



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

# A Álgebra dos Quatérnions e Suas Aplicações na Física

Acadêmico: Leonardo Vieira dos Santos Ramos

Orientador: Prof. Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira  
Coorientador: Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath

Maringá, 18 de dezembro de 2020



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

# A Álgebra dos Quatérnions e Suas Aplicações na Física

Trabalho de conclusão de curso  
apresentado ao Departamento de  
Física, da Universidade Estadual de  
Maringá, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de bacharel  
em Física

Acadêmico: Leonardo Vieira dos Santos Ramos

Orientador: Prof. Dr. Miguel Jorge Bernabé Ferreira  
Coorientador: Prof. Dr. Nelson Guilherme Castelli Astrath

Maringá, 18 de dezembro de 2020

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 A álgebra dos Números complexos e as rotações no plano</b>	<b>4</b>
2.1 O espaço vetorial dos Complexos e suas operações . . . . .	4
2.2 A álgebra dos Números Complexos sobre os Reais . . . . .	8
2.3 Rotações no plano . . . . .	15
<b>3 A álgebra dos Quatérnions</b>	<b>18</b>
3.1 O espaço vetorial dos Quatérnions e suas operações . . . . .	18
3.2 A álgebra dos Quatérnions sobre os Reais . . . . .	23
<b>4 Rotações no Espaço com Quatérnions</b>	<b>31</b>
<b>5 Aplicações dos Quatérnions na Física</b>	<b>41</b>
5.1 Segunda Lei de Newton com Quatérnions . . . . .	43
5.2 Potenciais e Campos Eletromagnéticos com Quatérnions . . . . .	45
<b>Considerações Finais</b>	<b>52</b>
<b>A Estruturas Algébricas</b>	<b>53</b>
A.1 Espaços Vetoriais . . . . .	53
A.2 Álgebras . . . . .	54

<b>B Fórmulas de Euler</b>	<b>56</b>
B.1 Fórmula de Euler para os números complexos . . . . .	56
B.2 A Extensão da fórmula de Euler para os Quatérnions . . . . .	57
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

## AGRADECIMENTOS

Começo por agradecer à minha família, que ao longo desta jornada complicada e árdua, me apoiou incansavelmente e ajudou-me a realizar meus objetivos sem medir esforços. Em especial, gostaria de agradecer meu pai, Paulo, e a minha mãe, Jacqueline, por sempre me incentivar e me apoiar em minhas decisões.

Agradeço à minha noiva, Carolina, por ser compreensiva nos momentos de minha ausência por causa do desenvolvimento deste trabalho. Agracio seu amor e apoio durante todos esses anos.

Não posso deixar de agradecer a Universidade Estadual de Maringá por ter me recebido de portas abertas e por ser um espaço de ensino e pesquisa com excelência. Ao departamento de física pelas oportunidades e infraestrutura. E a todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Agradeço ainda o meu orientador, Professor Doutor Miguel Jorge Bernabé Ferreira, e ao meu coorientador, Professor Doutor Nelson Guilherme Castelli Astrath, pelos valiosos ensinamentos durante a escrita deste trabalho e por terem depositado sua confiança em mim.

Agradeço ao meu grande amigo, Fábio Antônio Ferreira Viudes, por ter me apoiado e me aconselhado durante minha formação acadêmica.

À todos que de alguma forma contribuíram para minha formação pessoal, acadêmica e profissional ao longo dos anos, minha mais profunda gratidão.

Os quatérnions são números bastante parecidos com os números complexos, porém com a diferença que possuem três unidades imaginárias, diferentemente dos números complexos, que possuem somente uma. Historicamente, a formulação do conjunto dos números complexos trouxe um avanço em diversas áreas da matemática, dentre elas temos a criação da análise complexa, o estudo das rotações no plano e a álgebra dos complexos, por exemplo. Os quatérnions, por sua vez, inovaram ainda mais, já que são capazes de descrever as rotações no espaço euclidiano tridimensional de maneira bastante elegante e sucinta. Além disso, a álgebra dos quatérnions é anterior à formulação vetorial utilizada atualmente, sendo assim, analisando a álgebra dos quatérnions conseguimos entender a motivação da definição dos produtos interno e vetorial usuais entre vetores.

Neste trabalho vamos estudar detalhadamente a álgebra dos quatérnions e também veremos como algumas leis da física podem ser formuladas fazendo uso destas estruturas algébricas. Em particular, mostraremos como escrever um novo formalismo para as leis da Mecânica Newtoniana e as equações de Maxwell. Intuitivamente pode parecer estranho formular as leis da física com os quatérnions, porém há um ganho com essa nova formulação. Em particular, utilizamos os quatérnions para definir o campo elétrico e magnético por meio do potencial eletromagnético, de modo que, nesse formalismo, é possível reduzir as quatro equações de Maxwell a somente duas.

Palavras-chave: Quatérnions, Números Complexos, Rotações

## ABSTRACT

Quaternions are numbers that are very similar to complex numbers, but with the difference that they have three imaginary units, unlike complex numbers, which have only one. Historically, the formulation of the set of complex numbers brought an advance in several areas of mathematics, among them we have the creation of complex analysis, the study of rotations in the plane and the algebra of complex numbers, for example. The quaternions, however, innovated even more, since they can be used to describe the rotations in the three-dimensional Euclidean space in a very elegant and succinct way. In addition, the algebra of quaternions is prior to the vector formulation used today, so, by analyzing the algebra of quaternions it is possible to understand the motivation for defining the usual internal and vector products between vectors.

This work is a detailed study of the algebra of quaternions and it also aims to show how some laws of Physics can be formulated using these algebraic structures. In particular, it will be shown how to write a new formalism for Newtonian mechanics laws and Maxwell's equations. Intuitively, it may seem strange to formulate the laws of Physics with quaternions, but there is an advantage in using this new formulation. Specifically, quaternions are used to define the electric and magnetic field by means of the electromagnetic potential, so that, in this formalism, it is possible to reduce Maxwell's four equations to just two.

Key-words: Quaternions, Complex Numbers, Rotations

Os primeiros registros de cálculo das raízes quadradas de números negativos aconteceram na Grécia cerca de 1 século antes de Cristo nos trabalhos do matemático e engenheiro Heron de Alexandria. Heron, em seu tratado intitulado “*Métrica*”, apresenta as equações que permitem calcular a área de figuras planas e o volume dos sólidos. Em uma das suas tentativas de encontrar o volume do tronco de uma pirâmide, Heron se deparou com uma raiz quadrada de um número negativo, algo até então inimaginável até mesmo por ele, que já que havia proposto um método para aproximar a raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito. Pouco tempo depois, Heron acabou abandonando a ideia das raízes quadradas de números negativos.

Durante os séculos XV e XVI, diversos matemáticos discordavam em relação a existência da raiz quadrada de números negativos em equações de segundo grau. Para muitos deles essas equações só podiam ter soluções reais - uma, duas, ou nenhuma - mas jamais uma solução envolvendo raiz quadrada de números negativos. Na tentativa de responder a respeito da existência de raízes de números negativos, muitos matemáticos da época começaram a estudar as equações cúbicas, também chamadas de equações de terceiro grau, mas sem sucesso para uma solução geral. Porém, Niccolò Fontana Tartaglia (1499 - 1447), juntamente com Girolamo Cardano (1501 - 1576), acabaram encontraram as soluções para um caso particular de equações do tipo  $x^3 + px + q = 0$ . Em sua obra “*Ars Magna*”, Cardano dedica os créditos da descoberta da solução das equações cúbicas ao matemático Scipione del Ferro (1465 - 1526). O genro de del Ferro, Annibale della Nave, sucessor da cadeira de seu mentor, foi quem apresentou os livros de del Ferro à Cardano.

Havia ainda um problema em relação as soluções propostas pelos matemáticos. Na época já eram conhecidas as soluções para algumas equações de terceiro grau via fatoração, como por exemplo, a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , que tem soluções  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -2 - \sqrt{3}$  e  $x_3 = -2 + \sqrt{3}$ . O grande problema era que muitas vezes as soluções propostas por Tartaglia-Cardano levavam a raiz quadrada de números negativos. Era necessário então, formular uma nova estrutura algébrica para lidar com essas raízes, surgindo a álgebra dos números complexos, onde a raiz quadrado do número negativo -1 recebe o nome de unidade imaginária e é denotada por  $i = \sqrt{-1}$ .

Neste período, a comunidade matemática ansiava pela descoberta de novas estruturas algébricas e objetivava a construção de outras estruturas, munidas de novas operações e, com isso, novas propriedades. Uma dentre tantas tentativas foi a do matemático e astrônomo Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), que supôs a existência não de uma, mas de duas unidades imaginárias, denotadas por  $i$  e  $j$ . Com isso, surge a chamada teoria dos *Tripletes*, cujo o objetivo principal para Hamilton era de descrever rotações no espaço tridimensional, já que os números complexos o fazem no plano bidimensional. Hamilton dedicou mais de 10 anos da sua vida na tentativa de descrever rotações com os *Triplets*, porém a definição de produto entre esses elementos não obedecia a propriedade de fechamento do conjunto. No dia 16 de Outubro de 1843, enquanto Hamilton caminhava com sua esposa em direção a Academia Real da Irlanda, Hamilton fez sua mais importante descoberta. Para que ele pudesse trabalhar com as rotações no espaço, ele deveria supor a existência de uma terceira unidade imaginária, além das unidades  $i$  e  $j$  já definidas. A estrutura algébrica dessas unidades foi talhada por Hamilton perto da *Broome Bridge* em Dublin. Tradicionalmente, até os dias de hoje, os matemáticos do departamento da Universidade Nacional da Irlanda percorrem anualmente o mesmo caminho que Hamilton fez no dia de sua descoberta.

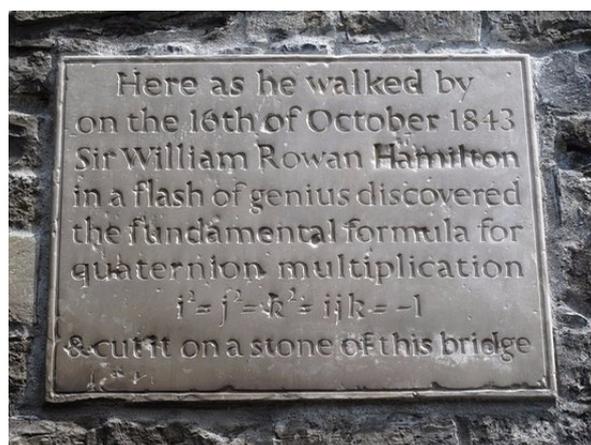


Figura 1.1: Placa honorária à Sir William Rowan Hamilton devido a descoberta dos Quatérnions [1].

Neste trabalho apresentamos primeiramente a estrutura algébrica do conjunto dos números complexos, com a qual iremos estudar as rotações no plano. Na sequência, o objetivo principal é definir o conjunto dos quatérnions e estudar sua estrutura algébrica, definindo seu espaço vetorial e sua álgebra. Ademais, utilizaremos a multiplicação entre quatérnions para definir rotações no espaço euclidiano tridimensional, posteriormente, utilizaremos os quatérnions para reescrever leis físicas conhecidas.

No capítulo 2, definimos o conjunto dos números complexos com auxílio da introdução da unidade imaginária  $i$ . Em seguida, definimos a álgebra dos números complexos e mostramos como podemos rotacionar vetores no espaço bidimensional fazendo uso do produto entre números complexos, sempre comparando com a matriz de rotação usual.

No capítulo 3, introduzimos duas outras unidades imaginárias  $j$  e  $k$ , para a construção do conjunto dos quatérnions. Mostramos também que o conjunto dos quatérnions forma um

espaço vetorial de dimensão quatro e que também defini uma álgebra não comutativa.

No capítulo 4 falamos sobre as rotações no espaço tridimensional fazendo uso da álgebra dos quatérnions.

No capítulo 5, introduzimos os quatérnions como formulação às leis e resultados físicos conhecidos para mostrar que é possível reescrevê-los com os quatérnions, como as leis de Newton e as equações de Maxwell.

Além dos capítulos, temos mais 2 apêndices, o primeiro traz as definições de espaço vetorial e álgebra. No segundo demonstramos as fórmulas de Euler para os complexos e para os quatérnions, que serão essencialmente úteis na parte das rotações.

## CAPÍTULO 2

# A ÁLGEBRA DOS NÚMEROS COMPLEXOS E AS ROTAÇÕES NO PLANO

Este capítulo têm como objetivo definir o conjunto dos números complexos, as operações de soma, produto por escalar e multiplicação entre elementos desse conjunto. Além disso, traremos as principais propriedades algébricas dessas operações e mostraremos que esse conjunto forma um espaço vetorial e também uma álgebra comutativa e associativa. Posteriormente, definiremos o modo como podemos rotacionar vetores no plano euclidiano com o produto entre números complexos.

### 2.1 O espaço vetorial dos Complexos e suas operações

**Definição 2.1.** O conjunto que contém os números na forma,  $x + yi$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$  é chamado de conjunto dos números complexos. A unidade  $i$  é chamada de unidade imaginária e o conjunto será denotado por  $\mathbb{C}$ . Em notação de conjuntos, podemos definir o conjunto dos números complexos por

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\} .$$

**Definição 2.2.** Seja  $z$  um número complexo qualquer, tal que  $z = x + yi$ , então suas partes real e imaginária serão representadas por  $\Re(z) = x$  e  $\Im(z) = yi^\dagger$ , respectivamente.

**Definição 2.3.** Um número complexo é dito ser puro ou imaginário se, e somente se, sua parte real é nula. Ou seja,

$$\Re(z) = x = 0 .$$

**Definição 2.4.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , então  $z_1 = z_2$  se, e somente se, as partes real e imaginária de um são iguais,

---

<sup>†</sup>Usualmente, os livros de álgebra representam a parte imaginária de um número complexo sem a unidade imaginária. Optaremos por escrever a parte imaginária de um número complexo com a unidade imaginária, para que ao estudarmos os quatérnions ocorra uma transição mais natural entre os números complexos e os quatérnions.

respectivamente, às do outro. Ou seja,

$$x_1 + y_1i = x_2 + y_2i \text{ se, e somente se, } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2 .$$

**Definição 2.5.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$  então, as operações de soma e produto por escalar são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i , \\ \lambda z_1 &= \lambda(x_1 + y_1i) = \lambda x_1 + \lambda y_1i = (\lambda x_1) + (\lambda y_1)i \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

**Lema 2.6.** O conjunto dos número complexos sobre a operação de soma é associativo. Isto é, para todos os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , temos que

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 .$$

**Demonstração 2.7.** Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  e  $z_3 = x_3 + y_3i$ , e como o conjunto dos números reais sobre a operação de soma é associativo, então

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1i) + ((x_2 + y_2i) + (x_3 + y_3i)) \\ &= (x_1 + y_1i) + ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3)) + (y_1 + (y_2 + y_3))i \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)i \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3) + ((y_1 + y_2) + y_3)i \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) + (x_3 + y_3i) \\ &= ((x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)) + (x_3 + y_3i) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 , \end{aligned}$$

portanto, o conjunto dos números complexos sobre a operação de soma é associativo. ■

**Lema 2.8.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de soma é comutativo, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , temos que

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 .$$

**Demonstração 2.9.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , então

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z_2 + z_1 &= (x_2 + y_2i) + (x_1 + y_1i) \\ &= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)i . \end{aligned}$$

Porém, visto que  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  são números reais e como o conjunto dos números reais sobre a operação de soma é comutativo, então

$$z_2 + z_1 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = z_1 + z_2 ,$$

portanto, o conjunto dos números complexos sobre a operação de soma é comutativo. ■

**Lema 2.10.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de soma possui elemento neutro. Isto é, existe o elemento  $0 = 0 + 0i$ , tal que para todo número complexos  $z_1$ , temos que

$$z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1 .$$

**Demonstração 2.11.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , e  $0 = 0 + 0i$ , então

$$\begin{aligned} z_1 + 0 &= (x_1 + y_1i) + (0 + 0i) \\ &= (x_1 + 0) + (y_1 + 0)i \\ &= x_1 + y_1i \\ &= z_1 , \end{aligned}$$

portanto, o elemento neutro em relação a soma é  $0 = 0 + 0i$ . ■

**Lema 2.12.** O elemento neutro da soma é único dentro do conjunto dos números complexos.

**Demonstração 2.13.** Suponha que existem dois elementos neutro distintos no conjunto dos números complexos, denotados por  $0$  e  $0'$ , então

$$0 + 0' = 0' ,$$

porém, supomos que  $0'$  também é um elemento neutro e distinto de  $0$ , com isso

$$0 + 0' = 0 ,$$

logo, os elementos não são distintos. Essa conclusão é uma contradição já que foram tomados dois elementos distintos e portanto, o elemento neutro é único dentro do conjunto.

**Lema 2.14.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de soma possui inverso aditivo. Isto é, para todo número complexo  $z_1$ , tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , existe o elemento  $-z_1 = -x_1 - y_1i$ , tal que

$$z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0 .$$

**Demonstração 2.15.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , e seja  $-z_1 = -x_1 - y_1i$  seu inverso aditivo, então

$$\begin{aligned} z_1 + (-z_1) &= (x_1 + y_1i) + (-x_1 - y_1i) \\ &= (x_1 - x_1) + (y_1 - y_1)i \\ &= 0 + 0i \\ &= 0 , \end{aligned}$$

portanto, o conjunto dos números complexos sobre a operação de soma possui inverso aditivo. ■

**Lema 2.16.** Para todo número complexo  $z_1$  e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares reais quaisquer, então

$$\alpha(\beta z_1) = (\alpha\beta)z_1 .$$

**Demonstração 2.17.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares reais arbitrários, então

$$\begin{aligned}\alpha(\beta z_1) &= \alpha(\beta(x_1 + y_1i)) \\ &= \alpha((\beta x_1) + (\beta y_1)i) \\ &= \alpha(\beta x_1) + \alpha(\beta y_1)i \\ &= (\alpha\beta x_1) + (\alpha\beta y_1)i \\ &= (\alpha\beta)(x_1 + y_1i) \\ &= (\alpha\beta)z_1 .\end{aligned}$$

■

**Lema 2.18.** Existe um escalar real, denotado por 1, tal que, para todo número complexo  $z_1$ , temos que

$$1z_1 = z_1$$

**Demonstração 2.19.** A demonstração decorre de forma trivial. ■

**Lema 2.20.** Para todos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$  juntamente com  $\alpha$  sendo um escalar real qualquer, temos que

$$\alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2 .$$

**Demonstração 2.21.** Seja  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , e  $\alpha$  um escalar real arbitrário, então

$$\begin{aligned}\alpha(z_1 + z_2) &= \alpha((x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)) \\ &= \alpha((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \\ &= \alpha(x_1 + x_2) + \alpha(y_1 + y_2)i \\ &= \alpha(x_1 + y_1i) + \alpha(x_2 + y_2i) \\ &= \alpha z_1 + \alpha z_2 .\end{aligned}$$

O lema 2.20 compreende a distributividade da multiplicação por escalar em relação a soma entre números complexos. ■

**Lema 2.22.** Para todo número complexo  $z_1$  juntamente com  $\alpha$  e  $\beta$  escalares reais quaisquer, então

$$(\alpha + \beta)z_1 = \alpha z_1 + \beta z_1 .$$

**Demonstração 2.23.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares arbitrários, então

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)z_1 &= (\alpha + \beta)(x_1 + y_1i) \\ &= (\alpha + \beta)x_1 + (\alpha + \beta)y_1i \\ &= \alpha x_1 + \beta x_1 + \alpha y_1i + \beta y_1i \\ &= \alpha x_1 + \alpha y_1i + \beta x_1 + \beta y_1i \\ &= \alpha(x_1 + y_1i) + \beta(x_1 + y_1i) \\ &= \alpha z_1 + \beta z_1 .\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.24.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de soma e produto por escalar define o espaço vetorial dos números complexos. Além disso, esse espaço vetorial é isomorfo ao  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\} \cong \mathbb{R}^2 .$$

**Demonstração 2.25.** A demonstração parte da definição de espaço vetorial, apresentada no apêndice A.1, juntamente com os lemas 2.6, 2.8, 2.10, 2.12, 2.14, 2.16, 2.18, 2.20 e 2.22. Para demonstrar que o espaço vetorial dos números complexos é isomorfo ao  $\mathbb{R}^2$ , basta tomar a seguinte transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x + yi &\longmapsto (x, y) . \end{aligned}$$

Claramente a transformação é inversível e linear, portanto temos um isomorfismo entre o espaço vetorial dos complexos e o  $\mathbb{R}^2$ . ■

## 2.2 A álgebra dos Números Complexos sobre os Reais

Vamos agora mostrar que é possível definir uma estrutura de álgebra sobre o espaço vetorial dos números complexos. Para isso definimos uma nova operação denotada por  $\bullet$ . Essa operação será chamada de produto entre números complexos. Primeiramente podemos definir o produto entre as unidades fundamentais dos números complexos 1 e  $i$ , faremos isso através de uma tabela com as unidades e seus respectivos produtos como mostrado abaixo.

$\bullet$	1	$i$
1	1	$i$
$i$	$i$	-1

Tabela 2.1: Produto entre as unidades fundamentais do conjunto dos números complexos.

**Definição 2.26.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , o produto é então definido por linearidade, logo

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_2 &= (x_1 + y_1i) \bullet (x_2 + y_2i) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2i^2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i . \end{aligned}$$

Os números complexos podem ser compreendidos como uma generalização dos números reais, já que, de fato, considerando a parte imaginária nula, obtemos a mesma estrutura apresentada pelos números reais. Com isso, surge a questão a respeito da estrutura algébrica que esse conjunto, munido das operações de soma, multiplicação por escalar e produto definidas anteriormente, satisfaz. Sendo assim, mostraremos as principais propriedades do produto e posteriormente, catalogaremos a estrutura algébrica que o conjunto dos números complexos obedece.

**Lema 2.27.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de produto é associativo, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , temos que

$$z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3) = (z_1 \bullet z_2) \bullet z_3.$$

**Demonstração 2.28.** Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  e  $z_3 = x_3 + y_3i$ , utilizando também a definição 2.26, temos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3) &= (x_1 + y_1i) \bullet ((x_2 + y_2i) \bullet (x_3 + y_3i)) \\ &= (x_1 + y_1i) \bullet ((x_2x_3 - y_2y_3) + (x_2y_3 + x_3y_2)i) \\ &= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2)] \\ &\quad + [x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)]i \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) \\ &\quad + (x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)i. \end{aligned}$$

Pelo outro lado da igualdade,

$$\begin{aligned} (z_1 \bullet z_2) \bullet z_3 &= ((x_1 + y_1i) \bullet (x_2 + y_2i)) \bullet (x_3 + y_3i) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i) \bullet (x_3 + y_3i) \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3] \\ &\quad + [(x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3]i \\ &= (x_1x_2x_3 - x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3) \\ &\quad + (x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1)i \\ &= z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3), \end{aligned}$$

com isso, o conjunto dos números complexos sobre a operação de produto é associativo. ■

**Lema 2.29.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de produto é comutativo, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , temos que

$$z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1.$$

**Demonstração 2.30.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , e utilizando a definição 2.26, temos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_2 &= (x_1 + y_1i) \bullet (x_2 + y_2i) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i. \end{aligned}$$

Já pelo lado direito da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} z_2 \bullet z_1 &= (x_2 + y_2i) \bullet (x_1 + y_1i) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1) + (x_2y_1 + y_2x_1)i. \end{aligned}$$

Como  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  são números reais e o conjunto dos números reais sobre a operação de produto é comutativo, então

$$z_2 \bullet z_1 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i = z_1 \bullet z_2,$$

portanto, a operação de produto entre números complexos é comutativa. ■

**Proposição 2.31.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de produto possui elemento neutro. Isto é, existe o elemento  $1 = 1 + 0i$ , tal que para todo número complexo  $z_1$ , temos que

$$1 \bullet z_1 = z_1 \bullet 1 = z_1$$

**Demonstração 2.32.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , e  $1 = 1 + 0i$ , então

$$\begin{aligned} z_1 \bullet 1 &= (x_1 + y_1i) \bullet (1 + 0i) \\ &= x_1 + y_1i \\ &= z_1 . \end{aligned}$$

Portanto, o elemento neutro do produto no conjunto dos números complexos é  $1 = 1 + 0i$ .

**Definição 2.33.** Para todo número complexo  $z_1 = x_1 + y_1i$ , definimos seu complexo conjugado, denotado por  $\bar{z}_1$ , por

$$\bar{z}_1 = x_1 - y_1i .$$

**Definição 2.34.** O módulo de um número complexo  $z_1$ , representado por  $\|z_1\|$ , é definido como

$$\|z_1\| = \sqrt{z_1 \bullet \bar{z}_1} .$$

**Resultado 2.35.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , então, seu módulo é dado por

$$\begin{aligned} \|z_1\| &= \sqrt{z_1 \bullet \bar{z}_1} = \sqrt{(x_1 + y_1i) \bullet (x_1 - y_1i)} \\ &= \sqrt{x_1^2 - x_1y_1i + x_1y_1i - y_1^2i^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \end{aligned}$$

A noção de módulo de números complexos muito se parece com as distâncias entre pontos no plano real e não é por acaso, já que o espaço vetorial dos complexos é isomorfo ao espaço vetorial dos vetores no  $\mathbb{R}^2$ . Este fato ficará mais evidente a frente e será de grande ajuda quando formos estudar as rotações no plano.

**Proposição 2.36.** O complexo conjugado do complexo conjugado de um número complexo é o próprio número complexo, ou seja, para todo número complexo  $z_1$ , temos que

$$\overline{(\bar{z}_1)} = z_1 .$$

**Demonstração 2.37.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , então

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{z}_1)} &= \overline{(x_1 - y_1i)} \\ &= \overline{(x_1 + (-y_1)i)} \\ &= x_1 - (-y_1)i \\ &= x_1 + y_1i \\ &= z_1 . \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.38.** O conjugado do produto é o produto dos conjugados, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , temos que

$$\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$$

**Demonstração 2.39.** Seja  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , então

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \bullet z_2} &= \overline{(x_1 + y_1i) \bullet (x_2 + y_2i)} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i . \end{aligned}$$

Pelo outro lado da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \bullet \overline{z_2} &= \overline{(x_1 + y_1i)} \bullet \overline{(x_2 + y_2i)} \\ &= (x_1 - y_1i) \bullet (x_2 - y_2i) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (-x_1y_2 - x_2y_1)i \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i \\ &= \overline{z_1 \bullet z_2} . \end{aligned}$$

■

**Proposição 2.40.** O módulo do produto é igual ao produto dos módulos, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , temos que

$$\|z_1 \bullet z_2\| = \|z_1\| \|z_2\|$$

**Demonstração 2.41.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, e com auxílio do resultado 2.35, então

$$\begin{aligned} \|z_1 \bullet z_2\| &= \sqrt{(z_1 \bullet z_2) \bullet \overline{(z_1 \bullet z_2)}} \\ &= \sqrt{(z_1 \bullet z_2) \bullet (\overline{z_1} \bullet \overline{z_2})} \\ &= \sqrt{z_1 \bullet z_2 \bullet \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 \bullet \overline{z_1} \bullet z_2 \bullet \overline{z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 \bullet \overline{z_1}} \sqrt{z_2 \bullet \overline{z_2}} \\ &= \|z_1\| \|z_2\| . \end{aligned}$$

■

**Lema 2.42.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de produto possui elemento inverso. Isto é, para todo número complexo não nulo  $z_1$ , existe um elemento, chamado de elemento inverso e denotado por  $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$ , tal que

$$z_1 \bullet z_1^{-1} = z_1^{-1} \bullet z_1 = 1 .$$

**Demonstração 2.43.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer não nulo, então

$$z_1 \bullet z_1^{-1} = z_1 \bullet \frac{1}{z_1},$$

porém, nenhuma das propriedades estudadas consegue lidar com o número complexo no denominador de uma fração. Para contornar esse problema, iremos multiplicar e dividir a expressão pelo seu conjugado, sendo assim

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_1^{-1} &= z_1 \bullet \frac{1}{z_1} \bullet \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}} \\ &= z_1 \bullet \frac{\overline{z_1}}{z_1 \bullet \overline{z_1}} \\ &= z_1 \bullet \frac{\overline{z_1}}{\|z_1\|^2} \\ &= \frac{z_1 \bullet \overline{z_1}}{\|z_1\|^2} \\ &= \frac{\|z_1\|^2}{\|z_1\|^2} = 1, \end{aligned}$$

portanto, o número complexo  $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$  é o elemento inverso de  $z_1$ . ■

**Resultado 2.44.** O elemento inverso de um número complexo  $z_1$ , pode ser escrito como

$$z_1^{-1} = \frac{\overline{z_1}}{\|z_1\|^2}.$$

**Lema 2.45.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de produto é distributivo à esquerda em relação a soma, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , temos que

$$z_1 \bullet (z_2 + z_3) = z_1 \bullet z_2 + z_1 \bullet z_3.$$

**Demonstração 2.46.** Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  e  $z_3 = x_3 + y_3i$ , e juntamente com a definição 2.26, temos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet (z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1i) \bullet ((x_2 + y_2i) + (x_3 + y_3i)) \\ &= (x_1 + y_1i) \bullet ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i) \\ &= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)] + [x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)]i \\ &= [x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3] + [x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3]i. \end{aligned}$$

Pelo outro lado da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_2 + z_1 \bullet z_3 &= (x_1 + y_1i) \bullet (x_2 + y_2i) + (x_1 + y_1i) \bullet (x_3 + y_3i) \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i] + [(x_1x_3 - y_1y_3) + (x_1y_3 + x_3y_1)i], \end{aligned}$$

coleccionando os termos associados a unidade  $i$ , concluimos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_2 + z_1 \bullet z_3 &= [x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3] + [x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1]i \\ &= z_1 \bullet (z_2 + z_3) , \end{aligned}$$

portanto, o produto entre números complexos é distributivo à esquerda em relação a soma. ■

**Lema 2.47.** O conjunto dos números complexos sobre a operação de produto é distributivo à direita em relação a soma, ou seja, para todos os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , temos que

$$(z_1 + z_2) \bullet z_3 = z_1 \bullet z_3 + z_2 \bullet z_3 .$$

**Lema 2.48.** Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  e  $z_3 = x_3 + y_3i$ , então

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) \bullet z_3 &= ((x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)) \bullet (x_3 + y_3i) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \bullet (x_3 + y_3i) \\ &= [(x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3] + [(x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3]i \\ &= [x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3] + [x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3]i . \end{aligned}$$

Pelo outro lado da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_3 + z_2 \bullet z_3 &= (x_1 + y_1i) \bullet (x_3 + y_3i) + (x_2 + y_2i) \bullet (x_3 + y_3i) \\ &= [(x_1x_3 - y_1y_3) + (x_1y_3 + x_3y_1)i] + [(x_2x_3 - y_2y_3) + (x_2y_3 + x_3y_2)i] , \end{aligned}$$

coleccionando os termos associados a unidade  $i$ , concluimos que

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_3 + z_2 \bullet z_3 &= [x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3] + [x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3]i \\ &= (z_1 + z_2) \bullet z_3 , \end{aligned}$$

portanto, o produto entre os números complexos é distributivo à direita em relação a soma. ■

**Lema 2.49.** Para todos os números complexos  $z_1$  e  $z_2$  juntamente com  $\alpha$  um escalar real qualquer, então

$$\alpha(z_1 \bullet z_2) = (\alpha z_1) \bullet z_2 = z_1 \bullet (\alpha z_2) .$$

**Demonstração 2.50.** Será demonstrado apenas a primeira igualdade do lema acima. Para isso, sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , então

$$\begin{aligned} \alpha(z_1 \bullet z_2) &= \alpha((x_1 + y_1i) \bullet (x_2 + y_2i)) \\ &= \alpha((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i) \\ &= \alpha(x_1x_2 - y_1y_2) + \alpha(x_1y_2 + x_2y_1)i \\ &= \alpha x_1x_2 - \alpha y_1y_2 + \alpha x_1y_2i + \alpha x_2y_1i . \end{aligned}$$

Pelo outro lado da igualdade,

$$\begin{aligned}(\alpha z_1) \bullet z_2 &= (\alpha(x_1 + y_1i)) \bullet (x_2 + y_2i) \\&= (\alpha x_1 + \alpha y_1i) \bullet (x_2 + y_2i) \\&= ((\alpha x_1) + (\alpha y_1)i) \bullet (x_2 + y_2i) \\&= ((\alpha x_1)x_2 - (\alpha y_1)y_2) + ((\alpha x_1)y_2 + x_2(\alpha y_1))i \\&= \alpha x_1 x_2 - \alpha y_1 y_2 + \alpha x_1 y_2 i + \alpha x_2 y_1 i \\&= \alpha(z_1 \bullet z_2) .\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.51.** O conjunto dos número complexos munidos das operação definidas em 2.5 e 2.26 forma uma álgebra de divisão associativa e comutativa.

Uma álgebra é um espaço vetorial munido com uma operação de produto entre elementos desse espaço. Essa operação deve satisfazer alguns axiomas, dentre os mais importantes estão a condição de fechamento<sup>§</sup> e a distributividade do produto em relação a soma, tanto a direita quanto a esquerda. Quando o produto entre elementos de uma álgebra comutam, temos uma álgebra comutativa. Da mesma forma, quando o produto for associativo, temos uma álgebra associativa.

**Demonstração 2.52.** A demonstração parte da definição de álgebra apresentada no apêndice A.2, juntamente com os lemas 2.27, 2.29, 2.42, 2.45, 2.47 e 2.49.

---

<sup>§</sup>Um conjunto sobre uma operação satisfaz a condição de fechamento se, e somente se, dados dois elementos do conjunto, a operação entre eles também está no conjunto. Para os números complexos, por exemplo, sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, então  $z_1 \bullet z_2$  também é um número complexo e portanto, a condição de fechamento é satisfeita.

## 2.3 Rotações no plano

Os números complexos são especialmente úteis quando queremos estudar rotações de um vetor no plano bidimensional. Para isso utilizaremos um número complexo unitário juntamente com o vetor que desejamos rotacionar. Os números complexos são isomorfos aos vetores no plano euclidiano, sendo assim, tratar de números complexos ou vetores são equivalentes.

A representação polar de um número complexo será extremamente útil a partir desse ponto, então demonstraremos esse novo modo de representar um número complexo através do plano de Argand-Gauss exposto na figura abaixo.

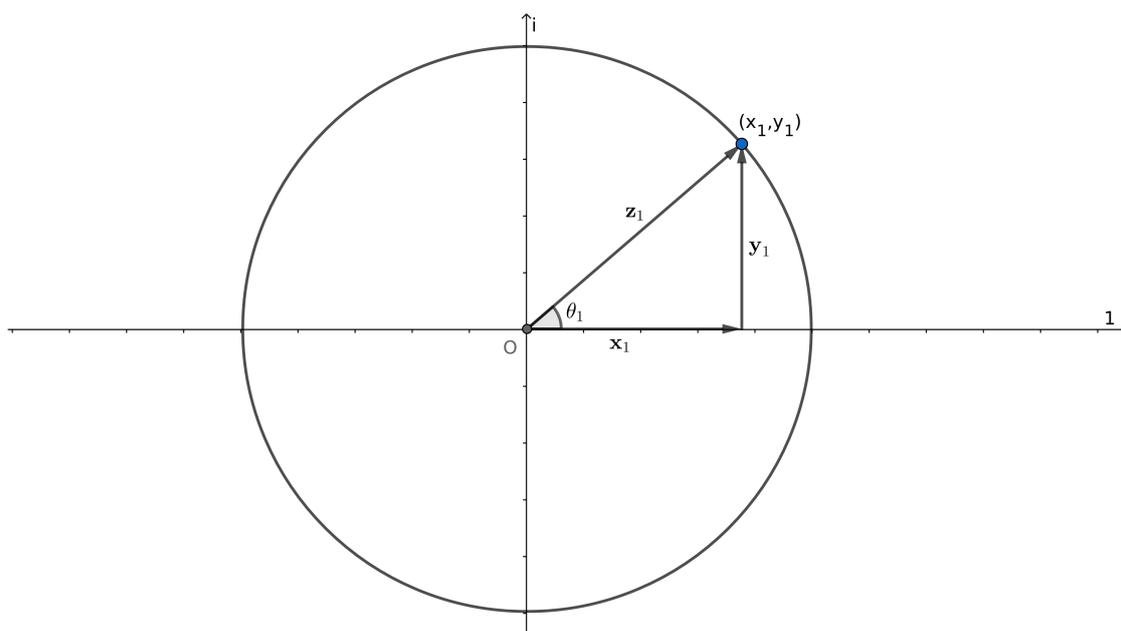


Figura 2.1: Plano de Argand-Gauss com os vetores  $\mathbf{z}_1$ ,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{y}_1$ .

Suponha que  $z_1$  seja um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = x_1 + y_1i$ , pelo isomorfismo entre as estruturas podemos associá-lo ao par ordenado  $(x_1, y_1)$ . Com isso, decomponemos o vetor  $\mathbf{z}_1$  em duas componentes, tal que

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 .$$

Além disso, conseguimos escrever os módulos de cada um desses vetores, então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}_1\|^2 &= \langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \rangle \\ &= \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{y}_1\|^2 \end{aligned}$$

com  $\|\mathbf{x}_1\|$  e  $\|\mathbf{y}_1\|$  sendo os módulos dos vetores  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{y}_1$ , respectivamente. Com isso, podemos calcular o seno, cosseno e a tangente do ângulo  $\theta_1$ , logo

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{\|\mathbf{y}_1\|}{\|\mathbf{z}_1\|}, \quad \text{cos}(\theta_1) = \frac{\|\mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{z}_1\|} \quad \text{e} \quad \text{tan}(\theta_1) = \frac{\|\mathbf{y}_1\|}{\|\mathbf{x}_1\|} .$$

Com todos esses resultados em mãos, podemos escrever o número complexo  $z_1 = x_1 + y_1 i$  da seguinte forma,

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 i = \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{y}_1\| i \\ &= \cos(\theta_1) \|\mathbf{z}_1\| + \text{sen}(\theta_1) \|\mathbf{z}_1\| i \\ &= \|\mathbf{z}_1\| (\cos(\theta_1) + \text{sen}(\theta_1) i) \\ &= \sqrt{\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{y}_1\|^2} (\cos(\theta_1) + \text{sen}(\theta_1) i), \end{aligned}$$

podemos simplificar ainda mais esse resultado lembrando que  $e^{i\theta_1} = \cos(\theta_1) + \text{sen}(\theta_1) i$  e chamando também  $\sqrt{\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{y}_1\|^2}$  de  $r_1$ , por fim

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}.$$

Essa igualdade é conhecido como forma polar do número complexo  $z_1$ . Definiremos novamente as operações de produto para complexos escritos dessa forma.

**Definição 2.53.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, tal que  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , então o produto entre  $z_1$  e  $z_2$  é definido como

$$z_1 \bullet z_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) \bullet (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

**Definição 2.54.** Seja  $z_1$  um número complexo qualquer, tal que  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ , então o seu conjugado será definido por

$$\overline{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1}.$$

**Definição 2.55.** Seja  $\hat{\mathbf{u}}$  um vetor unitário qualquer e  $\mathbf{z}$  um vetor qualquer no plano bidimensional. Iremos associar esses vetores aos seguintes números complexos  $u = \cos(\theta) + \text{sen}(\theta) i$  e  $z = r e^{i\alpha}$ . Então,

$$z' = u \bullet z$$

define uma rotação do vetor  $\mathbf{z}$  em  $\theta$  graus no sentido anti-horário. O número complexo  $z'$  representa o vetor rotacionado já que o conjunto dos números complexos é isomorfo ao  $\mathbb{R}^2$ .

Com isso, seja  $\hat{\mathbf{u}}$  um vetor unitário e  $\mathbf{z}$  um vetor qualquer do plano bidimensional, com os seguintes números complexos associado  $u = e^{i\theta}$  e  $z = r e^{i\alpha}$ . O produto entre eles é dado por

$$\begin{aligned} u \bullet z &= (e^{i\theta}) \bullet (r e^{i\alpha}) \\ &= r e^{i(\theta + \alpha)}, \end{aligned}$$

portanto, o módulo do vetor  $\mathbf{z}'$  é o mesmo do vetor  $\mathbf{z}$ , ou seja,

$$\|\mathbf{z}'\| = \|\mathbf{z}\| = r.$$

Com isso, ocorre apenas uma alteração no ângulo resultante e conseqüentemente a posição do vetor no plano. Iremos expandir os números complexos  $\mathbf{z}$  e o  $\mathbf{z}'$  nas componentes seno e cosseno, logo

$$\begin{aligned} z &= r \cos(\alpha) + r \text{sen}(\alpha) i \\ z' &= r \cos(\theta + \alpha) + r \text{sen}(\theta + \alpha) i, \end{aligned}$$

portanto, temos como resultado o seguinte vetor rotacionado  $\mathbf{z}' = r \cos(\theta + \alpha)\hat{\mathbf{x}} + r \sin(\theta + \alpha)\hat{\mathbf{y}}$ . Conseguimos então calcular o ângulo formado entre esses vetores, logo

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle}{\|\mathbf{z}\| \|\mathbf{z}'\|} \\ &= \frac{\langle r \cos(\alpha)\hat{\mathbf{x}} + r \sin(\alpha)\hat{\mathbf{y}}, r \cos(\theta + \alpha)\hat{\mathbf{x}} + r \sin(\theta + \alpha)\hat{\mathbf{y}} \rangle}{r^2} \\ &= \frac{r^2}{r^2} (\cos(\alpha) \cos(\alpha + \theta) + \sin(\alpha) \sin(\alpha + \theta)) \\ &= \cos(\alpha - (\alpha + \theta)) \\ &= \cos(-\theta) = \cos(\theta),\end{aligned}$$

e portanto,  $\gamma = \theta$ . Mostramos então que o parâmetro  $\theta$  gera todas as possíveis rotações no sentido anti-horário do vetor  $\mathbf{z}$  no plano bidimensional.

**Exemplo 2.56.** Seja  $\mathbf{z} = 3\hat{\mathbf{x}} - 1\hat{\mathbf{y}}$  um vetor no  $\mathbb{R}^2$  e suponha que gostaríamos de rotacioná-lo em  $\frac{\pi}{4}$  radianos. Através da matriz de rotação usual, temos que

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

portanto, o vetor rotacionado é  $\mathbf{z}' = 2\sqrt{2}\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{2}\hat{\mathbf{y}}$ .

Associando o vetor  $\mathbf{z} = 3\hat{\mathbf{x}} - 1\hat{\mathbf{y}}$  ao número complexo  $z = 3 - i$  e utilizando o complexo  $u = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i$ , então

$$\begin{aligned}z' &= z \bullet u \\ &= (3 - i) \bullet \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i \right) \\ &= (3 - i) \bullet \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) i \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\end{aligned}$$

com isso, podemos associar o número complexo resultante com o vetor rotacionado  $\mathbf{z}' = 2\sqrt{2}\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{2}\hat{\mathbf{y}}$ . Obtendo o mesmo resultado com a matriz de rotação usual e com os números complexos.

Como foi visto no capítulo anterior, a álgebra dos números complexos engloba a álgebra dos números reais, ou seja, tomando a parte imaginária de todos os números complexos como sendo nula, retornamos as definições de soma, multiplicação por escalar e produto presentes na álgebra dos reais. Na tentativa de encontrar um conjunto que englobasse os números complexos, Hamilton formulou sua teoria dos quatérnions e além disso, conseguiu trabalhar com rotações no espaço tridimensional. Com esse capítulo, objetivamos definir o espaço vetorial dos quatérnions e a álgebra utilizada por Hamilton para estudar as rotações no espaço euclidiano.

### 3.1 O espaço vetorial dos Quatérnions e suas operações

**Definição 3.1.** O conjunto que contém os números na forma,  $t + xi + yj + zk$ , com  $t, x, y, z \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  é chamado de conjunto dos quatérnions. As unidades  $i, j$  e  $k$  são chamadas de unidades imaginária e o conjunto será denotado por  $\mathbb{H}$ . Em notação de conjuntos, podemos definir o conjunto dos quatérnions por

$$\mathbb{H} = \{t + xi + yj + zk \mid t, x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = -1\}$$

**Definição 3.2.** Seja  $\mathfrak{Q}$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q} = t + xi + yj + zk$ , então suas partes real e imaginária serão representadas por  $\Re(\mathfrak{Q}) = t$  e  $\Im(\mathfrak{Q}) = xi + yj + zk$ , respectivamente.

**Definição 3.3.** Um quatérnion é dito ser puro ou imaginário se, e somente se, sua parte real é nula. Ou seja,

$$\Re(\mathfrak{Q}) = t = 0 .$$

**Definição 3.4.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  e  $\mathfrak{Q}_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ , então  $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2$  se, e somente se, as parte real e imaginária (separadamente) de um são iguais, respectivamente, às do outro. Ou seja,

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2 \text{ se, e somente se, } t_1 = t_2, \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \text{ e } z_1 = z_2 .$$

**Definição 3.5.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  e  $\mathfrak{Q}_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$  então, as operações de soma e produto por escalar são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (t_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k , \\ \lambda\mathfrak{Q}_1 &= \lambda(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (\lambda t_1) + (\lambda x_1)i + (\lambda y_1)j + (\lambda z_1)k .\end{aligned}$$

**Lema 3.6.** O conjunto dos Quatérnions sobre a operação de soma é associativo. Isto é, para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$ , temos que

$$\mathfrak{Q}_1 + (\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) = (\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) + \mathfrak{Q}_3 .$$

**Demonstração 3.7.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ ,  $\mathfrak{Q}_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$  e  $\mathfrak{Q}_3 = t_3 + x_3i + y_3j + z_3k$ , juntamente com a definição 3.5, temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_1 + (\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + ((t_2 + x_2i + y_2j + z_2k) + (t_3 + x_3i + y_3j + z_3k)) \\ &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + ((t_2 + t_3) + (x_2 + x_3)i + (y_2 + y_3)j + (z_2 + z_3)k) \\ &= (t_1 + (t_2 + t_3)) + (x_1 + (x_2 + x_3))i + (y_1 + (y_2 + y_3))j + (z_1 + (z_2 + z_3))k \\ &= (t_1 + t_2 + t_3) + (x_1 + x_2 + x_3)i + (y_1 + y_2 + y_3)j + (z_1 + z_2 + z_3)k .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) + \mathfrak{Q}_3 &= ((t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (t_2 + x_2i + y_2j + z_2k)) + (t_3 + x_3i + y_3j + z_3k) \\ &= ((t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k) + (t_3 + x_3i + y_3j + z_3k) \\ &= ((t_1 + t_2) + t_3) + ((x_1 + x_2) + x_3)i + ((y_1 + y_2) + y_3)j + ((z_1 + z_2) + z_3)k \\ &= (t_1 + t_2 + t_3) + (x_1 + x_2 + x_3)i + (y_1 + y_2 + y_3)j + (z_1 + z_2 + z_3)k \\ &= \mathfrak{Q}_1 + (\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) ,\end{aligned}$$

portanto, o conjunto dos quatérnions sobre a operação de soma é associativo. ■

**Lema 3.8.** O conjunto dos quatérnions sobre a operação de soma é comutativo. Isto é, para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$ , temos que

$$\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_1 .$$

**Demonstração 3.9.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  e  $\mathfrak{Q}_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ , então

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (t_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_1 &= (t_2 + x_2i + y_2j + z_2k) + (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (t_2 + t_1) + (x_2 + x_1)i + (y_2 + y_1)j + (z_2 + z_1)k .\end{aligned}$$

Porém, visto que  $t_1, t_2, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1$  e  $z_2$  são números reais e o conjunto dos números reais sobre a operação de soma é comutativo, então

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_1 &= (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k \\ &= \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 ,\end{aligned}$$

portanto, o conjunto dos quatérnions sobre a operação de soma é comutativo. ■

**Lema 3.10.** O conjunto dos quatérnions sobre a operação de soma possui elemento neutro. Isto é, existe o elemento  $\mathfrak{o} = 0 + 0i + 0j + 0k$ , tal que para todo quatérnion  $\mathfrak{Q}_1$ , temos que

$$\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{o} = \mathfrak{o} + \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_1 .$$

**Demonstração 3.11.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ , e  $\mathfrak{o} = 0 + 0i + 0j + 0k$ , então

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{o} &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (0 + 0i + 0j + 0k) \\ &= (t_1 + 0) + (x_1 + 0)i + (y_1 + 0)j + (z_1 + 0)k \\ &= t_1 + x_1i + y_1j + z_1k \\ &= \mathfrak{Q}_1 ,\end{aligned}$$

portanto, o elemento neutro em relação a soma é  $\mathfrak{o} = 0 + 0i + 0j + 0k$ . ■

**Lema 3.12.** O elemento neutro da soma é único dentro do conjunto dos quatérnions.

**Demonstração 3.13.** A demonstração é semelhante a apresentada em 2.13 no capítulo dos números complexos. ■

**Lema 3.14.** O conjunto dos quatérnions sobre a operação de soma possui elemento inverso aditivo. Isto é, para todo quatérnion  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ , existe o elemento  $-\mathfrak{Q}_1 = -t_1 - x_1i - y_1j - z_1k$ , tal que

$$\mathfrak{Q}_1 + (-\mathfrak{Q}_1) = (-\mathfrak{Q}_1) + \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{o} .$$

**Demonstração 3.15.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ , e seja  $-\mathfrak{Q}_1 = -t_1 - x_1i - y_1j - z_1k$  seu elemento inverso, então

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_1 + (-\mathfrak{Q}_1) &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (-t_1 - x_1i - y_1j - z_1k) \\ &= (t_1 - t_1) + (x_1 - x_1)i + (y_1 - y_1)j + (z_1 - z_1)k \\ &= 0 + 0i + 0j + 0k \\ &= \mathfrak{o} ,\end{aligned}$$

portanto, o conjunto dos quatérnions sobre a operação de soma possui inverso aditivo. ■

**Lema 3.16.** Para todo quatérnion  $\mathfrak{Q}_1$ , juntamente com  $\alpha$  e  $\beta$  escalares reais quaisquer, então

$$\alpha(\beta\mathfrak{Q}_1) = (\alpha\beta)\mathfrak{Q}_1 .$$

**Demonstração 3.17.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  e sejam  $\alpha$  e  $\beta$  escalares arbitrários, então

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\mathfrak{Q}_1) &= \alpha(\beta(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k)) \\ &= \alpha((\beta t_1) + (\beta x_1)i + (\beta y_1)j + (\beta z_1)k) \\ &= (\alpha\beta t_1) + (\alpha\beta x_1)i + (\alpha\beta y_1)j + (\alpha\beta z_1)k.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(\alpha\beta)\mathfrak{Q}_1 = (\alpha\beta)(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k),$$

com isso, o produto dos escalares  $\alpha$  e  $\beta$  pode ser entendido como um novo escalar e assim, pode-se usar a definição usual do produto por escalar. Considerando  $\alpha\beta = \gamma$ , obtemos que

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\mathfrak{Q}_1 &= \gamma\mathfrak{Q}_1 = \gamma(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (\gamma t_1) + (\gamma x_1)i + (\gamma y_1)j + (\gamma z_1)k,\end{aligned}$$

voltando aos escalares considerados no lema, temos que

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\mathfrak{Q}_1 &= (\alpha\beta t_1) + (\alpha\beta x_1)i + (\alpha\beta y_1)j + (\alpha\beta z_1)k \\ &= \alpha(\beta\mathfrak{Q}_1).\end{aligned}$$

■

**Lema 3.18.** Existe um escalar real, denotado por 1, tal que, para todo quatérnion  $\mathfrak{Q}_1$ , temos que

$$1\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_1.$$

**Demonstração 3.19.** A demonstração decorre de forma trivial.

**Lema 3.20.** Para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  juntamente com  $\alpha$  um escalar real qualquer, temos que

$$\alpha(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) = \alpha\mathfrak{Q}_1 + \alpha\mathfrak{Q}_2.$$

**Demonstração 3.21.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  e  $\mathfrak{Q}_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ , e seja  $\alpha$  um escalar real qualquer, então

$$\begin{aligned}\alpha(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) &= \alpha((t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + (t_2 + x_2i + y_2j + z_2k)) \\ &= \alpha((t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k) \\ &= \alpha(t_1 + t_2) + \alpha(x_1 + x_2)i + \alpha(y_1 + y_2)j + \alpha(z_1 + z_2)k \\ &= \alpha t_1 + \alpha t_2 + \alpha x_1i + \alpha x_2i + \alpha y_1j + \alpha y_2j + \alpha z_1k + \alpha z_2k \\ &= (\alpha t_1 + \alpha x_1i + \alpha y_1j + \alpha z_1k) + (\alpha t_2 + \alpha x_2i + \alpha y_2j + \alpha z_2k) \\ &= \alpha(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + \alpha(t_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\ &= \alpha\mathfrak{Q}_1 + \alpha\mathfrak{Q}_2.\end{aligned}$$

O lema 3.20 compreende a distributividade da multiplicação por escalar em relação a soma entre quatérnions. ■

**Lema 3.22.** Para todo quatérnion  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares quaisquer, então

$$(\alpha + \beta)\mathfrak{Q}_1 = \alpha\mathfrak{Q}_1 + \beta\mathfrak{Q}_1 .$$

**Demonstração 3.23.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ , e sejam  $\alpha$  e  $\beta$  escalares reais quaisquer, então

$$(\alpha + \beta)\mathfrak{Q}_1 = (\alpha + \beta)(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) ,$$

como os escalares pertencem aos reais, a sua soma também pertence, sendo assim, podemos tomar  $\alpha + \beta = \gamma$ , com isso,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathfrak{Q}_1 &= (\gamma)\mathfrak{Q}_1 = (\gamma)(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (\gamma t_1) + (\gamma x_1i) + (\gamma y_1j) + (\gamma z_1k) \end{aligned}$$

voltando aos escalares iniciais, e lembrando que os coeficientes de um quatérnion são números reais, obtemos que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathfrak{Q}_1 &= ((\alpha + \beta)t_1) + ((\alpha + \beta)x_1)i + ((\alpha + \beta)y_1)j + ((\alpha + \beta)z_1)k \\ &= (\alpha t_1 + \beta t_1) + (\alpha x_1 + \beta x_1)i + (\alpha y_1 + \beta y_1)j + (\alpha z_1 + \beta z_1)k \\ &= \alpha t_1 + \beta t_1 + \alpha x_1i + \beta x_1i + \alpha y_1j + \beta y_1j + \alpha z_1k + \beta z_1k \end{aligned}$$

colecionando os termos com  $\alpha$  e  $\beta$  separadamente, assim

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathfrak{Q}_1 &= \alpha(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) + \beta(t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= \alpha\mathfrak{Q}_1 + \beta\mathfrak{Q}_2 \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.24.** O conjunto dos quatérnions sobre as operação de soma e produto por escalar define o espaço vetorial dos quatérnions. Além disso, o sub-espaço vetorial do quatérnions puros, denotado por  $\mathbb{H}_0$ , é isomorfo ao  $\mathbb{R}^3$ , ou seja,

$$\mathbb{H}_0 = \{xi + yj + zk \mid x, y, z \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = -1\} \cong \mathbb{R}^3$$

**Demonstração 3.25.** A demonstração parte da definição de espaço vetorial, apresentada no apêndice A.1, juntamente com os lemas 3.6, 3.8, 3.10, 3.12, 3.14, 3.16, 3.18, 3.20 e 3.22. Para demonstrar que o espaço vetorial dos quatérnions puros é isomorfo ao  $\mathbb{R}^3$ , basta tomar a seguinte transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{H}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ xi + yj + zk &\longmapsto (x, y, z) . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Com esse mapeamento entre os conjuntos, observamos que a transformação é inversível e linear. Com isso, os espaços são isomorfos.

## 3.2 A álgebra dos Quatérnions sobre os Reais

Vamos agora mostrar que é possível definir uma estrutura de álgebra sobre o espaço vetorial dos quatérnions. Para isso será definido uma nova operação denotada por  $\bullet$ . Essa operação será chamada de produto entre quatérnions. Primeiramente, podemos definir o produto entre as unidades fundamentais dos quatérnions  $1, i, j$  e  $k$ , faremos isso através de uma tabela com as unidades e seus respectivos produtos como mostrado abaixo.

$\bullet$	$1$	$i$	$j$	$k$
$1$	$1$	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-1$	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	$-1$	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-1$

Tabela 3.1: Produto entre as unidades fundamentais dos quatérnions.

Conseguimos perceber que a definição de produto entre as unidades fundamentais dos quatérnions engloba a definição de produto dos números complexos. Esse resultado pode parecer trivial, porém, diversos matemáticos se questionaram a respeito da existência de uma estrutura que pudesse englobar os números complexos. Hamilton, por exemplo, tentou durante 10 anos construir essa estrutura ao qual deu o nome de Tripletes. Porém não obteve sucesso, já que a propriedade de fechamento neste conjunto não era satisfeita. Contudo, Hamilton conseguiu definir a estrutura que engloba os complexos enquanto caminhava para a academia real irlandesa. Essa definição invadiu seus pensamentos e sobre a *Broom Bridge* em dublin, Hamilton talhou as famosas relações entre as unidades fundamentais dos quatérnions conforme mostrado na figura 1.1. Nessas talhas, Hamilton, trás a definição do produto cruzado entre as unidades  $i, j$  e  $k$ , e através dela, conseguimos o resultado dos produtos entre as unidades, duas a duas, conforme apresentado na tabela 3.1. Vale ressaltar que, a priori, Hamilton não considerou a comutatividade do produto entre as unidades. Com a definição dos produtos entre as unidades, podemos definir o produto entre dois quatérnions quaisquer, conforme será feito abaixo.

**Definição 3.26.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$  e  $\mathfrak{Q}_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ , o produto é então definido por linearidade, logo

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 &= (t_1 + x_1i + y_1j + z_1k) \bullet (t_2 + x_2i + y_2j + z_2k) \\
 &= t_1t_2 + t_1x_2i + t_1y_2j + t_1z_2k \\
 &\quad + x_1t_2i + x_1x_2i^2 + x_1y_2i \bullet j + x_1z_2i \bullet k \\
 &\quad + y_1t_2j + y_1x_2j \bullet i + y_1y_2j^2 + y_1z_2j \bullet k \\
 &\quad + z_1t_2k + z_1x_2k \bullet i + z_1y_2k \bullet j + z_1z_2k^2 \\
 &= (t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) \\
 &\quad + (t_1x_2 + t_2x_1 + y_1z_2 - y_2z_1)i \\
 &\quad + (t_1y_2 + t_2y_1 + x_2z_1 - x_1z_2)j \\
 &\quad + (t_1z_2 + t_2z_1 + x_1y_2 - x_2y_1)k
 \end{aligned}$$

A definição de produto entre quatérnions é massante e notacionalmente confusa. Sendo assim, introduziremos uma nova forma de representar quatérnions. Para isso iremos associar a parte imaginária de um quatérnion a um vetor no espaço euclidiano, ja que o espaço vetorial dos quatérnions puros é isomorfo ao  $\mathbb{R}^3$  como mostrado em 3.1.

**Definição 3.27.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ , então podemos representá-lo da seguinte forma

$$\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1 ,$$

com  $q_1 = t_1$  e  $\mathbf{Q}_1 \cong x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}}$  sendo um vetor no espaço tridimensional.

**Proposição 3.28.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$ , o produto nesta notação é dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 &= (q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2) \\ &= (q_1q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) , \end{aligned} \quad (3.2)$$

com  $\langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle$  sendo o produto interno entre os vetores associados aos quatérnions e  $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2$  sendo o produto vetorial usual.

**Lema 3.29.** O conjunto dos quatérnions sobre a operação de produto é associativo. Isto é, para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$ , temos que

$$\mathfrak{Q}_1 \bullet (\mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_3) = (\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2) \bullet \mathfrak{Q}_3 .$$

**Demonstração 3.30.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3 = q_3 + \mathbf{Q}_3$ , então

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 \bullet (\mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_3) &= (q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet ((q_2 + \mathbf{Q}_2) \bullet (q_3 + \mathbf{Q}_3)) \\ &= (q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet ((q_2q_3 - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle) + (q_2\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3)) \\ &= q_1(q_2q_3 - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle) - \langle \mathbf{Q}_1, q_2\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3 \rangle \\ &\quad + q_1(q_2\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3) + (q_2q_3 - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle)\mathbf{Q}_1 \\ &\quad + \mathbf{Q}_1 \times (q_2\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3) \\ &= q_1q_2q_3 - q_1 \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle - q_2 \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3 \rangle - q_3 \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3 \rangle \\ &\quad + q_1q_2\mathbf{Q}_3 + q_1q_3\mathbf{Q}_2 + q_1\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3 + q_2q_3\mathbf{Q}_1 - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle \mathbf{Q}_1 \\ &\quad + q_2\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1 \times (\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3) . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2) \bullet \mathfrak{Q}_3 &= ((q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2)) \bullet (q_3 + \mathbf{Q}_3) \\ &= ((q_1q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2)) \bullet (q_3 + \mathbf{Q}_3) \\ &= (q_1q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle)q_3 - \langle q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle \\ &\quad + (q_1q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle)\mathbf{Q}_3 + q_3(q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) \\ &\quad + (q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) \times \mathbf{Q}_3 \\ &= q_1q_2q_3 - q_3 \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle - q_1 \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle - q_2 \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3 \rangle - \langle \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle \\ &\quad + q_1q_2\mathbf{Q}_3 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle \mathbf{Q}_3 + q_1q_3\mathbf{Q}_2 + q_2q_3\mathbf{Q}_1 + q_3\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 \\ &\quad + q_1\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3 + q_2\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3 + (\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) \times \mathbf{Q}_3 . \end{aligned}$$

Para compararmos essas expressões utilizaremos algumas identidades vetoriais, para isso, sejam  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  vetores quaisquer no espaço euclidiano e sejam  $\alpha$  e  $\beta$  escalares arbitrário, então

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle = \|\mathbf{A}\|^2, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (3.5)$$

$$\langle \alpha \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \alpha \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \alpha \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle, \quad (3.6)$$

$$\langle \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle = \alpha \langle \mathbf{A}, \mathbf{C} \rangle + \beta \langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle, \quad (3.7)$$

$$(\alpha \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\alpha \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad (3.8)$$

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{A} \times (\alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{C}) = \alpha \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \beta \mathbf{A} \times \mathbf{C}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{C} \rangle \mathbf{B} - \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle \mathbf{C}, \quad (3.11)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \langle \mathbf{C}, \mathbf{A} \rangle \mathbf{B} - \langle \mathbf{C}, \mathbf{B} \rangle \mathbf{A}, \quad (3.12)$$

$$\langle \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \times \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \times \mathbf{C} \rangle. \quad (3.13)$$

Utilizando as identidades vetoriais 3.11 e 3.12 podemos simplificar as expressões encontradas, então

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 \bullet (\mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_3) &= (q_1 + \mathfrak{Q}_1) \bullet ((q_2 + \mathfrak{Q}_2) \bullet (q_3 + \mathfrak{Q}_3)) \\ &= q_1 q_2 q_3 - q_1 \langle \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 \rangle - q_2 \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_3 \rangle - q_3 \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \rangle - \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \times \mathfrak{Q}_3 \rangle \\ &\quad + q_1 q_2 \mathfrak{Q}_3 + q_1 q_3 \mathfrak{Q}_2 + q_1 \mathfrak{Q}_2 \times \mathfrak{Q}_3 + q_2 q_3 \mathfrak{Q}_1 - \langle \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 \rangle \mathfrak{Q}_1 \\ &\quad + q_2 \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_3 + q_3 \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 + \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_3 \rangle \mathfrak{Q}_2 - \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \rangle \mathfrak{Q}_3. \end{aligned}$$

E pelo outro lado da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2) \bullet \mathfrak{Q}_3 &= ((q_1 + \mathfrak{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathfrak{Q}_2)) \bullet (q_3 + \mathfrak{Q}_3) \\ &= q_1 q_2 q_3 - q_1 \langle \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 \rangle - q_2 \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_3 \rangle - q_3 \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \rangle - \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \times \mathfrak{Q}_3 \rangle \\ &\quad + q_1 q_2 \mathfrak{Q}_3 + q_1 q_3 \mathfrak{Q}_2 + q_1 \mathfrak{Q}_2 \times \mathfrak{Q}_3 + q_2 q_3 \mathfrak{Q}_1 - \langle \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 \rangle \mathfrak{Q}_1 \\ &\quad + q_2 \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_3 + q_3 \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 + \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_3 \rangle \mathfrak{Q}_2 - \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \rangle \mathfrak{Q}_3 \\ &= \mathfrak{Q}_1 \bullet (\mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_3), \end{aligned}$$

com isso, demonstramos que o conjunto dos quatérnions sobre a operação de produto é associativo.  $\blacksquare$

**Lema 3.31.** Em geral, o conjunto dos quatérnions sobre a operação de produto **NÃO** é comutativo. Isto é, existem quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  tal que

$$\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 \neq \mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_1.$$

**Demonstração 3.32.** A não comutatividade entre os quatérnions pode ser visualizada através da própria definição do produto entre as unidades  $1$ ,  $i$ ,  $j$  e  $k$ , dada na tabela 3.1, já que  $i \bullet j = k$  e  $j \bullet i = -k$  com isso,  $i \bullet j \neq j \bullet i$  e portanto, os quatérnions, no geral, não comutam.

Traremos uma demonstração da não comutatividade do produto entre quatérnions de uma forma geral, para isso, sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$ , então

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 &= (q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2) \\ &= (q_1 q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1 \mathbf{Q}_2 + q_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_1 &= (q_2 + \mathbf{Q}_2) \bullet (q_1 + \mathbf{Q}_1) \\ &= (q_2 q_1 - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_1 \rangle) + (q_1 \mathbf{Q}_2 + q_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_1) ,\end{aligned}$$

utilizando as igualdades vetoriais 3.5 e 3.9, juntamente com a propriedade de comutatividade dos números reais sobre a operação de produto, temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_1 &= (q_2 + \mathbf{Q}_2) \bullet (q_1 + \mathbf{Q}_1) \\ &= (q_1 q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1 \mathbf{Q}_2 + q_2 \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) .\end{aligned}$$

O único termo diferente entre os produtos é o produto vetorial entre as partes imaginárias dos quatérnions. Como o produto vetorial  $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2$  representa o vetor que é perpendicular tanto a  $\mathbf{Q}_1$  quanto a  $\mathbf{Q}_2$ , temos que não há outra possibilidade dos quatérnions comutarem, a não ser que  $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$ . Sendo assim, ou  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{Q}_2$  são paralelos, ou  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0}$ , ou  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$  e portanto, os quatérnions, no geral, não comutam. ■

**Lema 3.33.** O conjunto dos quatérnions sobre a operação de produto possui elemento neutro. Isto é, existe o elemento  $\mathbf{1} = 1 + \mathbf{0}$ , tal que para todo quatérnion  $\mathfrak{Q}_1$ , temos que

$$\mathbf{1} \bullet \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathbf{1} = \mathfrak{Q}_1 .$$

**Demonstração 3.34.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , e  $\mathbf{1} = 1 + \mathbf{0}$ , então

$$\begin{aligned}\mathbf{1} \bullet \mathfrak{Q}_1 &= (1 + \mathbf{0}) \bullet (q_1 + \mathbf{Q}_1) \\ &= (q_1 - \langle \mathbf{0}, \mathbf{Q}_1 \rangle) + (\mathbf{Q}_1 + q_1 \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{Q}_1) \\ &= q_1 + \mathbf{Q}_1 \\ &= \mathfrak{Q}_1 .\end{aligned}$$

Portanto, o elemento neutro do produto no conjunto dos quatérnions é  $\mathbf{1} = 1 + \mathbf{0}$ .

**Definição 3.35.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , definimos seu conjugado, denotado por  $\overline{\mathfrak{Q}_1}$ , por

$$\overline{\mathfrak{Q}_1} = q_1 - \mathbf{Q}_1 .$$

**Definição 3.36.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, definimos o módulo de  $\mathfrak{Q}_1$ , denotado por  $\|\mathfrak{Q}_1\|$ , por

$$\|\mathfrak{Q}_1\| = \sqrt{\mathfrak{Q}_1 \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1}} .$$

**Resultado 3.37.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnio qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , então seu módulo é dado por

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{Q}_1\| &= \sqrt{\mathfrak{Q}_1 \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1}} \\
&= \sqrt{(q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_1 - \mathbf{Q}_1)} \\
&= \sqrt{q_1^2 - \langle \mathbf{Q}_1, -\mathbf{Q}_1 \rangle - q_1 \mathbf{Q}_1 + q_1 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times (-\mathbf{Q}_1)} \\
&= \sqrt{q_1^2 + \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_1 \rangle} \\
&= \sqrt{q_1^2 + \|\mathbf{Q}_1\|^2}.
\end{aligned}$$

■

Tomando  $q_1$  igual a 0, retornamos ao módulo dos vetores no  $\mathbf{R}^3$ , este fato não é coincidência, já que o espaço vetorial dos quatérnios puros é isomorfo ao espaço euclidiano. Esse resultado será importante mais a frente e será de grande ajuda quando formos estudar as rotações com os quatérnios.

**Proposição 3.38.** O conjugado do conjugado de um quatérnio é o próprio quatérnio, ou seja, para todo quatérnio  $\mathfrak{Q}_1$ , temos que

$$\overline{(\overline{\mathfrak{Q}_1})} = \mathfrak{Q}_1.$$

**Demonstração 3.39.** seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnio qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , então

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{\mathfrak{Q}_1})} &= \overline{(q_1 + \mathbf{Q}_1)} \\
&= \overline{q_1 - \mathbf{Q}_1} \\
&= \overline{q_1 + (-\mathbf{Q}_1)} \\
&= q_1 - (-\mathbf{Q}_1) \\
&= q_1 + \mathbf{Q}_1 \\
&= \mathfrak{Q}_1.
\end{aligned}$$

■

**Proposição 3.40.** O conjugado do produto é o produto dos conjugados com a ordem trocada, ou seja, para todos os quatérnios  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$ , temos que

$$\overline{\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2} = \overline{\mathfrak{Q}_2} \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1}.$$

**Demonstração 3.41.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnios quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$ , então

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2} &= \overline{(q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2)} \\
&= \overline{(q_1 q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1 \mathbf{Q}_2 + q_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2)} \\
&= (q_1 q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) - (q_1 \mathbf{Q}_2 + q_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2).
\end{aligned}$$

Pelo outro lado da igualdade, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{Q}_2} \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1} &= \overline{(q_2 + \mathfrak{Q}_2)} \bullet \overline{(q_1 + \mathfrak{Q}_1)} \\ &= (q_2 - \mathfrak{Q}_2) \bullet (q_1 - \mathfrak{Q}_1) \\ &= (q_2 q_1 - \langle -\mathfrak{Q}_2, -\mathfrak{Q}_1 \rangle) + (-q_1 \mathfrak{Q}_2 - q_2 \mathfrak{Q}_1 + (-\mathfrak{Q}_2) \times (-\mathfrak{Q}_1)) ,\end{aligned}$$

utilizando as igualdades vetoriais 3.5, 3.6, 3.8, 3.9 e juntamente com a propriedade de comutatividade do conjunto dos números reais sobre a operação, obtemos que

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{Q}_2} \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1} &= (q_1 q_2 - \langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \rangle) - (q_1 \mathfrak{Q}_2 + q_2 \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2) \\ &= \overline{\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2} .\end{aligned}$$

■

**Proposição 3.42.** O módulo do produto é o produto dos módulos, ou seja, para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$ , temos que

$$\|\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2\| = \|\mathfrak{Q}_1\| \|\mathfrak{Q}_2\| .$$

**Demonstração 3.43.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, utilizando também a definição de módulo dada em 3.35 e a proposição 3.42, temos que

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2\| &= \sqrt{(\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2) \bullet \overline{(\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2)}} \\ &= \sqrt{\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 \bullet \overline{\mathfrak{Q}_2} \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1}} \\ &= \sqrt{\mathfrak{Q}_1 \bullet (\|\mathfrak{Q}_2\|^2 \overline{\mathfrak{Q}_1})} \\ &= \sqrt{\|\mathfrak{Q}_2\|^2 (\mathfrak{Q}_1 \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1})} \\ &= \sqrt{\|\mathfrak{Q}_2\|^2 \|\mathfrak{Q}_1\|^2} \\ &= \sqrt{\|\mathfrak{Q}_2\|^2} \sqrt{\|\mathfrak{Q}_1\|^2} \\ &= \|\mathfrak{Q}_2\| \|\mathfrak{Q}_1\| \\ &= \|\mathfrak{Q}_1\| \|\mathfrak{Q}_2\| .\end{aligned}$$

■

**Lema 3.44.** O conjunto dos quatérnions sobre a operação de produto possui elemento inverso. Isto é, para todo quatérnion não nulo, existe um elemento, chamado de elemento e denotado por  $\mathfrak{Q}_1^{-1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$ , tal que

$$\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_1^{-1} = \mathfrak{Q}_1^{-1} \bullet \mathfrak{Q}_1 = 1 .$$

**Demonstração 3.45.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um quatérnion qualquer, então

$$\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_1^{-1} = \mathfrak{Q}_1 \bullet \frac{1}{\mathfrak{Q}_1} ,$$

porém, nenhuma das propriedades até aqui estudadas consegue lidar com quatérnions no denominador de frações. Para contornar esse problema, iremos multiplicar e dividir a expressão pelo seu conjugado, sendo assim

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_1^{-1} &= \mathfrak{Q}_1 \bullet \frac{1}{\mathfrak{Q}_1} \bullet \frac{\overline{\mathfrak{Q}_1}}{\overline{\mathfrak{Q}_1}} \\
&= \mathfrak{Q}_1 \bullet \frac{\overline{\mathfrak{Q}_1}}{\mathfrak{Q}_1 \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1}} \\
&= \mathfrak{Q}_1 \bullet \frac{\overline{\mathfrak{Q}_1}}{\|\mathfrak{Q}_1\|^2} \\
&= \frac{\mathfrak{Q}_1 \bullet \overline{\mathfrak{Q}_1}}{\|\mathfrak{Q}_1\|^2} \\
&= \frac{\|\mathfrak{Q}_1\|^2}{\|\mathfrak{Q}_1\|^2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

portanto, o quatérnion  $\mathfrak{Q}_1^{-1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$  é o elemento inverso de  $\mathfrak{Q}_1$ .

**Resultado 3.46.** O elemento inverso de um quatérnion não nulo  $\mathfrak{Q}_1$ , pode ser escrito como

$$\mathfrak{Q}_1^{-1} = \frac{\overline{\mathfrak{Q}_1}}{\|\mathfrak{Q}_1\|^2}.$$

**Lema 3.47.** O produto entre os quatérnions é distributivo em relação a soma pela esquerda. Isto é, para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$ , temos que

$$\mathfrak{Q}_1 \bullet (\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) = \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_3.$$

**Demonstração 3.48.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3 = q_3 + \mathbf{Q}_3$ , então

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_1 \bullet (\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) &= (q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet ((q_2 + \mathbf{Q}_2) + (q_3 + \mathbf{Q}_3)) \\
&= (q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet ((q_2 + q_3) + (\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3)) \\
&= q_1(q_2 + q_3) - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 \rangle + (q_2 + q_3)\mathbf{Q}_1 \\
&\quad + q_1(\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3) + \mathbf{Q}_1 \times (\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3) \\
&= q_1q_2 + q_1q_3 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3 \rangle + q_2\mathbf{Q}_1 + q_3\mathbf{Q}_1 \\
&\quad + q_1\mathbf{Q}_2 + q_1\mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3 \\
&= ((q_1q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2)) \\
&\quad + ((q_1q_3 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3 \rangle) + (q_1\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3)) \\
&= ((q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2)) + ((q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_3 + \mathbf{Q}_3)) \\
&= \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_3,
\end{aligned}$$

portanto, o produto entre os quatérnions é distributivo em relação a soma pela esquerda.

■

**Lema 3.49.** O produto entre os quatérnions é distributivo em relação a soma pela direita. Isto é, para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$ , temos que

$$(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) \bullet \mathfrak{Q}_3 = \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_3 + \mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_3 .$$

**Demonstração 3.50.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$  e  $\mathfrak{Q}_3 = q_3 + \mathbf{Q}_3$ , então

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) \bullet \mathfrak{Q}_3 &= ((q_1 + \mathbf{Q}_1) + (q_2 + \mathbf{Q}_2)) \bullet (q_3 + \mathbf{Q}_3) \\ &= ((q_1 + q_2) + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)) \bullet (q_3 + \mathbf{Q}_3) \\ &= (q_1 + q_2)q_3 - \langle \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle \\ &\quad + (q_3(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) + (q_1 + q_2)\mathbf{Q}_3 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \times \mathbf{Q}_3) \\ &= q_1q_3 + q_2q_3 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3 \rangle - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle \\ &\quad + q_3\mathbf{Q}_1 + q_3\mathbf{Q}_2 + q_1\mathbf{Q}_3 + q_2\mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3 \\ &= ((q_1q_3 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_3 \rangle) + (q_1\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3)) \\ &\quad + ((q_2q_3 - \langle \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \rangle) + (q_2\mathbf{Q}_3 + q_3\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3)) \\ &= \mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_3 + \mathfrak{Q}_2 \bullet \mathfrak{Q}_3 , \end{aligned}$$

portanto, o produto entre os quatérnions é distributivo em relação a soma pela esquerda. ■

**Lema 3.51.** Para todos os quatérnions  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$ , juntamente com  $\alpha$  um escalar real qualquer, então

$$\alpha(\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2) = (\alpha\mathfrak{Q}_1) \bullet \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_1 \bullet (\alpha\mathfrak{Q}_2) .$$

**Demonstração 3.52.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  quatérnions quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$ , e também  $\alpha$  um escalar real arbitrário, então

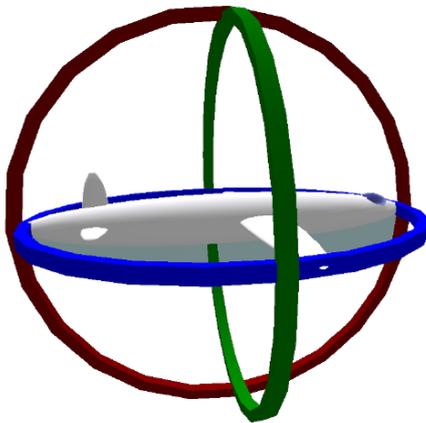
$$\begin{aligned} \alpha(\mathfrak{Q}_1 \bullet \mathfrak{Q}_2) &= \alpha((q_1 + \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2)) \\ &= \alpha((q_1q_2 - \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (q_1\mathbf{Q}_2 + q_2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2)) \\ &= (\alpha q_1q_2 - \alpha \langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + (\alpha q_1\mathbf{Q}_2 + \alpha q_2\mathbf{Q}_1 + \alpha \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) \\ &= ((\alpha q_1)q_2 - \langle \alpha \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \rangle) + ((\alpha q_1)\mathbf{Q}_2 + q_2(\alpha \mathbf{Q}_1) + (\alpha \mathbf{Q}_1) \times \mathbf{Q}_2) \\ &= (\alpha q_1 + \alpha \mathbf{Q}_1) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2) \\ &= (\alpha(q_1 + \mathbf{Q}_1)) \bullet (q_2 + \mathbf{Q}_2) \\ &= (\alpha\mathfrak{Q}_1) \bullet \mathfrak{Q}_2 , \end{aligned}$$

■

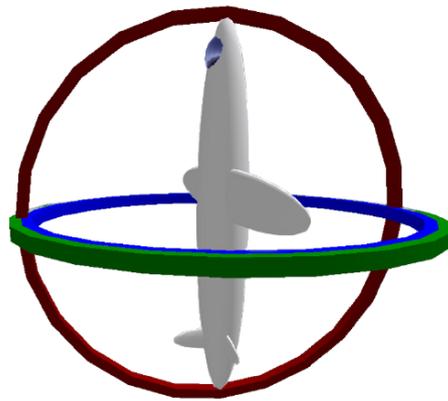
**Teorema 3.53.** O conjunto dos quatérnions munidos das operações definidas em 3.5 e 3.26 forma uma álgebra de divisão associativa e não-comutativa.

**Demonstração 3.54.** A demonstração parte da definição de álgebra apresenta no apêndice A.2, juntamente com os lemas 3.29, 3.31, 3.33, 3.44, 3.47, 3.49 e 3.51.

Ao trabalharmos com rotações no espaço tridimensional nos deparamos com alguns problemas. Um dos exemplos mais importante é o efeito “Gimbal Lock” que acontece com as matrizes de rotação de Euler. Esse efeito ocorre quando temos a presença de 3 eixos independentes que giram livremente, porém quando dois desses eixos ficam paralelos entre si ocorre a perda de um grau de liberdade, ou seja, um dos eixos não consegue se movimentar como deveria. Esse efeito é mostrado nas figuras 4.1(a) e 4.1(b).



(a) Rotação de um objeto sem a presença do “Gimbal Lock” [3].



(b) Rotação de um objeto com a presença do “Gimbal Lock” [4].

Figura 4.1: Figuras referentes ao problema do “Gimbal Lock” presente nas matrizes de rotação de Euler.

A tentativa de Hamilton, ao dedicar sua vida aos quatérnions, era de tentar resolver esse problema das rotações no espaço tridimensional. Para isso, ele postulou que deveria haver uma operação entre um quatérnion puro  $\mathfrak{P}$  e um quatérnion unitário  $\mathfrak{Q}$  que rotacionasse em  $\theta$  graus o vetor associado ao quatérnion  $\mathfrak{P}$  em torno do vetor associado a  $\mathfrak{Q}$ . Essa operação ficou conhecida como conjugação e é definida abaixo.

**Definição 4.1.** Seja  $\hat{\mathbf{q}}$  um vetor unitário e  $\mathbf{P}$  um vetor no espaço tridimensional, iremos associar esses vetores aos seguintes quatérnions  $\mathfrak{Q}^{\ddagger\dagger} = \cos(\frac{\theta}{2}) + \hat{\mathbf{q}}\text{sen}(\frac{\theta}{2})$  e  $\mathfrak{P} = 0 + \mathbf{P}$ , respectivamente. Então,

$$\mathbf{P}' = \mathfrak{Q} \bullet \mathfrak{P} \bullet \bar{\mathfrak{Q}},$$

define uma rotação do vetor  $\mathbf{P}$  em torno do versor  $\hat{\mathbf{q}}$  em  $\theta$  graus com  $\mathbf{P}'$  representando o vetor resultante desse produto. Para mais detalhes, ver [6] e [7].

O quatérnion  $\mathfrak{Q}$  é construído da forma exposta acima, com cosseno e seno para que seu módulo também seja igual a 1, já que isso implica na conservação do módulo do vetor  $\mathbf{P}$ . Com isso, trataremos primeiro da parte teórica das rotações para depois partirmos para a parte algébrica.

Suponha que  $\mathbf{P}$  é um vetor qualquer no espaço euclidiano e  $\hat{\mathbf{q}}$  é um versor qualquer conforme mostrado na figura a seguir.

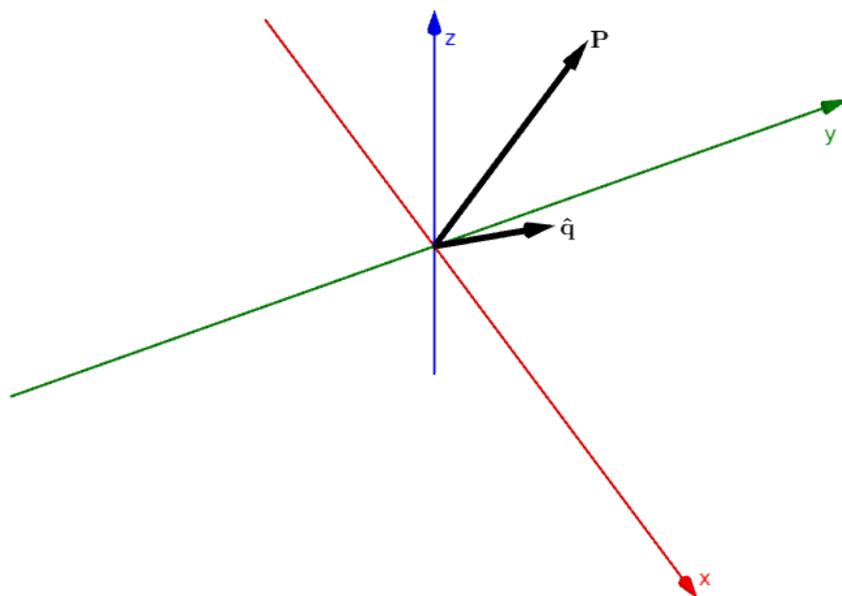


Figura 4.2: Vetor  $\mathbf{P}$  que será rotacionado em torno de  $\hat{\mathbf{q}}$ .

---

<sup>‡‡</sup>A forma como o quatérnion  $\mathfrak{Q}$  é construído decorre da exponencial de sua parte pura, assim como fizemos para os números complexos na definição 2.55. Trazemos a demonstração da exponencial de um quatérnion puro no apêndice B.2.

Após a rotação teremos os seguintes vetores,

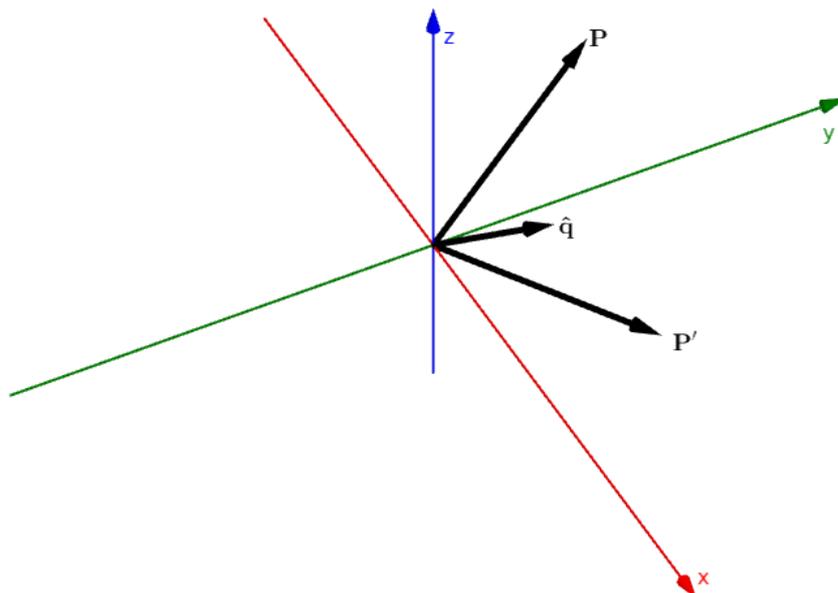


Figura 4.3: Vetor  $\mathbf{P}'$  que representa o vetor  $\mathbf{P}$  rotacionado.

Iremos decompor o vetor  $\mathbf{P}$  em duas componentes, uma sobre o versor  $\hat{\mathbf{q}}$  e outro perpendicular a ele, que representaremos por  $\mathbf{P}_\perp$ , conforme ilustrado nas figuras 4.4 e 4.5.

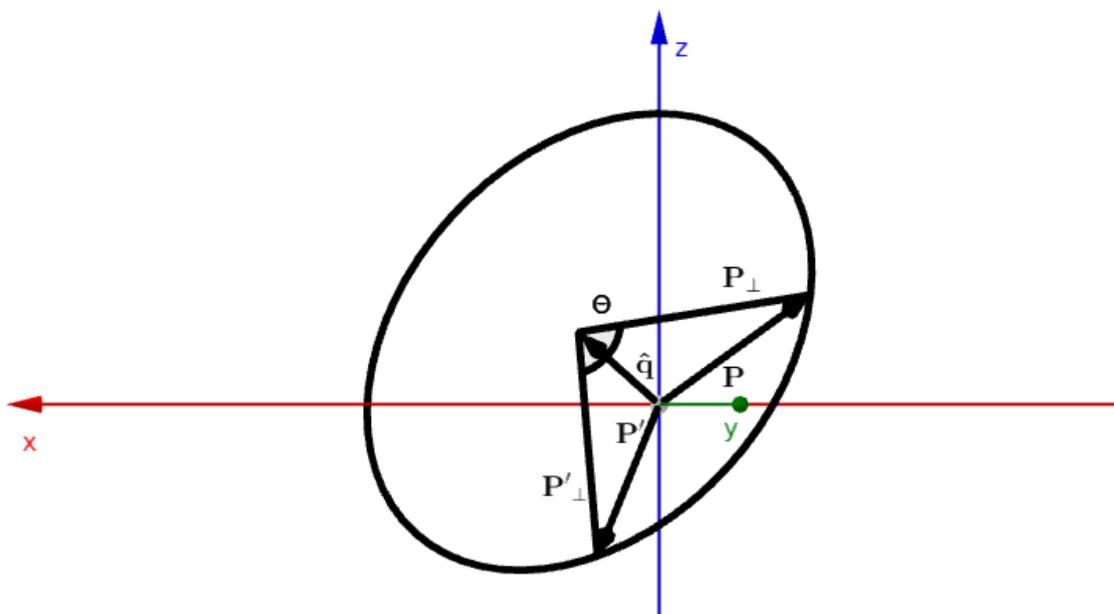


Figura 4.4: Os vetores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$  e suas componentes perpendiculares,  $\mathbf{P}_\perp$  e  $\mathbf{P}'_\perp$ , ao vetor  $\hat{\mathbf{q}}$  e o ângulo  $\theta$  entre as projeções dos vetores.

Na figura 4.5, o versor  $\hat{\mathbf{q}}$  encontra-se saindo do plano enquanto os vetores  $\mathbf{P}_\perp$  e  $\mathbf{P}'_\perp$  se encontram sobre o mesmo plano, sendo assim o versor  $\hat{\mathbf{q}}$  é normal a superfície forma

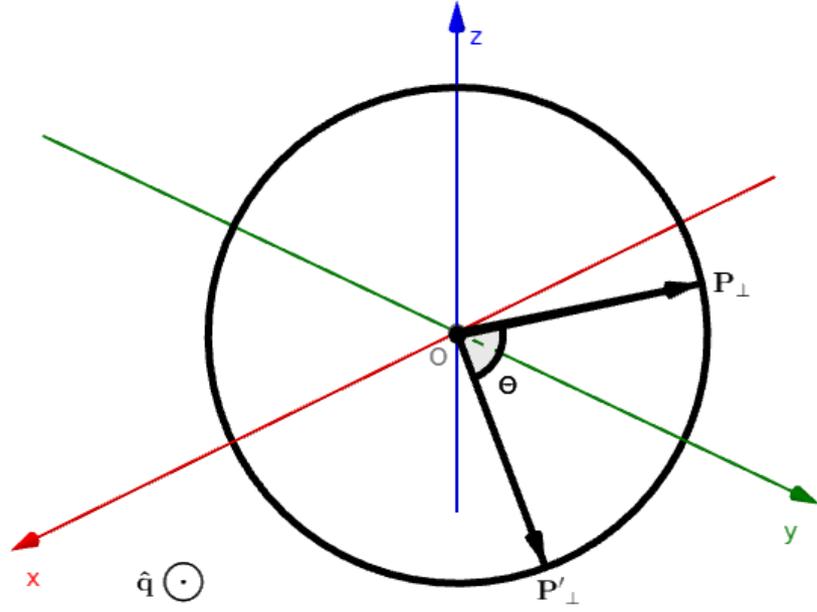


Figura 4.5: A componente perpendicular do vetor rotacionado  $\mathbf{P}'$  em  $\theta$  graus juntamente com o vetor  $\mathbf{P}_\perp$ .

pelas projeções de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}'$ . Sendo assim, o ângulo que estamos interessados  $\theta$  corresponde a abertura entre as projeções perpendiculares ao versor  $\hat{\mathbf{q}}$ . Com isso, demonstraremos que o ângulo de abertura entre os vetores é totalmente determinado pelo  $\theta$  escolhido arbitrariamente. Com isso,

$$\begin{aligned}
\Omega \cdot \mathfrak{P} \cdot \bar{\Omega} &= \left( \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \right) \bullet (0 + \mathbf{P}) \right) \bullet \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \right) \\
&= \left( -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle + \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{P} + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \right) \right) \bullet \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \right) \\
&= -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle - \left\langle \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{P} + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P}, -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \right\rangle \\
&\quad + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{P} + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \right) \\
&\quad + \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{P} + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \right) \times \left( -\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \right),
\end{aligned}$$

utilizando as igualdades vetoriais 3.7, 3.10, 3.12 e 3.13 do capítulo anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\Omega \bullet \mathfrak{P} \bullet \bar{\Omega} &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P}, \hat{\mathbf{q}} \rangle \\
&\quad + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{P} + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \\
&\quad + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P}) \times \hat{\mathbf{q}} \\
&= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{P} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \\
&\quad - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}} \rangle \mathbf{P} + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \mathbf{q},
\end{aligned}$$

como  $\langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}} \rangle$  representa o produto interno de um vetor unitário com ele mesmo, o resultado é 1 e, portanto

$$\Omega \bullet \mathfrak{P} \bullet \bar{\Omega} = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \mathbf{P} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P}.$$

Usando as seguintes igualdades trigonométricas

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= 1 - \cos(\theta) \\
\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \cos(\theta) \\
2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \operatorname{sen}(\theta),
\end{aligned}$$

por fim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\Omega \bullet \mathfrak{P} \bullet \bar{\Omega} &= (1 - \cos(\theta)) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos(\theta) \mathbf{P} + \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \\
&= \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} - \cos(\theta) \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos(\theta) \mathbf{P} + \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P} \\
&= \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos(\theta) (\mathbf{P} - \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{P} \rangle \hat{\mathbf{q}}) + \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{P}, \tag{4.1}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Para a devida interpretação das rotações devemos decompor o vetor  $\mathbf{P}$  em duas componentes, um sobre o versor  $\hat{\mathbf{q}}$  e outra perpendicular a reta formada por ele. Representaremos essas componentes das seguintes formas

$$\mathbf{P} = P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor perpendicular a reta formada pelo versor  $\hat{\mathbf{q}}$ . Com isso,

$$\begin{aligned}
\Omega \bullet \mathfrak{P} \bullet \bar{\Omega} &= \langle \hat{\mathbf{q}}, P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos(\theta) ((P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}) - \langle \hat{\mathbf{q}}, P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{q}}) \\
&\quad + \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times (P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}) \\
&= P_{\parallel} \langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}} \rangle \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{q}} + \cos(\theta) (P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}} - P_{\parallel} \langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}} \rangle \hat{\mathbf{q}} - P_{\perp} \langle \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \hat{\mathbf{q}}) \\
&\quad + P_{\parallel} \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Como tomamos o versor  $\hat{\mathbf{n}}$  perpendicular ao versor  $\hat{\mathbf{q}}$ , então o produto interno entre eles é nulo. Como versores tem módulo unitário, o produto interno de um versor com ele mesmo é 1, com isso,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q} \bullet \mathfrak{P} \bullet \overline{\mathfrak{Q}} &= P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + \cos(\theta)(P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \hat{\mathbf{n}} - P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}}) + P_{\perp} \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} \\ &= P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} \cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + P_{\perp} \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} \\ &= P_{\parallel} \hat{\mathbf{q}} + P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}})\end{aligned}$$

O termo que acompanha  $P_{\perp}$  representa um novo versor que será responsável por descrever todos os vetores sobre o plano que contém  $\mathbf{P}_{\perp}$  e  $\mathbf{P}'_{\perp}$ , já que ele e o versor  $\hat{\mathbf{n}}$  são linearmente independentes. Podemos calcular o ângulo  $\alpha$  entre  $\mathbf{P}_{\perp}$  e  $\mathbf{P}'_{\perp}$ , então

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}, P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}) \rangle}{\|P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}\| \|P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}})\|}$$

Calcularemos os módulos separadamente para evitar confusão, sendo assim

$$\|P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}\| = \sqrt{\langle P_{\perp} \hat{\mathbf{n}}, P_{\perp} \hat{\mathbf{n}} \rangle} = \sqrt{P_{\perp}^2 \langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle} = \sqrt{P_{\perp}^2} = P_{\perp}$$

Para o outro termo, temos que

$$\begin{aligned}\|P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}})\| &= \sqrt{\langle P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}), P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}) \rangle} \\ &= \sqrt{P_{\perp}^2 \langle \cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}, \cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} \rangle}\end{aligned}$$

como  $\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}$  é perpendicular tanto a  $\hat{\mathbf{q}}$  quanto a  $\hat{\mathbf{n}}$ , o produto interno de  $\hat{\mathbf{n}}$  com  $\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}$  é zero, com isso,

$$\begin{aligned}\|P_{\perp} (\cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}})\| &= \sqrt{P_{\perp}^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{P_{\perp}^2} = P_{\perp}\end{aligned}$$

com isso,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{P_{\perp}^2 \langle \hat{\mathbf{n}}, \cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} \rangle}{P_{\perp}^2} \\ \cos(\alpha) &= \langle \hat{\mathbf{n}}, \cos(\theta) \hat{\mathbf{n}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} \rangle\end{aligned}$$

como afirmamos anterior,  $\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}}$  é perpendicular tanto a  $\hat{\mathbf{q}}$  quanto a  $\hat{\mathbf{n}}$ , então

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos(\theta) \langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \\ \cos(\alpha) &= \cos(\theta)\end{aligned}$$

e, portanto,  $\alpha = \theta$ . Sendo assim, o ângulo arbitrário  $\theta$  tomado inicialmente corresponde ao ângulo que o vetor  $\mathbf{P}$  é rotacionado em torno de  $\hat{\mathbf{q}}$ .

**Exemplo 4.2.** Suponha que gostaríamos de rotacionar o vetor  $\mathbf{P} = -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}}$  em  $\pi/3$  graus em torno do versor  $\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{z}}$ . Associamos o vetor  $\mathbf{P}$  ao quatérnion

$\mathfrak{P} = 0 + \mathbf{P}$  e o versor  $\hat{\mathbf{q}}$  ao quatérnion  $\mathfrak{Q} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \hat{\mathbf{q}} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$  e utilizamos a operação de conjugação, então

$$\mathbf{P}' = \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \hat{\mathbf{q}} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \bullet (0 + \mathbf{P}) \bullet \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \hat{\mathbf{q}} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

com  $\mathbf{P}'$  sendo o vetor rotacionado. Utilizando o resultado 4.1, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{z}}, -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}} \right\rangle \\ &\quad + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \left( -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{z}}, -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}} \right\rangle \right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{z}} \right) \times (-2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}}), \end{aligned}$$

fazendo os produtos internos e vetoriais, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{2} \right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{4} (4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{4} (4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \hat{\mathbf{z}} \\ &\approx -1,20711\hat{\mathbf{x}} - 1,1855\hat{\mathbf{y}} + 1,77129\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Além disso, podemos calcular o ângulo entre o vetor  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}'$  para verificar se a rotação foi de  $\frac{\pi}{3}$  graus. Para isso, utilizamos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{P}, \mathbf{P}' \rangle}{\|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}'\|} \quad (4.2)$$

com  $\theta$  sendo o ângulo entre os dois vetores. Iremos calcular os módulos de cada um dos vetores separadamente, então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle} \\ &= \sqrt{\langle -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}}, -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}} \rangle} \\ &= \sqrt{4 + 1 + 1} \\ &= \sqrt{6}, \end{aligned}$$

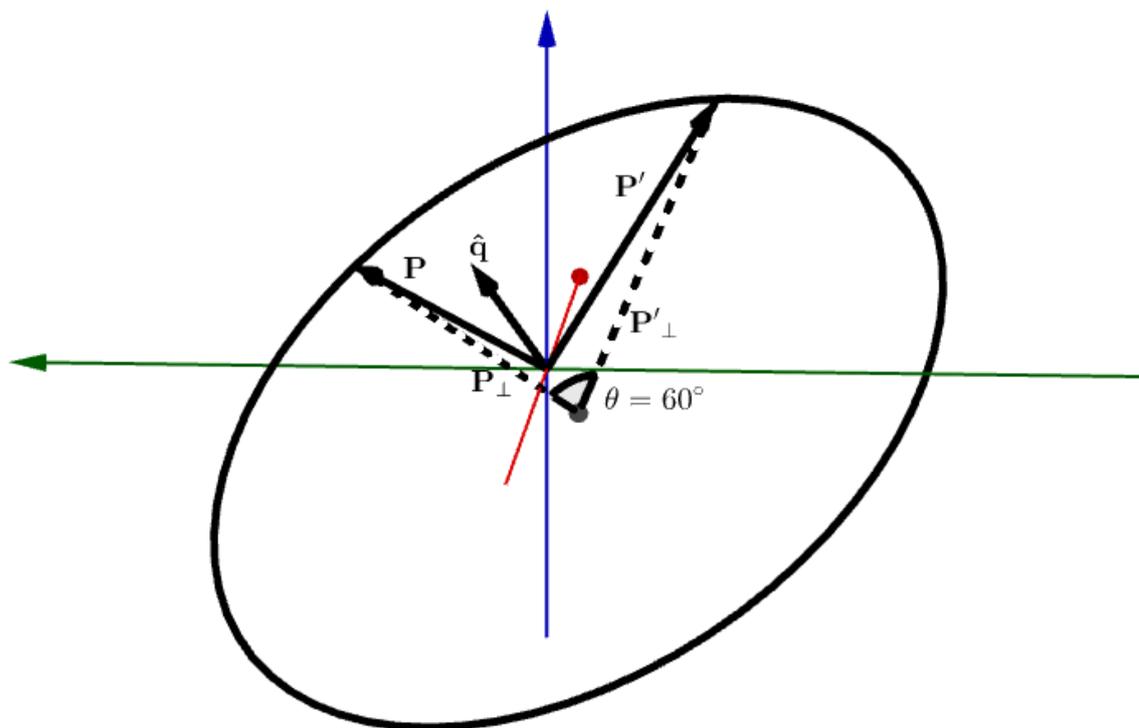
e para o vetor  $\mathbf{P}'$ , temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}'\| &= \sqrt{\langle \mathbf{P}', \mathbf{P}' \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 + \sqrt{2} \right)^2 + \frac{1}{16} (4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 + \frac{1}{16} (4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

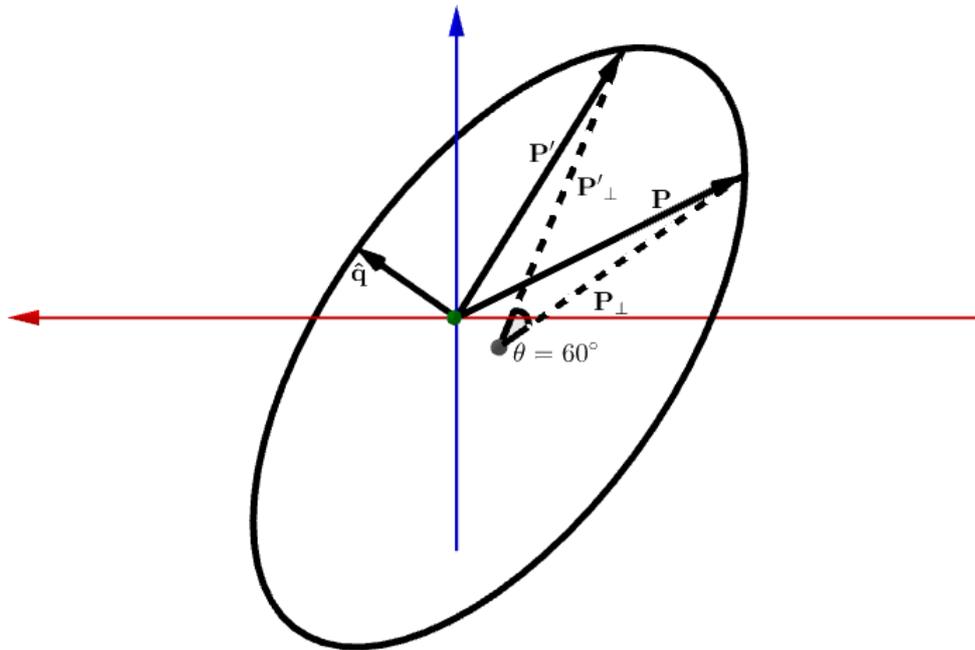
Com isso, podemos calcular o ângulo  $\theta$  da expressão 4.2, então

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta) &= \frac{\langle \mathbf{P}, \mathbf{P}' \rangle}{\|\mathbf{P}\| \|\mathbf{P}'\|} \\
 &= \frac{\langle -2\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}}, -(2 + 2\sqrt{2})\hat{\mathbf{x}} + (4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6})\hat{\mathbf{y}} + (4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})\hat{\mathbf{z}} \rangle}{4(\sqrt{6})^2} \\
 &= \frac{(4 + 4\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}) + (4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})}{24} \\
 &= \frac{12}{24} \\
 &= \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

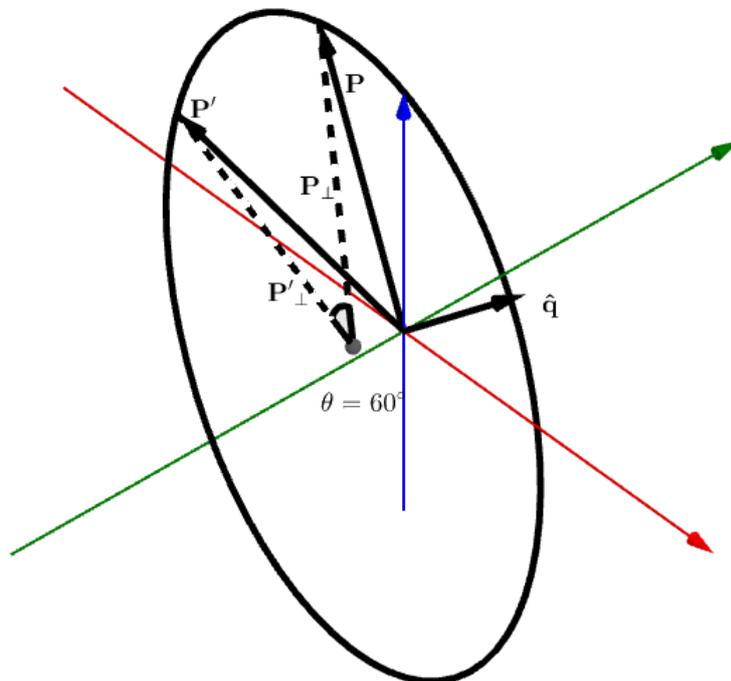
portanto, o ângulo  $\theta$  é igual à  $\frac{\pi}{3}$  graus conforme queríamos. Nas figuras 4.6(a), 4.6(b) e 4.6(c), temos os vetores  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}'$  juntamente suas projeções perpendiculares ao versor  $\hat{\mathbf{q}}$  e o ângulo de rotação de  $\frac{\pi}{3}$  graus.



(a) Rotação do vetor  $\mathbf{P}$  em torno do versor  $\hat{\mathbf{q}}$  com  $\theta = 60^\circ$ .



(b) Rotação do vetor  $\mathbf{P}$  do ponto de vista de um plano com um dos eixos saindo na direção do papel.



(c) Os vetores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$  e suas projeções perpendiculares ao versor  $\hat{\mathbf{q}}$  de um ponto de vista contrário ao da primeira figura.

Figura 4.5: Rotação do vetor  $\mathbf{P}$  em torno do versor  $\hat{\mathbf{q}}$  em 60 graus em diferentes ângulos.

Sendo assim, podemos ver claramente que os quatérnions podem ser usados para

rotacionar vetores no espaço euclidiano tridimensional e além disso, os quatérnions não sofrem com as ambiguidades e com o problema de “Gimbal Lock” que as matrizes de rotação de Euler apresentam. Para mais detalhes a respeito da relação entre as rotações com os quatérnions e com as matrizes de Euler, consultar [2] e [5].

## CAPÍTULO 5

# APLICAÇÕES DOS QUATÉRNIONS NA FÍSICA

Conforme comentamos no decorrer do texto, as aplicações dos quatérnions na Física são muitas, como as rotações no espaço tridimensional conforme explorado no capítulo anterior. Neste capítulo objetivamos aplicar os quatérnions em outros problemas físicos para mostrar que recuperamos os mesmos resultados já obtidos nas matérias de Física Básica da graduação.

A introdução da álgebra vetorial é posterior aos quatérnions e foi feita pelos físicos Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903), Oliver Heaviside (1850 - 1925) e Hermann Von Helmholtz (1821 - 1894) em meados de 1880. A substituição da linguagem quaterniônica para a vetorial ocorreu devido à expressão para a multiplicação de quatérnions ser confusa e extremamente extensa. Porém, desejamos mostrar que a utilização dos quatérnions no contexto físico resulta em uma releitura de resultados já obtidos, porém de maneira mais elegante e sucinta. Ao final desse capítulo, reescreveremos as equações de Maxwell, compactando-as em 2 equações, e as equações da onda na linguagem quaterniônica.

Para utilizarmos os quatérnions nos problemas físicos, iremos introduzir uma transformação quaterniônica, denotada por  $\Gamma$ , que será necessário para a reescrita da mecânica Newtoniana e do Eletromagnetismo.

**Definição 5.1.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um campo quaterniônico qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1(t, x, y, z)^{\text{ss}} = q_1(t, x, y, z) + \mathbf{Q}_1(t, x, y, z)$ , definiremos a transformação quaterniônica deste quatérnion, denotada por  $\Gamma(\mathfrak{Q}_1)$ , como

$$\Gamma(\mathfrak{Q}_1) = \left( \frac{\partial q_1}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{Q}_1 \rangle \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial t} + \nabla q_1 + \nabla \times \mathbf{Q}_1 \right), \quad (5.1)$$

com  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$  sendo a derivada com relação ao tempo e  $\nabla q_1$  sendo o gradiente de  $q_1$ .

---

<sup>ss</sup>Por vezes, iremos escrever apenas  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , porém fica subentendido que o quatérnion  $\mathfrak{Q}_1$  e seus parte real e imaginária dependem de  $t, x, y$  e  $z$ , salvo menção contrária

**Proposição 5.2.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  campos quaterniônicos quaisquer, juntamente com  $\gamma$  um escalar real arbitrário, então

$$\Gamma(\mathfrak{Q}_1 + \gamma\mathfrak{Q}_2) = \Gamma(\mathfrak{Q}_1) + \gamma\Gamma(\mathfrak{Q}_2),$$

ou seja, a transformação é linear.

**Demonstração 5.3.** Sejam  $\mathfrak{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2$  campos quaterniônicos quaisquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$  e  $\mathfrak{Q}_2 = q_2 + \mathbf{Q}_2$ , juntamente com um escalar real  $\gamma$  arbitrário, então

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{Q}_1 + \gamma\mathfrak{Q}_2) &= \Gamma((q_1 + \mathbf{Q}_1) + \gamma(q_2 + \mathbf{Q}_2)) \\ &= \Gamma((q_1 + \mathbf{Q}_1) + (\gamma q_2 + \gamma\mathbf{Q}_2)) \\ &= \Gamma((q_1 + \gamma q_2) + (\mathbf{Q}_1 + \gamma\mathbf{Q}_2)) \\ &= \left( \frac{\partial(q_1 + \gamma q_2)}{\partial t} - \langle \nabla, (\mathbf{Q}_1 + \gamma\mathbf{Q}_2) \rangle \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial(\mathbf{Q}_1 + \gamma\mathbf{Q}_2)}{\partial t} + \nabla(q_1 + \gamma q_2) + \nabla \times (\mathbf{Q}_1 + \gamma\mathbf{Q}_2) \right). \end{aligned}$$

Da linearidade dos operadores diferenciais, do rotacional, do divergente e da derivada temporal, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{Q}_1 + \gamma\mathfrak{Q}_2) &= \left( \frac{\partial q_1}{\partial t} + \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{Q}_1 \rangle + \gamma \langle \nabla, \mathbf{Q}_2 \rangle \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial t} + \nabla q_1 + \gamma \nabla q_2 + \nabla \times \mathbf{Q}_1 + \gamma \nabla \times \mathbf{Q}_2 \right), \end{aligned}$$

reorganizando os termos, obtemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{Q}_1 + \gamma\mathfrak{Q}_2) &= \left( \left( \frac{\partial q_1}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{Q}_1 \rangle \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial t} + \nabla q_1 + \nabla \times \mathbf{Q}_1 \right) \right) \\ &\quad + \left( \left( \gamma \frac{\partial q_2}{\partial t} - \gamma \langle \nabla, \mathbf{Q}_2 \rangle \right) + \left( \gamma \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial t} + \gamma \nabla q_2 + \gamma \nabla \times \mathbf{Q}_2 \right) \right) \\ &= \left( \left( \frac{\partial q_1}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{Q}_1 \rangle \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial t} + \nabla q_1 + \nabla \times \mathbf{Q}_1 \right) \right) \\ &\quad + \gamma \left( \left( \frac{\partial q_2}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{Q}_2 \rangle \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_2}{\partial t} + \nabla q_2 + \nabla \times \mathbf{Q}_2 \right) \right) \\ &= \Gamma(\mathfrak{Q}_1) + \gamma\Gamma(\mathfrak{Q}_2). \end{aligned}$$

É fácil observar que o núcleo da transformação é trivial e que a dimensão do domínio é igual ao do contra-domínio, portanto  $\Gamma$  é linear. Além disso, o domínio e o contra-domínio são os quatérnions e portanto, a transformação  $\Gamma$  será chamada de aplicação linear.

Para utilizarmos os quatérnions no contexto do Eletromagnetismo será necessário reescrever a transformação  $\Gamma$  através de um operador quaterniônico, denotado por  $\Delta$ . Essa

reescrita é importante devido a necessidade de definir comutadores e anti-comutadores no contexto do Eletromagnetismo, para isso definiremos o modo como o operador  $\Delta$  age sobre um campo quaterniônico qualquer tanto a direita quanto a esquerda. Introduzirei um fator  $\frac{1}{c}$ , sendo  $c$  a velocidade da luz, em alguns termos para deixá-los dimensionalmente corretos, o que fará grande diferença nas definições dos campos elétrico e magnético na seção 5.2.

**Definição 5.4.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um campo quaterniônico qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , o operador  $\Delta$  aplicado à esquerda de  $\mathfrak{Q}_1$  será definido por

$$\Delta \bullet \mathfrak{Q}_1 = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \langle \nabla, \mathbf{Q}_1 \rangle \right) + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial t} + \nabla q_1 + \nabla \times \mathbf{Q}_1 \right), \quad (5.2)$$

com  $\Delta \bullet \mathfrak{Q}_1$  representando a ação do operador  $\Delta$  à esquerda de  $\mathfrak{Q}_1$ .

**Definição 5.5.** Seja  $\mathfrak{Q}_1$  um campo quaterniônico qualquer, tal que  $\mathfrak{Q}_1 = q_1 + \mathbf{Q}_1$ , o operador  $\Delta$  aplicado à direita de  $\mathfrak{Q}_1$  será definido por

$$\mathfrak{Q}_1 \bullet \Delta = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \langle \nabla, \mathbf{Q}_1 \rangle \right) + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Q}_1}{\partial t} + \nabla q_1 - \nabla \times \mathbf{Q}_1 \right) \quad (5.3)$$

com  $\mathfrak{Q}_1 \bullet \Delta$  representando a ação do operador  $\Delta$  à direita de  $\mathfrak{Q}_1$ .

Com as definições da aplicação linear  $\Gamma$  e do operador  $\Delta$  agindo tanto a esquerda quanto a direita de um quatérnion qualquer, podemos reformular duas das mais importantes teorias dentro da física. A primeira delas, a mecânica Newtoniana, será reescrita com auxílio da aplicação linear definida em 5.1, já a segunda, Eletromagnetismo de Maxwell, será reformulada com auxílio do operador  $\Delta$  e com a construção de comutadores e anti-comutadores que será definida na seção 5.2.

## 5.1 Segunda Lei de Newton com Quatérnions

Com a aplicação linear  $\Gamma$  partiremos para a aplicação dos quatérnions no contexto físico. Para isso, suponha uma partícula de massa  $m$  em um sistema físico com a posição definida pelo vetor  $\mathbf{r}$  em relação a um referencial adotado. Construiremos a partir desse vetor um quatérnion, denotado por  $\mathfrak{R}$ , tal que

$$\mathfrak{R} = t + \mathbf{r},$$

com  $t$  representando o tempo. Podemos aplicar a transformação  $\Gamma$  no quatérnion  $\mathfrak{R}$  afim de encontrarmos a velocidade do sistema através dos quatérnions. Ou seja,

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^\Gamma &= \left( \frac{\partial t}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{r} \rangle \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \nabla t + \nabla \times \mathbf{r} \right) \\ &= (1 - \langle \nabla, \mathbf{r} \rangle) + (\dot{\mathbf{r}} + \nabla \times \mathbf{r}) \\ &= (1 - 3) + \dot{\mathbf{r}} \\ &= -2 + \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

A parte real do quatérnion resultante corresponde ao quadridivergente do quadrivetor posição no espaço de Minkowski<sup>¶¶</sup>. Para demonstrar a segunda lei de Newton com os quatérnions tomaremos apenas a parte vetorial do quatérnion resultante, sendo assim, denotaremos o quatérnion velocidade como

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R}^\Gamma) = \dot{\mathbf{r}} .$$

com esse resultado, podemos obter a segunda lei de Newton com os quatérnions. Para isso, iremos calcular a aplicação linear  $\Gamma$  sobre o quatérnion  $\mathfrak{V}$ , então

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{V}) = \Gamma(0 + \dot{\mathbf{r}}) &= \left( \frac{\partial 0}{\partial t} - \langle \nabla, \dot{\mathbf{r}} \rangle \right) + \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial t} + \nabla 0 + \nabla \times \dot{\mathbf{r}} \right) \\ &= - \langle \nabla, \dot{\mathbf{r}} \rangle + \ddot{\mathbf{r}} = 0 + \ddot{\mathbf{r}} = \mathfrak{A} , \end{aligned}$$

a aplicação  $\Gamma$  sobre o quatérnion velocidade resulta no quatérnion aceleração, denotado por  $\mathfrak{A}$ . Com isso, obtemos a segunda lei de Newton com os quatérnions. Representaremos a força resultante sobre o sistema através do quatérnion  $\mathfrak{F}$ , tal que  $\mathfrak{F} = 0 + \mathbf{F}$ . Com isso,

$$\mathfrak{F} = m\Gamma(\mathfrak{V}) = m\mathfrak{A} .$$

**Exemplo 5.6.** Suponha que exista uma força sob uma partícula  $m$ , tal que  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é a posição da partícula em relação a um referencial inercial. Assim, a segunda lei de Newton com os quatérnions para esse sistema será

$$\mathfrak{F} = 0 + \mathbf{F} = 0 - k\mathbf{r} = m\mathfrak{A} = m(0 + \ddot{\mathbf{r}})$$

com isso,

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} ,$$

que é a EDO do movimento e cuja a solução é conhecida e é dada por

$$\mathbf{r}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) ,$$

com  $A$  e  $B$  escalares reais quaisquer, que podem ser determinados pelas condições de contorno do problema, e  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  sendo a frequência angular do sistema.

---

<sup>¶¶</sup>O espaço de Minkowski é extremamente importante dentro da Teoria da Relatividade Restrita, formulada por Albert Einstein, já que unifica o conceito de espaço e tempo dentro de uma única estrutura matemática. Podemos entender o espaço de Minkowski como sendo uma variedade quadrimensional, cujo é atribuído o valor positivo para o tempo e negativo para as componentes do espaço.

## 5.2 Potenciais e Campos Eletromagnéticos com Quatérnions

Consideremos agora o exemplo do eletromagnetismo clássico, formulado pelas equações de Maxwell,

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Tabela 5.1: Leis de Maxwell na forma diferencial.

Como  $\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle$  é nulo, podemos associar o campo magnético a um potencial vetor  $\mathbf{A}$ , tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (5.4)$$

com isso, podemos substituir o campo magnético na Lei de Faraday, e obtemos que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad (5.5)$$

então, podemos obter a seguinte igualdade,

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (5.6)$$

A expressão 5.6 sugere que podemos associar o campo dentro dos parênteses com um potencial escalar, logo

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi . \quad (5.7)$$

Portanto, os campos elétrico e magnético podem ser descritos pelos potenciais escalar e vetorial, de modo que

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.8)$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (5.9)$$

Iremos generalizar o conceito de potencial eletromagnético através da construção de um quatérnion cuja parte real e imaginária são os potenciais escalar e vetor, respectivamente. Ou seja,

$$\mathcal{A} = \frac{\phi}{c} + \mathbf{A} , \quad (5.10)$$

com  $\mathcal{A}$  sendo o quatérnion que generaliza o potencial eletromagnético. Além disso, podemos observar que o quatérnion potencial eletromagnético não é nada mais que o quadripotencial eletromagnético. Iremos utilizar o operador  $\Delta$ , aplicando-o primeiramente à esquerda do quatérnion  $\mathcal{A}$  conforme foi definido na expressão 5.2, portanto

$$\begin{aligned}\Delta \bullet \mathcal{A} &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) - \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle \right) + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \frac{\phi}{c} + \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle \right) + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \frac{\phi}{c} + \nabla \times \mathbf{A} \right) .\end{aligned}\quad (5.11)$$

O primeiro termo associado a expressão 5.11 geralmente é adotado como sendo nulo e é chamado de Calibre de Lorenz. Já o segundo termo representa os campos elétrico e magnético em função dos seus potenciais conforme demonstrado nas expressões 5.8 e 5.9, então

$$\begin{aligned}\Delta \bullet \mathcal{A} &= 0 + \left( \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) + \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ &= 0 + \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} \right) ,\end{aligned}\quad (5.12)$$

além disso, podemos aplicar o operador  $\Delta$  à direita de  $\mathcal{A}$  conforme foi definido em 5.3, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \bullet \nabla &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) - \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle \right) + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \frac{\phi}{c} - \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle \right) + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \phi - \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ &= 0 + \left( \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) - \nabla \times \mathbf{A} \right) \\ &= 0 + \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} - \mathbf{B} \right) .\end{aligned}\quad (5.13)$$

Com os resultados do operador  $\Delta$  aplicado tanto à esquerda quanto à direita de  $\mathcal{A}$ , expressões 5.12 e 5.13, podemos construir um comutador, que será denotado entre colchetes, e um anti-comutador, que será denotado entre chaves, portanto

$$[\Delta, \mathcal{A}] = \frac{1}{2} (\Delta \bullet \mathcal{A} - \mathcal{A} \bullet \Delta) \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \left( \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} \right) - \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} - \mathbf{B} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} + \frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} \right) \\ &= \mathbf{B} .\end{aligned}\quad (5.15)$$

e

$$\{\Delta, \mathcal{A}\} = \frac{1}{2} (\Delta \bullet \mathcal{A} + \mathcal{A} \bullet \Delta) \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} \right) + \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} - \mathbf{B} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} + -\frac{\mathbf{E}}{c} - \mathbf{B} \right) \\ &= -\frac{\mathbf{E}}{c} . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Portanto, os campos elétrico e magnético podem ser definidos através do quatérnion potencial eletromagnético definido em 5.10 e com auxílio das comutações presentes nas expressões 5.15 e 5.17, ou seja,

$$\mathbf{E} = -c \{\Delta, \mathcal{A}\} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = [\Delta, \mathcal{A}] . \quad (5.18)$$

Através desse resultado, podemos redefinir os campos elétrico e magnético com os quatérnions. Para isso, iremos associar os campos as partes imaginárias dos quatérnions  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$ , ou seja,

$$\mathcal{E} = 0 - \frac{\mathbf{E}}{c} \quad \text{e} \quad \mathcal{B} = 0 + \mathbf{B} . \quad (5.19)$$

Para obtermos as equações de Maxwell com os quatérnions, basta aplicarmos as comutações apresentadas em 5.14 e 5.16 nas generalizações dos campos feita na expressão 5.19. Ou seja, para o campo quaterniônico  $\mathcal{E}$ , temos que

$$\begin{aligned} [\Delta, \mathcal{E}] &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet \mathcal{E} - \mathcal{E} \bullet \Delta) \quad (5.20) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, -\frac{\mathbf{E}}{c} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) - \left( -\langle \nabla, -\frac{\mathbf{E}}{c} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( +\frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) - \left( +\frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.21)$$

e

$$\begin{aligned}
\{\nabla, \mathcal{E}\} &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet \mathcal{E} + \mathcal{E} \bullet \Delta) & (5.22) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, -\frac{\mathbf{E}}{c} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \left( -\langle \nabla, -\frac{\mathbf{E}}{c} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( +\frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \left( +\frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \\
&= \frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . & (5.23)
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos para o campo quaterniônico  $\mathcal{B}$  que

$$\begin{aligned}
[\Delta, \mathcal{B}] &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet \mathcal{B} - \mathcal{B} \bullet \Delta) & (5.24) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right) - \left( -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} + \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right) \\
&= \nabla \times \mathbf{B} & (5.25)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\{\Delta, \mathcal{B}\} &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet \mathcal{B} + \mathcal{B} \bullet \Delta) & (5.26) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right) + \left( -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} - \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right) \\
&= -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . & (5.27)
\end{aligned}$$

Com o cálculo das comutações entre o operador  $\Delta$  e os campos quaterniônicos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$ , podemos demonstrar as equações de Maxwell com os Quatérnions. Para isso, utilize as expressões 5.20 e 5.26, cujos os resultados são dados em 5.21 e 5.27, de modo que

$$\{\Delta, \mathcal{B}\} - [\Delta, \mathcal{E}] = -\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} , \quad (5.28)$$

porém, pelas equações de Maxwell, expostas na tabela 5.1, temos que  $\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle = 0$  e

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} \{\Delta, \mathcal{B}\} - [\Delta, \mathcal{E}] &= +\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) \\ &= +\frac{1}{c} (-\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{E}) = 0, \end{aligned}$$

por fim, obtemos que

$$[\Delta, \mathcal{E}] = \{\Delta, \mathcal{B}\}. \quad (5.29)$$

Analogamente, utilizando 5.23 e 5.25, temos que

$$\{\Delta, \mathcal{E}\} + [\Delta, \mathcal{B}] = \frac{1}{c} \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B},$$

porém,  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ,  $\langle \nabla, \mathbf{E} \rangle = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  e  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ , então

$$\begin{aligned} \{\Delta, \mathcal{E}\} + [\Delta, \mathcal{B}] &= \frac{1}{c} \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \left( \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\rho}{c \epsilon_0} + \mu_0 \mathbf{J} \\ &= \mu_0 c \rho + \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 c \left( \rho + \frac{\mathbf{J}}{c} \right). \end{aligned}$$

O campo quaterniônico  $\rho + \frac{\mathbf{J}}{c}$  será denotado por  $\mathcal{P}$  e representa o campo quaterniônico das densidades de corrente e carga elétrica, com isso

$$\{\Delta, \mathcal{E}\} + [\Delta, \mathcal{B}] = \mu_0 c \mathcal{P}. \quad (5.30)$$

As expressões 5.29 e 5.30 são conhecidas como Leis de Maxwell para os quatérnions.

As equações de onda no eletromagnetismo podem ser obtidas com os quatérnions da mesma forma como fizemos para os campos em função do quatérnion potencial eletromagnético. Ou seja, basta calcularmos as comutações dos comutadores de  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  e considerar as densidades de corrente e carga elétrica nulas. Portanto,

$$\begin{aligned} [\Delta, [\Delta, \mathcal{E}]] &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet [\Delta, \mathcal{E}] - [\Delta, \mathcal{E}] \bullet \Delta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \Delta \bullet \left( -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) - \left( -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \bullet \Delta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( -\left\langle \nabla, -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right\rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( -\left\langle \nabla, -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right\rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{c} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

utilizando a igualdade vetorial 3.11 e lembrando que  $\langle \nabla, \nabla \rangle = \nabla^2$  é conhecido como laplaciano, temos que

$$[\Delta, [\Delta, \mathcal{E}]] = -\frac{1}{c} \nabla \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{c} \nabla^2 \mathbf{E} \quad (5.32)$$

e como estamos considerando que a densidade de carga elétrica é igual a 0, temos que

$$[\Delta, [\Delta, \mathcal{E}]] = +\frac{1}{c} \nabla^2 \mathbf{E} \quad (5.33)$$

Podemos ainda calcular o anti-comutador de  $[\Delta, \mathcal{E}]$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \{\Delta, [\Delta, \mathcal{E}]\} &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet [\Delta, \mathcal{E}] + [\Delta, \mathcal{E}] \bullet \Delta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \Delta \bullet \left( -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \left( -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \right) \bullet \Delta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\langle \nabla, -\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{1}{c} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) \right) \right) \\ &= +\frac{1}{c} \langle \nabla, \nabla \times \mathbf{E} \rangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

De modo análogo, para o campo quaterniônico  $\mathcal{B}$ , temos que

$$\begin{aligned} [\Delta, [\Delta, \mathcal{B}]] &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet [\Delta, \mathcal{B}] - [\Delta, \mathcal{B}] \bullet \Delta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, \nabla \times \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( -\langle \nabla, \nabla \times \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) \right) \\ &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle - \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

já que a densidade de corrente elétrica é nula. Para o anti-comutador de  $[\Delta, \mathcal{B}]$ , temos que

$$\begin{aligned}
\{\Delta, [\Delta, \mathcal{B}]\} &= \frac{1}{2} (\Delta \bullet [\Delta, \mathcal{E}] + [\Delta, \mathcal{E}] \bullet \Delta) \\
&= \frac{1}{2} \left( \left( -\langle \nabla, \nabla \times \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( -\langle \nabla, \nabla \times \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) \right) \\
&= -\langle \nabla, \nabla \times \mathbf{B} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \\
&= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Com as demonstrações das comutações entre os comutadores de  $\Delta$  com os campos quaterniônicos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$  podemos obter as equações da onda. Primeiramente, precisamos relembrar as equações de onda obtidas com as equações de Maxwell na forma diferencial. Para o campo elétrico, temos que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{5.37}$$

e para o campo magnético, sabemos que

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} . \tag{5.38}$$

Pela álgebra quaterniônica, iremos obter a equação da onda para o campo elétrico  $\mathbf{E}$ , para isso utilizamos as expressões 5.33 e 5.36, e por simples comparação, obtemos que

$$[\Delta, [\Delta, \mathcal{E}]] = \{\Delta, [\Delta, \mathcal{B}]\} \tag{5.39}$$

e para o campo magnético  $\mathbf{B}$ , encontramos que

$$[\Delta, [\Delta, \mathcal{B}]] = -\{\Delta, [\Delta, \mathcal{E}]\} . \tag{5.40}$$

Percebemos que a introdução dos quatérnions no contexto do Eletromagnetismo clássico traz algumas vantagens em relação a visão usual estudada nos cursos de graduação e pós-graduação. A primeira vantagem decorre da “fusão” das equações de Maxwell transformando-as em apenas 2 equações com a introdução de comutações entre o operador  $\Delta$  e os campos quaterniônicos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{B}$ . Além disso, conseguimos escrever as equações de onda para esses campos com o auxílio desse operador, o que pode ser visto como uma vantagem se aplica em teorias que necessitam da aplicação de comutações, como a mecânica quântica, por exemplo. Sendo assim, a linguagem quaterniônica trás um novo panorama para as teorias físicas que levam a resultados interessantes e importantes que podem ser utilizados em outras áreas das ciências exatas.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a construção da álgebra dos números complexos e dos quatérnions, trazendo as definições das operações e suas propriedades. Além disso, proporcionou o estudo das rotações no plano e no espaço euclidiano tridimensional, como visto na seção 2.3 e no capítulo 4. Do ponto de vista matemático, os quatérnions são muito importantes, já que historicamente formam a primeira álgebra associativa mas não comutativa. Do ponto de vista da física, a estrutura algébrica dos quatérnions leva a formulações alternativas (porém equivalentes) de algumas leis, como as leis de Newton e as equações de Maxwell. Com isso, observamos que os quatérnions podem ser de grande valia na modelagem matemática de uma série de situações física, já que, muitas vezes, a mudança de formulação física leva a resultados mais imediatos do que em outras formulações.

## A.1 Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial é um conjunto de elementos munidos com duas operações chamadas, usualmente, de soma e produto por escalar. Denotaremos o conjunto por  $V$ . Os elementos de  $V$  são chamados de vetores e os escalares são números reais ou complexos, geralmente. O conjunto é fechado em relação as operações, ou seja, para quaisquer elementos  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  pertencentes ao conjunto e juntamente com  $\alpha$  um escalar arbitrário, temos que

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} \in V \quad \text{e} \quad \alpha \mathbf{v} \in V .$$

Além disso, esse conjunto munido essas operações deve satisfazer alguns axiomas. Ou seja, para quaisquer elementos  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$  pertencentes a  $V$  juntamente com  $\alpha$  e  $\beta$  escalares quaisquer, temos que

- 1)  $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$  ,
- 2)  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  ,
- 3) Existência do elemento neutro, isto é, existe o elemento  $\mathbf{0}$ , tal que para todo vetor  $\mathbf{v}$ , temos que  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$  ,
- 4) Existência do elemento inverso, isto é, para todo elemento  $\mathbf{v}$ , existe um elemento  $-\mathbf{v}$ , tal que  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$  ,
- 5)  $\alpha(\beta \mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$  ,
- 6) Existe um escalar, denotado por 1, tal que para todo elemento  $\mathbf{v}$ , temos que  $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ ,
- 7)  $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$  .

Diversos são os exemplos de espaços vetoriais como por exemplo

- a) O conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$  com entradas reais, ou complexas, e as operações usuais de soma e produto por escalar ;

- b) O conjunto dos números reais sobre as operações usuais de soma e produto por escalar ;
- c) O conjunto das funções lineares com escalares reais ;
- d) O conjunto dos vetores no  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  munidos com as operações usuais de soma e produto por escalar .

Um ponto muito importante entre espaços vetoriais é quando eles são isomorfos. Dizemos que dois espaços vetoriais são isomorfos se, e somente se, existe um mapeamento entre seus elementos, de modo que só existe um elemento de um espaço associado a outro elemento do outro espaço. Ou seja, temos uma bijeção entre os espaços, além disso, essa bijeção deve ser linear.

## A.2 Álgebras

A estrutura algébrica chamada álgebra é um espaço vetorial munido com mais uma operação chamada, usualmente, de produto. Denotamos essa operação por  $\bullet$  e além disso, essa operação deve ser fechada, ou seja, para quaisquer elemento  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  pertencentes a  $V$ , temos que  $\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$  também pertence à  $V$ .

A operação entre elementos do conjunto também deve ser bilinear, ou seja, os seguintes axiomas devem ser satisfeitos

- 1)  $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$
- 2)  $(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$  ;
- 3)  $(\alpha\mathbf{v}) \bullet (\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$  .

Quando para quaisquer dois elementos  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  do conjunto  $V$  for satisfeito a seguinte propriedade

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$

temos uma álgebra comutativa. Podemos ter uma álgebra associativa, ou seja, para quaisquer elementos  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , temos que

$$\mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}) \bullet \mathbf{w} .$$

Diversos são os exemplos de álgebras como por exemplo

- a) O espaço vetorial dos números reais munido com a operação usual de produto ;
- b) O espaço vetorial dos números complexos munido com a operação de produto ,
- c) o espaço vetorial das matrizes quadradas com entradas reais e o produto usual entre matrizes .

Além disso, quando temos uma álgebra associativa e para qualquer elemento não-nulo desta álgebra, existe o seu inverso, tal que

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}^{-1} = \mathbf{v}^{-1} \bullet \mathbf{v} = 1,$$

sendo  $\mathbf{v}^{-1}$  o elemento inverso de  $\mathbf{v}$ , temos uma álgebra associativa e de divisão.

Frobenius mostrou que só existem 4 álgebras associativas e de divisão de dimensão finita, são elas a dos reais ( $\mathbb{R}$ ), a dos complexos ( $\mathbb{C}$ ), a dos quatérnions ( $\mathbb{H}$ ) e a dos octônios ( $\mathbb{O}$ ).

## B.1 Fórmula de Euler para os números complexos

Como sabemos podemos escrever uma função como série de potências em torno de um ponto. Com isso, podemos escrever as séries de potências das seguintes funções

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (\text{B.1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (\text{B.3})$$

Podemos calcular a exponencial de  $i\theta$ , para isso basta tomar a expansão em série da exponencial e substituir  $x$  por  $i\theta$ , então

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots,$$

como  $i^2 = -1$ , temos que

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{(i\theta^3)}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{(i\theta^5)}{5!},$$

colecionando os termos com a variável imaginária e também utilizando as expansões em série das funções seno e cosseno apresentas em B.2 e B.3, temos que

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + \left(i\theta + \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) i \\ &= \cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula de Euler é  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i$ .

## B.2 A Extensão da fórmula de Euler para os Quatérnions

O mesmo procedimento é válido para os quatérnions, ou seja, podemos calcular a exponencial de um quatérnion puro  $\mathfrak{Q}$ . Utilizando a expansão em série da função exponencial dada em B.1, temos que

$$e^{\mathfrak{Q}} = 1 + \mathfrak{Q} + \frac{\mathfrak{Q}^2}{2!} + \frac{\mathfrak{Q}^3}{3!} + \frac{\mathfrak{Q}^4}{4!} + \frac{\mathfrak{Q}^5}{5!} + \dots$$

porém, as partes puras dos quatérnions são isomorfa aos vetores do espaço euclidiano e supondo que  $\mathfrak{Q} = 0 + \mathbf{Q}$ , então

$$e^{\mathfrak{Q}} = e^{\mathbf{Q}} = 1 + \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{Q}^2}{2!} + \frac{\mathbf{Q}^3}{3!} + \frac{\mathbf{Q}^4}{4!} + \frac{\mathbf{Q}^5}{5!} + \dots$$

Analogamente ao apêndice B.1, devemos obter as potências do vetor  $\mathbf{Q}$ , para isso utilizaremos o produto entre os quatérnions definido em 3.2, juntamente com as identidades vetoriais 3.3 e 3.4, sendo assim

$$\mathbf{Q}^2 = (0 + \mathbf{Q}) \bullet (0 + \mathbf{Q}) = -\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \rangle + \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} = -\|\mathbf{Q}\|^2,$$

$$\mathbf{Q}^3 = (0 + \mathbf{Q}) \bullet ((0 + \mathbf{Q}) \bullet (0 + \mathbf{Q})) = -\|\mathbf{Q}\|^2 \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{Q}^4 = ((0 + \mathbf{Q}) \bullet (0 + \mathbf{Q})) \bullet ((0 + \mathbf{Q}) \bullet (0 + \mathbf{Q})) = \|\mathbf{Q}\|^4,$$

$$\mathbf{Q}^5 = \mathbf{Q}^4 \bullet \mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\|^4 \mathbf{Q}.$$

Com isso podemos calcular a exponencial de um quatérnion puro, de modo que

$$\begin{aligned} e^{\mathfrak{Q}} = e^{\mathbf{Q}} &= 1 + \mathbf{Q} - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{2!} - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2 \mathbf{Q}}{3!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^4}{4!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^4 \mathbf{Q}}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{2!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^4}{4!} - \dots\right) + \left(\mathbf{Q} - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2 \mathbf{Q}}{3!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^4 \mathbf{Q}}{5!} - \dots\right). \end{aligned}$$

Iremos multiplicar e dividir a parte associada ao vetor  $\mathbf{Q}$  por  $\|\mathbf{Q}\|$  para colocar o vetor normalizada em evidência, então

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{Q}} &= \left(1 - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{2!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^4}{4!} - \dots\right) + \left(\frac{\|\mathbf{Q}\|}{\|\mathbf{Q}\|} \mathbf{Q} - \frac{\|\mathbf{Q}\|}{\|\mathbf{Q}\|} \frac{\|\mathbf{Q}\|^2 \mathbf{Q}}{3!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|}{\|\mathbf{Q}\|} \frac{\|\mathbf{Q}\|^4 \mathbf{Q}}{5!} - \dots\right) \\ &= \left(1 - \frac{\|\mathbf{Q}\|^2}{2!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^4}{4!} - \dots\right) + \left(\|\mathbf{Q}\| - \frac{\|\mathbf{Q}\|^3}{3!} + \frac{\|\mathbf{Q}\|^5}{5!} - \dots\right) \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|} \\ &= \cos(\|\mathbf{Q}\|) + \text{sen}(\|\mathbf{Q}\|) \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|}, \end{aligned}$$

portanto, essa é a fórmula de Euler para os quatérnions. Esse resultado pode parecer sem utilidade, porém, caso tomemos o módulo de  $\mathbf{Q}$  igual a 1 e juntamente com a exponencial de  $\mathbf{Q}$  adicionarmos um fator de  $\frac{\theta}{2}$ , então

$$\exp\left(\mathbf{Q}\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{Q},$$

sendo essa a expressão utilizada na parte das rotações com os quatérnions. Com isso, temos que todo quatérnion puro e de módulo unitário pode ser escrito na fórmula de Euler, bastando a escolha de um ângulo  $\theta$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HISTORY of Quaternions. [S. l.], 25 fev. 2007. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/History\\_of\\_quaternions#/media/File:William\\_Rowan\\_Hamilton\\_Plaque\\_-\\_geograph.org.uk\\_-\\_347941.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_quaternions#/media/File:William_Rowan_Hamilton_Plaque_-_geograph.org.uk_-_347941.jpg). Acesso em: 12 nov. 2020.
- [2] DOS SANTOS, Michel V. *Números Complexos, Quatérnions e Rotações*. Orientador: Eliezer Batista. 2012. 58p. Universidade Federal de Santa Catarina, 2012. Disponível em: [https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126308/Michel\\_Valmor\\_dos\\_Santos.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126308/Michel_Valmor_dos_Santos.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Acesso em: 11 out. 2020.
- [3] NORMAL situation: the three gimbals are independent. MathsPoetry, 14 fev. 2009. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal\\_lock#/media/File:No\\_gimbal\\_lock.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock#/media/File:No_gimbal_lock.png). Acesso em: 15 nov. 2020.
- [4] GIMBAL lock: two out of the three gimbals are in the same plane, one degree of freedom is lost. MathsPoetry, 14 fev. 2009. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal\\_lock#/media/File:Gimbal\\_lock.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock#/media/File:Gimbal_lock.png). Acesso em: 15 nov. 2020.
- [5] Kuipers J. B., *Quaternions & Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1999.
- [6] SÄRKKÄ, Simo. Notes on Quaternions. [S. l.], 28 jun. 2007. Disponível em: <https://users.aalto.fi/~ssarkka/pub/quat.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2020
- [7] H. CONWAY, John; A. SMITH, Derek. On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry. [S. l.: s. n.], 2003.
- [8] SWEETSER, Doug. Doing Physics with Quaternions: A Forgotten Path to New Physics. [S. l.], [entre 1998 e 2018]. Disponível em: <http://dougsweetser.github.io/Q/>. Acesso em: 20 nov. 2020.