam complicados de se trabalhar. Isso facilitará o posterior estudo de simetrias mais complexas observadas na natureza. Deve-se ressaltar também que a forma da operação  $\bullet$  não foi especificada: qualquer operação que satisfaça as propriedades de grupo, por mais abstrata que seja, consistirá um grupo. Além disso, a notação  $\bullet$  para a operação foi usada nessa seção para dar enfoque a ela, a qual não será mais usada adiante.

## 1.2 Exemplos e comparações

A fim de assimilar melhor a noção de grupo, vamos analisar mais a fundo alguns exemplos e perceber como alguns grupos se comportam de maneira muito similar, apesar de inicialmente serem formados por objetos muito distintos

**Exemplo 1.2.1.** *Jogo de sinais, números pares e ímpares.*

*Considere o conjunto composto pelos números 1 e  $-1$ ,  $\{1, -1\}$ . Sob a multiplicação usual  $\times$ , esse conjunto forma um grupo, pois:*

1. A operação é interna, os resultados de operações no conjunto são também elementos dele. As diferentes combinações de elementos do grupo se encontram organizadas na tabela<sup>1</sup> 1.1 .

Tabela 1.1: possíveis combinações de operações do grupo composto pelo elemento 1 e (-1).

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

2. A associatividade é herdada dos números reais;
3. O número 1 atua como a identidade;
4. O número 1 é seu próprio inverso, assim como -1, pois  $1 \times 1 = 1$  e  $(-1) \times (-1) = 1$ ;

Vamos considerar também um outro grupo, completamente diferente, composto pela classe de números pares cujos membros são da forma  $x = 2n$  e pela classe de números ímpares  $x = 2n + 1$ , com  $n$  qualquer [Flo16a]. Por exemplo:

$$8 \text{ é par com } n = 4, \text{ pois } 8 = 2 \cdot 4, \quad (1.2.1a)$$

$$5 \text{ é ímpar com } n = 2, \text{ pois } 5 = 2 \cdot 2 + 1. \quad (1.2.1b)$$

Deve-se ressaltar, entretanto, que os elementos do conjunto são apenas as duas classes, e não os números em si. Esse conjunto, equipado com a soma, também forma um grupo, pois

1. Soma de números pares ou ímpares será um número par ou ímpar;
2. A associatividade é herdada da soma usual;
3. O inverso de um número ímpar é um número ímpar, e o inverso de um par é um par, pois:

$$(2n_1 + 1) + (2n_2 + 1) = 2(n_1 + n_2 + 1) - \text{número par} \quad (1.2.2a)$$

$$(2n_1) + (2n_2) = 2(n_1 + n_2) - \text{número par} \quad (1.2.2b)$$

4. Os números pares  $P$  atuam como elemento neutro, pois ao somar um par com um ímpar, o resultado é ímpar, e ao somar um par com um par, o resultado é par:

$$(2n_1 + 1) + (2n_2) = 2(n_1 + n_2) + 1 - \text{número ímpar}, \quad (1.2.3a)$$

$$(2n_1) + (2n_2) = 2(n_1 + n_2) - \text{número par}. \quad (1.2.3b)$$

Com isso, podemos escrever as possíveis combinações de operações na Tabela 1.2.

---

<sup>1</sup>Tabelas como esta são conhecidas como tabelas de Cayley, com a operação do grupo sendo indicada no canto superior esquerdo [Soc13].

Tabela 1.2: possíveis combinações de operações do grupo composto pelos números pares e ímpares.

+	P	I
P	P	I
I	I	P

Comparando as Tabelas 1.1 e 1.2, pode-se ver que os dois grupos possuem a mesma estrutura se considerarmos 1 equivalente aos números pares e  $-1$  aos números ímpares. Desta forma, dois conjuntos completamente diferentes apresentam a mesma estrutura, se analisados como grupos.

Quando uma situação assim acontece, dizemos que os dois grupos são **isomorfos**, o que significa que trabalhar com um ou com outro é equivalente. No caso, identificamos os dois grupos como sendo o grupo  $\mathbb{Z}(2) = \{1, -1\}$ .

Isso significa que uma soma é equivalente a um produto nessas condições. Obviamente, as operações aqui escolhidas são simples, mas relações de tal tipo podem ser muito úteis para computar operações em um grupo mais complicado tomando um mais simples como equivalente.

### Exemplo 1.2.2. Grupos de funções.

O conjunto de funções reais bijetoras  $G = \{f|f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  é um grupo sob a operação de composição  $\circ$  de funções:

1. A composição de duas funções bijetoras  $f(x) \circ g(x) = h(x)$  é também bijetora;
2. Para  $f(x), g(x), h(x)$  bijetoras, vale que:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \quad (1.2.4)$$

que garante a associatividade;

3. A função identidade  $e(x) = x$  atua como elemento neutro;
4. O elemento inverso é dado pela função inversa:  $f(x) \circ f^{-1}(x) = e(x)$ , com o fato de as funções serem bijetoras sendo necessário para garantir a existência da inversa;

É relevante apontar que tal grupo é não abeliano. Tome, por exemplo,  $f(x) = x + 1$  e  $g(x) = 2x$ , então:

$$f(x) \circ g(x) = f(g(x)) = (2x) + 1 = 2x + 1, \quad (1.2.5a)$$

$$g(x) \circ f(x) = g(f(x)) = 2(x + 1) = 2x + 2, \quad (1.2.5b)$$

que são diferentes, ou seja, a comutatividade não vale para grupos de funções.

As simetrias referidas anteriormente podem ser pensadas como funções, que levam um sistema de uma configuração para outra. Nesse sentido, pode-se considerar os grupos de simetria como grupos de funções.

### Exemplo 1.2.3. Grupos das matrizes quadradas.

O conjunto das matrizes quadradas  $N \times N$  invertíveis, ou equivalentemente com determinante não nulo forma um grupo sob a operação de multiplicação matricial [GM01]:

1. O produto matricial de matrizes quadradas de ordem  $N$  é também uma matriz quadrada da mesma ordem;
2. A associatividade é garantida pela seguinte propriedade da multiplicação matricial

$$(AB)C = A(BC), \quad (1.2.6)$$

válida para quaisquer matrizes  $A, B, C$ ;

3. O elemento neutro é a matriz identidade  $I$ , pois  $\det I \neq 0$  e

$$AI = IA = A,$$

para qualquer matriz  $A$ ;

4. O elemento inverso é dado pela matriz inversa, pois  $MM^{-1} = I$ , em que  $I$  é a matriz identidade, com o fato de as matrizes serem invertíveis sendo necessário para garantir esta propriedade;

Este grupo é conhecido como grupo geral linear de ordem  $N$ , identificado como  $GL(N, \mathbb{K})$ , em que  $\mathbb{K}$  é o conjunto das entradas das matrizes, que neste trabalho será tomado como os reais  $\mathbb{R}$  ou os complexos  $\mathbb{C}$ .

É interessante apontar que as matrizes quadradas podem ser pensadas como transformações lineares entre espaços vetoriais de mesma dimensão, sendo essencialmente funções.

### Exemplo 1.2.4. O grupo de rotações no plano.

Considere a rotação de um vetor  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$  no plano  $xy$  no sentido anti-horário, da maneira vista na Figura 1.4. Se a rotação for de um ângulo  $\theta$  arbitrário, então as novas coordenadas do vetor são:

$$v'_x = \cos \theta v_x - \text{sen } \theta v_y, \quad (1.2.7a)$$

$$v'_y = \text{sen } \theta v_x + \cos \theta v_y, \quad (1.2.7b)$$

observando a Figura 1.4, também pode-se ver que rotações não alteram o módulo  $|\vec{v}|$  do vetor, deixando a seguinte equação invariante

$$x^2 + y^2 = |\vec{v}|^2, \quad (1.2.8)$$

ou seja, são transformações de simetria de uma circunferência de raio  $|\vec{v}|$ .

Para mostrar que o conjunto dessas transformações realmente forma um grupo, poderia-se analisar explicitamente a forma anterior, porém isso seria muito trabalhoso.

Esse trabalho pode ser facilitado se notarmos que elas são equivalentes à seguinte multiplicação matricial:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (1.2.9)$$

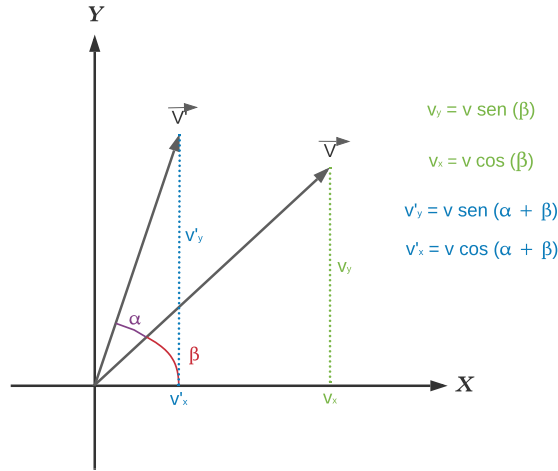


Figura 1.4: rotação de um vetor (cujo ângulo inicialmente é  $\beta$ ) por um ângulo  $\alpha$  no plano  $xy$ . Imagem feita pelo autor no site [Lucid.app](https://lucid.app).

Portanto, os elementos do grupo podem ser representados por matrizes, que identificaremos como **matrizes de rotação**, vinculadas a um parâmetro identificado como o ângulo  $\theta$ :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.2.10)$$

com isso, verificar os axiomas de grupo torna-se simples:

1. ao multiplicar duas matrizes de rotação, obtemos:

$$\begin{aligned} M(\theta_1)M(\theta_2) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 & -(\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2) \\ \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

note que o cosseno e seno de uma soma de ângulos são dados por

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2, \quad (1.2.12a)$$

$$\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2, \quad (1.2.12b)$$

o que nos permite reconhecer o lado direito como uma rotação por  $\theta_1 + \theta_2$ :

$$M(\theta_1 + \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 & -(\text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2) \\ \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.2.13)$$

e que também permite expressar

$$M(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1)M(\theta_2) \quad (1.2.14)$$

ou seja, que uma composição de rotações equivale à uma rotação pela soma dos ângulos, que concorda com nossa intuição sobre rotações, e que também mostra que o grupo é abeliano;

2. a associatividade é garantida pelo fato de o grupo se basear em uma multiplicação de matrizes, sendo um caso particular do exemplo anterior;
3. a matriz inversa da matriz  $M(\theta)$  é obtida com  $M^{-1} = M(-\theta)$ , equivalendo a girar no sentido oposto e que também concorda com nossa intuição;
4. a identidade equivale à uma matriz de rotação com  $\theta = 0$ , com a matriz identidade sendo obtida nesse caso;

Como pode-se notar, as rotações no plano formam um grupo, pois podem ser representadas por matrizes que satisfazem tais propriedades. Entretanto, é válido ressaltar que as rotações **não** são as matrizes, pois elas sozinhas não carregam o significado geométrico de rotações, pois são caracterizadas pela aplicação de  $M(\theta)$  em um vetor  $\vec{v}$ .

O que ocorre é que um conjunto de objetos abstratos pode ser melhor entendido se estudado como matrizes equivalentes a ele. Quando um grupo é representado por um subgrupo do grupo de matrizes, o último é dito uma **representação** do primeiro. Dessa forma, para facilitar o estudo de grupos abstratos, analisaremos representações destes, pois as matrizes são mais simples de se operar na maioria dos casos.

### 1.3 Noção de Variedade

Além do conceito de grupo, para se estudar simetrias, também é necessário um outro conceito independente, o de variedade. Uma variedade é basicamente um conjunto que localmente se parece com os reais  $\mathbb{R}^n$  em alguma dimensão  $n$ , isto é, que em escalas pequenas, se parece com os reais [Car].

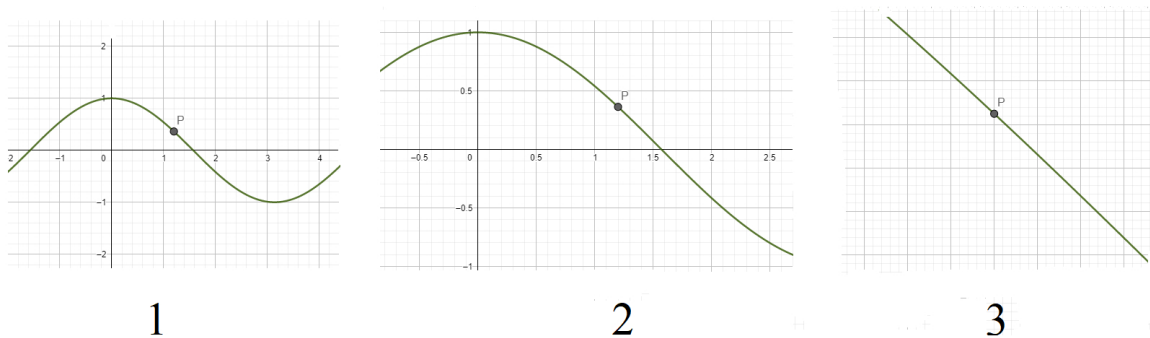


Figura 1.5: gráfico da função  $\cos(x)$ . Exceto se mencionado o contrário, todas as imagens desta seção foram feitas pelo autor usando o software [Geogebra](#) [HH02].

Como exemplos de variedades, podemos citar as curvas dos gráficos de funções bem comportadas, como por exemplo a função  $f(x) = \cos(x)$ , que em pequenas escalas se parece com a reta real, assim como mostrado na Figura 1.5. O mesmo se aplica para várias funções, mas nem todas são variedades, assim como notado na Figura 1.6.

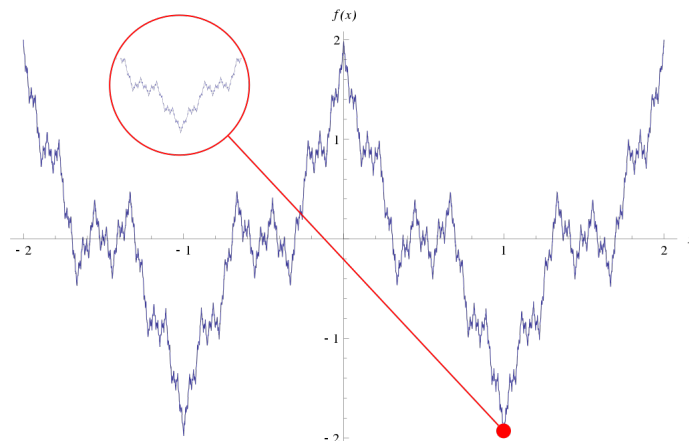


Figura 1.6: função de Weierstrass. Note que ela mantém a mesma forma ao receber um zoom. Fonte: [Wikipédia](#).

As funções reais de uma variável bem comportadas são variedades de dimensão 1, pois se assemelham à reta real. Mais interessantes ainda são as variedades bidimensionais, com exemplos sendo superfícies bidimensionais como a esfera vista na Figura 1.7, bem como funções de duas variáveis  $f(x, y)$  bem comportadas.

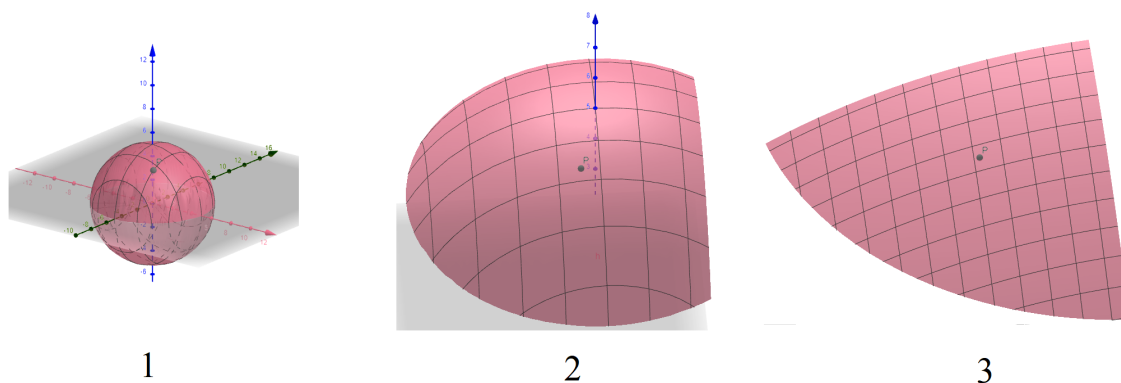


Figura 1.7: uma esfera vista de diferentes distâncias. Ela se trata de uma variedade de dimensão 2, pois ao nos aproximarmos de um ponto  $P$  (2), vemos que a vizinhança ao redor dele se aproxima cada vez de um plano, (3), assemelhando-se ao  $\mathbb{R}^2$ .

Para tais funções, a cada ponto  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pode-se definir um plano tangente à função com a expansão em série de Taylor em primeira ordem [Lei86]:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P (y - y_0), \quad (1.3.1)$$

que constitui uma superfície definida por dois parâmetros  $x$ , e  $y$ , que é um plano por ser linear em ambas as variáveis.

**Exemplo 1.3.1. Planos tangentes a um parabolóide.**

Na (1.3.1), podemos tomar  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , cujo gráfico é um parabolóide, e calcular os planos tangentes:

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2) + x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) \quad (1.3.2)$$

que pode ser visualizado para diferentes pontos  $P$  na Figura 1.8.

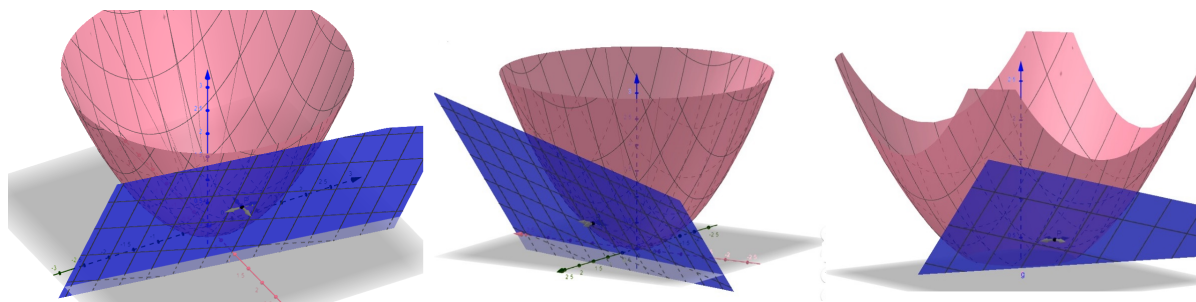


Figura 1.8: gráfico da função  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . As setas indicam pequenos deslocamentos tangentes a cada ponto, sendo proporcionais às derivadas parciais.

O mesmo ocorre para superfícies como a esfera, que pode ser visualizada na Figura 1.9. Tal característica é uma propriedade geral de variedades, que podem possuir um respectivo  $\mathbb{R}^n$  as tangenciando, o qual é conhecido como espaço tangente, se comportando como um espaço vetorial.

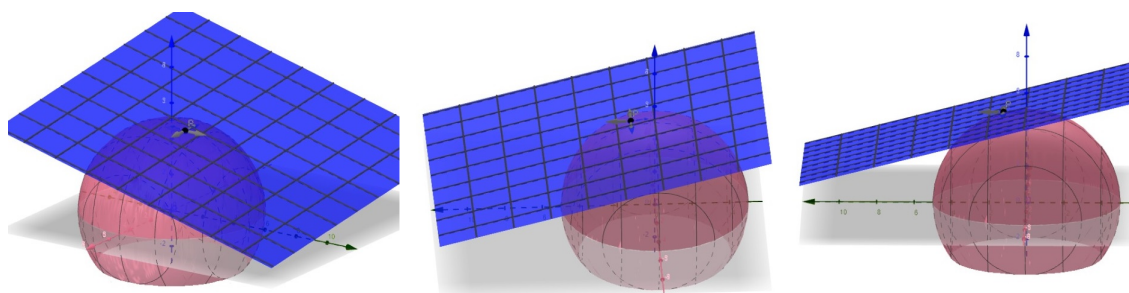


Figura 1.9: planos tangentes a esfera. Apesar de não ser uma função, ela também pode ser aproximada por um plano tangente em cada ponto, pois é uma variedade. Novamente, as setas indicam pequenos deslocamentos sobre a curva.

Até agora, apresentamos os conceitos de grupo e variedade, porém de forma desconexa um do outro. Isso se deve ao fato de os dois conceitos serem independentes. Porém, a categoria de grupos que pretendemos estudar neste trabalho, e cujas aplicações na Física são imensas, une as duas ideias. Estes são os chamados grupos de Lie.



## Capítulo 2

# Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Neste capítulo, serão estudados os grupos contínuos, conhecidos como grupos de Lie. Serão analisadas propriedades gerais destes, com enfoque para a geometria. Será também introduzida a noção de álgebras de Lie e sua conexão com os grupos de Lie, e um método para comparar grupos de Lie usando suas respectivas álgebras de Lie é apresentado. Por fim, faz-se uma classificação de grupos de Lie de matrizes.

### 2.1 Grupos contínuos

O estudo dos grupos contínuos foi iniciado no século XIX pelo matemático Sophus Lie (Figura 2.1), que os analisou no contexto de equações diferenciais, estudando aplicações desses objetos nesta área. Ele também foi o primeiro a perceber que tais grupos podem ser estudados analisando sua versão infinitesimal, as chamadas Álgebras de Lie.



Figura 2.1: Sophus Lie. Fonte: [Wikipédia](#).

Formalmente grupo de Lie é um grupo  $G$  que é também uma variedade. Ou seja, é um conjunto munido com uma operação que satisfaz os axiomas de grupo, mas

cuja estrutura local se assemelha a  $\mathbb{R}^n$ . Com isso em mente, podemos usar as mesmas ideias de variedades para estudar tais grupos, como o uso de parâmetros para representar elementos do grupo [Bar18a].

A ideia de um grupo contínuo deve ficar mais clara com um exemplo. Assim, como já foi apontado, o conjunto dos números complexos (sem o 0) é um grupo sobre a multiplicação usual. Vamos agora analisar um subgrupo importante dos números complexos.

**Exemplo 2.1.1. Números complexos unitários.**

Vamos analisar o conjunto de números complexos cuja norma é 1. Em forma polar, os elementos desse conjunto são da forma geral [GM01][Bar18b]

$$z = e^{i\theta}. \tag{2.1.1}$$

Essa forma analítica é útil para manipulações algébricas, mas esconde o caráter de variedade do conjunto. Para isso, vamos reescrever os elementos como

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \tag{2.1.2}$$

que podem ser representados por pares ordenados cujas coordenadas são  $x = \cos \theta$  e  $y = \sin \theta$ , e que satisfazem

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{2.1.3}$$

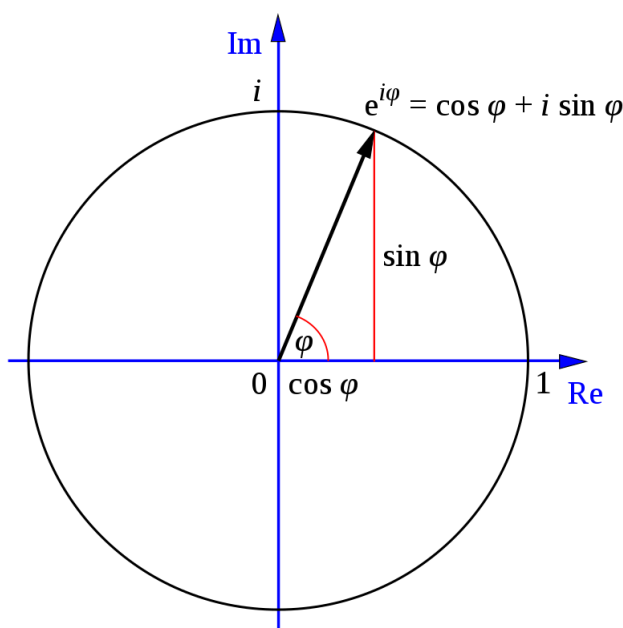


Figura 2.2: grupo dos complexos unitários visto como uma variedade, que é uma circunferência de raio 1. Fonte: [Wikipédia](#).

que é a equação de uma circunferência de raio 1 centrada na origem, como pode-se ver na Figura 2.2. Isso indica que esse grupo pode ser estudado simplesmente como tal curva, com o ângulo  $\theta$  sendo o parâmetro que representa um elemento do grupo sobre ela, o que demonstra que ele é também uma variedade e, portanto, um grupo de Lie.

Entretanto, a noção de um grupo como variedade leva a uma nova questão. No Capítulo 1, mostrou-se como comparar dois grupos por meio de uma tabela com as possíveis combinações entre elementos do grupo. Porém para isso seria necessário construir explicitamente todas as combinações, o que pode ser trabalhoso em alguns casos. Além disso, tal procedimento é inviável para grupos com infinitos elementos, que levariam a infinitas combinações, as quais não podem ser computadas [Flo16a]. Com isso, somos levados a nos perguntar como comparar dois grupos de Lie, que são infinitos devido ao fato de serem contínuos. Para responder a essa pergunta, é necessário analisar outro aspecto dos grupos como variedades, relacionado a deslocamentos infinitesimais sobre tais conjuntos.

## 2.2 Espaço tangente e geradores

Assim como as variedades são localmente parecidas com  $\mathbb{R}^n$ , os grupos de Lie também os são. Para cada ponto, há um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  parecido com sua vizinhança, que é chamado de espaço tangente ao ponto, sendo um espaço vetorial, assim como foi notado no caso da esfera. Esse espaço vetorial, naturalmente, pode ter seus elementos identificados por coordenadas em uma base. No caso das funções, vimos que tais vetores poderiam ser obtidos com o gradiente da função.

Se pensarmos nas variáveis das funções como os parâmetros da variedade, então podemos generalizar essa ideia para um grupo de Lie geral. Suponha que um elemento qualquer  $g$  seja representado por parâmetros  $x_i$ . Então, os elementos que geram o espaço vetorial podem ser obtidos com

$$\mathfrak{g}_i = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_P \quad (2.2.1)$$

em cada ponto  $P$ , sendo semelhantes às coordenadas do gradiente de funções reais. Porém, para que o conjunto seja um grupo, é necessário que ele contenha a identidade, a qual é comumente identificada como possuindo todos os parâmetros  $x_i = 0$ . Assim, nas proximidades da identidade tais elementos seriam dados por

$$\mathfrak{g}_i = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} \quad (2.2.2)$$

e são conhecidos como os **geradores** do grupo de Lie, podendo ser visualizados na Figura 2.3. A princípio, poderia-se pensar que estes seriam úteis apenas nas proximidades da identidade. Entretanto, pode-se demonstrar que estes servem para representar elementos do grupo a partir da chamada aplicação exponencial. Para entendê-la, precisamos antes introduzir a noção de exponencial de uma matriz.

A série de Taylor de uma função exponencial é dada por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (2.2.3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.2.4)$$

Analogamente, define-se a exponencial de uma matriz quadrada  $M$  fazendo  $x \rightarrow M$

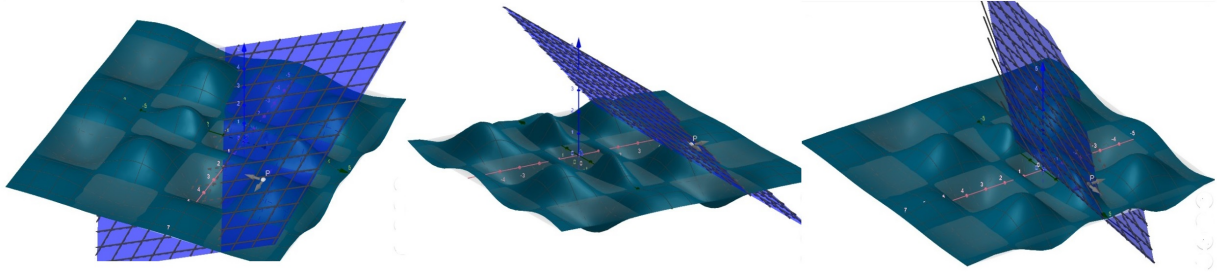


Figura 2.3: geradores de um grupo de Lie. Eles são representados pelas setas tangentes a cada ponto da variedade e geram os espaços tangentes, que são espaços vetoriais. Imagem feita pelo autor usando o software [Geogebra](#).

na expressão anterior [Flo16a]:

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \quad (2.2.5)$$

$$= 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots \quad (2.2.6)$$

visto que o produto de  $n$  vezes uma mesma matriz quadrada,  $M^n$ , é bem definido. Note que tal expressão não necessariamente converge para todas as matrizes.

**Exemplo 2.2.1. Cálculo de exponencial de uma matriz.**

Vamos calcular a exponencial da matriz  $M = Jx$ , em que

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

para isso, é interessante notar que

$$J^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^3 = - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.8)$$

$$J^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.9)$$

ou seja, na 5<sup>a</sup> potência, a matriz original é reobtida, e o ciclo se repete. Pode-se notar também que os termos pares e ímpares serão apenas a matriz identidade e a matriz  $J$  a menos de potências de  $(-1)$ . Dessa forma, a série pode ser separada em duas, uma par e uma ímpar, vezes tais matrizes:

$$e^{xM} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.10)$$

Essas séries representam as funções trigonométricas:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (2.2.11)$$

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (2.2.12)$$

e, ao somar as duas matrizes resultantes, obtemos que:

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Suponha agora um grupo de matrizes em que os elementos sejam dados por

$$M(x_1, x_2, \dots, x_N) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^N h_i x_i \right\}, \quad (2.2.14)$$

com os  $x_i$  sendo os parâmetros do grupo. Os elementos  $h_i$  podem ser obtidos por meio da derivada nas proximidades da identidade:

$$h_i = \left. \frac{\partial M}{\partial x_i} \right|_{x_i=0}, \quad (2.2.15)$$

que é idêntica à forma dos geradores. Portanto, em grupos cujos elementos são uma exponencial da forma (2.2.14), os argumentos da exponencial são justamente os geradores do grupo:

$$M = \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \mathfrak{g}_i x_i \right\}, \quad (2.2.16)$$

relação que é válida para grupos de Lie gerais, e conhecida como aplicação exponencial [Bar18a].

A aplicação exponencial conecta uma propriedade local, infinitesimal do grupo, no caso os geradores, com propriedades globais da variedade. É importante ressaltar que, assim como as derivadas não fornecem todas as informações sobre uma função, os geradores também não determinam totalmente o grupo.

Como um elemento arbitrário do grupo pode ser representado pela aplicação exponencial, isso significa que, caso dois grupos possuam os mesmos geradores, então a estrutura geral de seus elementos é parecida, sendo uma forma viável de comparação entre eles.

Entretanto, deve-se tomar cuidado com tal comparação. Como os geradores são obtidos a partir de derivadas, eles exibem apenas a estrutura local dos grupos, e não necessariamente a global. Obviamente, espaços vetoriais diferentes não podem ser comparados de forma simples, entretanto, pode-se fazer isso com um outro tipo de estrutura, que veremos a seguir.

## 2.3 Álgebras de Lie

Formalmente, uma álgebra de Lie  $\mathcal{A}$  é um espaço vetorial que também possui uma operação interna  $[A, B] = C$ ,  $A, B, C \in \mathcal{A}$  conhecida como colchete de Lie  $[, ]$  que satisfaz as seguintes propriedades [San10] [Bar18a]:

1. Anticomutatividade:  $[A, B] = -[B, A]$  ;
2. Bilinearidade:  $[A, B + \lambda C] = [A, B] + \lambda[A, C]$  e  $[A + \lambda B, C] = [A, C] + \lambda[B, C]$ ;

3. Identidade de Jacobi:  $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ ;

Como um corolário da primeira propriedade, temos que o colchete de Lie de um vetor consigo mesmo é sempre nulo:

$$[A, A] = 0,$$

que, aliada à bilinearidade, também indica que o colchete entre um vetor e um múltiplo escalar é sempre nulo:

$$[A, \lambda A] = \lambda[A, A] = 0,$$

ou seja, em espaços vetoriais de uma dimensão, a Álgebra de Lie é sempre trivial.

**Exemplo 2.3.1.** *Produto vetorial dos vetores no  $\mathbb{R}^3$ .*

*O primeiro exemplo de álgebra de Lie que a maioria dos estudantes tem contato são os vetores do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  sob a operação do produto vetorial  $\times$ , definido para  $\vec{u}, \vec{v}$  quaisquer por:*

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= (u_y v_z - u_z v_y) \hat{i}, \\ &+ (u_z v_x - u_x v_z) \hat{j}, \\ &+ (u_x v_y - u_y v_x) \hat{k}, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

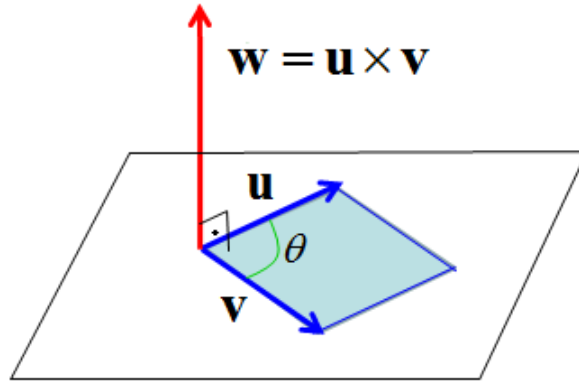


Figura 2.4: produto vetorial. Fonte: [Sharetechnote](#).

com tal operação podendo ser visualizada na Figura 2.4.

Nesse caso, se fizermos o produto vetorial entre vetores da base, obtemos exatamente o outro vetor da base:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \tag{2.3.2}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \tag{2.3.3}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \tag{2.3.4}$$

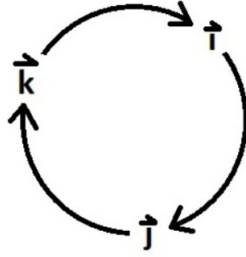


Figura 2.5: esquema visual para calcular o produto vetorial entre os versores  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . Ao percorrer o ciclo no sentido horário, o resultado é positivo, sendo negativo para o anti-horário. Fonte: [Vectorified](#).

ou, de forma geral, o produto vetorial entre o  $i$ -ésimo vetor da base  $\hat{e}_i$  e o  $j$ -ésimo  $\hat{e}_j$  fornece o  $k$ -ésimo  $\hat{e}_k$ , a menos de uma constante (Figura 2.5):

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k, \quad (2.3.5)$$

em que os índices assumem os valores 1, 2, 3, representando as direções  $x, y, z$  e  $\varepsilon_{ijk}$  é conhecido como símbolo de Levi-Civita, definido por [Bal94]:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j, k \text{ formam uma sequência. Ex: } \varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = 1; \\ 0 & \text{se algum dos índices for repetido. Ex: } \varepsilon_{121} = \varepsilon_{122} = 0; \\ -1 & \text{se } i, j, k \text{ formam uma sequência negativa. Ex: } \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1; \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Por exemplo:

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \varepsilon_{121} \hat{e}_1 + \varepsilon_{122} \hat{e}_2 + \varepsilon_{123} \hat{e}_3, \quad (2.3.7)$$

$$= \hat{e}_3. \quad (2.3.8)$$

Relações semelhantes a (2.3.5) são uma característica geral de Álgebras de Lie. De forma geral, ao se tomar o colchete de Lie entre dois vetores da base em um espaço vetorial de dimensão  $N$ , se obtém uma combinação linear dos vetores da base:

$$[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \sum_{k=1}^N f_{ijk} \hat{e}_k, \quad (2.3.9)$$

essas constantes da combinação linear são conhecidas como constantes de estrutura da álgebra, sendo características da Álgebra de Lie estudada. Se tais constantes forem nulas, dizemos que a Álgebra de Lie é trivial e, conseqüentemente o grupo de Lie associado é abeliano [Bar18a].

Matrizes quadradas formam naturalmente espaços vetoriais com a operação de soma de suas entradas. Elas também formam naturalmente álgebras de Lie sob a operação conhecida como comutador entre duas matrizes  $A$  e  $B$ , definido por

$$[A, B] = AB - BA. \quad (2.3.10)$$

Assim como apontado anteriormente, os geradores dos grupos de Lie formam uma base do espaço tangente a cada ponto. Se um grupo de Lie for representado como um espaço de matrizes, então seus geradores naturalmente possuem a estrutura de Álgebra de Lie sob o comutador das matrizes.

Se dois grupos de Lie possuem a mesma Álgebra de Lie de seus geradores, os espaços tangentes são equivalentes. Dessa forma, localmente os dois grupos possuem a mesma estrutura, assim como duas variedades podem se parecer localmente. Tal técnica pode ser usada para apontar semelhanças entre dois grupos de Lie aparentemente distintos.

**Exemplo 2.3.2. Matrizes de rotação e complexos unitários.**

Suponha o grupo gerado pelas matrizes de rotação

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.3.11)$$

o gerador é obtido com

$$\left. \frac{d}{d\theta} M \right|_{\theta=0} = \left. \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.12)$$

cuja álgebra de Lie é trivial, por possuir dimensão 1.

O grupo dos complexos unitários, por outro lado, possui a forma geral de seus elementos sendo

$$z = e^{i\theta}, \quad (2.3.13)$$

que é um grupo formado por matrizes complexas  $1 \times 1$ . O gerador pode ser calculado com

$$\left. \frac{d}{d\theta} z \right|_{\theta=0} = \left. ie^{i\theta} \right|_{\theta=0} = i, \quad (2.3.14)$$

cuja álgebra de Lie também é trivial. Com isso, o espaço vetorial dos geradores é o mesmo e, portanto, a estrutura local dos dois grupos é idêntica. Além disso, se fizermos a identificação

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.15)$$

então

$$e^{i\theta} \leftrightarrow e^{g\theta}, \quad (2.3.16)$$

$$\implies z(\theta) \leftrightarrow M(\theta), \quad (2.3.17)$$

com um complexo unitário sendo equivalente a uma matriz de rotação, o que indica que os dois grupos são isomorfos. Apesar de serem dois objetos matemáticos muito distintos (matrizes reais  $2 \times 2$  e números complexos), o comportamento como grupo é essencialmente o mesmo.

É importante tomar cuidado, pois o fato de a álgebra de Lie dos geradores ser a mesma não significa que necessariamente os dois grupos são isomorfos, como pode-se perceber no próximo exemplo.



### Exemplo 2.3.3. Números reais e complexos unitários.

O conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, é um grupo sobre a operação de soma  $+$ , sendo também uma variedade, a própria reta real. Elementos da reta podem ser indicados com apenas um parâmetro real  $x$ . O que desejamos é compará-lo com o grupo dos números complexos unitários, mas para isso precisamos representar os reais como um grupo de matrizes. Podemos fazer isso com a seguinte função:

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad \rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é uma representação dos reais, pois ela preserva a estrutura do grupo:

$$\begin{aligned} \rho(x)\rho(y) &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \rho(x+y). \end{aligned}$$

Os elementos desta representação são então definidos por um único parâmetro real  $x$ . Podemos então calcular o gerador de tal grupo com

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} &= \left. \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|_{x=0}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

note que um elemento arbitrário do grupo pode ser representado pela aplicação exponencial:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= e^{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}x}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n x^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

notando que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

as potências maiores que 2 portanto se anulam e ficamos com

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, \quad (2.3.18)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.19)$$

que é exatamente a forma original da representação dos reais que escolhemos.

Como o grupo dos números reais possui apenas um gerador, a álgebra de Lie é trivial:

$$[\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}] = 0, \quad (2.3.20)$$

sendo portanto a mesma álgebra de Lie do grupo dos números complexos unitários discutida no exemplo anterior. Dessa forma, os dois grupos possuem a mesma estrutura local, o que faz sentido, pois uma multiplicação de números complexos unitários pode ser visualizada como uma soma de seus argumentos  $\theta$ :

$$z_1 z_2 = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}, \quad (2.3.21)$$

$$= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (2.3.22)$$

que é o mesmo comportamento da soma nos números reais.

Entretanto, isso não garante que o comportamento global é o mesmo. Por exemplo, um número complexo não muda ao ser multiplicado por complexos cujos argumentos são múltiplos inteiros de  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} z e^{i2\pi n} &= e^{i\theta} e^{i2\pi n}, \\ &= e^{i(\theta + 2\pi n)}, \\ &= \cos(\theta + 2\pi n) + i \operatorname{sen}(\theta + 2\pi n), \\ &= \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta), \\ &= z, \end{aligned}$$

que indica uma periodicidade em tal operação, o que em geral não ocorre na soma dos números reais:

$$x \neq x + (2\pi n),$$

para todo  $n$  não nulo.

Geometricamente, isso ocorre pelo fato de o grupo dos complexos unitários visto como variedade ser uma circunferência, que é uma superfície compacta e com condições periódicas de contorno, em contraste com a reta real, a qual é uma reta infinita, com ambas podendo ser visualizadas na Figura 2.6. Dessa forma, vemos que dois grupos de Lie podem possuir a mesma álgebra de Lie, mas não serem isomorfos.

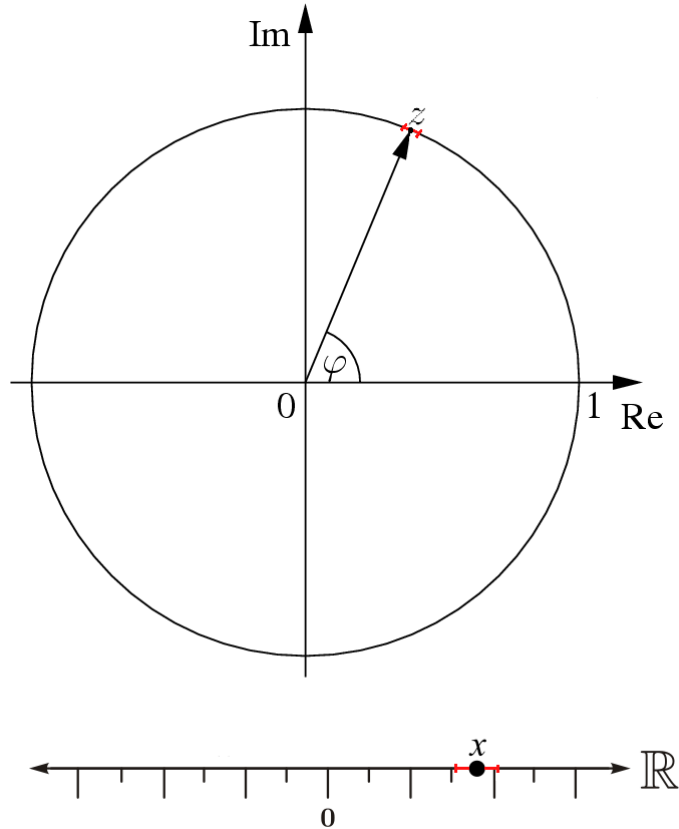


Figura 2.6: circunferência unitária e da reta real. As pequenas vizinhanças de cada ponto, destacadas em vermelho, são muito parecidas nos dois conjuntos, mas globalmente eles possuem propriedades muito diferentes. Fonte: o autor.

Dessa forma, pode-se perceber a importância de conhecer os geradores de um grupo de Lie, pois podem mostrar também conexões entre grupos distintos.

## 2.4 Formalismo para Grupos de Lie

Aqui será desenvolvido um formalismo geral para grupos de Lie [Bar18a], indicando os objetos que estaremos interessados em analisar para cada grupo. São eles:

1. A forma geral dos elementos do grupo em função dos parâmetros:  $g = g(x_i)$ ;
2. Representação do grupo como variedade;
3. A dimensão, representada pelo número de parâmetros  $x_i$  ou equivalentemente pelo número de geradores;
4. Os geradores, dados por

$$\mathfrak{g}_i = \frac{\partial g}{\partial x^i};$$

5. As relações de comutação dos geradores:

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \sum_{k=1}^N f_{ijk} \mathfrak{g}_k$$

em que os  $f_{ijk}$  são as constantes de estrutura da álgebra.

No Capítulo 3, aplicaremos o formalismo aqui desenvolvido para alguns grupos de matrizes. Antes, porém, apresentaremos uma classificação desses grupos.

## 2.5 Classificação de grupos de matrizes

Conforme mencionado no Capítulo 1, uma representação é uma função  $\rho$  que liga um grupo  $G$  a um subgrupo do grupo  $GL(n, \mathbb{K})$ , mas que também preserva a estrutura de grupo, ou seja:

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(n, \mathbb{K}), \\ \rho(g_1 \bullet g_2) &= \rho(g_1) \bullet \rho(g_2), \text{ com } g_1, g_2 \in G, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

em outras palavras, em vez de trabalhar com grupos abstratos, transformamos isso em operações com matrizes, com as quais sabemos fazer cálculos. Nesse sentido, em vez de se trabalhar diretamente com os grupos, trabalharemos com suas formas matriciais, ou seja, com representações destes, o que é conhecido como teoria de representações.

Com tais considerações, é útil se definir alguns tipos de matrizes, pois as representações dos grupos que analisaremos serão grupos de matrizes com estas propriedades, as quais se encontram no Quadro 2.1 [Oli06], em que a conjugada de uma matriz de entradas complexas se refere a tomar o complexo conjugado de suas entradas.

Tabela 2.1: classificação de alguns tipos de matrizes.

Tipo	Entradas	Propriedade	
Ortogonais	$\mathbb{R}$	Matriz transposta igual à inversa	$M^T = M^{-1}$
Especiais	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	Determinante igual a 1	$\det M = 1$
Unitárias	$\mathbb{C}$	Matriz transposta conjugada é igual à inversa	$(M^T)^* = M^{-1}$

Como essa classificação é muito geral, é instrutivo analisar alguns exemplos.

### Exemplo 2.5.1. Matrizes ortogonais, especiais e unitárias.

Para tornar a classificação menos abstrata, seguem exemplos de cada tipo de matriz:

1. *Matriz ortogonal:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ pois } A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ &e \quad AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

2. *Matriz especial:*

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ pois } \det B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot 1 = 1. \quad (2.5.3)$$

3. *Matriz unitária:*

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois } (C^T)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.4)$$

$$\text{e } C(C^T)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.5)$$

sendo também interessante apontar que a matriz identidade de qualquer tamanho  $N$  é ortogonal, especial e unitária.

Baseado na classificação do Quadro 2.1, é comum também classificar grupos de matrizes de forma semelhante, que se encontra na tabela 2.2.

Tabela 2.2: classificação de alguns grupos de matrizes.

Notação	Nome	Características das matrizes
$O(N)$	Grupo ortogonal de ordem $N$	Ortogonais
$SO(N)$	Grupo especial ortogonal de ordem $N$	Ortogonais e especiais
$U(N)$	Grupo unitário de ordem $N$	Unitárias
$SU(N)$	Grupo especial unitário de ordem $N$	Unitárias e especiais

Obviamente, tal classificação é também muito geral. Para melhor visualizar tais propriedades, no próximo capítulo faremos a análise de alguns casos particulares usando o formalismo desenvolvido na seção 2.4, que também são interessantes por serem representações dos grupos que estudaremos na Física.

# Capítulo 3

## Alguns grupos de Lie relevantes para a Física

Neste capítulo, iremos analisar alguns exemplos importantes de grupos de Lie de matrizes. Por enquanto, estamos interessados nesses grupos apenas como objetos abstratos e as aplicações Físicas se tornarão claras nos próximos capítulos. Isso foi feito com o objetivo de não carregar as discussões relacionadas a aplicações de tais grupos na Física.

### 3.1 O grupo $U(1)$

O grupo  $U(1)$  é o grupo de todas as matrizes  $1 \times 1$  de uma única entrada complexa cuja transposta conjugada é igual à inversa [Bar18b]. Como tais matrizes possuem apenas uma entrada complexa  $z$ :

$$M = z, \tag{3.1.1}$$

a matriz complexa conjugada possui entrada única  $\bar{z}$ , e a condição é

$$z\bar{z} = 1, \tag{3.1.2}$$

em que o lado esquerdo é o módulo ao quadrado do complexo  $z$ . Dessa forma, vemos que esse grupo é formado pelos complexos cujo módulo é 1, equipado com a multiplicação usual, sendo simplesmente o grupo dos complexos unitários já estudado. Vamos novamente explicitar suas informações:

$$z \in U(1) \text{ se } z = e^{i\theta}, \tag{3.1.3}$$

com isso, pode-se ver que a dimensão do grupo é 1, pois os elementos são identificados

apenas pelo parâmetro  $\theta$ , o que significa que ele possui apenas um gerador, dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\theta &= \left. \frac{d}{d\theta} z \right|_{\theta=0}, \\ &= \left. \frac{d}{d\theta} e^{i\theta} \right|_{\theta=0}, \\ &= i e^{i\theta} \Big|_{\theta=0}, \\ &= i, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

e, como há apenas um gerador, a Álgebra de Lie é trivial:

$$[g_i, g_j] = 0. \tag{3.1.5}$$

Visto como uma variedade, o grupo  $U(1)$  é simplesmente uma circunferência de raio 1, satisfazendo

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{3.1.6}$$

para  $z = x + iy$ . Tal circunferência pode ser visualizada na Figura 3.1.

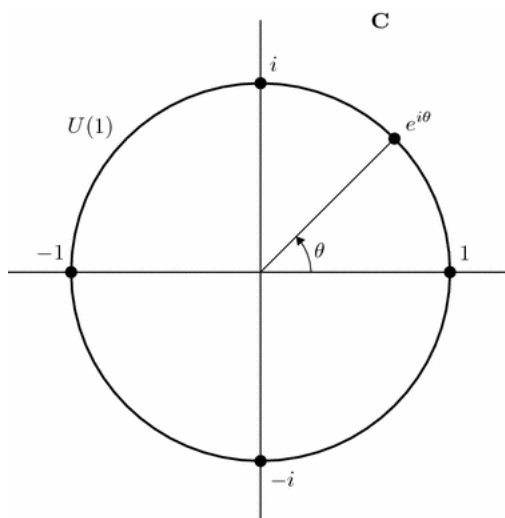


Figura 3.1: grupo  $U(1)$  visto como variedade no plano dos complexos  $\mathbb{C}$ . Os elementos  $i$  e  $-i$  se encontram associados a rotações de  $\pi/2$  e  $3\pi/2$ , respectivamente. Fonte: Springer.

## 3.2 O grupo $SO(2)$

O grupo  $SO(2)$  é formado pelas matrizes  $2 \times 2$  cujo determinante é a unidade e que são ortogonais, isto é, cujas matrizes transpostas são iguais à inversa,  $M^{-1} = M^T$  [Bar18b]. Supondo uma matriz  $2 \times 2$  geral:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{3.2.1}$$

a respectiva matriz transposta é dada por

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \tag{3.2.2}$$

e a matriz inversa é dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (3.2.3)$$

A condição de ortogonalidade indica que  $M^T = M^{-1}$ , logo:

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

que nos fornece as seguintes condições:

$$\begin{aligned} a &= d, \\ b &= -c, \end{aligned}$$

e que também nos permite reescrever tal matriz com apenas dois parâmetros livres:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

e usando que a condição de que o determinante  $ad - bc$  é igual à 1, vemos que isso implica

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (3.2.6)$$

que, novamente, é a equação de uma circunferência. Isso nos permite reexpressar as entradas com senos e cossenos em função de um único parâmetro livre  $\theta$ :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

que é simplesmente o grupo das matrizes de rotação, que já estudamos antes. Tal grupo possui dimensão 1, com um elemento arbitrário sendo identificado apenas pelo parâmetro  $\theta$ . O gerador é dado por

$$\mathfrak{m}_\theta = \left. \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0}, \quad (3.2.8)$$

$$= \left. \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \right|_{\theta=0}, \quad (3.2.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.10)$$

e, como há apenas um gerador, a Álgebra de Lie é trivial, isto é:

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0, \quad (3.2.11)$$

o que indica que o comportamento de  $SO(2)$  é similar ao de  $U(1)$ . A semelhança se torna explícita se escrevermos elementos genéricos de ambos os grupos em termos da aplicação exponencial:

$$z = e^{i\theta}, \quad (3.2.12)$$

$$M = e^{\mathfrak{g}\theta}, \quad (3.2.13)$$



por simples comparação, temos um elemento de  $U(1)$  para cada elemento de  $SO(2)$ , associado ao mesmo parâmetro. Isso indica que os dois grupos são isomorfos, ou seja, um problema relacionado a um deles é totalmente equivalente a resolver um no outro. A relação anterior também indica uma ligação entre a unidade imaginária e a matriz que gera  $SO(2)$ :

$$i \leftrightarrow \mathfrak{g}_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.14)$$

que se deve ao fato de ambos representarem uma rotação de  $\pi/2$ , com a matriz fazendo tal papel para o  $\mathbb{R}^2$  e a unidade imaginária o mesmo no plano complexo.

Vale lembrar que, como este grupo é essencialmente o mesmo das matrizes de rotação, ele consiste de transformações de simetria de circunferências, com o  $U(1)$  fazendo o mesmo papel.

### 3.3 O grupo $SO(3)$

Nos casos anteriores, foi possível derivar a forma explícita dos elementos do grupo usando as propriedades das matrizes que os constituem. Entretanto, para matrizes de ordem mais alta, como o número de entradas cresce com  $N^2$ , tal procedimento torna-se cada vez mais trabalhoso, embora em teoria seja possível.

No caso do grupo  $SO(3)$ , as matrizes serão especiais, ortogonais e possuirão ordem  $N = 3$ , ou seja nove entradas. Aumentando muito a álgebra do problema. Derivaremos então sua forma explícita a partir de outras considerações [Bar18b][BC11].

Como já vimos, o grupo  $SO(2)$  essencialmente representa as rotações em um plano. Entretanto, nada foi especificado sobre qual plano tal rotação ocorre. Para uma rotação ocorrendo no plano  $xy$ , do espaço cartesiano  $\mathbb{R}^3$ , a coordenada  $z$  não será afetada, e portanto a forma da matriz pode ser tomada como

$$R_{xy}(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.1)$$

que consiste de uma matriz que pertence ao  $SO(2)$  e as outras entradas sendo repetições da matriz identidade. O ângulo foi identificado como  $\theta_3$  por ser o ângulo no plano cuja normal é a direção  $z$ , que é a 3ª coordenada.

Usando raciocínio análogo, podemos montar as matrizes de rotação nos outros planos exigindo que as entradas associadas às coordenadas do plano sejam matrizes de  $SO(2)$  e as outras sejam as da identidade [Bar18b]. Assim

$$R_{yz}(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.2)$$

representa uma rotação no plano  $yz$ , tendo a direção  $x$  como normal. Por fim

$$R_{zx}(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

representa uma rotação no plano  $zx$ , tendo a direção  $y$  como normal. Note que o sinal das entradas com  $\sin \theta_2$  foram trocadas, pois as rotações são definidas no sentido anti-horário.

No caso de rotações tridimensionais, podemos pensar em uma rotação geral como composta por rotações em cada plano, o que nos permite construir os elementos de tal grupo como uma multiplicação das matrizes (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) anteriores:

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_2 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

como tal matriz é um produto de matrizes ortogonais e especiais, segue que ela também é especial e ortogonal, possuindo ordem 3. De fato, esta é a forma mais geral para matrizes  $3 \times 3$  ortogonais e especiais parametrizadas pelos ângulos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , representando portanto um elemento genérico do grupo  $SO(3)$ , sendo uma representação do grupo de rotações tridimensionais.

Como pode-se notar, o grupo possui dimensão 3, e agora podemos calcular seus geradores:

$$\mathfrak{s}_1 = \left. \frac{d}{d\theta_1} R_{yz}(\theta_1) \right|_{\theta_1=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.6)$$

$$\mathfrak{s}_2 = \left. \frac{d}{d\theta_2} R_{zx}(\theta_2) \right|_{\theta_2=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.7)$$

$$\mathfrak{s}_3 = \left. \frac{d}{d\theta_3} R_{xy}(\theta_3) \right|_{\theta_3=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.8)$$

As relações de comutação entre os geradores são:

$$[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2] = \mathfrak{s}_3, \quad (3.3.9)$$

$$[\mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3] = \mathfrak{s}_1, \quad (3.3.10)$$

$$[\mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_1] = \mathfrak{s}_2, \quad (3.3.11)$$

ou, de forma geral

$$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathfrak{s}_k, \quad (3.3.12)$$

que são exatamente as mesmas dos vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^3$  com o produto vetorial.

Vale fazer um comentário sobre a forma do grupo  $SO(3)$  como variedade. Seguindo nossa intuição, pode-se esperar que, como o grupo de rotações no plano  $SO(2)$  é uma

circunferência, o grupo de rotações no espaço seja uma esfera, mas isso é incorreto. Primeiramente, o grupo  $SO(3)$  necessita de três parâmetros para ser descrito, em contraste com a esfera, que por ser uma variedade bidimensional precisa de apenas 2. No caso,  $SO(3)$  é uma variedade de dimensão 3, mas cuja forma explícita é complicada de se analisar e não trará informações relevantes.

### 3.4 O grupo $SU(2)$

Este grupo se refere a todas as matrizes  $2 \times 2$  de entradas complexas unitárias e com determinante igual a 1 [Bar18b][BC11]. A forma geral das matrizes  $2 \times 2$  é dada por:

$$U = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

a transposta de  $U$  é dada por

$$U^T = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

e, após conjugar as entradas:

$$(U^T)^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

a condição de a matriz ser unitária indica que a última matriz deve ser igual à inversa da original, dada por:

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

a qual é simplificada pela condição de  $\det U = 1$ . Comparando as duas matrizes, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.4.5)$$

que nos fornece as seguintes condições:

$$\bar{z}_{11} = z_{22}, \quad \bar{z}_{21} = -z_{12}, \quad (3.4.6a)$$

$$\bar{z}_{12} = -z_{21}, \quad \bar{z}_{22} = z_{11}, \quad (3.4.6b)$$

das quais apenas duas são independentes, e que são satisfeitas supondo  $z_{11} = \bar{z}_{22} = \alpha$  e  $z_{12} = -\bar{z}_{21} = \beta$ . Com isso, vemos que a forma geral das matrizes desse grupo é dada por

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (3.4.7)$$

Agora convém analisar a condição do determinante  $\det M = 1$ . Usando a forma (3.4.7), obtém-se:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (3.4.8)$$

Assumindo  $\alpha = w + zi$  e  $\beta = y + xi$ , nota-se que a equação satisfeita pelos parâmetros é

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (3.4.9)$$

a qual representa uma esfera em 4 dimensões, conhecida como hiperesfera, ou 3-esfera, a qual não pode ser visualizada, mas cuja intuição é dada na Figura 3.2.

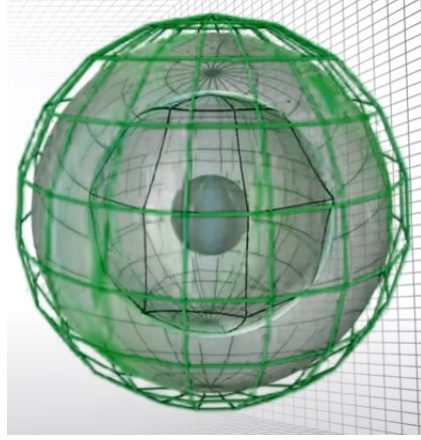


Figura 3.2: 3-esfera. Se ela fosse submersa por seres 4D em nosso mundo, veríamos ela passando como uma esfera em expansão e depois contração. Fonte: [PBS Infinite Series](#).

A matriz (3.4.7) então assume a forma:

$$U(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} w + zi & y + xi \\ -y + xi & w - zi \end{pmatrix}. \quad (3.4.10)$$

Para calcular os geradores, convém separar a matriz em uma soma de matrizes, cada uma associada a um parâmetro:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, w) &= \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} zi & 0 \\ 0 & -zi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & xi \\ xi & 0 \end{pmatrix}, \\ &= w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

e com a forma (3.4.11) torna-se simples calcular os geradores. Entretanto, deve-se notar que, dos 4 parâmetros  $w, x, y, z$ , um deles é redundante, pois pode-se calculá-lo a partir dos outros com a condição do determinante (3.4.9). Podemos fazer isso isolando  $w$ , a menos de um sinal:

$$w(x, y, z) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad (3.4.12)$$

sendo útil notar que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mp \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad (3.4.13a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \mp \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad (3.4.13b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \mp \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad (3.4.13c)$$

que se anulam para  $x, y, z = 0$ . Com isso, podemos calcular explicitamente os geradores:

$$\mathbf{u}_x = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_i=0} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.14a)$$

$$\mathbf{u}_y = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{x_i=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.14b)$$

$$\mathbf{u}_z = \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{x_i=0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (3.4.14c)$$

As relações de comutação entre os geradores são as seguintes:

$$[\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y] = 2\mathbf{u}_z, \quad (3.4.15a)$$

$$[\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z] = 2\mathbf{u}_x, \quad (3.4.15b)$$

$$[\mathbf{u}_z, \mathbf{u}_x] = 2\mathbf{u}_y. \quad (3.4.15c)$$

A álgebra de Lie obtida é idêntica à dos geradores de  $SO(3)$ , a menos do fator 2. Entretanto, se tomarmos como novos parâmetros sendo a metade dos originais  $x_i \rightarrow x'_i = x_i/2$ , então os geradores obtidos seriam

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.16a)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4.16b)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (3.4.16c)$$

que são as conhecidas Matrizes de Pauli a menos da unidade imaginária  $i$ , estando associadas à álgebra de momento angular e de spin em Mecânica Quântica [SN14]. Nesse caso as relações de comutação ficam, simplesmente:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_z, \quad (3.4.17a)$$

$$[\sigma_y, \sigma_z] = \sigma_x, \quad (3.4.17b)$$

$$[\sigma_z, \sigma_x] = \sigma_y, \quad (3.4.17c)$$

que agora são idênticas às de  $SO(3)$ . Isso indica que, localmente, os dois grupos possuem exatamente o mesmo comportamento. Entretanto, globalmente, há algumas diferenças, e em particular as variedades obtidas são distintas.

## 3.5 O grupo $O(1, 1)$

Nos casos anteriores, os grupos de matrizes foram definidos fazendo uso apenas das propriedades das matrizes que os constituem, porém para definir o grupo  $O(1, 1)$  usaremos outra estratégia.

O grupo  $O(1, 1)$  é definido como o grupo de matrizes ortogonais que deixam a seguinte forma quadrática invariante [Bar18b]:

$$x^2 - y^2 = 1, \quad (3.5.1)$$

que equivale a uma hipérbole, e portanto tal grupo representa as transformações de simetria de hipérbolas. Uma opção seria analisar a transformação linear  $x \rightarrow x'$  e  $y \rightarrow y'$  que preserva a forma anterior, ou seja

$$x'^2 - y'^2 = 1, \quad (3.5.2)$$

porém, as manipulações algébricas podem ser simplificadas se definirmos uma variável auxiliar  $w$  como [Run20]

$$w = iy, \quad (3.5.3)$$

que, ao ser invertida fornece  $y = -iw$ . Substituindo na forma (3.5.1), obtemos:

$$x^2 + w^2 = 1, \quad (3.5.4)$$

que é a equação de uma circunferência. As transformações que a mantém simétrica são representadas pelo grupo  $SO(2)$  analisado anteriormente:

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.5.5)$$

com

$$\tan \theta = \frac{w}{x}, \quad (3.5.6)$$

com  $w$  fazendo o papel de nova coordenada  $y$ . Voltando para a variável original  $y$ , pode-se notar uma coisa interessante:

$$\tan \theta = i \frac{y}{x}, \quad (3.5.7)$$

com a tangente associada ao ângulo  $\theta$  resultando em um número imaginário. Como cossenos e senos de números reais resultam em números reais, segue que  $\theta$  é necessariamente complexo. Assumindo que se trata de um imaginário puro

$$\theta = i\vartheta. \quad (3.5.8)$$

Para obter a forma explícita do grupo (3.5.5) em termos da variável real  $\vartheta$ , estaremos interessados em calcular então  $\cos i\vartheta$  e  $\text{sen } i\vartheta$ . Relembrando a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta, \quad (3.5.9)$$

e a respectiva expressão para o conjugado do número complexo:

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \text{sen } \theta, \quad (3.5.10)$$

se quisermos calcular  $\cos \theta$  e  $\text{sen } \theta$ , podemos somar (3.5.9) com (3.5.10) para isolar o cosseno e o análogo para o seno com a subtração. Obtemos então

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (3.5.11)$$

$$\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (3.5.12)$$

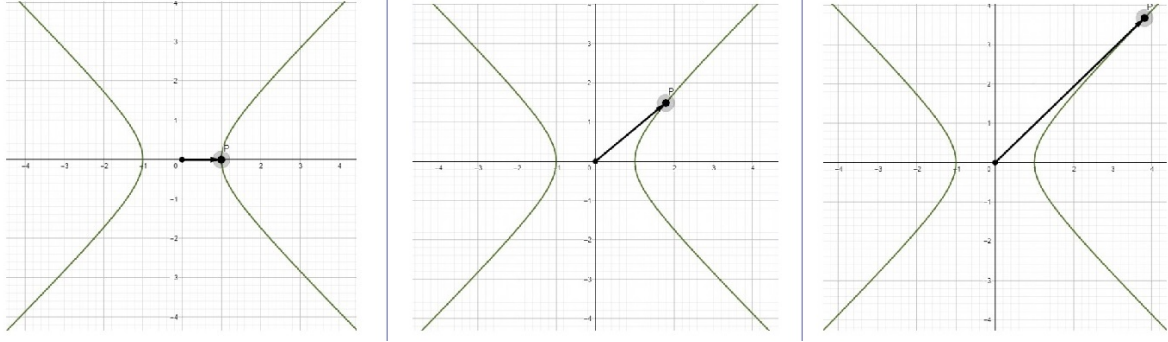


Figura 3.3: grupo  $O(1, 1)$ . Ele pode ser visualizado como uma hipérbole e variar o parâmetro  $\vartheta$  é equivalente a andar sobre ela. Imagem feita pelo autor usando o software [Geogebra](#).

mas, em nosso caso,  $\theta = i\vartheta$ , logo:

$$\cos i\vartheta = \frac{e^{-\vartheta} + e^{\vartheta}}{2}, \quad (3.5.13)$$

$$\text{sen } i\vartheta = \frac{e^{-\vartheta} - e^{\vartheta}}{2i}, \quad (3.5.14)$$

relembrando que as funções hiperbólicas são definidas como:

$$\cosh x = \frac{e^{-x} + e^x}{2}, \quad (3.5.15)$$

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (3.5.16)$$

que, ao serem comparadas com (3.5.13), vemos que

$$\cos i\vartheta = \cosh \vartheta, \quad (3.5.17)$$

$$\text{sen } i\vartheta = i \text{senh } \vartheta, \quad (3.5.18)$$

ou seja, que os senos e cossenos de ângulos imaginários são proporcionais a senos e cossenos hiperbólicos, o que também nos diz que esse grupo, visto como variedade, equivale a uma hipérbole, visualizada na Figura 3.3.

Se substituirmos tais relações na transformação matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & -i \text{senh } \vartheta \\ i \text{senh } \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \quad (3.5.19)$$

mas  $y = iw$  e  $y' = iw'$ , logo:

$$x' = \cosh \vartheta x + \text{senh } \vartheta y, \quad (3.5.20)$$

$$y' = \text{senh } \vartheta x + \cosh \vartheta y, \quad (3.5.21)$$

e a matriz da transformação pode ser reescrita em termos de  $\vartheta$  como:

$$M(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \text{senh } \vartheta \\ \text{senh } \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.5.22)$$

sendo semelhante a uma matriz de rotação, porém agora sobre o ângulo hiperbólico  $\vartheta$ . Note que, de forma análoga às rotações usuais, a matriz inversa será dada por

$$M^{-1}(\vartheta) = M(-\vartheta) \quad (3.5.23)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & -\sinh \vartheta \\ -\sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.5.24)$$

equivalendo a uma rotação no sentido inverso. Por motivos que ficarão claros em capítulos posteriores, tomaremos a convenção da equação (3.5.23) como representando os elementos do grupo, e a (3.5.22) sendo a inversa. Assim como uma rotação equivale a "andar" sobre uma circunferência, rotações hiperbólicas equivalem a se deslocar sobre hipérbolas, o que pode ser visualizado na Figura 3.4.

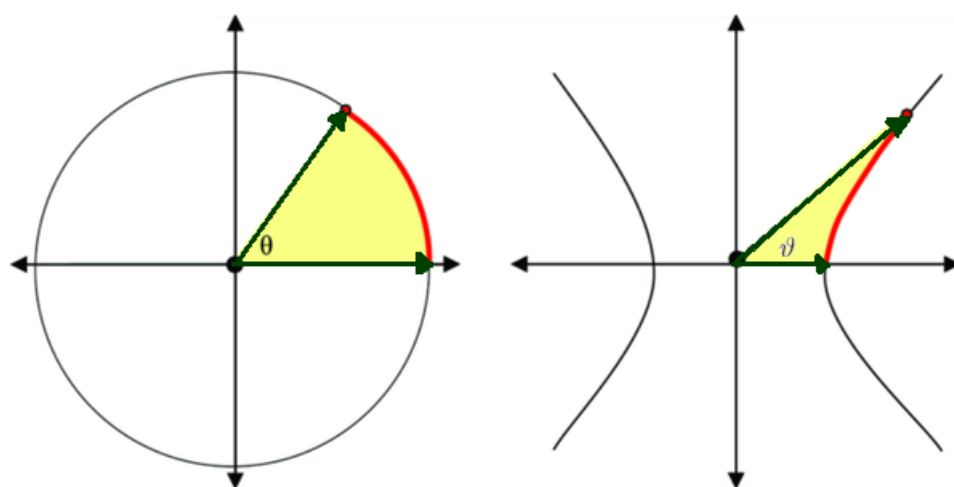


Figura 3.4: rotação hiperbólica. Note que rotações usuais (esquerda) não mudam o tamanho de vetores, enquanto as hiperbólicas (direita) mudam. Fonte: [Wikiwand](#).

Agora que possuímos a forma explícita (3.5.23) dos elementos do grupo, podemos calcular o gerador:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_O &= \left. \frac{d}{d\vartheta} \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & -\sinh \vartheta \\ -\sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix} \right|_{\vartheta=0}, \\ &= \left. \begin{pmatrix} \sinh \vartheta & -\cosh \vartheta \\ -\cosh \vartheta & \sinh \vartheta \end{pmatrix} \right|_{\vartheta=0}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

e mais uma vez, a álgebra de Lie é trivial, o que indica comportamento local similar a  $U(1)$ ,  $SO(2)$  e à reta real, porém, assim como já foi notado, globalmente este grupo equivale a uma hipérbole.



## 3.6 O grupo $\text{SO}(1, 3)$

Assim como o grupo  $\text{O}(1, 1)$  é composto pelas transformações de simetria de hipérbóles, o grupo  $\text{SO}(1, 3)$  é composto pelas transformações da seguinte forma quadrática:

$$-w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \text{constante}, \quad (3.6.1)$$

note que, se  $w$  for fixado, tal curva se resume a uma esfera, cujas transformações de simetria são as rotações tridimensionais, sendo representadas pelo grupo  $\text{SO}(3)$ . Matricialmente, uma matriz de transformação que mantém  $w$  invariante é dada por:

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.6.2)$$

em que os  $R_{ij}$  são as entradas das matrizes de  $\text{SO}(3)$  (3.3.4). Além disso, sabemos que, se mantermos  $w$  livre e fixarmos as outras coordenadas duas a duas, a forma (3.6.1) irá se simplificar para hipérbóles nos planos das coordenadas não fixadas:

$$y \text{ e } z \text{ fixos : } x^2 - w^2 = \text{constante}, \quad (3.6.3a)$$

$$z \text{ e } x \text{ fixos : } y^2 - w^2 = \text{constante}, \quad (3.6.3b)$$

$$x \text{ e } y \text{ fixos : } z^2 - w^2 = \text{constante}, \quad (3.6.3c)$$

porém, já sabemos que as transformações de simetria de tais hipérbóles são dadas por matrizes do grupo  $\text{O}(1, 1)$ . Assim, de forma análoga às rotações tridimensionais as transformações de simetria desse grupo em cada plano são rotações hiperbólicas, sendo dadas por

$$\mathcal{L}_{xw}(\vartheta_1) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_1 & -\sinh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \vartheta_1 & \cosh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6.4a)$$

$$\mathcal{L}_{yw}(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_2 & 0 & -\sinh \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \vartheta_2 & 0 & \cosh \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6.4b)$$

$$\mathcal{L}_{zw}(\vartheta_3) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_3 & 0 & 0 & -\sinh \vartheta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \vartheta_3 & 0 & 0 & \cosh \vartheta_3 \end{pmatrix}, \quad (3.6.4c)$$

com a forma geral dos elementos do grupo sendo dada pelo produto das matrizes (3.6.4) com as de  $\text{SO}(3)$  (3.3.4). Com isso, já possuímos os geradores da parte de  $\text{SO}(3)$ , restando

calcular os geradores das rotações hiperbólicas:

$$\mathfrak{t}_1 = \frac{d}{d\vartheta_1} \mathcal{L}_{xw}(\vartheta_1) \Big|_{\vartheta_1=0} \quad (3.6.5)$$

$$= \begin{pmatrix} \sinh \vartheta_1 & -\cosh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ -\cosh \vartheta_1 & \sinh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\vartheta_1=0} \quad (3.6.6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.7)$$

$$\mathfrak{t}_2 = \frac{d}{d\vartheta_2} \mathcal{L}_{yw}(\vartheta_2) \Big|_{\vartheta_2=0} \quad (3.6.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \sinh \vartheta_2 & 0 & -\cosh \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cosh \vartheta_2 & 0 & \sinh \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\vartheta_2=0} \quad (3.6.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.10)$$

$$\mathfrak{t}_3 = \frac{d}{d\vartheta_3} \mathcal{L}(\vartheta_3) \Big|_{\vartheta_3=0} \quad (3.6.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \sinh \vartheta_3 & 0 & 0 & -\cosh \vartheta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cosh \vartheta_3 & 0 & 0 & \sinh \vartheta_3 \end{pmatrix} \Big|_{\vartheta_3=0} \quad (3.6.12)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6.13)$$

dessa forma, vemos que o grupo possui dimensão 6, sendo definido por 3 ângulos de rotações usuais e 3 ângulos de rotações hiperbólicas. As relações de comutação entre os geradores calculados e os de  $\text{SO}(3)$  (que é subgrupo de  $\text{SO}(1, 3)$ , são as seguintes [Flo16b]:

$$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathfrak{s}_k, \quad (3.6.14a)$$

$$[\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_j] = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathfrak{s}_k, \quad (3.6.14b)$$

$$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{l}_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathfrak{l}_k, \quad (3.6.14c)$$

com a primeira sendo a anteriormente vista para  $SO(3)$ , e as outras sendo um tanto peculiares: o comutador de dois geradores das rotações hiperbólicas resulta em uma rotação usual, com um comutador entre duas rotações de tipos diferentes resultando em uma hiperbólica.

Nos próximos capítulos, iremos analisar aplicações destes grupos na Física, em particular na Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Teoria da Relatividade e Teorias de Campos.

# Capítulo 4

## Grupos na Mecânica Clássica

Neste capítulo, analisaremos alguns casos em que grupos aparecem na Mecânica Clássica. Existem várias formas de se formulá-la, mas uma das mais interessantes para se analisar simetrias e leis de conservação é a formulação lagrangiana, baseada no chamado Princípio da Mínima Ação [GPS02] [Lan73]. O Princípio da Mínima Ação postula a existência de uma grandeza  $S$  conhecida como ação do sistema, definido por  $N$  coordenadas generalizadas  $q_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (4.0.1)$$

A trajetória tomada por uma partícula sujeita às leis é aquela para qual a ação é minimizada<sup>1</sup>, em processo que pode ser visualizado na Figura 4.1. A função  $\mathcal{L}$  do integrando é conhecida como lagrangiana do sistema e fornece as equações de movimento por meio do seguinte conjunto de equações diferenciais:

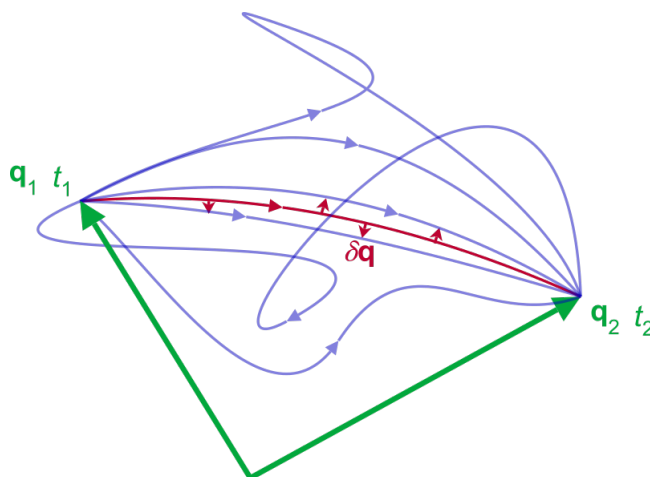


Figura 4.1: Princípio da Mínima ação. De todas as trajetórias possíveis, a tomada é aquela para a qual a ação é mínima. Fonte: [Wikipédia](#).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (4.0.2)$$

<sup>1</sup>Ou de forma mais geral, extremizada, podendo também ser um máximo.

conhecidas como equações de Euler-Lagrange, e que são equivalentes à condição de minimizar a eq. (4.0.1) [Mar13]. Para que elas sejam equivalentes à segunda Lei de Newton, em geral, a função lagrangiana deve ter a forma [Sym60]

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (4.0.3)$$

com  $T$  sendo a energia cinética e  $V$  a energia potencial. Note que tal escolha é postulada, sendo aquela que fornece a equação de movimento correta para a maioria dos sistemas.

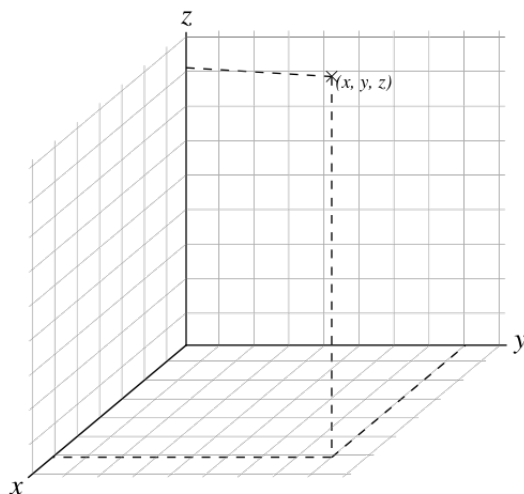


Figura 4.2: espaço cartesiano  $\mathbb{R}^3$ . Ele serve de palco dos eventos na Mecânica Clássica e deve ser visualizado como o representado pelas coordenadas  $(x, y, z)$ , com o tempo servindo como parâmetro independente. Fonte: Landsurvival.

Neste capítulo, iremos denotar eventos  $A$  no espaço da Mecânica Clássica (Figura 4.2) como matrizes colunas da forma [AP09]:

$$A = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.0.4)$$

pois são necessárias 3 coordenadas para identificar um ponto no espaço, bem como o instante de tempo  $t$ . A peculiar entrada com o fator constante 1 é adicionada apenas para facilitar manipulações algébricas com translações, como veremos mais adiante neste capítulo, na Seção 4.2.

## 4.1 Leis de conservação

Definindo o momento generalizado  $p_i$  associado à coordenada generalizada  $q_i$  como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.1.1)$$



Figura 4.3: Emmy Noether. Uma das maiores matemáticas do século XX, sofreu muito preconceito devido a seu sexo. Fonte: [Wikipédia](#).

as equações de Euler-Lagrange assumem a forma

$$\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad (4.1.2)$$

e pode-se notar que, caso a lagrangiana não dependa explicitamente da coordenada generalizada  $q_i$ ,  $\partial \mathcal{L} / \partial q_i = 0$ , e o respectivo momento generalizado é dito ser uma constante do movimento [GPS02], uma vez que

$$\frac{d}{dt}p_i = 0, \quad (4.1.3)$$

que indica uma lei de conservação.

O raciocínio desenvolvido nessa Seção é um caso particular do chamado Teorema de Noether, demonstrado pela matemática Emmy Noether (Figura 4.3). Ele enuncia que quaisquer simetrias contínuas na ação de um sistema levam a leis de conservação.

Entretanto, devido a exigir conhecimentos de Cálculo Variacional, neste trabalho não nos aprofundaremos mais neste tema. As simetrias estudadas nas próximas seções e suas respectivas leis de conservação podem ser encontradas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: simetrias e leis de conservação.

Transformação	Grandeza conservada
rotações	Momento angular
Translações espaciais	Momento linear
Translações temporais	Energia
Transformações de Galileu	×

## 4.2 Homogeneidade espacial e conservação do momento linear

Segundo a argumentação anterior, para casos em que a lagrangiana não depende explicitamente das coordenadas cartesianas usuais  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , os respectivos momentos lineares dados por:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad (4.2.1a)$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad (4.2.1b)$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}, \quad (4.2.1c)$$

serão conservados, como pode-se ver no Exemplo 4.2.1 a seguir.

### Exemplo 4.2.1. Conservação do momento linear.

Suponha um sistema físico descrito pela seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + F_0x \cos \omega t, \quad (4.2.2)$$

que descreve uma partícula em duas dimensões submetida a uma força  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  na direção  $x$ . Os momentos podem ser calculados com as eqs. (4.2.1):

$$p_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + F_0x \cos \omega t \right) = m\dot{x}, \quad (4.2.3a)$$

$$p_y = \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + F_0x \cos \omega t \right) = m\dot{y}, \quad (4.2.3b)$$

e as derivadas espaciais ficam:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + F_0x \cos \omega t \right) = F_0 \cos \omega t, \quad (4.2.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + F_0x \cos \omega t \right) = 0, \quad (4.2.4b)$$

o que nos permite escrever, usando as equações de Euler-Lagrange (4.0.2), que

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = F_0 \cos \omega t, \quad (4.2.5a)$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{y}) = 0. \quad (4.2.5b)$$

A segunda equação indica uma lei de conservação para o momento  $p_y$ , em contraste com  $p_x$ , que não é uma constante do movimento. Isso ocorre pois a coordenada  $y$  não aparece explicitamente na função lagrangiana (4.2.2), o que não ocorre para a coordenada  $x$ . Dessa forma, vemos que o movimento é inercial na direção  $y$  e forçado na direção  $x$ , o que era de se esperar devido ao fato de a força estar apenas na direção  $x$ .

Se a lagrangiana possui a simetria de não depender das coordenadas  $x, y$  e  $z$  explicitamente, então ela deve ser invariante por transformações de translação espacial sob essas coordenadas, isto é [AP09]:

$$t' = t, \quad (4.2.6a)$$

$$x' = x + x_0, \quad (4.2.6b)$$

$$y' = y + y_0, \quad (4.2.6c)$$

$$z' = z + z_0, \quad (4.2.6d)$$

equivalentes a deslocar a origem do sistema de coordenadas por um vetor  $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ . Tais transformações formam um grupo, embora isso não seja explícito na forma anterior. Para deixar isso mais claro, pode-se reescrevê-la na forma matricial notando que o novo evento em função do antigo é dado por:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.7)$$

com isso, nota-se que tais transformações podem ser representadas na forma matricial em função de três parâmetros livres  $x_0, y_0, z_0$ :

$$G(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.8)$$

que um grupo contínuo de matrizes. Como há três parâmetros livres, podemos calcular os geradores associados a cada um deles:

$$\mathfrak{g}_x = \left. \frac{\partial}{\partial x_0} G \right|_{x_0=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.9a)$$

$$\mathfrak{g}_y = \left. \frac{\partial}{\partial y_0} G \right|_{y_0=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.9b)$$

$$\mathfrak{g}_z = \left. \frac{\partial}{\partial z_0} G \right|_{z_0=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.9c)$$



e, por meio do comutador, pode-se demonstrar que a álgebra de Lie dos geradores é simplesmente:

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0 \quad (4.2.10)$$

ou seja, o grupo é abeliano. É interessante analisar a composição de duas transformações:

$$G \circ G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x'_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y'_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z'_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x + x'_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y + y'_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z + z'_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

dessa forma, pode-se ver claramente que operar com dois elementos do grupo é equivalente a somar coordenada a coordenada os vetores de deslocamento  $\vec{r}_0$  e  $\vec{r}'_0$ , sendo isomorfo ao  $\mathbb{R}^3$  equipado com a soma usual.

### 4.3 Isotropia do espaço e conservação do momento angular

Na Seção 4.2, foram discutidas leis de conservação para as chamadas coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , porém, pode-se usar diferentes tipos de sistemas de coordenadas, com alguns sendo mais adaptados para certos tipos de problemas que outros. Por exemplo, ao usar coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  ou esféricas  $(r, \varphi, \theta)$ , que em termos das coordenadas cartesianas são definidas por

$$\text{Coordenas Cilíndricas:} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z, \quad (4.3.1a)$$

$$\text{Coordenas Esféricas:} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad \tan \theta = \frac{z}{r}, \quad (4.3.1b)$$

torna-se mais simples de se analisar sistemas com simetria cilíndrica ou esférica, respectivamente. As novas coordenadas podem ser visualizadas na Figura 4.4. Porém, algo novo ocorre: surgem ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  como coordenadas, que indicam direções nas quais observamos o espaço ao invés de distâncias, cuja informação se encontra contida nas coordenadas  $\rho$  e  $r$ , respectivamente.

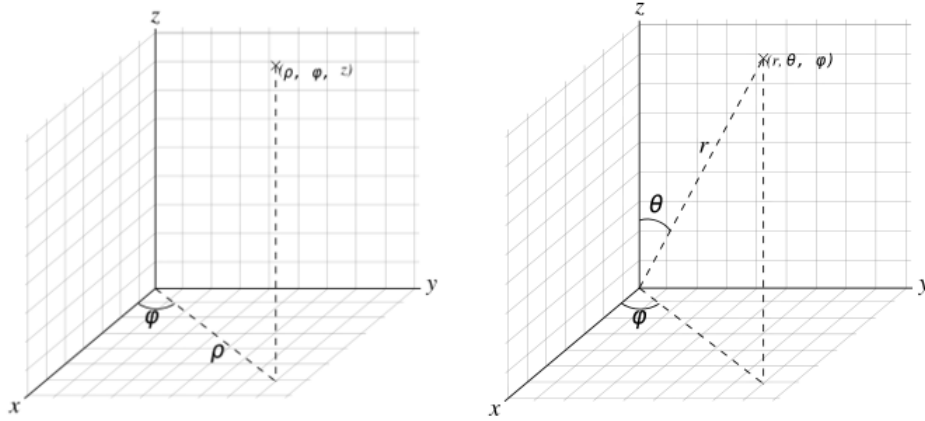


Figura 4.4: representação de coordenadas cilíndricas e esféricas, respectivamente. Fonte: [Math Wiki](#).

Se a lagrangiana não depender dos ângulos  $\theta, \varphi$ , então haverá uma quantidade conservada, sendo o momento associado a tais coordenadas, o momento angular:

$$p_{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}, \quad (4.3.2a)$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (4.3.2b)$$

com sua forma sendo ligeiramente diferente dos momentos lineares porque as coordenadas são ângulos [Sym60] e não possuem a dimensão de espaço, o que deve ficar claro com um exemplo.

#### Exemplo 4.3.1. Conservação do momento angular para potenciais centrais.

Os potenciais centrais possuem a forma geral  $V = V(r)$  em coordenadas esféricas, com dois casos particulares importantes sendo o newtoniano  $V(r) = -GMm/r$  e o oscilador harmônico central  $V(r) = kr^2/2$ . Para a classe de potenciais centrais, a lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r). \quad (4.3.3)$$

Os momentos podem ser calculados com eq. (4.1.2) e ficam:

$$p_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r) \right) = mr^2\dot{\theta}, \quad (4.3.4a)$$

$$p_r = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r) \right) = m\dot{r}, \quad (4.3.4b)$$

e as respectivas derivadas espaciais são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r) \right) = 0, \quad (4.3.5a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r) \right) = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}, \quad (4.3.5b)$$

portanto, usando as equações de Euler-Lagrange (4.0.2), obtemos:

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0, \quad (4.3.6a)$$

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) = mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV}{dr}. \quad (4.3.6b)$$

A equação (4.3.6a) indica a conservação do momento angular  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ , o que não ocorre com o momento radial na segunda equação, sendo uma consequência direta da isotropia do espaço, isto é, de o ângulo  $\theta$  não aparecer explicitamente na lagrangiana. Fisicamente, isso significa que, nesse tipo de sistemas, o movimento dos objetos ficará restrito a um plano, sendo equivalente à Lei das Áreas de Kepler no caso gravitacional [Sym60].

No exemplo anterior, o momento angular se referiu a uma das componentes do momento angular vetorial  $\vec{L}$ , definido como um produto vetorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (4.3.7)$$

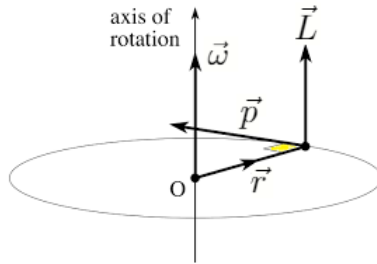


Figura 4.5: momento angular  $\vec{L}$ . Note que ele é normal ao plano de rotação desta. Fonte: [University of Texas](#).

em que  $\vec{r}$  é o vetor de posição com relação ao eixo de rotação e  $\vec{p}$  é o vetor momento linear. Essas grandezas podem ser visualizadas na Figura 4.5.

Como os ângulos representam direções do espaço, se a lagrangiana não depende dos ângulos, então todas as direções do espaço são equivalentes para esse sistema. Essa característica recebe o nome de isotropia do espaço.

As transformações que variam os ângulos de vetores são as rotações. Dessa forma, uma lagrangiana que não muda quando suas variáveis angulares são rotacionadas deve ser invariante por rotações, as quais já foram apresentadas no contexto da teoria de grupos nos Capítulos 1 e 2.

Uma vez que o espaço da Mecânica Clássica é tridimensional, o grupo que representa as rotações pode ser tomado como sendo o  $SO(3)$ , porém agindo apenas sobre as componentes espaciais do evento. Em linguagem matricial:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.8)$$

com a matriz de entradas  $R_{ij}$  sendo a mesma de (3.3.4) e pertencendo ao grupo  $SO(3)$ . No caso de sistemas com simetria cilíndrica, apenas um ângulo é usado como coordenada e, portanto, eles serão invariantes sobre o grupo  $SO(2)$  atuando no plano de simetria.

## 4.4 Simetria temporal e conservação da energia

Analisaremos agora a lei de conservação da energia, mas para isso, é necessário obtê-la em função da lagrangiana. Como a lagrangiana é uma função apenas do tempo, velocidades e coordenadas generalizadas  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ , temos que:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (4.4.1)$$

O termo com a segunda derivada pode ser eliminado usando a regra do produto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i, \quad (4.4.2)$$

que, após substituir na eq. (4.4.1), fornece:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (4.4.3)$$

com os termos entre parênteses sendo nulos devido às equações de Euler-Lagrange (4.0.2). Isso nos permite reescrever tal expressão da seguinte forma

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right), \quad (4.4.4)$$

ou seja, se a lagrangiana não depender explicitamente do tempo,  $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$ , a quantidade

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (4.4.5)$$

é conservada, a qual pode ser identificada como a energia mecânica do sistema.

### Exemplo 4.4.1. Conservação da energia no oscilador harmônico.

No caso de um oscilador harmônico unidimensional com  $V(x) = kx^2/2$ , temos a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (4.4.6)$$

Note que a lagrangiana não depende explicitamente do tempo e, portanto, a energia (4.4.5) é conservada:

$$E = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right) \dot{x} - \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \right), \quad (4.4.7)$$

$$= m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (4.4.8)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (4.4.9)$$

que pode ser identificada como a energia mecânica usual do sistema.

Mesmo para os casos em que não é conservada, a função (4.4.5) é muito interessante, podendo ser usada para formular a Mecânica Clássica de outra forma, conhecida como formulação hamiltoniana.

Para que a lagrangiana não dependa explicitamente do tempo, ela deve ser invariante sobre as chamadas translações temporais. De maneira análoga às translações espaciais, as translações temporais equivalem a mudar a "origem" do tempo, ou o instante em que os relógios começam a marcar o tempo. A forma analítica dessas transformações é:

$$t' = t + t_0, \quad (4.4.10a)$$

$$x' = x, \quad (4.4.10b)$$

$$y' = y, \quad (4.4.10c)$$

$$z' = z, \quad (4.4.10d)$$

as quais também formam um grupo contínuo, o que fica explícito exibindo a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4.11)$$

portanto, os elementos do grupo possuem a forma geral

$$G_t(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

O gerador do grupo é dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_t &= \left. \frac{d}{dt_0} G_t \right|_{t_0=0}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

com a Álgebra de Lie sendo trivial e, conseqüentemente, o grupo é abeliano. A composição

de duas translações temporais resulta em:

$$G_t \circ G'_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t'_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.14)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_0 + t'_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4.15)$$

e pode-se notar que esse grupo é equivalente aos reais  $\mathbb{R}$  equipado com a soma.

Ao comparar as translações temporais com as espaciais, notam-se muitas semelhanças, porém estas foram agrupadas de forma diferente devido aos diferentes papéis de tempo e espaço na Mecânica Clássica, com a conexão entre os dois ficando ainda mais estreita na Mecânica Relativística.

## 4.5 Grupo dos *boosts* de Galileu

Em seções anteriores, analisamos transformações que mudavam a origem do sistema de coordenadas, as translações. Entretanto, apenas no caso em que as translações são constantes no tempo foi analisado, não sendo estudado o caso em que estas podem depender do tempo.

Se a origem  $O'$  do sistema de coordenadas transformado variar com o tempo, a situação se torna mais complicada, porém ainda tratável. Embora este tipo de transformação a princípio não pareça manter a Física invariante de acordo com nossa intuição, já no século XVI o estudioso Galileu (Figura 4.6) estudou que isso ocorre quando a velocidade de variação de  $O'$  for constante [Nus13].

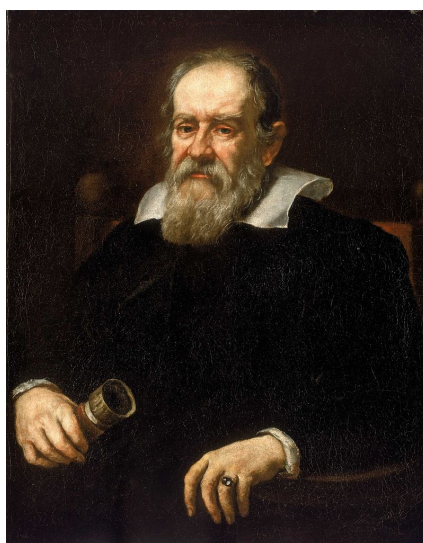


Figura 4.6: Galileu Galilei. Fonte: [Wikipédia](#).

Em termos matemáticos, a situação analisada por Galileu culmina na forma

$$\frac{d}{dt}x' = -v_x, \quad (4.5.1a)$$

$$\frac{d}{dt}y' = -v_y, \quad (4.5.1b)$$

$$\frac{d}{dt}z' = -v_z, \quad (4.5.1c)$$

em que  $x', y', z'$  são as coordenadas da partícula no referencial  $O'$ , e os parâmetros  $v_x, v_y, v_z$  são constantes. Isso indica que as novas coordenadas em função das antigas são dadas por [Eis61]

$$t' = t, \quad (4.5.2a)$$

$$x' = x - v_x t, \quad (4.5.2b)$$

$$y' = y - v_y t, \quad (4.5.2c)$$

$$z' = z - v_z t, \quad (4.5.2d)$$

sendo aqui válido ressaltar que  $x, y, z$  são coordenadas das partículas vistas de  $O$ , os quais não variam com o tempo, com apenas o referencial  $O'$  estando em movimento. O processo pode ser visualizado na Figura 4.7. Note também que a medida de tempo  $t$  não é afetada.

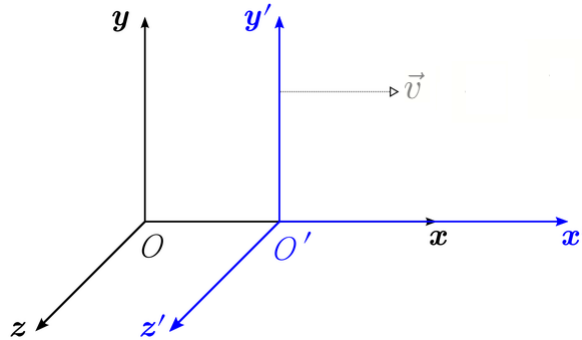


Figura 4.7: visualização de uma transformação de Galileu. Fonte: Quora.

As transformações (4.5.2a) são conhecidas como transformações de Galileu, ou *boosts*, por simplicidade. Como pode-se observar, elas não possuem interpretação geométrica direta. Além disso, elas são obtidas empiricamente por meio da regra de adição de velocidades, além de não possuir relação aparente com os grupos de matrizes expostos anteriormente. Tal ausência de simetria desaparece no contexto da Relatividade Restrita.

Em forma matricial, essas transformações são dadas por

$$G_{\vec{v}}(v_x, v_y, v_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.5.3)$$

note que ela é definida por três parâmetros, que representam as componentes da velocidade  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  do referencial em movimento em relação ao primeiro. Dessa forma,

os geradores são obtidos com

$$\mathfrak{b}_x = \left. \frac{\partial}{\partial v_x} G \right|_{v_x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5.4a)$$

$$\mathfrak{b}_y = \left. \frac{\partial}{\partial v_y} G \right|_{v_y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5.4b)$$

$$\mathfrak{b}_z = \left. \frac{\partial}{\partial v_z} G \right|_{v_z=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5.4c)$$

com as relações de comutação entre eles sendo triviais:

$$[\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_j] = 0, \quad (4.5.5)$$

o que indica que *boosts* em diferentes direções comutam. Isso se torna claro fazendo a composição de dois *boosts* com velocidades  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  e  $\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$  diferentes:

$$\begin{aligned} G_{\vec{v}} \circ G_{\vec{u}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(v_x + u_x) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(v_y + u_y) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(v_z + u_z) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

com a transformação resultante sendo equivalente a um *boost* associado a um vetor velocidade que é a soma dos anteriores,  $\vec{v} \rightarrow \vec{v} + \vec{u}$ .

Perceba que, tanto na forma matricial dos elementos do grupo quanto na dos geradores, os *boosts* conectam coordenadas de espaço e tempo, em contraste com as rotações, que conectam coordenadas de espaço diferentes entre si e os *boosts* que associam uma mesma coordenada com a antiga.

Outro ponto relevante é que, assim como as outras transformações, os *boosts* possuem uma grandeza conservada associada, mas cuja derivação é complicada e não será aqui analisada [KB04]. Eles também possuem uma grandeza que é deixada invariante: a força [Nus13]. Em outras palavras, ao se aplicar uma transformação de Galileu e mudar um referencial  $O$  para  $O'$ , os dois concordarão com as forças medidas.



## 4.6 Grupo Geral de Galileu e Referenciais Inerciais

Nas Seções 4.2, 4.3 e 4.4, foram estudadas as principais simetrias da Mecânica Clássica separadamente: *boosts*, rotações, translações temporais e espaciais e suas respectivas representações como grupos de matrizes. Nesta Seção, analisaremos o conjunto das simetrias como um todo.

Ao se combinar todas as transformações de simetria da Mecânica Clássica, obtemos o chamado Grupo de Galileu, com um elemento geral desse grupo em forma matricial sendo dado pelo produto de seus componentes individuais:

$$G(\vec{v}, \vec{r}_0, R, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_0 \\ -v_x & R_{11} & R_{12} & R_{13} & x_0 \\ -v_y & R_{21} & R_{22} & R_{23} & y_0 \\ -v_z & R_{31} & R_{32} & R_{33} & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6.1)$$

o qual possui 10 parâmetros, sendo 3 ângulos de uma rotação  $R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , 3 coordenadas de um vetor de translação  $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ , 1 coordenada temporal de translação temporal e 3 coordenadas do vetor velocidade  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$  de um *boost*. É interessante notar a quantidade de elementos nulos na matriz geral do grupo de Galileu. Em particular, os elementos nulos superiores, caso fossem não nulos, gerariam uma transformação nas unidades de tempo, dependendo da posição do espaço:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_x & \Lambda_y & \Lambda_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6.2)$$

$$= \begin{pmatrix} t + \Lambda_x x + \Lambda_y y + \Lambda_z z \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6.3)$$

as quais não ocorrem em Mecânica Clássica, e indicam uma assimetria entre tempo e espaço, a qual é abandonada na Relatividade. Apesar de o estudo das grandezas conservadas poder ser desenvolvido sem o uso de grupos, vamos fornecer aqui uma simples aplicação onde o papel destes fica mais claro, estando intimamente ligado às equações de movimento em referenciais inerciais

Assim como comentado no início deste capítulo, a lagrangiana  $\mathcal{L} = T - V$  em que  $T = mv^2/2$  e  $V$  é a energia potencial, funciona para a maioria dos sistemas, porém a forma geral desta pode ser entendida como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int}, \quad (4.6.4)$$

com  $\mathcal{L}_{livre} = T$  e  $\mathcal{L}_{int} = -V$  na maioria dos casos. O primeiro termo significa a lagrangiana de uma partícula livre, isto é, de sistemas sem interação, enquanto o outro representa as interações entre eles. Estas são obtidas pela experiência, mas a lagrangiana para uma

partícula livre,  $\mathcal{L}_{livre} = mv^2/2$  é postulada, sendo apenas aquela que fornece a equação de movimento correta. Usaremos então o Grupo de Galileu para derivá-la, a partir de suposições de simetria.

Seguindo Landau [Lan73], a lagrangiana de partícula livre em um referencial inercial deve levar à conservação de todas as grandezas anteriores, sendo portanto invariante com relação às transformações apresentadas. Para levar à tais leis de conservação, portanto, a lagrangiana não pode depender das coordenadas do espaço  $x, y, z$ , nem do tempo  $t$ , sendo portanto uma função apenas das velocidades. Além disso, para garantir a conservação do momento angular, ela não pode depender de ângulos  $\theta_i$ , sendo uma função apenas do módulo da velocidade da partícula:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v^2), \quad (4.6.5)$$

embora a dependência tenha sido muito simplificada, a forma da função ainda não foi definida. Porém, podemos obtê-la exigindo que as equações de movimento sejam invariantes sob transformações de Galileu, ou seja que todos os referenciais inerciais sejam equivalentes. Vamos fazer isso para o caso unidimensional:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{x}^2), \quad (4.6.6)$$

No novo referencial  $O'$ ,  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ , mantendo a forma funcional, porém agora em função de  $\dot{x} \rightarrow \dot{x}' = \dot{x} - v_x$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}((\dot{x} - v_x)^2) \quad (4.6.7)$$

e as equações de Euler-Lagrange ficam, respectivamente:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] = 0, \quad (4.6.8a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}} \right] = 0, \quad (4.6.8b)$$

ao exigir que as duas sejam iguais, temos que:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}} \right] = 0. \quad (4.6.9)$$

Para poder analisar esta relação mais precisamente, vamos fazer uma expansão das lagrangianas em série de potências:

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dot{x}^n, \quad (4.6.10a)$$

$$\mathcal{L}' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\dot{x} - v_x)^n, \quad (4.6.10b)$$

e os momentos ficam

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \dot{x}^{n-1}, \quad (4.6.11a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (\dot{x} - v_x)^{n-1}. \quad (4.6.11b)$$

As derivadas temporais ficam:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \dot{x}^{n-2} \ddot{x}, \quad (4.6.12a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (\dot{x} - v_x)^{n-2} \ddot{x}, \quad (4.6.12b)$$

de modo que a relação (4.6.9) fica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \dot{x}^{n-2} \ddot{x} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (\dot{x} - v_x)^{n-2} \ddot{x} = 0, \quad (4.6.13a)$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n [\dot{x}^{n-2} - (\dot{x} - v_x)^{n-2}] \ddot{x} = 0, \quad (4.6.13b)$$

para que tal relação seja nula, é necessário que  $n = 0$  ou  $n = 1$  ou ainda, se tomarmos  $m = n - 2$ :

$$\dot{x}^m = (\dot{x} - v_x)^m, \quad (4.6.14)$$

que é verdadeira apenas se  $m = 0$  ou seja  $n = 2$ . Assim, a forma geral da lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{livre} = a_0 + a_1 \dot{x} + a_2 \dot{x}^2, \quad (4.6.15)$$

mas por substituição direta, os dois primeiros termos não afetam as equações de Euler-Lagrange. Podemos então identificar  $a_2 = m/2$  como a massa da partícula a menos de um fator 2 e, assim, a lagrangiana assume a forma usual

$$\mathcal{L}_{livre} = \frac{m \dot{x}^2}{2}, \quad (4.6.16)$$

que ao invés de ser postulada, foi derivada exigindo certas invariâncias sobre o grupo de Galileu, sendo uma aplicação direta da teoria de grupos na Mecânica Clássica.

# Capítulo 5

## Grupos na Mecânica Quântica

Neste capítulo, apresentaremos os grupos no contexto da Mecânica Quântica. Tal teoria descreve fenômenos da escala atômica baseada em um objeto chamado função de onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ , a qual é uma grandeza complexa que fornece a probabilidade de se encontrar uma partícula entre  $a$  e  $b$  por meio da regra de Born:

$$P_{ab} = \int_a^b \bar{\Psi}\Psi dx, \quad (5.0.1)$$

com outras propriedades sendo obtidas aplicando certos operadores na função de onda. Por exemplo, o operador de posição  $\hat{x}$  e o de momento  $\hat{p}$  são dados por [Eis61]

$$\hat{x} = x, \quad (5.0.2a)$$

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad (5.0.2b)$$

e fornecem os valores de momento e posição da partícula quântica ao operarem sobre funções de onda.

Além disso, temos que a evolução temporal da função de onda é dada pela equação de Schrödinger

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) \quad (5.0.3)$$

em que o operador hamiltoniano  $\hat{\mathcal{H}}$  é obtido por meio da hamiltoniana clássica [GS18]

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \quad (5.0.4)$$

fazendo  $p \rightarrow \hat{p}$  o que o faz adquirir a forma geral

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \hat{V}(\vec{r}, t). \quad (5.0.5)$$

### 5.1 Álgebra dos Operadores

De maneira análoga às matrizes, define-se o comutador de dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  como:

$$[\hat{A}, \hat{B}]\Psi = \hat{A}(\hat{B}\Psi) - \hat{B}(\hat{A}\Psi), \quad (5.1.1)$$

com a notação de parênteses sendo usada para ressaltar a ordem de aplicação dos operadores.

Tal operação satisfaz as propriedades de um colchete de Lie usual e, além disso, os operadores formam um espaço vetorial com a soma usual, o que os torna uma álgebra de Lie. Além disso, o comutador carrega a interpretação física de quão precisamente pode-se obter as grandezas de  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  ao mesmo tempo, o chamado Princípio da Incerteza.

**Exemplo 5.1.1. Comutador de operadores de posição.**

*Se considerarmos os operadores posição no eixo  $x$ ,  $\hat{x} = x$  e no eixo  $y$ ,  $\hat{y} = y$ , então:*

$$[\hat{x}, \hat{y}]\Psi = x(y\Psi) - y(x\Psi), \quad (5.1.2)$$

$$= (xy - yx)\Psi, \quad (5.1.3)$$

$$= 0, \quad (5.1.4)$$

*o que indica que se pode obter tanto a posição em  $x$  quanto a em  $y$  simultaneamente com máxima precisão.*

**Exemplo 5.1.2. Comutador entre operador de posição e de momento.**

*Se considerarmos a posição no eixo  $x$  e o respectivo operador momento  $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ :*

$$[\hat{x}, \hat{p}]\Psi = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right) - i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi), \quad (5.1.5)$$

$$= i\hbar\left(-x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi + x\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right), \quad (5.1.6)$$

$$= i\hbar\Psi \quad (5.1.7)$$

*ou, de forma mais sucinta, é comum se escrever*

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (5.1.8)$$

*o que indica a impossibilidade de se obter com precisão o momento e a posição de um objeto quântico simultaneamente.*

Com a operação do comutador, o espaço dos operadores pode ser entendido como uma álgebra de Lie. Fazendo uso dessa informação, usaremos o seguinte raciocínio neste capítulo: por meio das relações de comutação dos operadores, os identificaremos como álgebras de Lie de um grupo de Lie, cujos elementos são obtidos com a aplicação exponencial dos geradores, os quais serão os operadores em questão. Partiremos então de grandezas observáveis para definir novos operadores com estrutura natural de grupo.

## 5.2 Álgebra dos operadores momento linear e translações

Os operadores de momento linear na  $i$ -ésima direção são definidos fazendo a seguinte substituição:

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (5.2.1)$$

de modo que:

$$\hat{p}_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.2.2a)$$

$$\hat{p}_y = i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5.2.2b)$$

$$\hat{p}_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.2.2c)$$

e as relações de comutação entre eles podem ser calculadas com

$$\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{p}_j]\Psi &= \hat{p}_i(\hat{p}_j\Psi) - \hat{p}_j(\hat{p}_i\Psi), \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi \right) - i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi \right), \\ &= -\hbar^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Psi \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi \right) \right], \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

ou seja,

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (5.2.4)$$

o que indica que os operadores momento em diferentes direções comutam, e pode-se portanto ter informação sobre os momentos em duas direções diferentes simultaneamente.

Podemos então assumir que a eq. (5.2.4) sejam as relações de comutação de um grupo, que é abeliano devido a ela ser trivial. Os geradores são os operadores momento a menos da constante de Planck, para que o argumento da exponencial seja adimensional:

$$\begin{aligned} \hat{T}(x_i) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} x_i \hat{p}_i \right\}, \\ &= \exp \left\{ -x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}, \\ &= 1 - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2!} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

com tal operador representando uma translação na direção  $\vec{x}_i$ , sendo necessário fazer uma soma no argumento da exponencial para composições de translações.

O papel deste novo operador se torna mais claro ao operar sobre uma função  $\Psi(\vec{r})$ . Sem perda de generalidade, vamos supor que  $\vec{x}_i = \vec{x} = x\hat{i}$ , para simplificar a álgebra. Operando sobre a função, temos:

$$\hat{T}(x)\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) - x \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{2!} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\vec{r}) + \dots \quad (5.2.6)$$

A expansão em série de Taylor de uma função  $\Psi(\vec{r})$  em torno de um deslocamento em uma direção  $\vec{x}$  é dada por:

$$\Psi(\vec{r} - \vec{x}) = \Psi(\vec{r} - \vec{x})|_{x=0} + \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(\vec{r}) \right) \Big|_{x=0} \times (-x_i) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\vec{r} - \vec{x}) \right) \Big|_{x_i=0} \times (x^2) + \dots \quad (5.2.7)$$

$$= \Psi(\vec{r}) - x \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{2!} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\vec{r}) + \dots \quad (5.2.8)$$

que é idêntica a (5.2.6), portanto:

$$\hat{T}(x)\Psi = \Psi(\vec{r} - \vec{x}), \quad (5.2.9)$$

ou seja, o operador construído representa uma translação de funções de onda [SN14]. Por este motivo, os operadores de momento linear são conhecidos como geradores de translações: sua álgebra representa a Álgebra de Lie do Grupo de Lie dos operadores de translação.

### 5.3 Álgebra dos operadores momento angular e rotações

Devido à natureza mais abstrata da Mecânica Quântica, o conceito de rotação torna-se mais obscuro nessa formulação. Devido a isso, primeiramente, vamos analisar como motivação os chamados operadores de momento angular  $\vec{L}$ . Classicamente, tal grandeza é dada por

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \\ &= (yp_z - zp_y)\hat{i} \\ &+ (zp_x - xp_z)\hat{j} \\ &+ (xp_y - yp_x)\hat{k}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Promovendo os momentos para operadores por meio de

$$p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (5.3.2)$$

as coordenadas do momento angular se tornam operadores dados por

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (5.3.3a)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (5.3.3b)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (5.3.3c)$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad (5.3.4a)$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \quad (5.3.4b)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y, \quad (5.3.4c)$$

ou, de forma geral

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k, \quad (5.3.5)$$

que, novamente, é idêntica à álgebra de Lie usual do produto vetorial e também à dos geradores de SO(3) e SU(2). Isso indica que podemos construir um grupo de Lie de operadores que possui como geradores os operadores de momento angular a partir da aplicação exponencial

$$\hat{R}(\theta_i) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^3 \theta_i \hat{L}_i \right\}, \quad (5.3.6)$$

que, de maneira análoga aos operadores de translação, resulta em operadores de rotação. Por este motivo, os operadores de momento angular são conhecidos como geradores de rotações.

## 5.4 Grupo dos operadores de evolução temporal

Na equação de Schrödinger (5.0.5), o operador hamiltoniano só pode depender do tempo por meio do potencial  $V$ . Se supormos que este não depende do tempo,  $V = V(\vec{r})$ , a equação de Schrödinger não irá depender do tempo. Podemos então fazer uma separação de variáveis [Eis61]:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\phi(t), \quad (5.4.1)$$

que, após substituir na equação de Schrödinger e separar a dependência temporal da espacial, chegamos a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}) = \frac{i\hbar}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = E_n, \quad (5.4.2)$$

em que  $E_n$  é uma constante, e que depende de um índice  $n$ . A parte temporal pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{iE_n}{\hbar}\phi(t), \quad (5.4.3)$$

que possui como solução normalizada  $\phi(t) = e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$  [Eis61]. Dessa forma, a  $n$ -ésima solução é dada por

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \psi(\vec{r}), \quad (5.4.4)$$

com a variação temporal estando contida completamente na exponencial. Ao comparar com um elemento arbitrário do grupo U(1):

$$e^{i\theta} \leftrightarrow e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}, \quad (5.4.5a)$$

$$\theta \leftrightarrow -\frac{E_n}{\hbar}t, \quad (5.4.5b)$$



com tal fator fazendo o papel de fase neste grupo. Desta forma, é usual escrever a evolução temporal das autofunções como

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = U(t, t_0) \Psi_n(\vec{r}, 0), \quad (5.4.6)$$

com  $U(t) = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$ , em associação direta com  $U(1)$ . Neste caso a identidade é dada por  $U(0)$ , e as propriedades de grupo seguem naturalmente das propriedades da exponencial. Com isso, vê-se que a evolução temporal das autofunções pode ser entendida como a ação de um grupo, o grupo dos operadores de evolução temporal.

Ainda, assim como  $i$  é o gerador do grupo  $U(1)$ , podemos calcular o gerador deste grupo por meio de

$$\left. \frac{d}{dt} U(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right|_{t=0} = -\frac{iE_n}{\hbar}, \quad (5.4.7)$$

com isso, vemos que o gerador das translações temporais sobre autoestados de  $\hat{\mathcal{H}}$ , a menos de uma constante, é dada pela energia do autoestado em questão, o que indica que, em algum sentido a energia é o gerador de translações temporais, ou da evolução temporal, fazendo para o tempo o mesmo papel que a os momentos fazem para o espaço.

# Capítulo 6

## Grupos na Teoria da Relatividade

Neste Capítulo, serão analisados casos onde os grupos aparecem na teoria da Relatividade, sendo portanto relevante fazer uma breve contextualização histórica da teoria.

No início do século XX, a Mecânica Clássica, analisada no Capítulo 4, já se encontrava consolidada e, da mesma forma, estava o eletromagnetismo clássico, baseado nas equações de Maxwell[Nus15]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (6.0.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.0.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.0.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.0.1d)$$

em que  $\mu_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3}$  é a permissividade elétrica do vácuo,  $\mu_0 = 1,25 \times 10^{-6} \text{N/A}^2$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $\rho(\vec{r}, t)$  é a densidade de carga elétrica,  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  é a densidade de corrente elétrica,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  é o campo elétrico e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  é o campo magnético.

Na Mecânica Clássica, as leis da Física são invariantes por transformações de Galileu, porém isto não ocorre para as equações de Maxwell. Aplicar uma transformação de Galileu propriamente dita nas fontes e nos campos seria muito trabalhoso, porém, para se introduzir a ideia, vamos considerar tais equações no vácuo onde, como não há matéria, os termos de densidades  $\rho$  e  $\vec{J}$  são nulos [Gri05]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (6.0.2a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.0.2b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.0.2c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.0.2d)$$

como é bem conhecido, essas equações podem ser convertidas em equações de ondas em

termos dos campos. Fazemos isso para o campo  $\vec{E}$ , aplicando o rotacional na (6.0.2c):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}, \\ \implies \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}),\end{aligned}\tag{6.0.3}$$

em que foi usada a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ . Usando as (6.0.2a) e (6.0.2d), podemos eliminar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  para obter :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},\tag{6.0.4}$$

que é uma equação de onda para o campo  $\vec{E}^1$ , possuindo velocidade  $v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ , numericamente idêntica à velocidade da luz  $c$  no vácuo, o que sugeriu aos físicos da época que a luz era descrita por campos elétricos e magnéticos [Nus14][Eis61].

O problema é que, como as equações de Maxwell não são invariantes por transformações de Galileu e a velocidade das ondas obtidas é constante, a princípio pode-se pensar que as equações de Maxwell não são válidas em todos os referenciais inerciais, e que foi a postura adotada pelos físicos da época: considerá-las válidas apenas no referencial do chamado éter luminífero.

O éter luminífero seria um meio material onde a luz se propaga, preenchendo o espaço interplanetário ao invés do vácuo. Porém, ele deveria possuir propriedades muito absurdas, e tentativas de detecção do éter foram frustradas pelo resultado negativo não esperado no experimento de Michelson e Morley de 1887 [Eis61], que tentou detectar a velocidade da Terra com relação ao éter, mas cujo resultado foi nulo, fazendo a comunidade científica procurar por outras alternativas, culminando em diferentes aspectos do que hoje conhecemos como teoria da Relatividade [MAR15].

## 6.1 O Grupo de Lorentz em uma dimensão

Uma vez que as equações de Maxwell não são invariantes por transformações de Galileu, se elas forem válidas em todos os referenciais inerciais, segue que as transformações de Galileu devem ser modificadas para outras transformações que relacionam referenciais inerciais. Estas são as chamadas transformações de Lorentz<sup>2</sup>, que, para uma velocidade na direção  $x$  são dadas por [Eis61]

$$t' = \gamma \left( t + \frac{v}{c^2} x \right),\tag{6.1.1a}$$

$$x' = \gamma (x - vt),\tag{6.1.1b}$$

$$y' = y,\tag{6.1.1c}$$

$$z' = z,\tag{6.1.1d}$$

<sup>1</sup>Pode-se também derivar uma equação de onda para o campo  $\vec{B}$  com procedimento semelhante.

<sup>2</sup>No caso, uma teoria física é dita relativística se manter a mesma forma ao ser submetida a transformações de Lorentz.

com  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  sendo chamado pelo fator de Lorentz, com a transformação para  $x$  sendo exatamente um *boost* de Galileu (4.5.2b) na direção  $x$  multiplicado por tal fator sendo também comum denominar essas transformações de *boost* de Lorentz [AP09].

É interessante apontar que, em contraste com os *boost* de Galileu (4.5.2a), o tempo  $t$  também é transformado para um referencial com uma velocidade na direção  $x$ , o que não ocorre em Mecânica Clássica, com o tempo sendo absoluto.

As transformações de Lorentz podem ser derivadas de várias formas diferentes, como os postulados de Einstein, considerações de isotropia e homogeneidade do espaço, ou a derivação original de Lorentz, baseada em sua teoria do éter. Discussões baseadas em sua derivação poderiam fornecer um trabalho inteiro a respeito e, por este motivo, não entraremos neste mérito [MAR15].

Aqui analisaremos outra questão: o significado físico e geométrico das transformações de Lorentz. Ao analisar (6.1.1), pode-se ver que sua definição é muito abstrata, remetendo pouco a nossa intuição e a outros entes matemáticos. Com isso em mente, vamos agora analisar a estrutura de grupo dessas transformações, o que será útil para melhor compreendê-las. Uma vez que as coordenadas  $y$  e  $z$  não foram afetadas, vamos analisar apenas  $x$  e  $t$ :

$$t' = \gamma t - \gamma \frac{v}{c^2} x, \quad (6.1.2a)$$

$$x' = \gamma x - \gamma v t. \quad (6.1.2b)$$

O próximo passo seria reescrever a transformação em forma matricial. Entretanto, há um pequeno detalhe: se fizermos isso agora, a matriz terá a forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \quad (6.1.3)$$

que não possui todas as entradas com a mesma dimensão física. Para facilitar a análise, seria interessante possuir todas as entradas sendo grandezas adimensionais, assim como as matrizes de rotação analisadas nos Capítulos 1 e 2. Podemos fazer isso multiplicando a transformação do tempo  $t$  pela constante  $c$ , a fim de que ele obtenha dimensão de espaço:

$$ct' = -\gamma \frac{v}{c} x + \gamma (ct), \quad (6.1.4a)$$

$$x' = \gamma x - \gamma \frac{v}{c} (ct), \quad (6.1.4b)$$

com a coordenada  $ct$  sendo a transformada. A transformação escrita em linguagem matricial fica:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad (6.1.5)$$

sendo útil, para facilitar a notação, definir o parâmetro adimensional  $\beta = v/c$  sendo a fração da velocidade do referencial com relação à velocidade da luz. Dessa forma,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$  e a matriz de transformação adquire a forma:

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (6.1.6)$$

com tais transformações constituindo um grupo de matrizes. No caso, a associatividade é herdada da multiplicação matricial, o elemento neutro é a matriz identidade obtida com  $\beta = 0$ , a inversa sendo dada por

$$\Lambda^{-1} = \Lambda(-\beta), \quad (6.1.7)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (6.1.8)$$

pois

$$\Lambda(\beta)\Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (6.1.9)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 & \gamma^2\beta - \gamma^2\beta \\ -\gamma^2\beta + \gamma^2\beta & \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 \end{pmatrix}, \quad (6.1.10)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.1.11)$$

restando analisar se uma composição de duas transformações de Lorentz também é uma transformação de Lorentz. Ao multiplicar duas transformações vinculadas a  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , obtemos:

$$\Lambda(\beta_1)\Lambda(\beta_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (6.1.12)$$

$$= \begin{pmatrix} (1 + \beta_1\beta_2)\gamma_1\gamma_2 & -(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1\gamma_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1\gamma_2 & (1 + \beta_1\beta_2)\gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (6.1.13)$$

ao comparar com a equação (6.2.8), vemos que ela possui a mesma forma assumindo que a resultante esteja vinculada a um parâmetro  $\gamma'$ :

$$\gamma' = (1 + \beta_1\beta_2)\gamma_1\gamma_2, \quad (6.1.14)$$

$$\beta' = (\beta_1 + \beta_2)\gamma_1\gamma_2, \quad (6.1.15)$$

e, substituindo a eq. (6.1.14) na eq. (6.1.15), vemos que

$$\beta' = \frac{\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}, \quad (6.1.16)$$

que é a regra de adição de velocidades relativísticas. Reexpressando em termos das velocidades, pode-se ver que, no limite que  $c \rightarrow \infty$ , recuperamos a soma de velocidades usual

$$\frac{v'}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1v_2}{c^2}}, \quad (6.1.17)$$

$$\implies v' \approx v_1 + v_2. \quad (6.1.18)$$

Como esse grupo se encontra definido por um parâmetro  $\beta$ , podemos então calcular seu

gerador:

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \frac{d}{d\beta} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right) \Big|_{\beta=0}, \\ &= \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right) \Big|_{\beta=0}, \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1.20)$$

como há apenas um gerador, a Álgebra de Lie é trivial, o que não ajuda muito. Porém, o gerador é exatamente o mesmo do calculado para o grupo  $O(1, 1)$ , o que sugere que o comportamento do grupo formado pelas transformações de Lorentz é semelhante ao de  $O(1, 1)$ . Isso fica ainda mais claro se notarmos que as duas entradas de (6.2.8) satisfazem:

$$\begin{aligned} \gamma^2 - (\gamma\beta)^2 &= \gamma^2 (1 - \beta^2), \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2), \\ &= 1, \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

pois  $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$ . Dessa forma

$$\gamma^2 - (-\gamma^2\beta)^2 = 1, \quad (6.1.22)$$

que é a equação de uma hipérbole. Podemos então escrever [Run20] [Ros64]

$$\gamma = \cosh \vartheta, \quad (6.1.23a)$$

$$\gamma\beta = \sinh \vartheta, \quad (6.1.23b)$$

o que nos permite usar como parâmetro para o grupo um ângulo hiperbólico  $\vartheta$ . Sua forma explícita em função do parâmetro antigo pode ser obtida dividindo as (6.1.23) uma pela outra:

$$\tanh \vartheta = \frac{\sinh \vartheta}{\cosh \vartheta}, \quad (6.1.24)$$

$$= \frac{\gamma\beta}{\gamma}, \quad (6.1.25)$$

$$= \beta, \quad (6.1.26)$$

vemos então que o parâmetro  $\beta$ , cuja interpretação física é de uma fração de velocidade com relação à velocidade da luz, também pode ser entendido geometricamente como a tangente de um ângulo hiperbólico. Finalmente, na nova parametrização, as matrizes do grupo se tornam:

$$\Lambda(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & -\sinh \vartheta \\ -\sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix}, \quad (6.1.27)$$

que, como notamos, podem ser interpretadas geometricamente como rotações hiperbólicas em um plano abstrato definido pelo tempo e pelo espaço, preservando a forma

$$-(ct)^2 + x^2 = \text{constante}, \quad (6.1.28)$$

ou, de maneira análoga à feita para análise do grupo  $O(1,1)$ , em termos da variável imaginária  $w = ict$ , obtém-se:

$$w^2 + x^2 = \text{constante}, \quad (6.1.29)$$

com tempo e espaço entrando em pé de igualdade e as transformações de Lorentz assumindo o papel de rotações usuais neste plano, assim como visto na Figura 6.1. No contexto da teoria da Relatividade, a transformação  $w = ict$  ganha o nome de rotação de Wick, e permite transformar um problema relativístico em um problema geométrico no espaço euclidiano, assim como neste caso. Dessa forma pode-se ver claramente como um melhor entendimento de transformações abstratas foi obtido a partir da análise do ponto de vista da teoria de grupos.

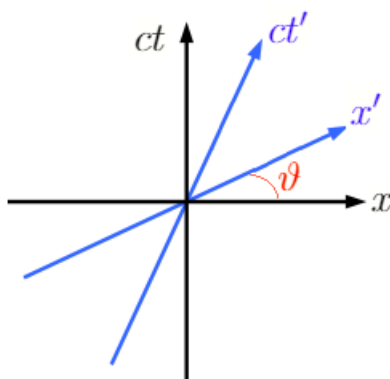


Figura 6.1: visualização das transformações de Lorentz como rotações. Fonte: o autor.

## 6.2 O Grupo de Lorentz em 3 dimensões

Nesta seção, estudaremos o Grupo de Lorentz em 3 dimensões, que é definido como o grupo composto pelas rotações tridimensionais e as transformações de Lorentz, também tridimensionais. As transformações de Lorentz em cada direção são dadas, em analogia com a eq. (6.1.1) por

1. Em  $x$ :

$$t' = \gamma_x \left( t - \frac{v_x}{c^2} x \right), \quad (6.2.1a)$$

$$x' = \gamma_x (x - v_x t), \quad (6.2.1b)$$

$$y' = y, \quad (6.2.1c)$$

$$z' = z; \quad (6.2.1d)$$

2. Em  $y$ :

$$t' = \gamma_y \left( t - \frac{v_y}{c^2} y \right), \quad (6.2.2a)$$

$$x' = x, \quad (6.2.2b)$$

$$y' = \gamma_y (y - v_y t), \quad (6.2.2c)$$

$$z' = z; \quad (6.2.2d)$$

3. Em  $z$ :

$$t' = \gamma_z \left( t - \frac{v_z}{c^2} z \right), \quad (6.2.3a)$$

$$x' = x, \quad (6.2.3b)$$

$$y' = y, \quad (6.2.3c)$$

$$z' = \gamma_z(z - v_z t); \quad (6.2.3d)$$

em que

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}. \quad (6.2.4)$$

Em linguagem matricial, ao operarem sobre um evento no espaço-tempo, definindo  $\beta_i = v_i/c$ , tais transformações podem ser representadas matricialmente como

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_x & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_y & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.6)$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_z & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2.7)$$

Com essas matrizes correspondendo às transformações de Lorentz associadas a cada uma das direções, vinculadas a três parâmetros  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ , isto é [Bar18b]:

$$\Lambda_x(\beta_x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_x & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.8a)$$

$$\Lambda_y(\beta_y) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_y & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.8b)$$

$$\Lambda_z(\beta_z) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta_z & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2.8c)$$



As transformações de Lorentz em cada direção formam um grupo de matrizes, com a identidade sendo obtida com  $\beta_i = 0$  e as matrizes inversas sendo associadas ao parâmetro inverso  $\Lambda^{-1} = \Lambda(-\beta_i)$ , equivalente a um referencial se movendo com velocidade oposta. Entretanto, ao se compor uma transformação em uma direção com outra em uma direção diferente, o resultado em geral não é uma transformação do mesmo tipo.

Fisicamente isso ocorre pois, para se obter um *boost* de Lorentz em uma direção arbitrária, é necessário aplicar um *boost* nos eixos coordenados usuais e depois rotacionar o sistema de coordenadas, ou seja, aplicar uma rotação. Dessa forma, pode-se perceber a necessidade de se incluir também as rotações para formar o chamado grupo de Lorentz.

A partir das relações (6.2.8), poderia-se calcular os geradores explicitamente por meio das derivadas com relação aos parâmetros  $\beta_i$ . Entretanto, nesta forma, isso seria algebricamente trabalhoso. Para facilitar a tarefa, vamos fazer uma mudança de parâmetro semelhante ao caso unidimensional. Assim como na seção anterior, façamos a mudança de coordenadas [Run20]

$$\gamma_i \rightarrow \cosh \vartheta_i, \quad (6.2.9a)$$

$$\gamma_i \beta_i \rightarrow \sinh \vartheta_i, \quad (6.2.9b)$$

o que é válido se identificarmos  $\beta_i = \tan \vartheta_i$ . No contexto da relatividade, os parâmetros  $\vartheta_i$  são conhecidos como **rapidez**, em contraste com as velocidades usuais. Dessa forma, as matrizes assumem a mesma forma das rotações hiperbólicas (3.6.4) de  $SO(1, 3)$ :

$$\Lambda_{xt}(\vartheta_1) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_1 & -\sinh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \vartheta_1 & \cosh \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.10a)$$

$$\Lambda_{yt}(\vartheta_2) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_2 & 0 & -\sinh \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \vartheta_2 & 0 & \cosh \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2.10b)$$

$$\Lambda_{zt}(\vartheta_3) = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta_3 & 0 & 0 & -\sinh \vartheta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \vartheta_3 & 0 & 0 & \cosh \vartheta_3 \end{pmatrix}, \quad (6.2.10c)$$

ou seja, as transformações de Lorentz podem ser interpretadas como rotações hiperbólicas em planos compostos por uma direção espacial e uma temporal. Além disso, os geradores são exatamente os mesmos de  $SO(1, 3)$ . A fim de ilustração, vamos compará-los com seus

equivalentes no grupo de Galileu:

$$\mathfrak{l}_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{l}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{l}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.11a)$$

$$\mathfrak{b}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{b}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{b}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2.11b)$$

Pode-se ver que os geradores dos *boost* de Lorentz possuem a mesma forma que os dos *boost* de Galileu, porém com uma entrada não nula extra, que relaciona tempo com espaço. Fisicamente isso indica que uma mudança de referencial afeta também as medidas de tempo, o que não ocorre na Mecânica Clássica, assim como analisado em (4.6.2).

Uma vez que os *boost* de Lorentz podem ser interpretadas como rotações hiperbólicas e o grupo de Lorentz é composto por *boost* e pelas rotações, temos que ele na verdade se resume a  $SO(1, 3)$  disfarçado. Assim como já foi apontado no Capítulo 2, tal grupo consiste nas transformações de simetrias da seguinte forma quadrática.

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \text{constante}, \quad (6.2.12)$$

que é a equação de um hiperbolóide em 4 dimensões. Dessa forma, exigir que as leis da Física sejam as mesmas em todos os referenciais inerciais é equivalente a mantê-las invariantes por *boost* de Lorentz, que por sua vez é equivalente a preservar a forma (6.2.12).

## 6.3 O Grupo de Poincaré e a Geometria do Espaço-Tempo

Assim como o Grupo Geral de Galileu engloba as rotações, *boost* e translações, há um análogo no caso relativístico, que é o grupo de Poincaré. Ele se resume ao grupo de Lorentz acrescido das translações usuais da Mecânica Clássica, sendo idêntico ao grupo de Galileu, porém com os *boost* sendo substituídos pelas transformações de Lorentz [AP09] e a forma geral de seus elementos sendo dada, em analogia com (4.6.1), por

$$\mathcal{P}(\vec{v}, \vec{r}_0, R, t_0) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} & t_0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} & x_0 \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} & y_0 \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.3.1)$$

em que os  $\Lambda_{ij}$  se referem a entradas dos elementos do grupo de Lorentz ou  $SO(1, 3)$ , podendo ser obtidos por produtos dos *boost* em cada direção com as rotações em cada

plano, mas cuja forma explícita é complicada e não acrescentará muito na discussão. Como agora estamos considerando translações do sistema de coordenadas, a forma quadrática da eq. (6.2.12) se torna

$$-c^2(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \text{constante}. \quad (6.3.2)$$

Relembrando a forma como distâncias  $d$  entre dois pontos  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $P = (x, y, z)$  do espaço euclidiano são calculados

$$d(P, P_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad (6.3.3)$$

vemos que a eq. (6.3.2) possui a mesma forma, mas com uma componente temporal um tanto diferente. Porém, com a rotação de Wick  $w = ict$ , ela assume a mesma forma de uma distância no  $\mathbb{R}^4$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (w - w_0)^2 = \text{constante}, \quad (6.3.4)$$

dessa forma, a eq. (6.3.2) é muito semelhante a uma distância, apesar de poder assumir valores de "constante" negativos. Podemos denominar essa constante de  $\Delta s^2$ , sendo uma distância entre pontos no espaço-tempo, possuindo em si a noção de diferenciação entre espaço e tempo em seus sinais. Ainda, se fizermos:

$$\Delta t = t - t_0, \quad (6.3.5a)$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad (6.3.5b)$$

$$\Delta y = y - y_0, \quad (6.3.5c)$$

$$\Delta z = z - z_0, \quad (6.3.5d)$$

então, a distância no espaço-tempo se torna

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (6.3.6)$$

sendo batizada de intervalo de espaço-tempo, que também possui embutida em si a noção de causalidade no espaço-tempo, pois, se a velocidade  $v$  de uma partícula livre que se propaga entre os dois pontos for dada por

$$v^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta t^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta t^2}, \quad (6.3.7)$$

em termos da velocidade, o intervalo de espaço tempo se torna

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (6.3.8)$$

vemos então que o sinal de  $\Delta s^2$  é determinado pela velocidade da partícula, o que mostra que ele também possui embutida a noção de causalidade em seu sinal:

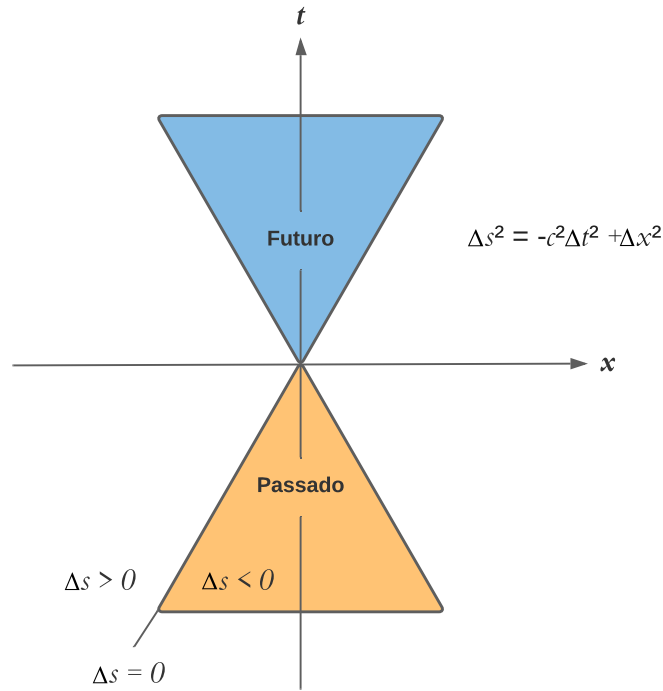


Figura 6.2: cone de luz. Ele delimita diferentes regiões de acordo com suas relações de causalidade. Imagem feita pelo autor no site [Lucid.app](http://Lucid.app).

1. Se  $v < c$ ,  $\Delta s^2 < 0$  com isso, a distância temporal entre dois eventos é maior que a espacial, e um pode ser causa do outro. Se refere à região interna às linhas retas na Figura 6.2;
2. Se  $v = c$ ,  $\Delta s^2 = 0$  região chamada de cone de luz, representada pelas linhas retas da Figura 6.2, e representa a propagação de sinais luminosos;
3. Se  $v > c$ ,  $\Delta s^2 > 0$  com isso, a distância espacial entre dois eventos é maior que a temporal, e um não pode ser causa do outro, pois exigiria uma propagação com velocidade maior que a da luz. Se refere à região externa às linhas retas na Figura 6.2;

Se considerarmos dois pontos no espaço-tempo arbitrariamente próximos, o intervalo de espaço-tempo fica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.3.9)$$

com a forma (6.3.9) sendo conhecida como Métrica de Minkowski, fornecendo uma distância infinitesimal no espaço-tempo relativístico. Podemos ainda expressá-la em termos da velocidade, agora dada por:

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}, \quad (6.3.10)$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{c^2} + \frac{\dot{y}^2}{c^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2} \quad (6.3.11)$$

e  $ds$  pode ser expresso como

$$ds = -c\sqrt{1 - v^2/c^2}dt, \quad (6.3.12)$$

com tal forma podendo ser integrada para obter o intervalo  $\Delta s^2$ .

É relevante apontar que, com uma rotação de Wick, tempo e espaço entram em pé de igualdade total, como pode ser visto fazendo  $w = ict$  na métrica de Minkowski (6.3.9) [Min13]:

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.3.13)$$

ou, nas belas palavras do próprio Minkowski<sup>3</sup>(Figura 6.3): "Dessa forma a essência do postulado pode ser expressa matematicamente de forma muito concisa na fórmula mística:

$$3 \times 10^5 \text{ Km} = \sqrt{-1} \text{ segundos.}" \quad (6.3.14)$$

Expressando uma relação concisa entre espaço e tempo. Fonte: [Space and Time](#), página 50.

Embora a discussão anterior tenha se assimilado a questões de matemática pura, na verdade, a métrica de Minkowski da eq. (6.3.9) permite expressar de forma muito concisa as leis da Física em forma relativística. Sabemos da experiência que partículas livres percorrem linhas retas, pois elas são as curvas que minimizam a distância entre dois pontos. No caso relativístico, a relação será parecida, porém a quantidade minimizada será a distância no espaço-tempo, o  $\Delta s$ . Dessa forma, podemos expressar o movimento de partículas livres com o seguinte problema de minimização

$$\Delta s = -c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (6.3.15)$$



Figura 6.3: Hermann Minkowski. Ele percebeu que a teoria da Relatividade poderia ser expressa em termos de um espaço quadridimensional, com o tempo fazendo o papel da quarta dimensão. Fonte: [Space Time Society](#).

que se assemelha muito ao Princípio da Mínima Ação, com a quantidade minimizada sendo  $\Delta s$ . Essa quantidade possui dimensão de espaço e não de ação, mas podemos corrigir multiplicando-a por um fator  $mc$  com  $m$  sendo a massa da partícula e  $c$  a velocidade da luz. Obtemos então que a ação de partículas livres relativísticas é dada por

<sup>3</sup>Tradução livre do original "Thus the essence of this postulate can be expressed mathematically very concisely in the mystical formula:  $3 \times 10^5 \text{ Km} = \sqrt{-1} \text{ seconds.}"$

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad (6.3.16)$$

com a lagrangiana sendo

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (6.3.17)$$

e que no limite de baixas velocidades se reduz à lagrangiana usual da Mecânica Clássica a menos de uma constante irrelevante:

$$\mathcal{L} \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (6.3.18)$$

Analisando as equações de Euler-Lagrange da eq. (4.0.2), vinculadas à nossa lagrangiana relativística da eq. (6.3.17), vemos que, na direção  $x$ , por exemplo:

$$\mathcal{L}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} - \frac{\dot{y}^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}, \quad (6.3.19)$$

$$\implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad (6.3.20)$$

$$\implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\dot{x}, \quad (6.3.21)$$

e a equação de movimento é uma lei de conservação:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = 0, \quad (6.3.22)$$

com a quantidade conservada sendo

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.3.23)$$

que é conhecida como momento relativístico na direção  $x$ . Note que ele é exatamente o momento clássico usual  $p_x = m\dot{x}$ , porém considerando uma variação da massa das partículas, a qual já foi atestada experimentalmente. Isso fica claro fazendo

$$m' = m\gamma \quad (6.3.24a)$$

$$\implies p_x = m'\dot{x}. \quad (6.3.24b)$$

Note que a lagrangiana encontrada satisfaz as mesmas condições de isotropia e homogeneidade estudadas no caso clássico, porém agora sendo invariante por transformações de Lorentz ao invés de Galileu, oferecendo também uma interpretação geométrica, diferentemente do caso clássico.

Assim como consideramos lagrangianas gerais como termos de partículas livres mais interações, podemos fazer o mesmo com a lagrangiana anterior assumindo um termo de interação  $V$ , o que nos forneceria a 2ª Lei de Newton em forma relativística:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + V(x, y, z, t), \quad (6.3.25)$$

e a equação de movimento na direção  $x$  se torna, simplesmente:

$$\frac{d}{dt}p_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (6.3.26)$$

possuindo a mesma forma da 2ª Lei usual, porém com o momento relativístico ocupando a posição do momento usual. Agora pode-se também calcular a energia relativística por transformada de Legendre. Supondo o caso unidimensional, temos:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \mathcal{L}, \quad (6.3.27)$$

$$= \frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} \quad (6.3.28)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}}, \quad (6.3.29)$$

e que se reduz à energia cinética usual para baixas velocidades  $v/c \ll 1$ :

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (6.3.30)$$

possuindo também um termo  $mc^2$  não nulo mesmo no caso do repouso  $\dot{x} = 0$ , conhecido como energia de repouso.

Dessa forma, podemos ver como o fato de expressarmos as transformações de Lorentz na linguagem de teoria de grupos nos permitiu perceber uma simetria do espaço-tempo, tornando possível reexpressar tais transformações de modo mais simples e geométrico, além de ser útil para se construir uma dinâmica relativística naturalmente invariante sob transformações entre referenciais inerciais.

# Capítulo 7

## Simetrias de Gauge em Teorias de Campos

Nos capítulos anteriores, foram estudadas transformações nas coordenadas de eventos e suas respectivas simetrias, equivalentes a mudanças de coordenadas. Tais transformações são ditas globais, pois afetam todos os pontos do espaço da mesma forma.

Além dos eventos no espaço tempo, outros objetos importantíssimos para a Física são os campos. Eles são usados para modelar as interações fundamentais, como a gravitação e o eletromagnetismo, sendo utilizados para representá-las sem o uso de interações instantâneas à distância. Teorias físicas que descrevem o comportamento de campos são denominadas de Teorias de Campos.

Neste capítulo apresentaremos algumas simples teorias de campos, bem como suas respectivas simetrias. Nesse contexto, as simetrias são conhecidas como simetrias de gauge ou transformações de gauge e são definidas como transformações que não afetam os campos e conseqüentemente a Física do sistema estudado.

Além de facilitar manipulações algébricas, exigir que uma dada teoria possua uma simetria de gauge possui outra vantagem: é uma forma natural de construir interações entre diferentes campos. Esse método foi estudado por Hermann Weyl (Figura 7.1) no início do século XX, ao buscar por uma teoria que unificasse a gravitação com o eletromagnetismo. Aqui pretende-se aplicá-lo para descrever a interação eletromagnética partindo de sua respectiva simetria de gauge e grupo de Lie associado.

Para tornar as expressões mais concisas, neste capítulo usaremos a chamada convenção de soma de Einstein

$$A_\mu B^\mu = -A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \quad (7.0.1)$$

em que os índices gregos assumem os valores  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , indicando coordenadas do espaço-tempo, com o tempo identificado como 0. Além disso a métrica

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.0.2)$$





Figura 7.1: Hermann Weyl. Fonte: [Wikipédia](#).

é usada para baixar ou subir índices:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad (7.0.3a)$$

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu, \quad (7.0.3b)$$

valendo que  $\eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$  que é a matriz identidade, servindo para trocar índices de lugar:

$$A_\mu = \delta_\mu^\nu A_\nu. \quad (7.0.4)$$

## 7.1 Teorias de Campos

O formalismo de teorias de campos consiste em descrevê-las por meio de uma ação que deve ser minimizada, a qual consiste em uma integral no espaço-tempo de uma função  $\mathcal{L}^1$  dos campos  $\phi$ , de suas derivadas espaço-temporais<sup>2</sup>  $\partial_\mu\phi$  e eventualmente das coordenadas  $x_\mu$  sobre uma região do  $\Omega$ :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x_\mu) d^4x, \quad (7.1.1)$$

com tal problema de minimização sendo equivalente às chamadas equações de Euler-Lagrange para campos [AP09]:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}, \quad (7.1.2)$$

e que fornecem as equações de campo da teoria. Note que, em contraste com a Mecânica Clássica, que descrevia o movimento de partículas, em vez de termos um parâmetro

<sup>1</sup>Esta função recebe o nome de densidade lagrangiana, mas nos referiremos a ela simplesmente como lagrangiana, para simplificar.

<sup>2</sup>A notação  $\partial_\mu$  se refere a  $\mu$ -ésima derivada do espaço tempo:  $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ .

de integração na ação (o tempo), agora temos quatro parâmetros, representados pelas dimensões do espaço-tempo, com as antigas coordenadas espaciais tendo sido rebaixadas a parâmetros e os campos assumindo como variáveis de interesse.

A notação em (7.1.2) é um tanto sofisticada. Por este motivo, convém calcular as equações de campo de alguns exemplos.

### Exemplo 7.1.1. Equação de Dirac

A equação de Dirac descreve com precisão o comportamento de sistemas quânticos relativísticos, prevendo o espectro do átomo de hidrogênio, a existência da antimatéria e ainda incorporando efeitos de spin. Neste exemplo, iremos derivar tal equação com base em sua lagrangiana, em contraste com a derivação original de Dirac (Figura 7.2). Suponha a lagrangiana de Dirac para um campo escalar complexo  $\psi$  e seu conjugado  $\bar{\psi}$  [AP09]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\hbar\gamma^\nu \partial_\nu - mc) \psi, \quad (7.1.3)$$

em que os  $\gamma^\nu$  são matrizes com coeficientes constantes. Vamos calcular a equação de campo associada a  $\bar{\psi}$ . Temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\hbar\gamma^\nu \partial_\nu - mc) \psi, \quad (7.1.4a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad (7.1.4b)$$

portanto, a equação de campo (7.1.2) é dada por

$$(i\hbar\gamma^\nu \partial_\nu - mc) \psi = 0, \quad (7.1.5)$$

que é chamada de Equação de Dirac e descreve o campo  $\psi$  associado a elétrons. Note que ela se encontra em função de  $\psi$ , e não de seu conjugado  $\bar{\psi}$ .



Figura 7.2: Paul Dirac. Ele derivou sua famosa equação com argumentos puramente matemáticos, sendo capaz de explicar vários fenômenos com ela. Fonte: [Wikipédia](#).

Vamos agora calcular a equação de campo associada a  $\psi$ . Temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -mc\bar{\psi}, \quad (7.1.6a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial (\partial_\nu \psi)}{\partial (\partial_\mu \psi)}, \quad (7.1.6b)$$

usando que

$$\frac{\partial (\partial_\nu \psi)}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \delta_\nu^\mu, \quad (7.1.7)$$

e substituindo em (7.1.6b) fornece

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} &= i\hbar\gamma^\nu \delta_\nu^\mu, \\ &= i\hbar\gamma^\mu, \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

e a equação de campo associada a  $\psi$  é

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\bar{\psi} = 0, \quad (7.1.9)$$

possuindo a mesma forma da equação de Dirac (7.1.5), porém em termos da função conjugada  $\bar{\psi}$ .

Assim como a lagrangiana  $\mathcal{L} = mv^2/2$  descreve as partículas livres da Mecânica Clássica, as lagrangianas de Dirac e a de Klein-Gordon (não analisada neste trabalho) descrevem campos livres, isto é, campos que não interagem com outros campos. No Capítulo 4, vimos que a lagrangiana livre pode ser obtida a partir de considerações de simetria. Analogamente, as de Klein-Gordon e Dirac podem ser obtidas com argumentos semelhantes baseados nas chamadas simetrias globais [AP09], porém que não analisaremos neste trabalho.

No caso do movimento de partículas, certas simetrias levavam a quantidades conservadas que simplificam o estudo dos sistemas em questão. O mesmo ocorre para teorias de campos, porém isso agora ocorre para os próprios campos e são denominadas de simetrias de Gauge, ou simetrias de calibre. Vamos analisar um simples exemplo onde isso ocorre.

### Exemplo 7.1.2. Gravitação Newtoniana

A teoria Newtoniana da gravitação pode ser resumida com as seguintes equações

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho_M, \quad (7.1.10a)$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi, \quad (7.1.10b)$$

em que  $\Phi$  é o potencial gravitacional,  $\vec{g}$  o campo gravitacional e  $\rho_M$  a densidade de massa. A primeira é uma equação de campo, fornecendo o potencial gravitacional em função da fonte  $\rho_M$ , enquanto a segunda relaciona o campo gravitacional com o potencial gravitacional, que interage com partículas através da força  $\vec{F} = -m\vec{g}$ .

Para ilustração, é útil descrever a teoria newtoniana usando o formalismo de teorias de campos. Como ela é não relativística, apenas variáveis espaciais serão utilizadas. Dessa forma, vê-se que a equação de campo pode ser derivada da seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi G} \left( \vec{\nabla}\Phi \right)^2 - \rho_M \Phi. \quad (7.1.11)$$

A partir da equação (7.1.10b), vê-se claramente que podemos somar uma constante  $\Phi_0$  ao potencial gravitacional sem alterar o campo gravitacional  $\vec{g}$  e conseqüentemente as interações físicas:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \Phi_0, \quad (7.1.12a)$$

$$\implies \vec{g} \rightarrow \vec{g}' = -\vec{\nabla}\Phi' = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (7.1.12b)$$

que é equivalente a definirmos o nível zero da energia, ou o ponto de observação. Isso é coerente com nossa intuição de que podemos observar um objeto em queda livre tanto de cima de um prédio quanto do chão sem alterar a Física do problema. Também é interessante apontar que, se a lagrangiana for expressa em função de  $\Phi'$ , ela será modificada apenas por um termo que não altera a equação de campo:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = -\frac{1}{8\pi G} \left( \vec{\nabla}\Phi' \right)^2 - \rho_M \Phi' - \rho_M \Phi_0. \quad (7.1.13)$$

Agora que desenvolvemos o formalismo para teorias de campos, vamos aplicá-lo no estudo da interação eletromagnética.

## 7.2 Eletromagnetismo Clássico

A teoria do eletromagnetismo clássico é baseada nas equações de Maxwell, [Nus15]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.2.1d)$$

em que  $\rho$  é a densidade de carga,  $\vec{J}$  a densidade de corrente,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  os campos elétrico e magnético, respectivamente. Esses campos interagem com partículas carregadas, com carga  $q$ , e velocidade  $\vec{v}$  seguindo a lei de força de Lorentz:

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (7.2.2)$$

Para melhor analisar essa teoria, vamos reescrevê-la a fim de torná-la explicitamente covariante por transformações de Lorentz, bem como reescrever as equações de campo em

termos de uma lagrangiana [Lab19][AP09]. Isso pode ser feito inicialmente notando que, como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , este pode ser igual ao rotacional de um campo vetorial

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (7.2.3)$$

conhecido como potencial vetor. Ao substituí-lo em (7.2.1c), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \\ \implies \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

como na expressão anterior temos que o rotacional de um campo vetorial é nulo, este pode ser igualado ao gradiente de um campo escalar  $\phi$ , conhecido como potencial elétrico:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \phi, \\ \implies \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Vemos então que os campos podem ser redefinidos em função dos seguintes potenciais [Gri05]:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (7.2.6a)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (7.2.6b)$$

Note que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são inalterados se aplicarmos as seguintes transformações

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (7.2.7a)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad (7.2.7b)$$

o que nos confere uma liberdade de calibrar os campos sem mudar a Física e que constitui a simetria de gauge do eletromagnetismo. A princípio, pode-se pensar que tal liberdade se constitui apenas de uma curiosidade matemática, porém ela permite simplificar vários problemas.

Substituindo as (7.2.6) na (7.2.1), podemos reexpressar as equações de Maxwell em função dos potenciais. Note que as equações sem fonte, (7.2.1b) e (7.2.1c) são trivialmente satisfeitas, decorrendo diretamente das definições dos campos. As outras equações se tornam:

$$-\vec{\nabla}^2 \phi - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.2.8a)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \left[ -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \phi) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right], \quad (7.2.8b)$$

onde na segunda equação foi usada a identidade vetorial  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$ . Agora temos condição de apresentar um exemplo de simetria de calibre no contexto do eletromagnetismo.

### Exemplo 7.2.1. Calibre de Coulomb

Suponha uma situação eletrostática, isto é, com  $\vec{B} = 0$ ,  $\vec{J} = 0$  e as derivadas temporais se anulando. Neste caso, a única equação não trivial é a (7.2.8a), que se simplifica para

$$-\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.2.9)$$

que é uma equação de Poisson não homogênea, com a não homogeneidade sendo dada pela densidade de carga  $\rho$ . Essa equação, por vezes, pode ser resolvida com técnicas usuais, como separação de variáveis.

Suponha agora uma situação magnetostática, isto é, com  $\vec{E} = 0$ ,  $\rho = 0$  e as derivadas temporais se anulando. Neste caso, a única equação não trivial é a (7.2.8b), que se torna:

$$\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}, \quad (7.2.10)$$

que é mais complicada que a eq. (7.2.9). Porém, agora podemos usar a simetria de Calibre para simplificá-la. Podemos escolher como Calibre [Gri05]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (7.2.11)$$

$$\implies \vec{\nabla}^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \quad (7.2.12)$$

e que faz a eq. (7.2.10) assumir a mesma forma de uma equação de Poisson vetorial:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}, \quad (7.2.13)$$

ou, se escrita em termos das componentes em coordenadas cartesianas:

$$-\vec{\nabla}^2 A_x = \mu_0 J_x, \quad (7.2.14a)$$

$$-\vec{\nabla}^2 A_y = \mu_0 J_y, \quad (7.2.14b)$$

$$-\vec{\nabla}^2 A_z = \mu_0 J_z, \quad (7.2.14c)$$

ou seja, neste calibre, comparando com a eq. (7.2.9), um problema de magnetostática se tornou equivalente a um problema de magnetostática se fizermos as substituições

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}, \quad (7.2.15a)$$

$$\rho \rightarrow J_i, \quad (7.2.15b)$$

$$\phi \rightarrow A_i, \quad (7.2.15c)$$

simplificando muito a resolução de problemas magnetostáticos.

Continuando com nossa tarefa de reescrever as equações de Maxwell, vamos agora deixar os termos com os potenciais do lado esquerdo e os de fonte do direito, bem como eliminar a constante  $\epsilon_0$  com

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \implies \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}, \quad (7.2.16)$$

dessa forma, obtemos:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \left( \frac{\phi}{c} \right) = \mu_0 (c\rho), \quad (7.2.17a)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}. \quad (7.2.17b)$$

Desde o início, pode-se perceber a quantidade maior de termos na segunda equação em contraste com a primeira. Para deixá-las mais semelhantes entre si, vamos completá-las somando e subtraindo um fator  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi/c}{\partial t^2}$ :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\phi}{c} \right) - \vec{\nabla}^2 \left( \frac{\phi}{c} \right) = \mu_0 (c\rho), \quad (7.2.18a)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}, \quad (7.2.18b)$$

como desejamos mostrar que as equações de Maxwell são de fato covariantes por transformações de Lorentz, é necessário que tempo e espaço entrem em pé de igualdade em nossa formulação, o que na verdade já se encontra implementado. Para perceber isto, convém a partir deste ponto usar a notação de índices. Usaremos que componentes espaciais serão indicadas por índices romanos, e as do espaço-tempo por índices gregos. Dessa forma:

$$\vec{\nabla} \rightarrow \partial_i, \quad (7.2.19a)$$

$$\vec{A} \rightarrow A_i, \quad (7.2.19b)$$

$$\vec{J} \rightarrow J_i, \quad (7.2.19c)$$

também tomaremos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\partial_0, \quad (7.2.20)$$

para colocar espaço e tempo em pé de igualdade<sup>3</sup>. Assim, as (7.2.18) assumem a forma

$$\partial_0 \partial^j A_j - \partial_0 \partial^0 \frac{\phi}{c} + \partial^0 \partial_0 \frac{\phi}{c} - \partial^j \partial_j \frac{\phi}{c} = \mu_0 (c\rho), \quad (7.2.21a)$$

$$\partial_i \partial^j A_j - \partial_i \partial^0 \frac{\phi}{c} + \partial^0 \partial_0 A_i - \partial^j \partial_j A_i = \mu_0 J_i, \quad (7.2.21b)$$

ainda, no espaço-tempo, os índices gregos repetidos indicam um somatório. Dessa forma:

$$\partial^\mu \partial_\mu = -\partial^0 \partial_0 + \partial^j \partial_j, \quad (7.2.22)$$

ou seja, as equações ficam:

$$\partial_0 \partial^j A_j - \partial_0 \partial^0 \frac{\phi}{c} + \partial^\mu \partial_\mu \frac{\phi}{c} = \mu_0 (c\rho), \quad (7.2.23a)$$

$$\partial_i \partial^j A_j - \partial_i \partial^0 \frac{\phi}{c} + \partial^\mu \partial_\mu A_i = \mu_0 J_i, \quad (7.2.23b)$$

---

<sup>3</sup>O sinal negativo na derivada temporal se deve à métrica  $-+++$ .

note que, ignorando os índices somados, em que o índice livre  $i$  aparece na segunda equação, este aparece como 0 na primeira, indicando que a primeira se encontra associada ao tempo e a outra ao espaço, sendo um indício de simetria relativística. Porém, isso não ocorre para as fontes e para os potenciais. O mesmo pode ser feito se os identificarmos como componentes de quadrivetores da seguinte forma:

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \implies \frac{\phi}{c} = A_0, \quad (7.2.24a)$$

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \implies c\rho = J_0, \quad (7.2.24b)$$

sendo também interessante apontar que as transformações de Gauge das eqs. (7.2.7) em notação covariante se tornam simplesmente

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f. \quad (7.2.25)$$

Agora podemos reescrever as equações de Maxwell como

$$\partial_0 \partial^j A_j - \partial_0 \partial^0 A_0 + \partial^\mu \partial_\mu A_0 = J_0, \quad (7.2.26a)$$

$$\partial_i \partial^j A_j - \partial_i \partial^0 A_0 + \partial^\mu \partial_\mu A_i = \mu_0 J_i, \quad (7.2.26b)$$

agrupando os índices somados com (7.2.22)

$$\partial_\mu \partial^\mu A_0 - \partial^\mu \partial_0 A_\mu = J_0, \quad (7.2.27a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A_i - \partial^\mu \partial_i A_\mu = \mu_0 J_i. \quad (7.2.27b)$$

Como cada termo possui um índice livre  $i$  para o espaço e 0 para o tempo, podemos então resumí-las com uma única equação tensorial usando um índice  $\nu$  livre:

$$\partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \mu_0 J_\nu \quad (7.2.28)$$

sendo também comum definir o chamado tensor de Faraday  $F_{\mu\nu}$  como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (7.2.29)$$

que engloba todas as informações sobre os campos elétrico e magnético. Pode-se notar isso primeiramente escrevendo as componentes dos campos (7.2.6) usando a notação de índices em termos das componentes de  $A^\mu$ :

$$E_i = c(-\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = cF_{0i}, \quad (7.2.30a)$$

$$B_i = \partial_j A_k - \partial_k A_j = F_{jk}, \quad (7.2.30b)$$

assim, as componentes de tal tensor são as componentes dos campos a menos de constantes, e são dadas por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2.31)$$

Por fim, as equações de Maxwell em termos do tensor de Faraday se tornam [Lab19]:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 J_\nu, \quad (7.2.32a)$$

e agora que possuímos a forma covariante das equações de Maxwell, podemos analisar outro exemplo interessante de calibre.



### Exemplo 7.2.2. Calibre de Lorenz

Vamos assumir o seguinte calibre [Gri05]

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad (7.2.33)$$

que, ao ser substituído em (7.2.28), a simplifica para

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \mu_0 J_\nu, \quad (7.2.34)$$

que, se os índices somados forem escritos explicitamente, fornece:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 A_\nu = \mu_0 J_\nu, \quad (7.2.35)$$

ou seja, cada componente  $A_\nu$  do quadripotencial satisfaz uma equação de onda não homogênea, com a não-homogeneidade sendo dada pelas componentes  $J_\nu$  da quadricorrente. Isso permite resolver um problema eletromagnético em termos de equações de onda.

Resta agora a tarefa de encontrar uma lagrangiana da qual as equações (7.2.32) possam ser derivadas. Comparando diretamente com as equações de Euler-Lagrange (7.1.2) para campos, temos que a lagrangiana  $\mathcal{L}$  deve satisfazer

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = F^{\mu\nu}, \quad (7.2.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (7.2.37)$$

a menos de constantes multiplicativas. Uma lagrangiana que satisfaz tais condições é dada por

$$\mathcal{L} = \left[ -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - J^\alpha A_\alpha \right], \quad (7.2.38)$$

com a constante  $\mu_0$  sendo posicionada dessa forma para que a lagrangiana possua a dimensão correta e o sinal negativo sendo escolhido para que a energia associada seja positiva. Vamos verificar se tal escolha realmente funciona:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left[ -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - J^\alpha A_\alpha \right], \\ &= -J^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu}, \\ &= -J^\alpha \delta_\alpha^\nu, \\ &= -J^\nu. \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

A derivada com relação a  $\partial_\mu A_\nu$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left[ -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - J^\alpha A_\alpha \right] \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left[ (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right], \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} \left[ (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \right] \end{aligned} \quad (7.2.40)$$

usando que

$$\frac{\partial (\partial^\alpha A^\beta)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu}, \quad (7.2.41a)$$

$$e, \quad (7.2.41b)$$

$$\frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu, \quad (7.2.41c)$$

portanto, a derivada (7.2.40) fica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\mu_0} \left( \underbrace{\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \partial^\alpha A^\beta}_{\partial^\mu A^\nu} - \underbrace{\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu \partial^\beta A^\alpha}_{\partial^\nu A^\mu} - \underbrace{\delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu \partial^\alpha A^\beta}_{\partial^\nu A^\mu} + \underbrace{\delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu \partial^\beta A^\alpha}_{\partial^\mu A^\nu} \right) \quad (7.2.42)$$

$$+ \underbrace{\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \partial_\alpha A_\beta}_{\partial^\mu A^\nu} - \underbrace{\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \partial_\beta A_\alpha}_{\partial^\nu A^\mu} - \underbrace{\eta^{\beta\mu} \eta^{\alpha\nu} \partial_\alpha A_\beta}_{\partial^\nu A^\mu} + \underbrace{\eta^{\beta\mu} \eta^{\alpha\nu} \partial_\beta A_\alpha}_{\partial^\mu A^\nu} \quad (7.2.43)$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0} 4 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (7.2.44)$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu}, \quad (7.2.45)$$

que, unida a (7.2.39), fornece as equações de campo (7.2.32).

É interessante notar que, no vácuo ( $J^\alpha = 0$ ), as equações de campo e a lagrangiana se reduzem para, respectivamente

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (7.2.46a)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (7.2.46b)$$

com tal termo da lagrangiana sendo identificado como exclusivo do campo eletromagnético e o outro representando interações com correntes  $J^\alpha$ , geradas por fontes. Note que a teoria eletromagnética não pode ser considerada uma teoria de campos completa ainda, pois a natureza das correntes  $J^\alpha$  não está clara, não sendo possível atribuí-las a efeitos de outros campos.

É interessante também apontar que a equação (7.2.46a) indica que o quadridivergente do tensor  $F^{\mu\nu}$  é nulo, ou seja, que este é conservado no espaço-tempo. Se pensarmos  $F^{\mu\nu}$  como o campo eletromagnético propriamente dito, isso significa que ele não é alterado no vácuo, com apenas a sua manifestação em campos elétricos e magnéticos variando como ondas, assim como ditado pela equação de onda (6.0.4).

## 7.3 Transformações de Gauge na equação de Schrödinger

Na seção 7.2, foram apresentadas as transformações de gauge (7.2.7) do eletromagnetismo, mas assim como a forma original das transformações de lorentz, elas ainda estão escritas de maneira muito abstrata, o que dificulta seu entendimento. Entretanto,

sabemos que simetrias podem ser modeladas usando grupos, o que nos induz a questionar se essas transformações também podem ser representadas dessa forma.

Para tentar encontrar um possível grupo associado às transformações de gauge, é instrutivo avaliar seu efeito sobre a equação de Schrödinger. Para isso, precisamos encontrar a forma do operador hamiltoniano em função dos potenciais.

A lagrangiana que fornece às equações de movimento de uma partícula não relativística em campos elétricos e magnéticos em função dos potenciais é dada por [Lem07]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v}, \quad (7.3.1)$$

cujas equações de Euler-Lagrange fornecem a força de Lorentz (7.2.2). Em termos das componentes, a lagrangeana fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}), \quad (7.3.2)$$

e os momentos generalizados são dados por:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}, \\ &= m\dot{x}_i + qA_i, \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

de modo que a respectiva hamiltoniana pode ser calculada como uma transformada de Legendre:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - \mathcal{L}, \\ &= [m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z})] \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z} \right], \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\phi. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Porém, a função hamiltoniana deve ser expressa em termos dos momentos generalizados. Isso pode ser feito usando

$$m\dot{x}_i = p_i - qA_i \quad (7.3.5)$$

$$mv^2 = \frac{1}{m}(mv)^2 = \frac{1}{m}m^2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \dot{x}_i, \quad (7.3.6)$$

que, ao ser substituída na hamiltoniana, fornece, em forma vetorial:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi, \quad (7.3.7)$$

de forma que o operador hamiltoniano em função dos potenciais fica [Ope18]:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A})^2 + q\phi, \quad (7.3.8)$$

em que  $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$  é o operador momento. A equação de Schrödinger então é dada por:

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (7.3.9)$$

com  $\psi$  sendo sua solução. Após aplicar a transformação de gauge (7.2.7), a equação se torna [Ope18]:

$$\frac{1}{2m} \left[ -i\hbar\vec{\nabla} - q \left( \vec{A} + \vec{\nabla}f \right) \right]^2 \psi' + q \left( \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) \psi' = i\hbar \frac{\partial\psi'}{\partial t}, \quad (7.3.10)$$

com  $\psi'$  sendo a nova solução. Para entender como a função de onda será afetada, vamos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \left( \vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar} \vec{\nabla}f \right) - q\vec{A} \right]^2 \psi' + q\phi\psi' = i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \psi', \quad (7.3.11)$$

observe que a equação de Schrödinger mantém a mesma forma original (7.3.9), porém com as substituições

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{D} = \vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar} \vec{\nabla}f, \quad (7.3.12a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (7.3.12b)$$

Pode-se ver que o efeito de tais derivadas é cancelado se a solução for multiplicada por um fator exponencial

$$\psi' = \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \quad (7.3.13)$$

pois as novas derivadas ficam

$$\begin{aligned} D_t\psi' &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f} \right) + \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \\ &= \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} e^{-\frac{iq}{\hbar}f} - \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f} \right) + \frac{iq}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial t} \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \\ &= \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \end{aligned} \quad (7.3.14a)$$

$$\begin{aligned} \vec{D}\psi' &= \vec{\nabla} \left( \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f} \right) + \frac{iq}{\hbar} \vec{\nabla}f, \\ &= \left( \vec{\nabla}\psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f} - \frac{iq}{\hbar} \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f} \vec{\nabla}f \right) + \frac{iq}{\hbar} \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f} \vec{\nabla}f, \\ &= \left( \vec{\nabla}\psi \right) e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \end{aligned} \quad (7.3.14b)$$

dessa forma, vemos que o efeito desses operadores é equivalente a aplicar as derivadas originais e rotacionar a função de onda por uma fase  $\theta = -if/\hbar$ , ou seja, aplicar uma transformação (3.1.3) relacionada ao grupo U(1). É válido ressaltar que  $f = f(\vec{r}, t)$ , ou seja, a função de onda foi rotacionada por uma fase que depende da posição no espaço e no tempo.

Uma vez que a equação de Schrödinger manteve a mesma forma sob as transformações anteriores a menos da fase na função de onda, podemos supor que a nova solução é simplesmente a antiga multiplicada por tal fator:

$$\psi' = \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \quad (7.3.15)$$

e a equação de Schrödinger transformada em termos das novas derivadas é dada por

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\vec{D} - q\vec{A} \right)^2 \psi' + q\phi\psi' = i\hbar D_t \psi', \quad (7.3.16)$$

mas, das (7.3.14), temos que

$$i\hbar D_t \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \quad (7.3.17a)$$

$$\left( -i\hbar\vec{D} - q\vec{A} \right) \psi' = \left[ -i\hbar \left( \vec{\nabla} \psi \right) - \vec{A} \psi \right] e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \quad (7.3.17b)$$

$$\implies \left( -i\hbar\vec{D} - q\vec{A} \right)^2 \psi' = \left[ -i\hbar \left( \vec{\nabla} \psi \right) - \vec{A} \psi \right]^2 e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \quad (7.3.17c)$$

portanto, ao substituir  $\psi' = \psi e^{-\frac{iq}{\hbar}f}$  em (7.3.16), a equação toma a forma

$$\left( \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right]^2 \psi + q\phi\psi \right) e^{-\frac{iq}{\hbar}f} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} e^{-\frac{iq}{\hbar}f}, \quad (7.3.18)$$

e, como  $\psi$  satisfaz a equação de Schrödinger, segue que a  $\psi'$  escolhida é solução da equação transformada. Dessa forma, vemos que uma transformação de gauge nos potenciais é equivalente a aplicar uma transformação do grupo U(1) na função de onda  $\psi$  [Ope18].

Pode-se notar que tal transformação não alterou a distribuição de probabilidade. Entretanto este exemplo mostra uma certa conexão entre a simetria de gauge e o grupo U(1), com o parâmetro sendo a função  $f$  do calibre, a menos de constantes. A seguir usaremos essa informação para descrever a interação eletromagnética.

## 7.4 Construção da interação eletromagnética a partir do grupo U(1)

Para simplificar a discussão, nesta seção usaremos unidades tais que

$$\hbar = c = 1, \quad (7.4.1)$$

o que facilitará manipulações algébricas.

Como pôde-se ver na seção anterior, uma transformação de Gauge nos potenciais é equivalente a modificar a função de onda  $\psi$  com o grupo U(1), o que indica uma relação entre o grupo e a interação eletromagnética. Entretanto, isso foi feito para a equação de Schrödinger, que foi construída com base na Mecânica Clássica e não sendo portanto invariante por transformações de Lorentz. Se analisarmos sua equivalente relativística, a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (7.4.2)$$

e a lagrangiana associada

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (7.4.3)$$

temos que essa equação e sua respectiva lagrangiana não são invariantes sob o grupo U(1). Pode-se notar isso diretamente substituindo uma  $\psi' = e^{i\eta}\psi$ . A lagrangiana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi', \\ &= (\bar{\psi}e^{-i\eta})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\psi e^{i\eta}), \\ &= e^{i\eta}e^{-i\eta}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}e^{-i\eta}\gamma^\mu\psi e^{i\eta}\partial_\mu\eta, \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\eta, \end{aligned} \quad (7.4.4a)$$

havendo um termo adicional devido à derivada parcial  $\partial_\mu$  e, portanto, a equação de Dirac não é invariante<sup>4</sup> sob a ação do grupo U(1). Entretanto, pode-se corrigir isso modificando a derivada acrescentando um termo que cancela a variação da lagrangiana, em raciocínio análogo ao da seção anterior [Lab18]:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (7.4.5)$$

em que os  $A_\mu$  são funções ainda desconhecidas. Essa derivada é conhecida como **derivada de gauge**, sendo análoga à derivada covariante construída no contexto da Relatividade Geral. Fazendo essa substituição na lagrangiana obtemos:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi, \quad (7.4.6)$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (7.4.7)$$

Se agora transformarmos a função de onda sob a ação do grupo U(1) com  $\psi' = \psi e^{i\eta}$ , obtemos que:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi', \quad (7.4.8a)$$

$$\begin{aligned} &= (\bar{\psi}e^{-i\eta})(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)(\psi e^{i\eta}), \\ &= e^{i\eta}e^{-i\eta}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + i\bar{\psi}e^{-i\eta}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu e^{i\eta} + iqA_\mu e^{i\eta}), \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\left(A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\eta\right), \end{aligned} \quad (7.4.8b)$$

ou seja, a lagrangiana mantém a mesma forma (7.4.7) se transformar a função de onda pelo grupo U(1) for equivalente a modificar a função  $A_\mu$  por

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\eta. \quad (7.4.9)$$

Note ela que possui exatamente a mesma forma da transformação de gauge (7.2.25) do eletromagnetismo se a função  $A_\mu$  for identificada como o quadripotencial e  $\frac{1}{q}\eta$  como o calibre  $f(\vec{r}, t)$  a menos de constanes. Dessa forma, vemos que, para garantir a invariância da equação de Dirac, foi necessário postular a existência de um campo que se comporta exatamente como o eletromagnético.

---

<sup>4</sup>Note que isso só se aplica se a fase for uma função  $\eta = \eta(\vec{r}, t)$ , com a simetria se mantendo no caso de uma fase constante.

Como sabemos, mesmo em um espaço livre, isto é, sem fontes, ainda pode existir um campo eletromagnético. Dessa forma, a lagrangiana que descreve o comportamento de elétrons e sua interação com o campo eletromagnético deve ser composta por um termo livre (7.2.46b) do campo eletromagnético, um livre do campo  $\psi$  do elétron e mais o termo de interação que encontramos com a derivada covariante. A lagrangiana que satisfaz essas condições é dada por

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi, \quad (7.4.10)$$

em que  $QED$  vem do inglês *Quantum Electrodynamics*, por ela descrever a interação do campo eletromagnético com o do elétron a nível quântico. Ela também pode ser escrita explicitamente em função da derivada parcial usual:

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{campo eletromagnético}} + \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{\text{campo do elétron}} \underbrace{-q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{termo de interação}}. \quad (7.4.11)$$

Vamos agora calcular as equações de campo. A equação associada ao campo  $A_\mu$  pode ser facilmente calculada notando que o termo de interação possui a mesma forma da interação eletromagnética, com

$$J^\mu \rightarrow q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (7.4.12)$$

fazendo o papel de quadricorrente e termo de fonte, além de ser constante em relação a  $A_\mu$ . As equações do campo eletromagnético são, portanto idênticas às equações de Maxwell em forma covariante (7.2.32) com o termo de fonte sendo dado pela expressão anterior:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (7.4.13)$$

Da mesma forma, calculando a equação de campo associada a  $\bar{\psi}$ , obtemos

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = q\gamma^\mu A_\mu\psi, \quad (7.4.14)$$

com a parte da esquerda sendo a equação de Dirac original (7.1.5) e o outro termo representando a interação com o campo eletromagnético. Vemos, portanto, que a interação entre dois campos fundamentais, no caso o do elétron e o do eletromagnético, pode ser encontrada apenas com a exigência de que a lagrangiana que descreve os dois seja invariante pela ação do grupo  $U(1)$  no campo do elétron, equivalente a uma transformação de gauge no campo eletromagnético.

Tabela 7.1: interações fundamentais e seus respectivos Grupos de Lie.

Eletromagnetismo	$U(1)$
Interação Nuclear fraca	$SU(2) \times U(1)$
Interação Nuclear forte	$SU(3)$
Gravitação	???

Além de matematicamente elegante e simples, esse método também é poderoso por descrever corretamente os fenômenos da natureza. A lagrangiana (7.4.10), apresenta excelente concordância com os fenômenos eletromagnéticos em escala quântica, prevendo

os resultados obtidos nos aceleradores de partículas atuais e ainda não tendo sido refutada por experimentos [Lab18].

O método de descrever as interações fundamentais a partir de grupos de simetria não se restringe ao eletromagnetismo, tendo sido uma ferramenta útil para analisar também as interações Nuclear Forte e Nuclear Fraca, falhando apenas para a gravitação. As interações fundamentais e seus respectivos grupos de simetria podem ser encontrados na Tabela 7.1.

Vemos então que o uso da teoria de grupos para descrever simetrias é essencial no contexto das teorias de campos, pois as simetrias de calibre que estas apresentam são muito abstratas para serem tratadas de outra forma. Além disso, seu uso proporciona um método simples para se encontrar a forma das lagrangianas que as descrevem.



# Considerações Finais

Neste trabalho estabeleceu-se uma base matemática e conceitual da teoria dos grupos de Lie e álgebras de Lie, bem como suas aplicações em diferentes áreas da Física. Em particular, mostrou-se como diferentes simetrias podem ser expressas por grupos, e também que, devido aos grupos de Lie serem variedades, estes também possuem propriedades geométricas, o que facilita seu estudo e amplia suas aplicações.

Também foi apresentada a conexão com as Álgebras de Lie, com enfoque para o papel das relações de comutação dos geradores. Mostrou-se a importância de tais relações para comparar diferentes grupos de Lie, bem como como construir um grupo a partir de seus geradores com a aplicação exponencial, que foi feito para os operadores da Mecânica Quântica.

Após as ferramentas matemáticas terem sido apresentadas, mostrou-se como os grupos de Lie são úteis para descrever simetrias presentes na natureza. Além disso, apresentou-se como a exigência de invariância das leis da Física sob alguns grupos facilita encontrar sua forma, como lembrado na Tabela 7.2.

Tabela 7.2: leis da Física e respectivos grupos.

Lei da Física	Grupo
Partícula livre clássica	de Galileu
Partícula livre relativística	de Poincaré
Interação eletromagnética	U(1)

Tais conhecimentos também são usados em áreas mais avançadas da Física. Em particular, temos as Teorias Quânticas de Campos, onde as interações fundamentais são descritas com base em grupos de simetria, e a Relatividade Geral ou outras teorias de gravitação, pois o conhecimento dos grupos de simetria facilita a análise das variedades que representam o espaço-tempo, dentre outras. Dessa forma, os tópicos aqui apresentados são pré-requisito para se iniciar a pesquisa em tais áreas.

# Bibliografia

- [AP09] R Aldrovandi e JG Pereira. *Classical fields*. 2009. URL: <https://professores.ift.unesp.br/jg.pereira/ClassiFields.pdf>.
- [Bal94] Medrano Balboa. *Campos Vetoriais, tensores e aplicações na Física*. RANSTEC, 1994.
- [Bar18a] João CA Barata. *Notas para um curso de física-matemática*. 2018. Cap. 24: Grupos de Lie e Algebras de Lie. Uma Breve Introdução, pp. 1309–1333. URL: [http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/arquivos/nc-cap24.pdf](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap24.pdf).
- [Bar18b] João CA Barata. *Notas para um curso de física-matemática*. 2018. Cap. 22.3: Os Grupos  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ ,  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{C})$ , pp. 1111–1147. URL: [http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/arquivos/nc-cap22.pdf](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap22.pdf).
- [BC11] José M Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani. “Teoria de Grupos para Físicos”. Em: *Publicação IF E-BOOK* 1661 (2011).
- [Car] Sean Carroll. *[gr-qc/9712019] Lecture Notes on General Relativity*. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- [Eis61] Robert Martin Eisberg. *Fundamentals of modern physics*. John Wiley & Sons, 1961.
- [Flo16a] Alex Flournoy. *Particle Physics Topic 6: Lie Groups and Lie Algebras*. Video Aula. 2016. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=kpeP3ioiHcw&t=1725s&ab\\_channel=AlexFlournoy](https://www.youtube.com/watch?v=kpeP3ioiHcw&t=1725s&ab_channel=AlexFlournoy).
- [Flo16b] Alex Flournoy. *Particle Physics Topic 8: Spinors II*. Video Aula. 2016. URL: [www.youtube.com/watch?v=BYLOUvKaQTU&ab\\_channel=AlexFlournoy](http://www.youtube.com/watch?v=BYLOUvKaQTU&ab_channel=AlexFlournoy).
- [GM01] James Gordon e Liebeck Martin. *Representations and characters of groups*. 2001.
- [GPS02] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko. *Classical mechanics*. 2002.
- [Gri05] David J Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, 2005.
- [GS18] David J Griffiths e Darrell F Schroeter. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [HH02] Markus Hohenwarter e Markus Hohenwarter. “GeoGebra”. Em: *Internet* (2002). URL: <https://www.geogebra.org>.
- [Inc08] Lucid Software Inc. “Lucid”. Em: *Internet* (2008). URL: <https://lucid.app/>.

- [KB04] Tom Kibble e Frank H Berkshire. *Classical mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2004. Cap. 12.7: Galilean transformations, página 298.
- [Lab18] Dietterich Labs. *Deriving The QED Lagrangian | Quantum Electrodynamics*. Video Aula. 2018. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=IFRyN3fQM08&list=LL&index=6&t=4s>.
- [Lab19] Dietterich Labs. *Maxwell Lagrangian Derivation | Covariant Electromagnetism | Electrodynamics*. Video Aula. 2019. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=nrBiDRZRK5g&ab\\_channel=DietterichLabs](https://www.youtube.com/watch?v=nrBiDRZRK5g&ab_channel=DietterichLabs).
- [Lan73] Lev D Landau. “Classical mechanics”. Em: *Theoretical Physics* 1 (1973).
- [Lei86] L. Leithold. *The Calculus with Analytic Geometry*. Harper & Row, 1986. ISBN: 9780063504134. URL: <https://books.google.com.br/books?id=SdBUAAAAYAAJ>.
- [Lem07] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [Mar13] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013. Cap. 6 - Some Methods in the Calculus of Variations.
- [MAR15] R de A MARTINS. “A origem histórica da Relatividade Especial”. Em: *São Paulo: Livraria da Física* (2015).
- [Min13] Hermann Minkowski. *Space and Time: Minkowski’s papers on relativity*. Minkowski Institute Press, 2013. URL: <https://www.minkowskiinstitute.org/mip/MinkowskiFreemiumMIP2012.pdf>.
- [Nus13] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.
- [Nus14] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. Editora Blucher, 2014.
- [Nus15] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)*. Vol. 3. Editora Blucher, 2015.
- [Oli06] BF de Oliveira. *Estudos em meio líquido cristalino como um laboratório para análise cosmológica*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2006.
- [Ope18] MIT OpenCourseWare. *L14.1 Gauge invariance of the Schrodinger Equation*. Video Aula. 2018. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=7Y3qcKz0\\_mY&ab\\_channel=MITOpenCourseWare](https://www.youtube.com/watch?v=7Y3qcKz0_mY&ab_channel=MITOpenCourseWare).
- [Ros64] William Geraint Vaughan Rosser. *An introduction to the theory of relativity*. 1964. Cap. 6: Geometrical Representations of the Lorentz Transformations, pp. 262–266.
- [Run20] KJ Runia. *Deriving the Lorentz transformations from a rotation of frames of reference about their origin with real time Wick-rotated to imaginary time*. Tutorial de Física. 2020. URL: <https://opencurve.info/deriving-the-lorentz-transformations-from-a-rotation-of-frames-of-reference-in-standard-configuration-with-real-time-wick-rotated-to-imaginary-time/>.

- [San10] Luiz AB San Martin. *Algebras de Lie*. Unicamp, 2010. URL: <https://www.ime.unicamp.br/~lino/Alglie0.pdf>.
- [SN14] (Jun John) Sakurai Sakurai e Jim J Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2014.
- [Soc13] Socratica. *Abstract Algebra: Motivation for the definition of a group*. Video Aula. 2013. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=yHq\\_yzYZV6U&list=PLi01XoE8jYoi3SgnnGorR\\_XOW3IcK-TP6&index=4&ab\\_channel=Socratica](https://www.youtube.com/watch?v=yHq_yzYZV6U&list=PLi01XoE8jYoi3SgnnGorR_XOW3IcK-TP6&index=4&ab_channel=Socratica).
- [Sym60] K.R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1960. URL: <https://books.google.com.br/books?id=TgZRAAAAMAAJ>.