



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

# Influência das Transições de Fase no Universo Primordial

Acadêmico: Leonardo Gabriel José Mendes Voltarelli

Orientadora: Hatsumi Mukai

Coorientador: Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 10 de maio de 2020



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## Influência das Transições de Fase no Universo Primordial

Trabalho de conclusão de curso  
apresentado ao Departamento de  
Física, da Universidade Estadual  
de Maringá, como parte dos requi-  
sitos para obtenção do título de ba-  
charel em Física

Acadêmico: Leonardo Gabriel José Mendes Voltarelli

Orientadora: Hatsumi Mukai

Coorientador: Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 10 de maio de 2021

*Este trabalho é dedicado aos meus pais,  
Claudinei Voltarelli e Janete Mendes, pelo  
apoio incondicional durante toda a minha  
vida.*

*"What one fool can understand, another can."  
(Richard P. Feynman)*

# Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Introdução	1
<b>1 A geometria do espaço-tempo</b>	<b>3</b>
1.1 Espaços topológicos	3
1.1.1 Variedade	4
1.1.2 Espaço tangente	7
1.1.3 Variedades métricas	10
1.2 Espaço-tempo plano	11
1.3 Curvatura	12
1.3.1 Conexões	13
1.3.2 Transporte paralelo e curvatura	14
1.4 Relatividade Geral	16
1.4.1 A métrica de Schwarzschild	18
1.5 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	21
<b>2 Transições de Fase e Universo Primordial</b>	<b>27</b>
2.1 Quebra espontânea de simetria	28
2.1.1 Simetria discreta	28
2.1.2 Simetrias contínuas	29
2.2 Transições de fase	31
2.2.1 Transição de primeira ordem	32
2.2.2 Transição de segunda ordem	32
2.3 O Mecanismo de Kibble	33
2.4 Defeitos topológicos	34
2.4.1 Parede	36
2.4.2 Cordas	39
2.4.3 Monopolos	46
<b>Considerações Finais</b>	<b>54</b>
<b>A Topologia</b>	<b>55</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>60</b>

# Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer aos professores Hatsumi Mukai e Breno Ferraz de Oliveira por me orientarem em diversos projetos incluindo este trabalho.

Ao professor Paulo Ricardo Garcia Fernandes, pelas conversas esclarecedoras e apoio durante uma grande parte da minha graduação.

Aos meus Pais e familiares que me apoiaram desde o princípio e me motivaram a seguir o caminho das ciências.

Aos meus amigos, por todo conhecimento trocado e pela amizade.

Aos autores dos textos utilizados que permitiram a estudar e aprender parte do que está apresentado na presente monografia.

À Universidade Estadual de Maringá em especial ao Departamento de Física pela infraestrutura (pessoal e material) e a todos os que fazem com que essa máquina universitária nos permita concluir o curso com êxito. E, que direta ou indiretamente contribuíram para o presente trabalho.

# Resumo

Este é um trabalho de revisão bibliográfica, que envolve conteúdos, em maior ou menor grau, sobre Topologia, Física da Matéria Condensada, Teoria de Campos, Partículas Elementares e Teoria de Gravitação (Relatividade Geral) aplicados à Cosmologia. Pretende-se assim, apresentar a influência da transição de fase que se supõem ter ocorrido no Universo Primordial, e a sua relação com os defeitos topológicos. A quebra espontânea de simetria é um mecanismo que dá massa para as partículas do Modelo Padrão, ela é descrita pelo Campo Escalar de Higgs. O Universo Primordial era quente o suficiente para restaurar as simetrias do Campo de Higgs. É especulado que diversas transições de fase ocorreram durante a expansão e conseqüente resfriamento do Universo logo após o *Big Bang*. No contexto do Mecanismo de Kibble, considera-se que as transições com quebra espontânea de simetria  $G \rightarrow H$  geram configurações topologicamente estáveis que, por sua vez, resulta em uma fase não-homogênea que não pode se transformar em uma fase homogênea a partir de uma variação contínua do parâmetro de ordem. Tais configurações são regiões que contêm a fase de maior simetria  $H$  e recebem o nome de defeito topológico. No âmbito da Cosmologia, a sua produção em laboratório é inviável e é especulado que os únicos existentes no presente são aqueles que foram produzidos no Universo Primordial. E, que a única forma de verificar sua existência é a partir de observações astronômicas.

**Palavras-chave:** Transições de Fase, Defeitos Topológicos, Universo Primordial.

# Introdução

A Teoria da Relatividade Geral trata o espaço e o tempo como sendo partes de um só espaço quadrimensional. Além disso, a gravidade é vista como sendo uma curvatura do espaço-tempo, e a equação de Einstein é o que relaciona essa curvatura com a massa e a energia de um sistema.

Ao usar as equações Einstein para descrever a matéria presente no Universo encontra-se um modelo, denominado de Modelo Padrão. Esse modelo sugere que o espaço-tempo começou a partir de uma singularidade, o *Big Bang*, e que a cada instante de tempo o espaço o Universo se expande. É razoável inferir que o Universo era muito denso, e consequentemente muito quente, momentos após o *Big Bang*.

O Modelo Padrão envolve partículas elementares, e descreve os quarks e os leptons e como eles interagem. No caso, a teoria de Gauge das interações forte e eletrofraca, que é obtida a partir de argumentos de simetrias locais. Existe uma hipótese de que em altas temperaturas existam um conjunto maior de simetrias e que conforme o Universo expandiu e esfriou tais simetrias foram quebradas e que podem ter originado os defeitos topológicos. Tal processo é descrito pelo mecanismo de Kibble um dos tópicos importantes deste trabalho. À saber, tais defeitos só foram observados em sistemas de matéria condensada após uma transição de fases e usados desta forma como um “laboratório cosmológico”, como por exemplo o contido na referência [1], e os defeitos topológicos cósmicos até o momento são apenas propostas.

O estudo de quebra de simetria em sistemas de matéria condensada foi proposta na década de 50 por Nambu na teoria da supercondutividade. E segundo, Joas [2]: “Nambu (1960b) propôs que a quebra espontânea de simetria, ideia derivada da física do estado sólido e usada na teoria de transição de fases, pode também ser um conceito útil na Teoria Quântica de Campos de partículas elementares. Ele baseou uma nova teoria do vácuo em uma analogia com o estado supercondutor da matéria e mostrou como partículas podem adquirir massa por meio de um mecanismo similar ao da formação do *gap* de energia em supercondutores” .

Vale ressaltar que caso não ocorresse a quebra de simetria no Universo Primordial as partículas existentes seriam em números iguais e se aniquilariam, e não haveria como existir formação de estruturas, e o Universo não seria o que é atualmente.

Portanto, é interessante estudar essa possível geração da quebra da simetria em uma possível transição de fase ocorrida no Universo Primordial e que tenha levado na formação de defeitos topológicos, e ainda, que existe um Mecanismo que permite compreender essa formação. Bem como, estudar as propostas e problemas de como detectar tais defeitos. De forma que, o presente trabalho está estruturado como segue:

No Capítulo 1 é apresentado a geometria do espaço-tempo, que é a base para a descrição da Relatividade Geral. Inicia-se com os conceitos de vetores, tensores e como se descrever o espaço-tempo plano, ou seja, a Relatividade Restrita. Em seguida, é apresentado os objetos geométricos que são necessários para descrever um espaço com curvatura.



Depois disso, usando as equações de Einstein, alguns casos importantes são mostrados sendo eles, a curvatura do espaço-tempo devido a uma simetria esférica e as equações de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que formam a base do Modelo Cosmológico Padrão.

No Capítulo 2 é apresentado o modelo clássico que descreve a quebra espontânea de simetria em uma transição de fase. Elas costumam gerar defeitos topológicos que são explorados neste trabalho via Mecanismo de Kibble. Três tipos são mostrados: parede, corda e monopolo, e que suas implicações astrofísicas são diversas e meios que permitem detectá-los.

Por fim, apresentam-se as Considerações Finais, as Referências, seguida de um Apêndice sobre Topologia.

Com relação à notação, adotamos que: índices latinos  $i, j, k, \dots$ , variam de 1 - 3 e representam as três coordenadas espaciais. Os índices gregos  $\mu, \nu, \dots$ , variam de 0-3 representam coordenadas do espaço-tempo. Também foi adotado a notação de Einstein, isto é, índices repetidos são somados. A notação para derivadas será  $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ . Além disso,  $m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$  é a massa de Planck.

# Capítulo 1

## A geometria do espaço-tempo

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) formulada por Einstein é de grande importância para o modelo atual do Universo. A partir de suas equações é possível construir o modelo de que o Universo está expandindo e, que no passado ele foi muito mais quente e denso.

Tendo em vista uma apresentação clara e consistente, primeiro serão descritas as estruturas matemáticas necessárias para o entendimento da formulação física. Tal que, a discussão que se segue neste capítulo é baseada em [3, 4] e visa apresentar os conceitos básicos da geometria diferencial.

### 1.1 Espaços topológicos

É possível classificar as estruturas de um conjunto a partir das funções que atuam nele. Por exemplo, dois conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados isomorfos caso exista um mapeamento bijetivo entre eles. O fato de uma bijeção associar um elemento de  $A$  para cada elemento de  $B$  implica que os dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos, sendo assim, eles têm o mesmo tamanho. Condição válida para conjuntos finitos e infinitos.

Os espaços topológicos são conjuntos com o tipo mais simples de estrutura que fornece a definição de conceitos tais como: convergência, conexidade e continuidade.

Considere um conjunto  $M$ ,  $P(M)$  é o conjunto que possui todos os subconjuntos de  $M$  como elementos. Uma topologia em  $M$  é um conjunto  $\mathcal{O} \subseteq P(M)$ , tal que:

- $\emptyset \in \mathcal{O}$  e  $M \in \mathcal{O}$ ;
- $\{U, V\} \in \mathcal{O} \implies \{U, V\} \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O}$ ;
- $C \in \mathcal{O} \implies \bigcup C \in \mathcal{O}$ .

O par  $(M, \mathcal{O})$  é chamado de espaço topológico.

Em geral, dado um conjunto existem muitos outros conjuntos que servem como topologia. Uma terminologia comumente usada é que, quanto mais elementos ela possuir mais forte ela é. Sendo assim,  $\mathcal{O} = P(M)$  é a topologia mais forte que um conjunto pode ser, e a mais fraca é  $\mathcal{O} = \{\emptyset, M\}$ .

Seja  $(M, \mathcal{O})$  um espaço topológico. Um subconjunto  $S$  de  $M$  é dito aberto, em relação a  $\mathcal{O}$ , caso  $S \in \mathcal{O}$ . Se  $M/S \in \mathcal{O}$  então  $S$  é dito fechado. Nesse sentido, aberto e fechado não são mutuamente exclusivos, um conjunto pode ser fechado e aberto, um exemplo é o conjunto vazio. Nesses termos, uma função é contínua caso a imagem de conjuntos abertos forem abertos.

A topologia usual do conjunto do  $\mathbb{R}^d$ , denotada por  $O_s$ , é

$$U \in O_s : p \in U : r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U, \quad (1.1)$$

sendo que,  $B_r(x)$  é uma bola<sup>1</sup> aberta de raio  $r$  centrada em um ponto  $x$  e é definida como:

$$B_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d / \sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2} < r \right\}, \quad (1.2)$$

para qualquer  $x \in \mathbb{R}^d$  e qualquer  $r \in \mathbb{R}^+ := \{s \in \mathbb{R} / s > 0\}$ . Além disso,  $x := (x_1, x_2, \dots, x_d)$  e  $y := (y_1, y_2, \dots, y_d)$ , com  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ .

### 1.1.1 Variedade

Um espaço topológico  $(M, O)$  que é Hausdorff<sup>2</sup> e paracompacto<sup>3</sup>, é dito ser uma variedade  $n$ -dimensional se para todo ponto  $p \in M$  existir uma vizinhança  $U(p)$  e um homeomorfismo  $x : U(p) \rightarrow X(U(p)) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ou seja, uma variedade é um espaço topológico tal que cada ponto do espaço se parece localmente com o  $\mathbb{R}^n$ . No entanto, apenas a variedade  $(M, O)$  não é estrutura suficiente para definir a diferenciabilidade de curvas  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , funções  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ou mapas  $g : M \rightarrow N$ . A definição formal de variedade foi deixada para o Apêndice A

Considerando a variedade  $(M, O)$ , uma carta é um par  $(U, x)$  em que  $U \in O$  e  $x : U \rightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$  é um homeomorfismo ( $x$  é contínuo assim como sua inversa  $x^{-1}$ ). Essa função associa cada ponto  $p \in U$  a um conjunto de números reais  $x(p) = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ , em que os mapas  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são coordenadas. Por conveniência, as coordenadas serão denotadas apenas por  $x^i$ . No contexto da Física, o sistema de coordenadas recebe o nome de referencial ou observador.

Uma coleção de cartas,  $A = (U_{(\alpha)}, x_{(\alpha)}) / \alpha \in A$ , é um atlas caso:

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}.$$

Uma mudança das coordenadas da carta  $(U, x)$  para as coordenadas da carta  $(V, y)$  em um ponto  $p$  pode ser pensada, como aplicar a inversa  $x^{-1}$  no domínio de  $x$  e em seguida aplicar  $y$ , a composição de duas aplicações é representada da seguinte forma:

$$y(x^{-1}(p)) = y \circ x^{-1}(p).$$

Essa mudança de coordenadas também é chamada de transição de cartas.

Um jeito de mostrar a diferenciabilidade de uma curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow U$  é primeiro mostrar que, dado uma carta  $x$ , é possível diferenciar a curva usando as suas coordenadas,  $x \circ \gamma$  e, em seguida, mostrar que o mesmo é válido para uma carta  $y$  e suas coordenadas. Sendo assim, pode-se afirmar que a diferenciabilidade é independente da escolha de coordenadas, logo,  $\gamma$  é diferenciável.

Dois cartas  $(U, x)$  e  $(V, y)$ , de uma variedade, são ditas serem compatíveis caso um dos seguintes itens for verdade:

<sup>1</sup>Expressão matemática referente ao espaço interior a uma esfera; é dita aberta quando exclui os pontos de fronteira e fechada quando os inclui.

<sup>2</sup>Quando quaisquer dois pontos distintos possuem vizinhanças disjuntas.

<sup>3</sup>É quando um refinamento localmente finito é admitido por toda cobertura aberta.

- Caso a intersecção do domínio das duas cartas seja vazia  $U \cap V = \emptyset$ ;
- Caso a intersecção do domínio das duas cartas não seja vazia  $U \cap V \neq \emptyset$ , as cartas só serão compatíveis se a mudança de coordenadas,  $y = x^{-1}$  e  $x = y^{-1}$ , sejam funções reais, isto é:

$$y = x^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (1.3)$$

$$x = y^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d. \quad (1.4)$$

É possível inferir propriedades como continuidade e diferenciabilidade nas cartas pois, as mudanças de coordenadas são funções reais.

Um atlas  $A$  é compatível caso quaisquer duas cartas nele sejam compatíveis entre si. Pode-se criar atlas cujas cartas são todas de uma mesma classe de compatibilidade, isto é, um atlas em que as cartas são todas contínuas ou então diferenciáveis.

Um trio,  $(M, \mathcal{O}, A)$ , pode ser:

- $C^0$  uma variedade contínua, isto é, possui um atlas cujas cartas são todas contínuas. O mesmo raciocínio segue para os próximos itens;
- $C^1$  uma variedade diferenciável uma vez e o resultado é contínuo;
- $C^k$  uma variedade contínua  $k$ -vezes e diferenciável  $k$ -vezes;
- $D^k$  uma variedade diferenciável  $k$ -vezes;
- $C^\infty$  uma variedade infinitamente diferenciável;

Um vetor é um objeto geométrico que liga dois pontos e define uma direção no espaço, mais precisamente um vetor é um elemento de um espaço vetorial.

Um espaço vetorial é definido sobre um corpo  $(K, +, \cdot)$ , em que  $K$  é um conjunto,  $+$  e  $\cdot$  são operações  $K \times K \rightarrow K$  que satisfazem os seguintes axiomas:

- $(K, +)$  é um grupo abeliano, isto é:
  - i)  $a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$ ;
  - ii)  $0 \in K : a \in K : a + 0 = 0 + a = a$ ;
  - iii)  $a \in K : -a \in K : a + (-a) = (-a) + a = 0$ ;
  - iv)  $a, b \in K : a + b = b + a$ ;
- $(K, \cdot)$  também deve ser um grupo abeliano, sendo  $K \setminus \{0\}$ :
  - v)  $a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ;
  - vi)  $1 \in K : a \in K : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ;
  - vii)  $a \in K : a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ ;
  - viii)  $a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$ ;
- as operações  $+$  e  $\cdot$  satisfazem a propriedade de distribuição.
  - ix)  $a, b, c \in K : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

Alguns exemplos de corpos, sobre as operações  $+$  e  $\cdot$ , são os conjuntos dos reais, dos complexos e dos racionais.

Um espaço vetorial sobre um corpo  $K$  é uma tripla  $(V, +, \cdot)$ , em que:

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V$$

sendo que  $+$  e  $\cdot$  são operações que satisfazem os seguintes axiomas:

- $(V, +)$  é um grupo abeliano;
- a operação  $\cdot$  é uma ação de  $K$  em  $(V, +)$ :
  - i)  $\lambda \in K : v, w \in V : \lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$ ;
  - ii)  $\lambda, \mu \in K : v \in V : (\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$ ;
  - iii)  $\lambda, \mu \in K : v \in V : (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ ;
  - iv)  $v \in V : 1 \cdot v = v$ .

Os espaços vetoriais também são chamados de espaços lineares. Seus elementos são denominados vetores, enquanto os elementos de  $K$  são ditos escalares, e a operação  $\cdot$  é o produto escalar.

Um funcional é uma função que atua no espaço vetorial e gera um escalar. O espaço dual  $V^*$  é um espaço vetorial, tal que os seus elementos são todos os funcionais lineares  $f : V \rightarrow K$ .

Seja  $(V, +, \cdot)$  e  $(W, +, \cdot)$  dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo  $K$ , uma função  $f : V \rightarrow W$  é dita ser uma transformação linear para todos os casos em que,  $v_1, v_2 \in V$  e  $\lambda \in K$ :

$$f((\lambda \cdot v_1) + v_2) = (\lambda \cdot f(v_1)) + f(v_2).$$

Daqui em diante os símbolos de produto escalar e soma serão omitidos para simplificar a notação.

Seja  $V, W$  e  $Z$  espaços vetoriais sobre um corpo  $K$ , uma função  $f : V \times W \rightarrow Z$  é dita ser bilinear caso:

- $w \in W : v_1, v_2 \in V : \lambda \in K : f(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda f(v_1, w) + f(v_2, w)$ ;
- $v \in V : w_1, w_2 \in W : \lambda \in K : f(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda f(v, w_1) + f(v, w_2)$ ;

ou seja, quando é linear em cada um dos seus argumentos separadamente.

De um modo mais geral, um tensor  $T_q^p$  em  $V$  é uma função multilinear

$$T_q^p V := \underbrace{V \cdots V}_{p \text{ cópias}} \underbrace{V \cdots V}_{q \text{ cópias}} := \{T \mid T \text{ é um tensor } (p, q) \text{ em } V\},$$

ou seja, ele tem  $p$  cópias do espaço vetorial e  $q$  cópias do espaço dual, sendo que, cada entrada é linear. A nomenclatura usual para tensores é dizer que um tensor é um objeto que possui  $p$  índices covariantes e  $q$  índices contravariantes, sendo que, sua ordem é  $p + q$ .

## 1.1.2 Espaço tangente

Existe um objeto geométrico mais sofisticado que um vetor, o vetor tangente. Ele é definido pontualmente e possui um espaço vetorial próprio, sendo assim, tensores podem ser construídos a partir dele do mesmo modo que foi feito em um espaço vetorial normal.

Em uma variedade diferenciável,  $(M, O, A)$ , uma curva é uma aplicação

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M,$$

que é diferenciável no mínimo uma vez. Uma curva também pode ser pensada como uma linha reta entre dois pontos  $p_1$  e  $p_2$  que pertencem a variedade. Além disso, ela pode ser parametrizada por  $\lambda$  tal que

$$\gamma(\lambda) = p_1 + \lambda(p_2 - p_1). \quad (1.5)$$

Nesse sentido, um vetor pode ser representado como um objeto que vai de  $p_1$  a  $p_2$  e é representado como

$$\vec{v}_{p_1 p_2} = p_2 - p_1. \quad (1.6)$$

Se os pontos forem representados pela curva como  $\gamma(1) = p_2$  e  $\gamma(0) = p_1$ , então é possível reescrever o vetor como

$$\vec{v} = \left( \frac{d}{d\lambda} \right) [A + \lambda(p_2 - p_1)] = \gamma(1) - \gamma(0), \quad (1.7)$$

ainda assim, ele precisa de dois pontos para ser definido. É possível torna-lo um objeto geométrico local, isto é, defini-lo pontualmente como mostra a Figura 1.1. Mais especificamente,

$$\vec{v}_{p_1 p_2} = \left( \frac{d\gamma}{d\lambda} \right)_{\lambda=0}, \quad (1.8)$$

ou seja, os pontos  $p_1$  e  $p_2$  ficam arbitrariamente próximos de tal modo que curva  $\gamma$  possa ser considerada como uma segmento de reta localmente. Em um sistema de coordenadas  $x^i$

$$\vec{v}_{p_1 p_2} = \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right) \hat{e}_i = v^i \hat{e}_i \quad (1.9)$$

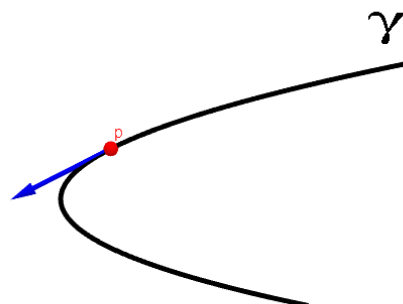


Figura 1.1: a figura mostra o vetor tangente, seta em azul, no ponto  $p$  da curva  $\gamma$  que é representada pela linha preta. Programa utilizado - Geogebra. Fonte: O autor, 2021.

A derivada direcional pode ser definida de modo similar. Tomando qualquer vetor  $\vec{v}$  e supondo uma curva  $\gamma(\lambda) - \gamma(0) = \lambda\vec{v}$ , a derivada direcional de uma função  $f$  ao longo dessa curva é

$$\partial_{\vec{v}}f = \left( \frac{d}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} f[\gamma(\lambda)] = \left( \frac{df}{d\lambda} \right)_{\gamma(0)}. \quad (1.10)$$

De um outro ponto de vista,

$$\partial_{\vec{v}} = \left( \frac{d}{d\lambda} \right)_{\text{em } \lambda = 0, \text{ ao longo da curva } \gamma(\lambda) - \gamma(0) = \lambda\vec{v}} \quad (1.11)$$

pode ser pensado como o operador diferencial ao longo do vetor  $\vec{v}$ , em um sistema de coordenadas ele pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} &= \left( \frac{d}{d\lambda} \right)_{\gamma(0)} \\ &= \left( \frac{d}{dx^i \lambda} \right)_{\text{em } \lambda = 0, \text{ ao longo da curva } \gamma(\lambda) - \gamma(0) = \lambda\vec{v}} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A derivada direcional, Eq. (1.10), é reinterpretada e passa a ser um vetor tangente denotado por  $v_{\gamma,p}$ . Diferentes funções  $f$  podem produzir vetores diferentes ou podem produzir o mesmo vetor. Todos esses vetores tangentes formam um conjunto  $T_pM$ , caso equipado com a soma e multiplicação por escalar ele se torna um espaço vetorial chamado de espaço tangente no ponto  $p$  e possui a mesma dimensão que a variedade. Por exemplo, uma variedade bidimensional como ilustrado na Figura 1.2. Em um ponto  $A$  ela possui um espaço tangente que é uma superfície plana onde todos os vetores tangentes a aquele ponto estão.

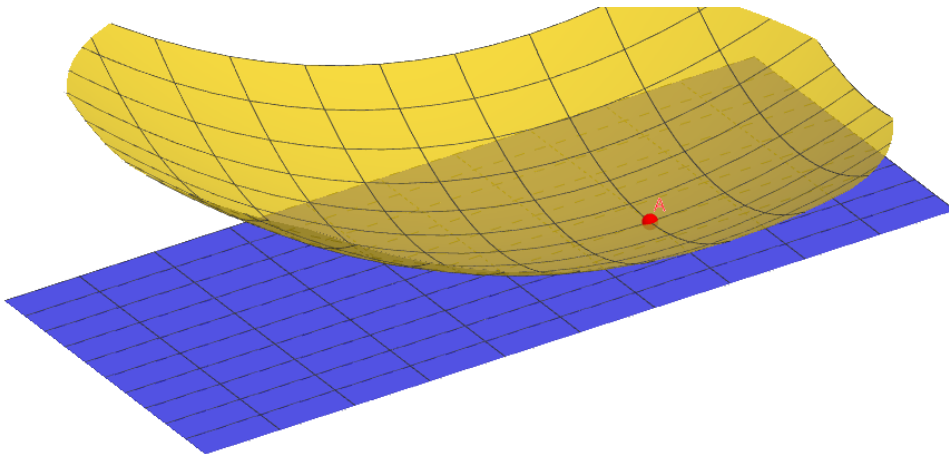


Figura 1.2: a superfície de cor amarela representa uma variedade bidimensional e a superfície em azul representa o espaço tangente no ponto  $A$ . Programa utilizado - Geogebra. Fonte: O autor, 2021.

O vetor tangente também pode ser pensado como a velocidade em um ponto da curva, nesse sentido, o espaço tangente é o espaço das velocidades de todas as curvas diferenciáveis que passam por esse ponto. Em algum sentido,  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  é equivalente aos elementos

da base do espaço tangente e  $v^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$  são as componentes do vetor. Também é possível tomar  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  como sendo um operador que atua na função  $f$ .

De maneira formal, a base induzida pela carta,  $(U, x)$ , pertencente a um atlas,  $\mathcal{A}$ , infinitamente diferenciável é

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^d} \right)_p \right\} \quad T_p M,$$

que também constitui uma base do espaço tangente. Seja  $(U, x)$  e  $(V, y)$  duas cartas em um ponto  $p \in U \cap V$ , as componentes de um vetor tangente podem ser escritas nas duas coordenadas como

$$v^i_{(y)} \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p = v^i_{(x)} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p,$$

a mudança de coordenadas (mudança de base ou mudança de carta) é dada por:

$$v^j_{(y)} = \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) v^i_{(x)}.$$

De modo geral, objetos geométricos que por meio de uma mudança de coordenadas transformam-se dessa maneira são chamados de vetores contravariantes.

O espaço tangente é um espaço vetorial, sendo assim, é natural pensar no seu espaço dual, isto é, o espaço cotangente  $(T_p M)^*$  cujo os elementos são os funcionais lineares de  $T_p M$ , ou seja,  $\phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . A atuação de um vetor dual em um vetor gera o produto escalar entre eles. A base dual do espaço cotangente induzida por uma carta  $(U, x)$  é

$$\{dx^1_p, dx^2_p, \dots, dx^d_p\} \quad (T_p M)^*$$

e tem-se, por definição,

$$(dx^a)_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^b} \right)_p \right) = \left( \frac{\partial x^a}{\partial x^b} \right)_p = \delta^a_b.$$

Um elemento  $\omega \in (T_p M)^*$  é representado na base dual como:

$$\omega = \omega_{i(x)} (dx^i)_p$$

e dada uma mudança de base ele se transforma como

$$\omega_{i(y)} = \left( \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right) \omega_{j(x)}.$$

Os objetos geométricos que sobre uma mudança de coordenadas se transformam dessa maneira são chamados de vetores covariantes, ou seja, tais elementos mudam de uma maneira inversa comparado a mudança de um vetor contravariante.

Vetores contravariantes podem ser pensados como matrizes colunas e vetores covariantes como matrizes linhas, nesta representação  $\left( \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \right)$  é uma matriz e também é a matriz inversa de  $\left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$ .

Um fibrado tangente de  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  é a união disjunta dos espaços tangentes de todos os elementos de  $M$ , ou seja,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$



Será usado uma notação mais econômica para os vetores tangentes, isto é,  $v_\gamma$  deixando implícito a qual espaço tangente ele pertence.

Esse espaço também é um conjunto e pode ser equipado com um topologia  $\mathcal{O}_{TM}$ , escolhida de tal modo a fazer com que exista uma aplicação contínua do fibrado tangente para a variedade, isto é, dado  $\pi : TM \rightarrow M$  a topologia será no mínimo

$$\mathcal{O}_{TM} := \{\text{imagem}_\pi(U) \cup \mathcal{O}\}.$$

Também é possível equipá-lo com um atlas  $(TM, \mathcal{A})$  que o torne  $C^\infty$  diferenciável.

Nesse sentido, um campo vetorial  $X$  é uma função diferenciável  $X : M \rightarrow TM$ , tal que a composição  $\pi \circ X$  seja a identidade em  $M$ . O campo  $X$  associa a cada ponto de  $M$  um vetor tangente, e quando atua em uma curva ele fornece o vetor tangente em cada ponto da curva. Usando as coordenadas locais de uma carta  $(U, x)$  um campo vetorial pode ser escrito como  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , ele atua em uma função  $f$  como uma derivada direcional

$$\begin{aligned} X(f) &:= \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \\ &= X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Um campo co-vetorial, associa a cada ponto de  $M$  um elemento do fibrado cotangente  $T^*M$  que é a união disjunta dos espaços co-tangentes de todos os elementos de  $M$ , similar ao fibrado tangente.

De um modo mais geral é possível definir um campo tensorial: considere um conjunto de campos vetoriais  $\Gamma(TM)$  e um conjunto de campos co-vetoriais  $\Gamma(T^*M)$ , logo um campo tensorial com  $(p, q)$  é uma aplicação multilinear que associa a cada ponto de  $M$  exatamente  $p$  cópias de  $\Gamma(T^*M)$  e  $q$  cópias de  $\Gamma(TM)$ .

### 1.1.3 Variedades métricas

O tensor métrico possibilita a definição de comprimento de vetores no espaço tangente. Ele coincide com um produto escalar definido em cada espaço tangente  $T_pM$ . Além disso, a partir dele é possível obter o comprimento de curvas, sendo assim, o conceito de curva mais curta entre dois pontos fica bem definido.

Um tensor métrico  $g$  em uma variedade diferenciável  $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  é um campo tensorial  $(0,2)$ , ou seja, uma aplicação  $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições:

- simetria:  $g(X, Y) = g(Y, X)$   $X, Y$  em que,  $X$  e  $Y$  são campos vetoriais. Em um sistema de coordenadas da carta  $(U, x)$  a condição torna-se  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ;
- não-degenerescência: o tensor métrico é um isomorfismo, isto é, que  $g^{-1}$  seja a inversa, em que,  $g^{-1} : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty$ . Mas,  $g^{-1}$  não é exatamente a inversa, no entanto, em um sistema de coordenadas da carta  $(U, x)$  ela torna a inversa pois a condição pode ser reescrita como  $(g^{-1})^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ .

Para ilustrar o conceito, podemos tomar como exemplo a variedade da esfera. A estrutura  $(S^2, \mathcal{O}, \mathcal{A})$  corresponde a uma esfera, mas ela pode ter qualquer formato desde que não seja rasgada em nenhum ponto. Além disso, ela pode ter qualquer tamanho. Suponha um ponto e imagine todas as linhas retas que saem radialmente dele. Uma esfera é qualquer superfície centrada nesse ponto tal que cada linha intersecta exatamente

um elemento da superfície. A métrica fixa o tamanho da variedade, só o tamanho, e por consequência fixa os comprimentos das curvas, áreas das superfícies e os volumes dos espaços que pertencem a variedade.

Caso o tensor métrico seja escrito como uma matriz, a condição de simetria sobre  $g$  garante que a matriz possui autovalores reais e também a possibilidade de diagonalizá-la em um ponto  $p \in M$ . Ou seja, para  $p \in M$  existe uma base em  $T_p M$  tal que essa matriz assume uma forma diagonal.

A *assinatura* de  $g$  são os números de autovalores positivos e negativos de  $g$ . Um tensor métrico é dito riemanniano se possuir assinatura  $(+, \dots, +)$ , no entanto, o espaço-tempo requer uma métrica lorentziana cuja assinatura<sup>4</sup> é  $(-, +, \dots, +)$ .

Um elemento de linha  $ds$  na variedade pode ser escrito usando o tensor métrico

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g(dx, dx), \quad (1.13)$$

também conhecido como métrica.

## 1.2 Espaço-tempo plano

O espaço-tempo é um conjunto de eventos. Para Newton, o espaço era visto como sendo absoluto e euclidiano, ele seria representado por uma variedade métrica  $(\mathbb{R}^3, g)$  com assinatura  $(+, +, +)$ . O tempo também era absoluto, a simultaneidade entre dois eventos era definida a partir dele e era independente do observador. No entanto, esta formulação só é válida para velocidades muito menores que a da luz,  $v \ll c$ , onde os efeitos relativísticos são desprezíveis.

De acordo com a teoria do eletromagnetismo a velocidade da luz,  $c$ , é dada em função da permissividade elétrica ( $\varepsilon_0$ ) e permeabilidade magnética do vácuo ( $\mu_0$ ), ou seja,  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ .

O experimento Michelson e Morley mostra que as equações de Maxwell e a velocidade da luz são as mesmas, independente do movimento de um observador, desde que o movimento seja uniforme.

Einstein postulou que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, e abriu mão do conceito de simultaneidade absoluta entre eventos. Sendo assim, a invariância da velocidade da luz restringe as transformações de referenciais as transformações de Lorentz.

De maneira mais precisa, o espaço-tempo é um variedade lorentziana quadridimensional, que pode ser vista como plana se efeitos gravitacionais forem desconsiderados.

Os sistemas de coordenadas no espaço-tempo são chamadas de observadores ou referencial. As curvas no espaço-tempo, denotada por  $\gamma$ , correspondem a uma sequência de eventos. Fisicamente elas podem ser pensadas como trajetórias de partículas teste e são chamadas de linha do Universo.

É possível parametrizar tais curvas, isto é,  $\gamma(\tau)$  em que  $\tau$  é o tempo medido por um observador naquela linha do Universo (tempo próprio). Um sistema de coordenadas  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  associa quatro números reais a cada evento, sendo que,  $x^0 = t = ct_{convencional}$ . O vetor tangente em cada ponto  $p$  da curva possui as componentes

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{\gamma}_x^\mu \quad (1.14)$$

---

<sup>4</sup>Pode-se também utilizar a assinatura  $(+, -, \dots, -)$ .

este vetor representa a quadrivelocidade de uma partícula. Fisicamente, ela é a variação de espaço-tempo por unidade de tempo próprio ao longo de um segmento da linha do Universo que se aproxime de uma reta. Essas velocidades compõem o espaço tangente.

O espaço-tempo plano, também conhecido como espaço de Minkowski, é um variedade métrica, sendo que,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Logo, a distância entre dois eventos,  $p$  e  $q$ , é

$$S_{pq}^2 = -[x^0(q) - x^0(p)]^2 + [x^1(q) - x^1(p)]^2 + [x^2(q) - x^2(p)]^2 + [x^3(q) - x^3(p)]^2 \quad (1.16)$$

conhecida como distância própria, equivalentemente tem-se o tempo próprio  $\tau_{pq}^2 = -S_{pq}^2$ .

As transformações de Lorentz são mudanças de coordenadas que deixam a distância própria invariante, além disso, é a partir delas que surgem os fenômenos de dilatação temporal e da contração do comprimento.

Usando a métrica obtém-se  $u^2 = \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ , ou seja, a quadrivelocidade é um vetor unitário.

Na teoria da Relatividade, a energia e a massa são vistas em pé de igualdade, sendo assim, o quadrimomento é definido como  $p^\mu = mu^\mu$ , sendo que,  $m$  é a massa de repouso da partícula de teste e  $p^\mu p_\mu = -m^2$ .

Nesse formalismo também é possível reformular a segunda lei de Newton resultando em

$$f^\mu = m \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} p^\mu(\tau) \quad (1.17)$$

em que:  $f^\mu$  é a generalização espaço-temporal da força. Seu formato tensorial permite que essa equação seja invariante sobre as transformações de Lorentz. Por exemplo, uma carga  $q$  com velocidade  $u^\mu$  está sujeita a um força

$$f^\mu = qu^\lambda F_\lambda^\mu \quad (1.18)$$

sendo que,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

é o tensor do campo eletromagnético. Ele é uma maneira compacta de representar o campo elétrico e o magnético.

### 1.3 Curvatura

Na Teoria da Relatividade Geral, a gravidade deixa de ser vista como sendo uma força, ela passa a ser uma propriedade geométrica, isto é, a massa e a energia dão origem a uma curvatura no espaço-tempo que é interpretada como sendo a gravidade.

### 1.3.1 Conexões

É possível definir a derivada direcional de campos tensoriais em uma variedade diferenciável  $(M, O, A)$ . Uma aplicação  $\nabla : X \times T \rightarrow T$  associa um campo tensorial  $\nabla_X T$  a cada par,  $X$  e  $T$ , composto de um campo vetorial  $X$  e um campo tensorial  $T$ . O  $\nabla$  será uma conexão, também conhecida como derivada covariante, caso satisfaça as seguintes propriedades:

- $\nabla_X f = Xf$ , isto é, caso atue sobre um tensor  $(0, 0)$ , a ação é apenas a do campo vetorial  $X$ ;
- $\nabla_X(T + S) = \nabla_X(T) + \nabla_X(S)$ , em que,  $T$  e  $S$  são tensores  $(p, q)$ ;
- $\nabla_X(T(\omega, Y)) = (\nabla_X T)(\omega, Y) + T(\nabla_X \omega, Y) + T(\omega, \nabla_X Y)$ , sendo que,  $\omega$  é um campo co-vetorial,  $Y$  é um campo vetorial e  $T$  é um tensor  $(1, 1)$ . Essa condição pode ser generalizada para um tensor  $(p, q)$ , sendo que, irá aparecer mais termos no lado direito da igualdade. Ela é conhecida como a regra de Leibniz;
- $\nabla_{fX+Z} T = f \nabla_X T + \nabla_Z T$ .

Uma variedade com uma conexão é um conjunto com três estruturas  $(M, O, A, \nabla)$ .

Seja  $p \in M$  e seja uma carta local com coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Dentro dessa carta local tem-se definido os campos vetoriais diferenciáveis  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  que compõem uma base do espaço tangente. Os campos  $X$  e  $Y$  podem ser escritos usando as coordenadas da carta, isto é,  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , logo a derivada covariante  $\nabla_X Y$  é

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &:= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^m \frac{\partial}{\partial x^m} \\ &= X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} Y^m \right) \frac{\partial}{\partial x^m} + X^i Y^m \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^m} \\ &= X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} Y^m \right) \frac{\partial}{\partial x^m} + X^i Y^m \Gamma_{mi}^q \frac{\partial}{\partial x^q}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{mi}^q$  são os coeficientes de conexão, eles especificam totalmente a derivada covariante. Além disso, eles dependem das coordenadas, isto é, não se transformam como tensores.

Na literatura de Física é comum usar a notação  $\partial_i$  para representar  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , sendo a referência às coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  apenas implícita. Além disso, o símbolo  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  é simplificado para  $\partial_i$ .

A expressão  $\partial_i Y$  é denominada a derivada covariante do campo  $Y$  em relação à  $i$ -ésima coordenada. No caso de um campo vetorial  $V^j$  a derivada covariante é escrita como:

$$\partial_i V^j = \partial_i V^j + \Gamma_{ki}^j V^k, \quad (1.21)$$

em algum sentido, ela é a derivada parcial mais um termo  $\Gamma$  que torna o resultado covariante. No caso de um vetor covariante  $\omega_j$

$$\partial_i \omega_j = \partial_i \omega_j - \Gamma_{ij}^k \omega_k. \quad (1.22)$$

### 1.3.2 Transporte paralelo e curvatura

A derivada covariante é o equivalente de uma derivada direcional de um campo vetorial e está ligada a curvatura do espaço. Suponha uma variedade com uma conexão  $(M, O, A, \nabla)$ , um campo vetorial  $X$  em  $M$  é dito ser transportado paralelamente ao longo de uma curva suave  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  se a derivada direcional do campo vetorial for sempre zero na direção da tangente a curva

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0.$$

Uma curva suave  $\gamma$  em uma variedade diferenciável é dita autoparalela se a derivada direcional do campo vetorial tangente da curva ao longo da mesma é zero:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Considerando essa mesma curva, supondo que uma parte dela esteja em uma região  $U$  e que  $(U, x) \rightarrow A$  é uma carta, sendo assim, a condição para que a curva seja paralelamente transportada é

$$\ddot{\gamma}^m(x)(\lambda) + \Gamma_{ab}^m \dot{\gamma}^a(x)(\lambda) \dot{\gamma}^b(x)(\lambda) = 0 \quad (1.23)$$

esta condição também define a noção da “curva mais reta possível” na variedade  $M$ .

A curvatura de Riemann de uma conexão  $\nabla$  é o campo tensorial  $(1, 3)$

$$R(\omega, Z, X, Y) := \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z) \quad (1.24)$$

esse campo é nulo em um espaço plano, caso contrário o espaço é curvo. O tensor de Riemann é construído a partir da derivada covariante, ele mede o quanto a que a derivada covariante falha ao comutar. Além disso, ele é o objeto geométrico que representa a noção de curvatura em três dimensões.

De tal forma que, o tensor de Riemann mede o quanto que você vai falhar ao tentar fazer um transporte paralelo em uma variedade curva.

Tome como exemplo, a Terra representada pela esfera azul na Figura 1.3. Considere uma pessoa posicionada na linha do equador, ponto  $p$ , que olha em direção ao polo norte. Supondo que o campo vetorial em preto represente a direção e sentido do seu nariz. Primeiramente a pessoa caminha em linha reta até o polo norte, em seguida ela caminha para a sua direita até a linha do equador mantendo seu nariz apontado para frente, por final ela caminha para trás até voltar no ponto de partida. E vai notar que o seu nariz aponta em uma direção diferente em relação a direção que apontava quando ela iniciou sua caminhada, mesmo que em cada ponto de sua trajetória ela continuasse olhando para frente. Essa é noção intuitiva de curvatura. O tensor de Riemann mede o quanto que se falha ao tentar transportar paralelamente um campo vetorial ao longo de uma trajetória fechada em um espaço curvo.

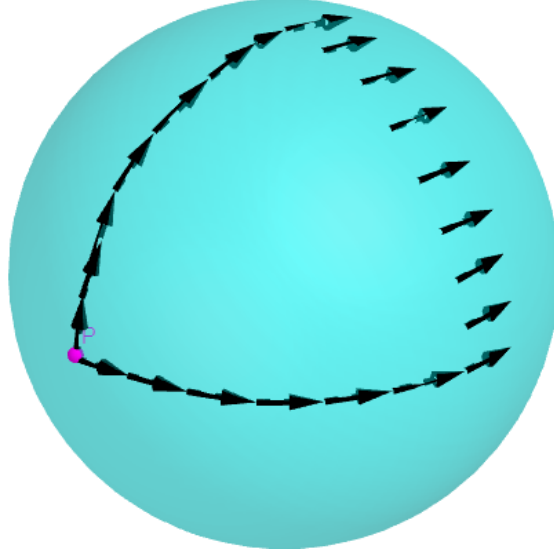


Figura 1.3: a esfera em azul representa o planeta Terra. O campo vetorial em preto representa a direção do nariz de uma pessoa que anda ao longo dessa trajetória. A pessoa parte do ponto  $P$  em rosa. Sua trajetória consiste em partir e retornando do ponto em rosa no sentido horário ou anti-horário. Programa utilizado - Geogebra. Fonte: o autor, 2021.

Em um sistema de coordenadas, é possível reescrever a eq. (1.24) usando os símbolos de Christoffel,

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ik} \Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{ij} \Gamma^l_{pk}, \quad (1.25)$$

ou seja, dada uma conexão a curvatura do sistema fica definida.

A variedade  $(S^n, O, A)$  corresponde a uma esfera, no entanto, apenas essa estrutura é insuficiente para determinar seu formato, podendo ela ter o formato de uma batata ou bola. Uma conexão define a curvatura, sendo assim, ela fixa o formato da variedade.

É possível definir uma conexão em  $(M, O, A, g)$  impondo a condição de que as curvas mais retas são as mais curtas entre dois pontos, essas curvas são as geodésicas. Formalmente uma curva  $\gamma : M \rightarrow M$  é dita ser uma geodésica em uma variedade riemanniana  $(M, O, A, g)$  caso suas componentes, em um sistema de coordenadas, obedeçam a equação

$$\ddot{\gamma}^q_{(x)}(\lambda) + (g^{-1})^{qm} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial_i} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial_m} g_{ij} \right) \dot{\gamma}^i_{(x)}(\lambda) \dot{\gamma}^j_{(x)}(\lambda) = 0 \quad (1.26)$$

conhecida como equação da geodésica.

A condição de que as curvas mais retas são as mais curtas é equivalente a definir os coeficientes de conexão como sendo

$$\Gamma^q_{ij} := (g^{-1})^{qm} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial_i} g_{mj} + \frac{\partial}{\partial_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial_m} g_{ij} \right). \quad (1.27)$$

Tais coeficientes  $\Gamma^q_{ij}$  são conhecidos como os símbolos de Christoffel. E, a conexão obtida a partir deles é conhecida como conexão de Levi-Civita. Esse processo equivale a fixar o tamanho da variedade e por consequência fixar o seu formato.

Outra maneira de construir os coeficientes a partir de  $g$  é impor que a derivada covariante do tensor métrico seja nula. Tendo os símbolos de Christoffel é possível definir a

curvatura de Riemannian-Christoffel que é um tensor (0,4)

$$R_{abcd} := g_{am}R^m_{bcd} \quad (1.28)$$

em que  $R^m_{bcd}$  é o tensor de curvatura riemanniano, da equação(1.24), obtido a partir da conexão de Levi-Civita. A partir da contração de dois índices desse mesmo tensor de curvatura riemanniano obtém-se o tensor de Ricci

$$R_{ab} = R^m_{amb}. \quad (1.29)$$

Também é possível contrair os dois índices do tensor de Ricci com os índices da inversa da métrica , isto é,

$$R = (g^{-1})^{ab}R_{ab} \quad (1.30)$$

que é conhecida como curvatura escalar de Ricci.

Em uma variedade métrica  $(M, O, A, g)$  lorentziana tem-se o tensor de curvatura de Einstein que é definido como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.31)$$

Até este ponto do trabalho foram descritas todas as estruturas matemáticas necessárias para uma compreensão razoável da Teoria da Relatividade Geral. A partir da próxima seção começa a sua descrição Física.

## 1.4 Relatividade Geral

O espaço-tempo relativístico é uma variedade lorentziana  $(M, O, A, g, T)$  sendo  $T$  uma orientação temporal que é dada por um campo vetorial  $T$  tal que:

- em nenhum lugar ele é nulo;
- $g(T, T) > 0$ . Nesse caso, as velocidades que são os vetores do espaço tangente devem estar direcionadas para o futuro, ou seja, apenas um subconjunto de  $T_pM$  é válido fisicamente, pois não faz sentido existir uma velocidade direcionada para o passado.

Além disso, na TRG nenhuma partícula com massa pode ultrapassar a velocidade da luz, sendo assim, os vetores espaço tangente  $T_pM$  ficam restritos ao interior de um cone. Um cone de luz, como mostra a Figura 1.4, os vetores que estão nas bordas do cone representam a velocidade da luz.

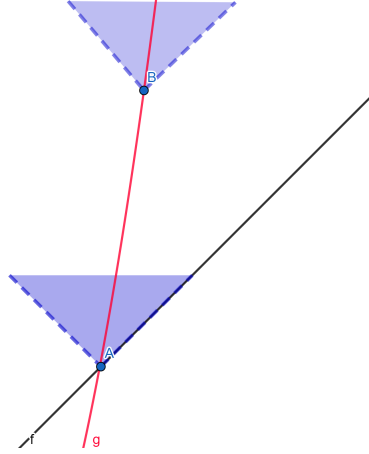


Figura 1.4: as superfícies em azul são os espaços tangentes. A curva  $f$  representa a linha do Universo do cone de luz. A curva  $g$  representa a linha do Universo de uma partícula massiva e a quadrivelocidade dela está restrita ao interior do cone de luz. Programa utilizado - Geogebra. Fonte: O autor, 2021.

Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, ele é plano, e as leis da Física se reduzem àquelas da Relatividade Restrita.

A linha do Universo  $\gamma$  de uma partícula massiva, que é a sua trajetória no espaço-tempo, satisfaz:

- $g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma,\gamma(\lambda)}, v_{\gamma,\gamma(\lambda)}) > 0 \quad \lambda \in I$ ;
- $g_{\gamma(\lambda)}(T, v_{\gamma,\gamma(\lambda)}) > 0 \quad \lambda \in I$ .

sendo que, a vírgula , no índice inferior representa a derivada parcial em relação ao parâmetro  $\lambda$ .

A linha do Universo  $\gamma$  de uma partícula sem massa, sua trajetória do espaço-tempo, satisfaz

- $g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma,\gamma(\lambda)}, v_{\gamma,\gamma(\lambda)}) = 0 \quad \lambda \in I$ ;
- $g_{\gamma(\lambda)}(T, v_{\gamma,\gamma(\lambda)}) > 0 \quad \lambda \in I$ .

Um observador é uma linha do Universo  $\gamma$ , de uma partícula massiva, junto com a escolha de uma base  $e_0(\lambda)$ ,  $e_1(\lambda)$ ,  $e_2(\lambda)$  e  $e_3(\lambda)$  do espaço tangente  $T_pM$  de cada ponto da linha do Universo, tal que

$$g(e_a(\lambda), e_b(\lambda)) = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Um relógio carregado por um observador em específico  $(\gamma, e)$  vai medir um intervalo de tempo

$$\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{\gamma(\lambda)}(v_{\gamma,\gamma(\lambda)}, v_{\gamma,\gamma(\lambda)})} \quad (1.33)$$

entre dois eventos, pontos, no espaço-tempo.



Seja  $(\gamma, e)$  um observador e  $\delta$  a linha do Universo de uma partícula massiva que é parametrizada de tal que  $g(v_\delta, v_\delta) = 1$ . Suponha que o observador e a partícula se encontrem em algum ponto,  $p$ , do espaço-tempo

$$\delta(\tau_2) = p = \gamma(\tau_1).$$

Esse observador mede a velocidade espacial,  $V$ , dessa partícula como

$$V = \epsilon^a(v_{\delta, \delta(\tau_2)})e_a,$$

em que:  $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3$  é a base dual de  $e_0, e_1, e_2, e_3$ . Sendo que, a velocidade que o observador mede não depende do primeiro termo  $\epsilon^0$ .

Na relatividade o objeto fundamental é a velocidade da linha do Universo  $v_\delta$ . E, a partir dela um observador mede a velocidade espacial  $V$ , mas outro observador vai medir outro  $V$  da mesma velocidade  $v_\delta$ . Ou seja, observadores diferentes discordam na medida da velocidade de uma mesma partícula. Neste ponto, entram as transformações de Lorentz, que relacionam as medidas de observadores diferentes de um mesmo ente observado.

A gravidade passa a ser a curvatura do espaço-tempo, ela é o desvio de uma geodésica em relação a outra geodésica próxima, ou seja, a aceleração relativa de uma partícula teste. Um observador não consegue distinguir se está em repouso em um campo gravitacional, ou se está sendo acelerado uniformemente no sentido contrário, esse fato é conhecido como o princípio da equivalência.

A energia curva o espaço tempo, e a proporção com que isso acontece é dada pelas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.34)$$

sendo que  $G$  é a constante de gravitação universal. O tensor de segunda ordem presente no lado direito da equação (1.34) é o tensor de momento-energia  $T^{\mu\nu}$ , ele é definido como sendo o fluxo da componente  $\nu$  do quadrimomento,  $p^\mu$ , na direção  $\nu$  do espaço-tempo.

Uma força real causa um desvio na geodésica, por exemplo, uma pessoa na superfície da Terra possui uma geodésica em direção ao centro da Terra. No entanto, a repulsão coulombiana entre as bases dos pés e o chão provoca um desvio na geodésica que resulta em uma posição estacionária no espaço. A geodésica não acaba, pois ainda tem a componente no tempo.

### 1.4.1 A métrica de Schwarzschild

Uma das soluções mais importantes das equações de Einstein é a de Schwarzschild. Ela descreve o espaço-tempo simetricamente esférico do vácuo, isto é,  $R_{\mu\nu} = 0$ .

É possível mostrar que um espaço simetricamente esférico, em coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , possui a métrica:

$$ds^2 = -e^{1\alpha(t,r)}dt^2 + e^{2\beta(t,r)}dr^2 + rd\Omega^2 \quad (1.35)$$

sendo que,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

Existe uma certa liberdade na escolha da métrica pois  $\alpha$  e  $\beta$  são funções arbitrárias, elas serão determinadas explicitamente ao resolver as equações de Einstein. Para tal, é necessário os símbolos de Christoffel (eq.(1.27)) usando a métrica dada pela eq.(1.35), os

cálculos resultam em:

$$\Gamma_{tt}^t = \partial_t \alpha \quad (1.36)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \partial_r \alpha \quad (1.37)$$

$$\Gamma_{rr}^t = e^2 \beta - \alpha \partial_t \beta \quad (1.38)$$

$$\Gamma_{tt}^r = e^2 \alpha - \beta \partial_r \alpha \quad (1.39)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \partial_t \beta \quad (1.40)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \partial_r \beta \quad (1.41)$$

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad (1.42)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = r e^{-2\beta} \quad (1.43)$$

$$\Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{1}{r} \quad (1.44)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \quad (1.45)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (1.46)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (1.47)$$

os outros termos são nulos.

A partir dos símbolos de Christoffel é possível calcular as componentes não nulas do tensor de Riemannian, isto é,

$$R_{rtr}^t = e^{2(\beta-\alpha)} [\partial_t^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta] + [\partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r)^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2]; \quad (1.48)$$

$$R_{\theta t\theta}^t = -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha; \quad (1.49)$$

$$R_{\phi t\phi}^t = -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha; \quad (1.50)$$

$$R_{\theta t\theta}^r = -r e^{-2\alpha} \partial_t \beta; \quad (1.51)$$

$$R_{\phi r\phi}^t = -r e^{-2\alpha} \sin^2 \theta \partial_t \beta; \quad (1.52)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = r e^{-2\beta} \partial_r \beta; \quad (1.53)$$

$$R_{\phi\theta\phi}^\theta = (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta. \quad (1.54)$$

O tensor de Ricci é obtido a partir da contração do tensor de Riemannian que resulta em

$$R_{tt} = [(\partial_t)^2 \beta (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta] + e^{2(\alpha-\beta)} [(\partial_t)^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha]; \quad (1.55)$$

$$R_{rr} = -[(\partial_t)^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta - \frac{2}{r} \partial_r \beta] + e^{2(\beta-\alpha)} [(\partial_t)^2 \beta + (\partial_t \beta)^2 - \partial_t \alpha \partial_t \beta]; \quad (1.56)$$

$$R_{tr} = \frac{2}{r} \partial_t \beta; \quad (1.57)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1; \quad (1.58)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta; \quad (1.59)$$

Fazendo  $R_{\mu\nu} = 0$  tem-se que a eq. (1.57) resulta em

$$\partial_t = \beta = 0. \quad (1.60)$$

Usando essa equação, a derivada temporal de  $R_{\theta\theta} = 0$  gera

$$\partial_t \partial_r \alpha = 0, \quad (1.61)$$

ou seja, é possível colocar a dependência temporal em apenas uma das funções arbitrárias. Escolhendo  $\beta = \beta(r)$  e  $\alpha = f(r) + g(t)$  resulta em

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.62)$$

dessa expressão fica claro que as componentes da métrica são independentes da coordenada temporal.

Os próximos termos a serem igualados a zero são  $R_{tt}$  e  $R_{rr}$  que resultam em:

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_t \beta). \quad (1.63)$$

Essa última equação implica em  $\alpha = -\beta + \text{constante}$ . Uma reescala apropriada das coordenadas faz com que

$$\alpha = -\beta. \quad (1.64)$$

Fazendo  $R_{\theta\theta} = 0$  gera

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = r \quad (1.65)$$

que é equivalente a

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1. \quad (1.66)$$

Resolvendo essa equação tem-se

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{\dot{u}}{r} \quad (1.67)$$

em que,  $u$  é uma constante indeterminada.

Usando as equações (1.64) e (1.67) tem-se a métrica

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{u}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{u}{r}\right)^{-1} dr^2 + r d\Omega^2. \quad (1.68)$$

Os últimos termos,  $R_{tt}$  e  $R_{rr}$ , mostram que  $u$  é apenas uma constante. Na Teoria da Relatividade Geral,  $u = 2GM$  o que gera a métrica

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r d\Omega^2. \quad (1.69)$$

Essa é a solução de Schwarzschild. Ela descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico, porém desprezando qualquer rotação, sendo assim, é possível considerar uma aproximação para o caso de uma estrela, um planeta ou um buraco negro. É uma boa aproximação para campos gravitacionais de corpos que possuem rotação lenta como a Terra ou o Sol.

## 1.5 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

A cosmologia padrão está fundamentada na Teoria da Relatividade Geral. O modelo consiste em colocar o tensor momento-energia do Universo nas equações de Einstein e analisar a curvatura que ele gera no espaço-tempo.

O sistema de unidades astronômicas é baseado no sistema solar. A distância em que a separação entre o Sol e a Terra subtende um segundo de arco é o parsec, isto é,  $1pc = 3,26$  anos-luz, que no sistema de unidades internacional (SI) é dado por:  $1Mpc = 3,1 \times 10^{22}m$ . De maneira similar, a unidade astronômica padrão de massa é a proveniente da massa do Sol  $M = 1,99 \times 10^{30}Kg$ . Por fim, a luminosidade do Sol é  $L = 3,846 \times 10^{26} \frac{J}{s}$ .

A Via Láctea pertence a um pequeno aglomerado de galáxias chamado Grupo Local, com cerca de outras 25 galáxias. Em geral, os aglomerados observados são compostos de um número muito variado de galáxias, alguns possuem poucas e outros chegam a possuir alguns milhares.

As maiores estruturas do Universo são os superaglomerados de galáxias, suas dimensões são de  $100Mpc$  e estão distribuídos no Universo de uma maneira uniforme. Tais observações são a base na qual se fundamenta a suposição de que o Universo, em grandes escalas, é igual em todos os lugares. Esta suposição é conhecida como o princípio de Copérnico ou princípio cosmológico, e desrespeita a homogeneidade do Universo em escalas

$100Mpc$ , visto que, esta é a escala na qual as interações gravitacionais entre galáxias deixam de ser significativas. Além disso o princípio cosmológico também afirma que o Universo é isotrópico, ou seja, ele é igual em todas as direções.

As observações dos movimentos das galáxias mostram que elas não estão paradas, e que as mais distantes tendem a se afastar da Terra, sendo assim, pode-se afirmar que o Universo é isotrópico e homogêneo no espaço, mas não no tempo.

Logo é possível criar um modelo mais completo do Universo, isto é, o espaço-tempo é  $T \times M$ , em que  $T$  é conjunto que representa os instantes do tempo e  $M$  uma variedade tridimensional, isotrópica e homogênea.

Em cada instante de tempo, medido por um observador em repouso, o espaço é homogêneo e isotrópico, isso corresponde a um caso especial da métrica representada pela eq.(1.35), em que apenas a parte espacial é simetricamente esférica ( $g_{tt} = -1$ ).

A métrica do espaço-tempo consistente com o princípio cosmológico é

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(u)du^i du^j. \quad (1.70)$$

Na eq. (1.70),  $t$  é uma coordenada temporal e  $(u^1, u^2, u^3)$  são as coordenadas do espaço e foram escolhidas de tal modo a manter os termos cruzados da métrica  $dt du^i$  nulos. Uma partícula em repouso nessas coordenadas permanecerá em repouso, e são conhecidas como coordenadas comóveis. Em outras palavras, elas associam uma posição constante à observadores que percebem o Universo como isotrópico. A função  $a(t)$  é o fator de escala, e ela indica o tamanho do espaço em cada instante de tempo.

Seja  $(r, \theta, \phi)$  as coordenadas espaciais, então a métrica para a parte espacial  $M$  é

$$\gamma_{ij}u^i u^j = d\sigma^2 = e^{2\beta(r)} dr^r + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.71)$$

O tensor de Riemann para essa métrica é

$$R_{ijkl}^{\text{esp}} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (1.72)$$

em que, o índice esp significa que esse é o tensor calculado apenas para a métrica espacial  $\gamma_{ij}$ , além disso,  $k$  é uma constante. O tensor de Ricci é dado por:

$$R_{il}^{\text{esp}} = 2k\gamma_{jl}. \quad (1.73)$$

Considerando  $\alpha = 0$  e  $\partial_t = 0$ , têm-se as seguintes componentes do tensor de Ricci:

$$R_{rr}^{\text{esp}} = \frac{2}{r}\partial_r\beta \quad (1.74)$$

$$R_{\theta\theta}^{\text{esp}} = e^{-2\beta}(r\partial_r\beta - 1) + 1 \quad (1.75)$$

$$R_{\phi\phi}^{\text{esp}} = [e^{-2\beta}(r\partial_r\beta - 1) + 1]\sin^2\theta \quad (1.76)$$

Igualando essas componentes a eq.(1.73) e resolvendo a equação para  $\beta$  obtém-se

$$\beta + \frac{1}{2}\ln(1 - kr^2) \quad (1.77)$$

com esse resultado é possível reescrever a métrica do espaço-tempo como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.78)$$

que é conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Analisando a métrica de FRW:

- $k > 0$  nesse o espaço teria uma curvatura positiva constante e seria uma variedade  $S^3$ , ou seja, uma esfera tridimensional - hiperesfera.
- $k < 0$ , ele seria hiperbólico isto é  $H^3$  com uma curvatura negativa constante;
- $k = 0$ , caso em que o espaço não tem uma curvatura, nesse caso ele seria o espaço euclidiano  $\mathcal{R}^3$ .

Os símbolos de Christoffel para essa métrica são:

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}; \quad (1.79)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2; \quad (1.80)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2\theta; \quad (1.81)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}; \quad (1.82)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2); \quad (1.83)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2\theta; \quad (1.84)$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r}; \quad (1.85)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta \cos\theta; \quad (1.86)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot\theta, \quad (1.87)$$

sendo que,  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . As componentes não nulas do tensor de Ricci resultam em

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (1.88)$$

$$R_{rr} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 = 2k}{1 - kr^2}; \quad (1.89)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k); \quad (1.90)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2\theta, \quad (1.91)$$

e o escalar de Ricci tem a forma;

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} = \dot{a}^2 + k). \quad (1.92)$$

Diferente do caso visto no Capítulo 1, aqui a solução para o vácuo não é relevante. O lado direito da equação de Einstein representa a distribuição de matéria e energia e deve possuir as mesmas simetrias que lado esquerdo. O tensor de momento-energia de um fluido perfeito é consistente com a isotropia e homogeneidade, e é escrito da seguinte maneira

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu} \quad (1.93)$$

sendo que,  $U^{\mu}$  é a quadrivelocidade do fluido,  $p$  é a pressão e  $\rho$  é a densidade de energia. Ressaltando que um fluido perfeito não têm tensão de cisalhamento, viscosidade, ou condução de calor.

Em coordenadas comóveis o fluido é isotrópico, ou seja, seu fluxo só tem componentes temporais  $U^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ , logo

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, p, p, p). \quad (1.94)$$

O seu traço resulta em

$$T_{\mu}^{\mu} = -\rho + 3p. \quad (1.95)$$

A conservação de energia  ${}_{\mu}T_t^{\mu}$  gera

$$0 = \partial_t \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (1.96)$$

Todo fluido relevante para a Cosmologia tem a equação de estado

$$p = w\rho, \quad (1.97)$$

em que,  $w$  é independente do tempo. Substituindo a equação de estado na equação de conservação da energia resulta em

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.98)$$

Ao integrar esta última expressão obtém-se:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.99)$$

Existem duas possibilidades para o fluido:

- A primeira é matéria não relativística conhecida como poeira, e descrita por  $w = 0$ . Alguns exemplos são galáxias e estrelas normais pois suas pressões são desprezíveis em comparação a densidade de energia. Um Universo cuja maior parte da energia é devido a poeira possui

$$\rho \propto a^{-3} \quad (1.100)$$

ou seja, conforme o Universo se expande a densidade de partículas diminui.

- A outra possibilidade é o fluido de radiação. Neste caso descreve a radiação eletromagnética ou partículas massivas que se movem a velocidades próximas a da luz. Um Universo onde a maior parte da energia é devido a radiação possui

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (1.101)$$

Logo, a densidade de energia decai um pouco mais rápido, e isto se deve ao fato de que fótons perdem energia proporcionalmente a  $a^1$  devido ao desvio para o vermelho.

Partículas massivas com velocidades relativísticas perdem energia conforme suas velocidades diminuem em coordenadas comóveis, em algum sentido, é como se a expansão fosse mais rápida que a partícula.

Atualmente a razão  $\frac{\rho_{poeira}}{\rho_{radiação}} \approx 10^6$ , de forma que é especulado que o Universo primordial era dominado pela densidade de energia devido a essa radiação.

Ainda existe uma energia devido a ausência de matéria, a energia de vácuo. Ela é introduzida nas equações de Einstein como sendo uma constante

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.102)$$

de maneira equivalente, pode-se definir o tensor de momento-energia para o vácuo como sendo:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}, \quad (1.103)$$

que possui a forma de um fluido perfeito em que:

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (1.104)$$

Nesse caso,  $w = -1$  e a densidade de energia é independente do fator de escala  $a(t)$ . Caso a energia do vácuo seja não nula, ela acaba por dominar a energia do Universo em um futuro muito distante.

Usando o tensor momento-energia de um fluido perfeito nas equações de Einstein e usando a curvatura do espaço-tempo devido a uma simetria homogênea e isotrópica têm-se, para as componentes  $\mu\nu = 00$ :

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho = 3P), \quad (1.105)$$

e para as componentes espaciais  $\mu\nu = ij$ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) \quad (1.106)$$

só existe uma equação para a parte espacial.

É possível usar a equação (1.105) para eliminar a derivada segunda da equação (1.106) resultando em

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.107)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.108)$$

essas duas últimas expressões são conhecidas como equações de Friedmann ([5]).

Dois observadores comóveis separados de uma distância  $l$ , irão se afastar proporcionalmente ao fator  $a(t)$ , e a velocidade de afastamento entre esse observadores será

$$v = Hl \quad (1.109)$$

em que, o parâmetro  $H$  a constante de Hubble, é dada por:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.110)$$

sendo que, o ponto no termo  $\dot{a}$  denota a derivada temporal do fator de escala.

As observações de galáxias distantes mostram que elas estão se afastando da Via Láctea com velocidades proporcionais às suas distâncias. Esse é um fato empírico e é conhecido como a lei de Hubble.

Existem diferentes métodos para se obter o valor da constante de Hubble. É possível calculá-lo usando o desvio para o vermelho de galáxias distantes, bem como usando as anisotropias da radiação cósmica de fundo. Tais métodos não concordam entre si, usando a convenção,

$$h = \frac{H_0}{100} km s^{-1} Mpc^{-1} \quad (1.111)$$

e incorporando as incertezas tem-se  $0,5 < h < 1,0$ .

Outra quantidade importante para a Cosmologia é o parâmetro de densidade definido como:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.112)$$

em que,  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$  é a densidade crítica. A partir desse parâmetro é possível reescrever as equações de Friedmann da seguinte forma:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (1.113)$$

Sendo assim, as possíveis geometrias que descrevem o Universo também podem ser descritas pela relação entre a densidade medida e a densidade crítica:



- Caso  $\rho < \rho_c$   $\Omega < 1$ , o Universo é aberto  $k = -1$  e vai expandir para sempre.
- O Universo é plano,  $k = 0$ , caso  $\rho = \rho_c$   $\Omega = 1$  e também expande para sempre.
- A última possibilidade  $\rho > \rho_c$   $\Omega > 1$  corresponde a um Universo fechado  $k = +1$  expande por um tempo e depois de um certo tempo começa a contrair novamente, em algum sentido, ele é fechado no espaço e no tempo.

Outra quantidade importante é o desvio para o vermelho. Um fóton emitido com frequência  $\omega_1$ , será observado com uma frequência menor  $\omega_0$  conforme o Universo se expande

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_0}. \quad (1.114)$$

Os índices inferiores do fator de escala representam o valor dele nos instantes de observação e emissão da onda. O desvio para o vermelho é definido como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a} - 1. \quad (1.115)$$

O efeito Doppler é a mudança da frequência de uma onda em relação a um observador que está se movendo em relação a fonte. No entanto, em um contexto cosmológico, o observador e a fonte estão parados, a mudança da frequência é devido a expansão do espaço entre eles.

Independente da geometrias específica do Universo, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker possui uma singularidade em  $a = 0$ , que é chamada de “*Big Bang*” e como consequência produz uma densidade e temperatura infinitas. Em geral, singularidades podem existir devido ao sistema de coordenadas adotados, por exemplo o polo sul e o polo norte das coordenadas esféricas da Terra. No entanto, a singularidade do *Big Bang* é diferente, existem teoremas que mostram que essa singularidade é independente das coordenadas e que ela sempre existirá para  $\rho > 0$  e  $p \geq 0$ .

As evidências observacionais mais fortes do modelo do *Big Bang* são o afastamento das galáxias, a abundância de elementos leves e a radiação cósmica de fundo em micro-onda. A idade do Universo é estimado em cerca de 13,8 bilhões de anos.

O próximo capítulo trata dos defeitos topológicos que acreditam-se ter se formado no Universo Primordial logo após o *Big Bang*.

## Capítulo 2

# Transições de Fase e Universo Primordial

As quatro forças de interações básicas existentes na natureza são classificadas como: forças nucleares fraca (ex. interação entre hádrons e léptons) e forte (ex. interação entre glúons), força eletromagnética (interação entre cargas elétricas) e força gravitacional (interação entre massas). Em relação a intensidade: força forte ( $10$ ) > força eletromagnética ( $10^{-2}$ ) > força fraca ( $10^{-13}$ ) > força gravitacional ( $10^{-42}$ ).

Dois dos constituintes da matéria são os quarks e os léptons. Os léptons possuem spin  $\frac{1}{2}$  e interagem por meio da força eletromagnética e da força fraca (interação eletro-fraca). Os quarks também possuem spin  $\frac{1}{2}$ , e eles interagem por meio das força forte e da eletro-fraca. Cada tipo de quark pode ter uma entre três cores, sendo que, a cor é o análogo tridimensional da carga elétrica. As interações entre quarks e léptons são mediadas por partículas de spin-1 chamadas de bósons de gauge. Tomemos como exemplo o fóton, ele é responsável pelas interações eletromagnéticas. Os bósons  $W^\pm$  e  $Z^0$  mediam a interação fraca e oito glúons  $G$  mediam a interação forte.

A TRG trata o tempo e o espaço como sendo componentes diferentes de uma mesma geometria. Para um tratamento relativístico da teoria quântica, o espaço deixa de ser um operador e torna-se apenas um parâmetro, assim como o tempo. Na teoria quântica de campos, a partícula é interpretada como sendo um operador hermitiano. Esse operador é parametrizado pelas coordenadas do espaço-tempo, além disso, obedece as relações de comutações canônicas (conhecida como segunda quantização). O operador a atuar no vácuo  $|0\rangle$ , é uma construção a partir da configuração de mínima energia do campo clássico. Mais precisamente, uma partícula  $\hat{\phi}(x^\nu)$  atua no vácuo  $|0\rangle$  criando o estado  $\hat{\phi}(x^\nu)|0\rangle$ . Em algum sentido as partículas correspondem a um quanta de excitação no campo. Apesar do campo ser espacialmente contínuo, os estados quânticos do campo são discretos. O espaço de estados (espaço de Fock) contém os níveis discretos de energia de um número arbitrário de partículas.

O modelo padrão é uma teoria de calibre (*gauge*) baseada no grupo de simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . A massa das partículas é a consequência da quebra espontânea de simetria do campo de Higgs, isto é, o campo desenvolve um valor esperado no vácuo não nulo e que não é invariante sobre o grupo de simetria. A teoria quântica de campos é construída a partir do vácuo que pode ser qualquer uma das configuração de mínima energia do campo clássico, logo, a lagrangiana que descreve o sistema permanece invariante sobre o grupo de simetria após ocorrer uma quebra de simetria.

## 2.1 Quebra espontânea de simetria

A quebra espontânea de simetria é uma ideia originada na Física da Matéria Condensada, em que uma transição de fase é geralmente acompanhada por uma quebra de simetria. Na fase de maior temperatura, a configuração da variável que descreve o sistema possui um grupo de simetria maior. Nas teorias de partículas elementares, a quebra de simetria é descrita em termos de um campo escalar, o campo de Higgs. O estado fundamental  $|0\rangle$  é caracterizado por um valor esperado não nulo e não exibe todas as simetrias da lagrangiana que o descreve.

### 2.1.1 Simetria discreta

Todos os conceitos fundamentais da quebra espontânea de simetria podem ser visualizados a partir de um modelo simples, isto é, um sistema descrito por um campo escalar real  $\phi$  com simetria de reflexão. Isto é, o sistema é invariante sobre a transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ , e a densidade de lagrangiana que o descreve é

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.1)$$

em que,

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4. \quad (2.2)$$

Esse potencial possui dois mínimos degenerados  $\sigma_\pm = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ , qualquer um deles pode ser usado como estado fundamental, e o valor esperado no vácuo

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \sigma_\pm \quad (2.3)$$

não é invariante sobre a transformação  $\phi \rightarrow -\phi$ , o que corresponde a uma quebra espontânea de simetria.

O tensor momento-energia do campo  $\phi$  é expresso como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - L g_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Na configuração de mínima energia o campo se torna constante e é igual ao valor esperado no vácuo  $\phi = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$ , o que implica em  $T^{\mu\nu} = V(\langle 0 | \phi | 0 \rangle) g^{\mu\nu}$ . Sendo assim, a densidade de energia no vácuo é

$$T_0^0 = \rho_v = -\frac{m^4}{4\lambda}, \quad (2.5)$$

e possui valor em uma escala muito menor que qualquer outra escala de energia fundamental. O que é consistente, pois um valor alto levaria a uma expansão métrica maior do que a observada. É possível tornar a energia de vácuo nula adicionando um o termo  $\frac{m^4}{4\lambda}$  na eq. (2.1), com isso o potencial pode ser reescrito de uma forma mais compacta

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - \sigma^2)^2, \quad (2.6)$$

sendo que,  $\sigma^2 = \sigma_\pm^2$ .

## 2.1.2 Simetrias contínuas

Uma simetria contínua também podem ser quebrada. Tomando como exemplo um sistema descrito por um campo escalar complexo  $\phi$ , cuja densidade lagrangiana é

$$L = (\partial_\mu \bar{\phi})(\partial^\mu \phi) - V(\phi). \quad (2.7)$$

Sendo que,  $\bar{\phi}$  é o complexo conjugado, e o potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\bar{\phi}\phi - \eta^2)^2 \quad (2.8)$$

em que,  $\lambda$  e  $\eta$  são constantes positivas. Este potencial está ilustrado na Figura 2.1 e possui a forma de um chapéu mexicano.

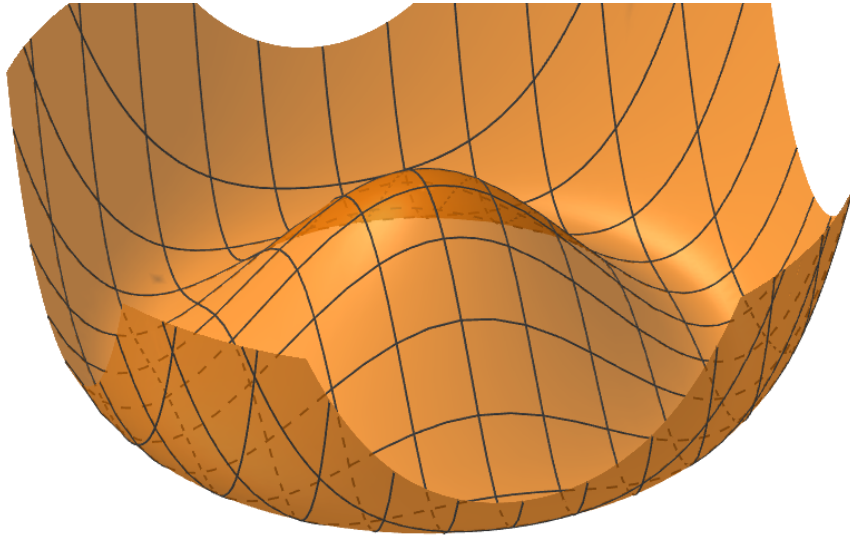


Figura 2.1: Ilustração da forma do potencial  $V(\phi)$ . Programa utilizado - Geogebra. Fonte: o autor, 2021.

A configuração do campo de mínima energia corresponde a  $|\phi| = \eta$ , ou seja, o círculo de mínimo do potencial que é a região em que chapéu mexicano dobra na Figura 2.1. O estado fundamental (o vácuo)  $|\phi_0\rangle$ , é caracterizado por possuir um valor esperado não nulo igual a

$$\langle \phi_0 | \phi | \phi_0 \rangle = \eta e^{i\theta}, \quad (2.9)$$

com uma fase arbitrária  $\theta$ .

A densidade de lagrangiana, eq. (2.7), é invariante sobre transformações que mudam a fase de  $\phi$  globalmente, isto é,

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x). \quad (2.10)$$

Essas transformações constituem um grupo de simetria  $U(1)$ , mais especificamente esse grupo é  $S^1$  ( $S^1, \cdot$ ) em que,  $S^1$  é composto por números complexos de módulo unitário e  $\cdot$  é o produto usual dos números complexos.

O grupo  $U(1)$  é um exemplo de grupo de Lie. E um Grupo de Lie é representado por:  $(G, \cdot)$ , em que,  $G$  é uma variedade diferenciável e as funções  $a$  e  $b$  são contínuas. Assim,

$$a : G \times G \rightarrow G \\ (g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2$$

$$b : G \times G \rightarrow G \\ g \rightarrow g^{-1}.$$

Ou seja, se as operações de multiplicação à direita e inversão forem infinitamente diferenciáveis, sendo  $g \in G$ .

Novamente, a simetria é dita ser espontaneamente quebrada pois o vácuo  $|\phi\rangle$  não é invariante sobre transformações que mudam a fase de  $\phi$ . O estado simétrico em que  $\langle \phi | \phi \rangle = 0$  corresponde a um máximo local de  $V(\phi)$ , que é instável. Todas as configurações de  $\phi$  com diferentes  $\theta$  geram a mesma densidade de lagrangiana, sendo assim, qualquer uma delas serve para descrever a dinâmica do campo.

Usando a configuração com  $\theta = 0$ , pode-se representar  $\phi$  como

$$\phi = \eta \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (2.11)$$

sendo  $\phi_1$  e  $\phi_2$  campos reais, e ambos possuem o valor esperado no vácuo nulo. Usando a equação (2.11) na eq. (2.7) obtém-se que:

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + L_{int}. \quad (2.12)$$

Sendo que, a parte de interação entre os campos,  $L_{int}$ , possui termos cúbicos e de ordem mais alta de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . O campo  $\phi_1$  corresponde a uma oscilação radial a partir de um ponto do círculo  $|\phi| = \eta$  e descreve uma partícula com massa  $\mu = \sqrt{\lambda}\eta$ . O campo  $\phi_2$  corresponde a um movimento em torno do círculo e descreve uma partícula sem massa chamada bósons de Goldstone, e é uma característica recorrente da quebra espontânea de simetrias globais.

A densidade de lagrangiana, eq. (2.7), pode ser modificada para se tornar invariante sobre qualquer grupo  $G$  de transformações globais. Supondo um campo escalar  $\phi_i$  de  $n$ -componentes, uma transformação pode ser realizada a partir da ação de uma representação matricial do grupo  $G$ ,

$$\phi_i \rightarrow \phi_i = D_{ij}(g)\phi_j \quad (2.13)$$

em que,  $D_{ij}$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Os elementos de um grupo de Lie  $G$  de dimensão  $n$  podem ser expressos na forma

$$g = e^{-i\omega_a L^a}, \quad (2.14)$$

sendo  $\omega_a$  um número real arbitrário e  $L^a$  são os geradores do grupo e satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[L^a, L^b] = -if_{abc}L^c, \quad (2.15)$$

em que  $f_{abc}$  são chamadas de constantes de estrutura. A representação adjunta é gerada pelas constantes de estrutura, definidas pela relação de comutação, isto é, os geradores são dados por  $(T^a)_{bc} = -if_{abc}$ .

Um campo  $\varphi = \phi_i$  compostos de  $n$  campos escalares é descrito pela dens. de lagrangiana

$$L = (\partial_\mu \varphi^\dagger)(\partial^\mu \varphi), -V(\varphi). \quad (2.16)$$

Este modelo será invariante sobre a transformação dada na eq. (2.13), caso  $V(D(g)\varphi) = V(\varphi)$ . Esta condição equivale a

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j = 0. \quad (2.17)$$

Se o mínimo do potencial corresponder a uma configuração de  $\phi_i$  com um valor não nulo, então a simetria é espontaneamente quebrada, e o campo  $\phi_i$  possui o valor esperado no vácuo:

$$\langle \phi \rangle = \varphi_0. \quad (2.18)$$

Os modelos com potenciais clássicos são usados para determinar o valor esperado do campo de Higgs  $\phi$ . No entanto, ele é um campo quântico. Tendo em vista que nos tópicos que serão discutidos neste capítulo não será necessário um tratamento rigoroso da Teoria de Campos, as correções quânticas podem ser incorporadas no potencial clássico, isto é,

$$V_{ef}(\phi) = V(\phi) + V_1(\phi) + V_2(\phi) + V_3(\phi) \quad (2.19)$$

em que,  $V_{ef}(\phi)$  é o potencial efetivo à temperatura zero.

Assim, o potencial efetivo é o potencial clássico  $V(\phi)$  somado aos termos  $V_n(\phi)$  que representam o potencial devido a contribuição dos diagramas de Feynman<sup>1</sup> com  $n$  loops fechados.

Uma aplicação do potencial efetivo não relativístico em ordem mais baixa da teoria de perturbação, para um bóson de massa  $m$ , carga  $Q$  e spin zero, aplicado à uma teoria do eletromagnetismo de ordem superior, pode ser visto na referência [6].

## 2.2 Transições de fase

Na Física da Matéria Condensada, algumas transições de fase são acompanhadas de quebras espontâneas de simetrias. No modelo fenomenológico de Landau, as transições de fase são descritas com um parâmetro de ordem sendo que, na fase de maior simetria o parâmetro é nulo. Além disso, a energia livre do sistema é expandida em termos dos invariantes do parâmetro de ordem, refletindo na simetria do sistema físico em questão. No entanto, o modelo descreve a transição de uma forma qualitativa, uma vez que a energia livre não é uma função analítica dos parâmetros de ordem próximo a transição de fase.

De uma maneira similar, as transições de fase no Universo primordial são descritas pelo campo de Higgs que é, em algum sentido, análogo ao parâmetro de ordem. Além disso, o valor esperado no vácuo pode ser pensado como um condensado de Bose composto de partículas de Higgs. A temperaturas finitas, além do condensado, existe uma distribuição térmica de várias partículas e antipartículas [7]. A massa das partículas é determinada pelo valor esperado do campo de Higgs, logo a energia livre do sistema

$$F = E - TS \quad (2.20)$$

---

<sup>1</sup>são diagramas (representações gráficas) propostos em 1940 por Richard P. Feynman no âmbito da Eletrodinâmica Quântica. Atualmente são utilizados nas mais diversas áreas, como em Física de Partículas para o estudo da interação entre partículas. E são diagramas no espaço-tempo.

é uma função de  $\phi$ . A configuração de equilíbrio de  $\phi$  é obtida ao minimizar a energia livre. Em especial, a densidade de energia livre é obtida de forma similar ao potencial efetivo a temperatura zero [8,9], e recebe o nome de potencial efetivo a temperatura finita

$$V_{eff}(\phi, T) = \frac{F(\phi, T)}{V} \quad (2.21)$$

sendo que,  $V$  é o volume. Para o modelo com simetria de reflexão, eq. (2.1), e considerando correções quânticas de um  $loop^2$ , semelhante a expansão da eq.(2.19), tem-se

$$V_{eff}(\phi, T) = V_{ef}(\phi) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-(x^2 + \frac{M^2}{T^2})^{\frac{1}{2}}}) dx \quad (2.22)$$

em que,  $M^2 = -m^2 + 3\lambda\phi^2$ .

### 2.2.1 Transição de primeira ordem

A transição de primeira ordem é aquela na qual o estado do sistema muda de maneira descontínua durante a transição.

A temperaturas muito altas, com relação a temperatura crítica,  $T \gg T_c$ , o potencial possui apenas um mínimo em  $\phi = 0$ . Em  $T > T_c$  um novo mínimo aparece, no entanto, ele não é um mínimo global. Na temperatura crítica, os dois mínimos tornam-se degenerados e são separados por uma barreira de potencial. Abaixo da temperatura crítica, o mínimo  $\phi = 0$  permanece metaestável, o que caracteriza uma transição de primeira ordem.

Se o sistema sofre um super-resfriamento não tão forte, a fase metaestável decai devido à flutuações térmicas. Esse processo dá origem a pequenos domínios da fase de menor simetria  $0/\phi/0 = 0$ . Como a configuração é a de menor energia os domínios crescerão com a evolução do tempo. Nesse caso a termodinâmica e a hidrodinâmica podem dar origem a padrões altamente complexos entre as duas fases.

Para um super-resfriamento forte, o estado metaestável decai devido ao tunelamento quântico através da barreira de potencial. Esse processo dá origem às bolhas esféricas da fase  $0/\phi/0 = 0$ . A superfície da bolha é a região onde as duas fases se dividem e a energia se concentra em suas vizinhanças, além disso, a bolha se expande a uma velocidade próxima a da luz. Nesse caso, a transição acaba quando as bolhas coalescem, isto é, a energia nas bordas termina e fases menos simétricas preenchem o Universo inteiro.

### 2.2.2 Transição de segunda ordem

Em transições de segunda ordem o sistema muda de forma contínua, e o comprimento característico, a distância em que o campo é correlacionado, possui longo alcance (em uma transição ideal ele seria infinito). Como exemplo específico, tem-se o modelo, eq. (2.7, com simetria contínua  $U(1)$  devido a eq. (2.8). Nesse caso, o potencial efetivo à temperatura finita é:

$$V_{eff} = m^2(T)|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 \quad (2.23)$$

sendo que,

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12}(T^2 - 6\eta^2). \quad (2.24)$$

Nesse caso, para  $T > T_c$  existe apenas um mínimo em  $0/\phi/0 = 0$ .

---

<sup>2</sup>em termos do diagrama de Feynman

A temperatura crítica pode ser obtida a partir da expressão (2.24) e corresponde a  $T_c = \bar{6}\eta$ . De maneira geral  $T_c$  é comparável a escala de energia da quebra de simetria e outras constantes de acoplamento. Além disso, não existe barreira de potencial entre as fases metaestáveis de forma que a transição pode ocorrer classicamente.

Para  $T = 0$  existe apenas um mínimo em  $0/\phi/0 = \eta e^{i\theta}$  que corresponde a fase de menor simetria. Na transição, o sistema adquire uma das configuração de mínimo que corresponde a um  $\theta$  específico, e é determinado por flutuações aleatórias. A energia livre é minimizada por um campo homogêneo, logo a variação espacial de  $\theta$  tende a zero.

Outra maneira de quantificar a ordem do sistema é a partir da correlação espacial  $\xi(t)$ , que representa a escala de comprimento acima da qual os valores de  $\theta$  não estão correlacionados, neste sentido, um campo homogêneo corresponde a uma correlação espacial infinita.

Na próxima seção será apresentada como fica a correlação no meio cosmológico no âmbito do Mecanismo de Kibble.

## 2.3 O Mecanismo de Kibble

Em um contexto cosmológico,  $\xi(t)$  é limitado, pois as correlações não podem ser estabelecidas mais rápidas que a velocidade da luz. O horizonte causal é a distância máxima percorrida pela luz desde o *Big Bang*, e é dada por

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{1}{a(t')} dt', \quad (2.25)$$

sendo assim, o comprimento de correlação,  $\xi(t)$ , é limitado pelo horizonte causal

$$\xi(t) < d_H(t), \quad (2.26)$$

aproximando  $d_H \approx t$  tem-se que  $\xi \approx t$ .

Durante as transições de fases com quebras espontâneas de simetria, o campo de Higgs adquire um valor esperado no vácuo. A direção de  $0/\phi/0$  no espaço de configurações de mínima energia (correspondendo a um ponto na variedade do vácuo  $M$ ) depende de flutuações aleatórias.

Para um sistema grande como o Universo, regiões separadas a uma distância maior que o comprimento característico, devem possuir campos com diferentes orientações de  $|\phi|$ . Nas divisões entre essas regiões, o campo de Higgs que descreve a fase  $0/\phi/0 = 0$  assume uma configuração singular e preserva a fase simétrica  $0/\phi/0 = 0$  no espaço limitado pelo núcleo da singularidade.

Além disso, sua estabilidade energética depende dos detalhes da densidade de lagrangiana em questão.

No entanto, quando a singularidade não pode ser desfeita a partir de uma deformação contínua do campo, a configuração correspondente a um defeito topológico, e sua estabilidade depende apenas da topologia da variedade do vácuo  $M$ , ainda que seja energeticamente desfavorável.

O Mecanismo de Kibble<sup>3</sup> (MK) é um conjunto de ideias composto pela descrição da dinâmica de defeitos topológicos e a sua inevitável produção em transições de fase.

---

<sup>3</sup>Mecanismo proposto pelo Físico britânico Sir Thomas Walter Bannernan Kibble (1932-2016), conhecido por Tom Kibble. Artigo relacionado: *Topology of cosmic domains and strings* T W B Kibble 1976 J. Phys. A: Math. Gen. 9 1387



Conforme citado<sup>4</sup> por Ray, 1999 [10]: "Kibble, em 1976, postulou que: 1. Em uma transição de fase o Universo é dividido em domínios da fase das simetrias quebradas, e o parâmetro de ordem varia randomicamente de um domínio para outro. 2. Entre dois domínios, o parâmetro de ordem interpola seguindo a menor trajetória na variedade de vácuo (parâmetro de ordem espacial). Isso é chamado de regra da geodésica"

As ideias centrais desse mecanismo podem ser aplicadas para outros sistemas, eles possuem um comportamento universal que só dependem da dimensão do sistema e do parâmetro de ordem espacial que o descreve.

Um exemplo de estudo de defeitos topológicos em sistema de Matéria Condensada, é no sistema líquido cristalino. Tanto para Cristais Líquidos Termotrópicos (CLTs) [11] como para o Cristal Líquido Liotrópico (CLLs) [1] a correlação entre defeitos e antidefeitos apresentada é próxima a aquela prevista pelo mecanismo de Kibble para o Universo Primordial.

Teorias conhecidas como Grandes Unificadoras, tem como base a unificação das forças fundamentais a altas temperaturas. Em geral, isto corresponde a supor um grupo de simetria maior e uma série de quebras espontâneas de simetria. O Universo primordial era quente o suficiente para possuir tais simetrias e transições de fase necessariamente gerariam defeitos topológicos devido ao mecanismo de Kibble.

## 2.4 Defeitos topológicos

Os defeitos topológicos podem ser observados em sistema de matéria condensada, como citado anteriormente, em sistemas líquidos cristalinos. No caso dos CLTs os defeitos topológicos que surgem após a transição da fase isotrópica para a fase nemática como mostra a Figura (2.2) de uma gota do cristal líquido 5CB obtida por meio da técnica experimental de microscopia óptica de luz polarizada (MOLP). Esta imagem também é conhecida como textura *Schlieren*, que em alemão significa riscas. O encontro de quatro dessas "riscas" é classificado como defeitos  $\pm 1$  [12] e [11]. No caso dos CLLs os defeitos são do tipo  $\pm 1/2$  [1] junção de duas "riscas".

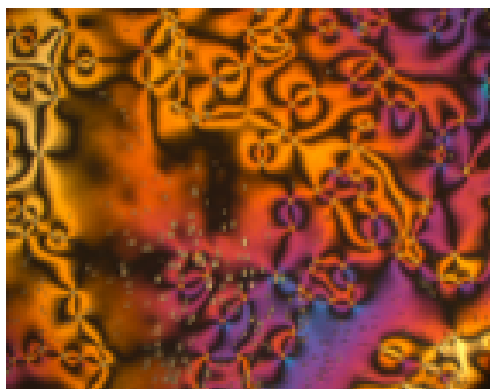


Figura 2.2: foto da textura do CLT 5CB na transição isotrópica-nemática obtida por meio da técnica experimental MOLP apresentando defeitos topológicos tipo corda. Esta imagem foi obtida no laboratório de fluidos complexos da Universidade Estadual de Maringá. O tamanho da imagem é de  $520 \times 390 \mu m^2$ . Fonte : 1001[12].

A estabilidade dos defeitos topológicos e sua classificação depende da topologia da

---

<sup>4</sup>Tradução do autor.

variedade de vácuo  $M$ , sendo assim, é relevante analisar algumas propriedades de espaços topológicos. Seja  $(M, O)$  um espaço topológico. Dois lacetes, isto é, duas curvas  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  e  $\delta : [0, 1] \rightarrow M$  que começam e terminam no mesmo ponto ( $\gamma(0) = \delta(0)$  e  $\gamma(1) = \delta(1)$ ), são ditas homotópicas caso exista um mapa contínuo

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M, \quad (2.27)$$

tal que  $h(0, \lambda) := \gamma(\lambda)$  e  $h(1, \lambda) := \delta(\lambda)$  para  $\lambda \in [0, 1]$ .

Visualmente dois lacetes são homotópicos se for possível deformar um continuamente no outro sem que ele seja rompido em algum momento. Além disso, pode-se estabelecer uma relação de equivalência a partir da homotopia, isto é, se  $\gamma$  e  $\delta$  são homotópicos então  $\gamma \sim \delta$ , esta relação de equivalência define uma classe de homotopia.

O espaço de lacetes em um ponto  $p$  de  $(M, O)$  é

$$L_p := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M / \gamma(0) = \gamma(1)\}.$$

Além disso, o espaço  $L_p$  possui a operação  $\cdot_p := L_p \times L_p \rightarrow L_p$  é definida como

$$(\gamma \cdot \delta) = \begin{cases} 1\gamma(2\lambda) & \text{para } 0 \leq \lambda < \frac{1}{2}; \\ \delta(2\lambda - 1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Essa operação equivale a percorrer primeiro a curva  $\gamma$  e em seguida a curva  $\delta$ , que produz uma nova curva que tem início no começo da primeira e acaba no final da segunda.

Seja  $(M, O)$  um espaço topológico. O grupo fundamental  $\pi_1$  em  $p \in M$  é o conjunto:

$$\pi_1(p) := \mathcal{L}_p / \sim = \{[\gamma] / \gamma \in \mathcal{L}_p\}, \quad (2.29)$$

em que  $\sim$  é uma equivalência homotópica, junto com uma função

$$\cdot : \pi_1(p) \times \pi_1(p) \rightarrow \pi_1(p);$$

$$[\gamma] \cdot [\delta] := [\gamma \cdot \delta].$$

A definição é restrita a um ponto  $p$  do espaço  $M$ . No entanto, se o espaço for conexo por caminhos, o grupo fundamental é igual para todos os pontos. Um grupo é um conjunto e uma operação, no caso do grupo fundamental os elementos de seu conjunto representam os lacetes que são homotópicos entre si.

As curvas são funções que associa cada ponto de um intervalo dos reais  $I = [0, 1]$  a um ponto no espaço topológico  $(M, O)$ . Os lacetes podem ser vistos como uma função contínua que associa o pontos do círculo unitário  $S^1$  a pontos no espaço topológico  $(M, O)$ . Isto se deve ao fato de  $S^1$  ser equivalente ao conjunto quociente do intervalo  $I$  sobre a identificação dos elementos zero e um. Neste sentido, os grupos de homotopia são generalizações do grupo fundamental, eles são os conjuntos de classes de homotopia de funções que mapeiam os pontos de esferas  $n$ -dimensionais,  $S^n$ , no espaço topológico  $(M, O)$ .

Para caracterizar um defeito que possui uma singularidade de dimensão  $t$  em um meio de dimensão  $t$  é necessário o grupo de homotopia  $\pi_i(M)$ , sendo que,

$$i = t - t - 1. \quad (2.30)$$

Nas próximas subseções apresentam-se três tipos de defeitos topológicos que acredita-se que tenham se formado no Universo Primordial após o *Big Bang*.

### 2.4.1 Parede

A não trivialidade do grupo de homotopia  $\pi_0(M)$  presente em variedades não conectadas possibilita a estabilidade de defeitos topológicos do tipo parede, em geral, tais variedades correspondem a uma simetria discreta, isto é,  $M = \mathbb{Z}$ . Considere novamente o modelo de um campo escalar real, descrito na subsecção 2.1.1, ele é dada por uma densidade de lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\nu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \sigma^2)^2 \quad (2.31)$$

e sua variedade de vácuo é  $M = \mathbb{Z}_2$ , isto é, o campo possui o valor esperado no vácuo  $\langle \phi \rangle = \pm \sigma$ .

Defeitos tipo parede são singularidades bidimensionais e ocorrem nas bordas que dividem regiões do espaço com diferentes direções do campo  $\phi$ . Apesar do campo que descreve a fase de menor simetria não ser contínuo, o campo que descreve as duas fases deve ser contínuo entre as regiões com diferentes  $\langle \phi \rangle$ , isso implica que a configuração do campo de um defeito parede deve ser  $\phi = 0$  (falso vácuo) na transição entre as regiões  $\phi = +\sigma$  e  $\phi = -\sigma$ .

Em algum sentido, uma idealização do defeito parede corresponde a uma parede infinita em repouso, por praticidade, considere que ela esteja no plano  $x$ - $y$  posicionada em  $z = 0$ , ou seja, sua variação espacial é nula nas direções  $x$  e  $y$ . Além disso,  $\phi = -\sigma$  em  $z = -\Delta$  e  $\phi = +\sigma$  em  $z = +\Delta$ . Neste caso, as equações de Euler-Lagrange para a eq. (2.31) se reduzem a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \lambda \phi (\phi^2 - \sigma^2) = 0, \quad (2.32)$$

a solução dessa equação é

$$\phi = \sigma \tanh\left(\frac{z}{\Delta}\right), \quad (2.33)$$

sendo que  $\Delta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  e representa a espessura da parede. Observando a densidade de energia superficial nota-se que o gradiente do campo,  $\Delta \times (\partial_z \phi)^2$ , é minimizado ao fazer a parede mais espessa enquanto que o termo potencial,  $\Delta \times V(\phi)$ , é minimizado ao fazer a parede mais fina. O equilíbrio entre esses dois termos corresponde a uma espessura  $\Delta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ .

O tensor momento-energia de um defeito parede pode ser calculado usando a equação (2.4), o que gera

$$T_\nu^\mu = \frac{\lambda \sigma^4}{2} \cosh \frac{z}{\Delta} \text{diag}(1, 1, 1, 0). \quad (2.34)$$

Note que a componente  $z$  da pressão é nula enquanto as componentes  $x$  e  $y$  são iguais a menos a densidade de energia  $T_0^0$ . A densidade superficial de energia associada a parede é

$$n = \int T_0^0 dz = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \lambda^{\frac{1}{2}} \sigma^3, \quad (2.35)$$

de modo similar, a tensão superficial é

$$\int T_i^i dz = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \lambda^{\frac{1}{2}} \sigma^3, \quad (2.36)$$

ou seja, a tensão superficial é igual a energia superficial.

Uma das características recorrentes de defeitos topológicos é que seus efeitos gravitacionais são intrinsecamente não Newtonianos. Em um limite não relativístico,  $T_\nu^\mu =$

$\text{diag}(\rho, -p_1, -p_2, -p_3)$  torna-se a equação de Poisson  $\Delta\phi_N = 4\pi G(\rho + p_1 + p_2 + p_3)$ , em que  $\phi_N$  é o potencial gravitacional clássico, e  $p_i$  são as componentes da pressão. Para um defeito topológico parede plana, tem-se

$$\Delta\phi_N = -4\pi G\rho, \quad (2.37)$$

ou seja, uma partícula de teste é repelida pelo defeito tipo parede, além disso, duas paredes infinitas repelem umas as outras. Tais efeitos gravitacionais só são propriedades das paredes infinitas, por exemplo, o campo gravitacional de uma parede esférica de raio  $R$  equivalente ao campo de uma massa pontual com  $m = 4\pi R^2 n$ .

Defeitos surgirão em modelos que sofrem uma quebra espontânea de uma simetria discreta via o mecanismo de Kibble, ou seja, uma transição de fase no Universo primordial daria origem a uma rede de defeitos do tipo parede separados por uma distância igual a  $\xi$ .

O formato inicial das paredes após a transição é determinado por variações aleatórias de  $\phi/\phi_0$ , sendo assim, serão paredes altamente irregulares que podem ser aproximadas por superfícies aleatórias com raio de curvatura caracterizado por  $\xi$ .

Um defeito parede é uma superfície bidimensional, sendo assim, sua linha do Universo (tubo do Universo) descreve um volume tridimensional (2-espaco,1-tempo) no espaço-tempo. Sua ação é

$$S_p = n \int dv = -n \int \sqrt{-\gamma} d^3\sigma, \quad (2.38)$$

em que,  $dv$  é o volume quadridimensional do espaço tempo,  $\sigma = (\tau, \sigma^1, \sigma^2)$  são as coordenadas da parede. O tubo do Universo possui coordenadas  $x^\mu = (\tau, \sigma^1, \sigma^2)$ , logo

$$\gamma = \det(\partial_\mu x^\alpha(\tau, \sigma^1, \sigma^2) \partial_\nu x^\beta(\tau, \sigma^1, \sigma^2)) g_{\alpha\beta}, \quad (2.39)$$

ou seja, a dinâmica do defeito parede corresponde a minimização do volume de seu tubo do Universo, em outras palavras, o defeito evolui temporalmente de modo a diminuir sua área superficial.

Uma rede de defeitos parede pode ser entendida como um gás perfeito, isto é, efeitos dissipativos devido ao movimento e interação das paredes são desconsiderados. Um gás composto de defeitos com velocidades  $v$ , dentro de uma caixa de volume  $V \gg \xi$ . Um sistema composto de  $N$  paredes infinitas no plano  $xy$  possui um tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu}(z) = \sum_{i=1}^N T_{\mu\nu}^{\text{parede}}(z^i - z), \quad (2.40)$$

sendo que  $z^i = (1, \dots, N)$  e  $T_{\mu\nu}^{\text{parede}}(z^i - z)$  é o tensor momento-energia em um ponto  $z$  devido a uma parede localizada em  $z = z^i$ . Rescrevendo como a integral da soma de deltas de Dirac, tem-se

$$T_{\mu\nu}(z) = \int T_{\mu\nu}^{\text{parede}}(z - z) \sum_{i=1}^N \delta(z - z^i), \quad (2.41)$$

de uma maneira aproximada, o limite de muitas paredes é equivalente a substituir a soma de  $\delta$  pela média do número de paredes em um intervalo entre  $z$  e  $z + dz$ , sendo que,  $\int f(z) dz = N$ . Logo, a média do tensor momento-energia do gás de paredes é

$$T_{\mu\nu} = \frac{\int T_{\mu\nu}(z) dz}{\int dz} = \frac{\int \int f(z) T_{\mu\nu}^{\text{parede}}(z - z) dz dz}{\int dz}. \quad (2.42)$$

Outra aproximação possível é  $f(z) = \frac{1}{L}$ , sendo que,  $L$  é a separação média entre paredes, nesta aproximação tem-se

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{L} \int T_{\mu\nu}^{\text{parede}}(z) dz = \frac{1}{L} W_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

em que,  $W_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia de uma densidade superficial, isto é, ( $W_0^0 = n$ ). Sendo assim, a densidade de energia torna-se

$$\rho_{\text{parede}} = T_0^0 = \frac{n}{L}. \quad (2.44)$$

Em relação a um observador em repouso na caixa, as paredes se movendo a uma velocidade  $v$  na direção  $+\hat{z}$ , logo

$$W_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma^2 n & 0 & 0 & \gamma^2 n v \\ 0 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ \gamma^2 n v & 0 & 0 & \gamma^2 n v \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

com  $\gamma = \frac{1}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}$ . Pode-se calcular  $W_{\nu}^{\mu}$  para paredes movendo-se na direção  $-\hat{z}$  a partir da substituição  $v \rightarrow -v$  na eq.(2.45), com efeito de mudar apenas os elementos fora da diagonal.

Além disso, tais termos somem na média de paredes que se movem  $\pm\hat{z}$ . É possível obter um resultado similar ao considerar paredes que se movem nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Logo a média do tensor momento-energia do gás de paredes que se movem em todas as direções é

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{n}{3L} \begin{pmatrix} 3\gamma^2 n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v^2\gamma^2 - 2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 2) \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

A partir da pressão  $P_{\text{parede}} = -T_i^i$  e da densidade de energia  $\rho_{\text{parede}} = T_0^0$ , tem-se a equação de estado

$$P_{\text{parede}} = \left(v^2 - \frac{2}{3}\right) \rho_{\text{parede}}. \quad (2.47)$$

Os defeitos do tipo parede só são consistentes com a Cosmologia Padrão caso sua escala de energia seja muito pequena [13]. Uma maneira de ver essa inconsistência é a partir da equação de estado.

Como foi visto, caso a densidade de energia seja expressa como  $\rho = \omega P$ , tem-se  $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$  e  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$ . A equação (2.47) mostra que até mesmo um gás composto de paredes em repouso,  $v = 0$ , altera drasticamente o Modelo Cosmológico Padrão, isto é,  $\rho_{\text{parede}} = a^{-1}$ . O gás expandiria junto com o Universo, ou seja, a separação entre as paredes aumentaria proporcionalmente a  $a$ , suas superfícies cresceriam com  $a^2$ , e as massas das paredes são proporcionais as suas áreas.

A inconsistência com a Cosmologia Padrão torna-se clara ao considerar a contribuição da densidade  $\rho_{\text{parede}}$  a densidade de massa total do Universo. Por exemplo, uma parede com tamanho  $H_0^{-1} \approx 10^{28} h^{-1} \text{cm}$  teria uma massa

$$m_{\text{parede}} \approx n H_0^{-2} \approx 4 \times 10^{65} \lambda^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{100 \text{GeV}}\right)^3 g, \quad (2.48)$$

isto corresponde a  $10^{10} \lambda^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{100 \text{GeV}}\right)^3$  vezes a massa total contida em um volume de Hubble.

Além disso, defeitos parede dão origem a grandes flutuações na Radiação Cósmica de Fundo, isto é,

$$\frac{\delta T}{T} \approx G n H_0^{-1} \approx 10^{10} \lambda^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma}{100 \text{ GeV}} \right)^3. \quad (2.49)$$

## 2.4.2 Cordas

Os defeitos topológicos do tipo corda existem em modelos onde a variedade do vácuo  $M$  não é simplesmente conectada. Sendo assim, possui o primeiro grupo fundamental  $\pi_1(M)$  não trivial, ou seja, nem todo lacete  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  pode ser deformado continuamente até um ponto. As diferentes classes homotópicas correspondem aos elementos de  $\pi_1$ , além disso, tais elementos também classificam as diferentes soluções de defeitos do tipo corda.

Uma corda cósmica restringe a fase mais simétrica do campo de Higgs a uma região unidimensional, a espessura da corda é um pouco menor que um próton e um quilômetro dessa corda teria uma massa equivalente a massa da Terra ( $5,972 \times 10^{24} \text{ Kg}$ ).

O modelo mais simples que apresenta defeitos topológicos do tipo corda é a teoria de calibre  $U(1)$ , ela é descrita por um campo complexo  $\Phi$  que interage com o campo eletromagnético. Usando as unidades naturais  $c = \hbar = k_b = 1$  sua densidade lagrangiana é

$$L = D_\mu \Phi D^\mu \Phi^\dagger - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi), \quad (2.50)$$

em que,  $D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ie A_\mu \Phi$  é a derivada covariante,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  e  $A_\mu$  é o quadripotencial eletromagnético, isto é, o potencial escalar na coordenada temporal e o potencial vetor nas espaciais. O potencial  $V(\Phi)$  tem a forma de um chapéu mexicano (Figura 2.1) e é definido como

$$V(\phi) = -\lambda \left( \Phi^\dagger \Phi - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2. \quad (2.51)$$

sendo assim, as equações de movimento são invariante sobre transformações locais de calibre

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi(x) e^{i\alpha(x)}; \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{ie} \partial_\mu \alpha(x), \end{aligned}$$

em que,  $\alpha$  é uma fase angular arbitrária. Além disso, essas transformações devem ser feitas simultaneamente para manter a invariância.

O modelo possui uma temperatura crítica  $T_c$  que é da mesma ordem que  $\sigma$ . A baixas temperaturas tem-se  $\Phi = \frac{\sigma}{2} e^{i\alpha}$ .

Em uma transição de fase o campo vai escolher uma dentre as possíveis configurações de mínima energia  $|\Phi| e^{i\alpha}$ , sendo que, a escolha de  $\alpha$  é aleatória.

A solução das equações de movimento desse modelo que corresponde a configuração de um defeito tipo corda foi encontrada por Nielsen e Olesen [14]. Uma corda infinita na direção de  $z$  tem um campo que, à distâncias grandes do eixo  $z$ , possui a forma assintótica

$$\Phi = \frac{\sigma}{2} e^{iN\theta} \quad (2.52)$$

$$A_\mu = \frac{1}{ie} \partial_\mu \left( \Phi - \frac{\bar{2}}{\sigma} \right). \quad (2.53)$$

Sendo  $\theta$  um ângulo polar no plano  $x-y$  e  $N$  é o número de enrolamento, a carga topológica do defeito, ele representa o número de voltas que uma curva (mapeamento de uma esfera

$S^1$  em torno da corda) dá em volta da variedade de vácuo. O tensor eletromagnético e a derivada covariante

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.54)$$

$$D_\mu \Phi = 0. \quad (2.55)$$

Não existe uma solução geral para as equações acopladas (2.52) e (2.53). De uma forma aproximada, em coordenadas polares, tem-se

$$\Phi = \frac{\sigma}{2} \left[ 1 - e^{\frac{-r}{r_1}} \right] e^{i\theta} \quad (2.56)$$

$$A_\theta = \frac{\left[ 1 - e^{\frac{-r}{r_2}} \right]^2}{er} \quad (2.57)$$

sendo que,  $r_1$  e  $r_2$  são proporcionais a  $\sigma^{-1}$  e dependem da carga do elétron e da constante  $\lambda$  [15].

A corda pode ser vista como um objeto unidimensional ao considerar que seu comprimento é muito maior que sua espessura, logo, sua densidade de energia é linear e possui a forma

$$\mu = \int_0 \int_0^{2\pi} r dr d\theta \left[ \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - ieA\Phi \right|^2 + V(\Phi) + \frac{B^2}{2} \right], \quad (2.58)$$

em que,  $\vec{B} = \vec{r} \times \vec{A}$  é o campo magnético associado ao campo de calibre devido a  $U(1)$ . Ele não é exatamente o campo magnético pois o eletromagnetismo é descrito por um modelo mais sofisticado, a eletrodinâmica quântica de campos.

O fluxo magnético dentro de uma corda é  $N(\frac{2\pi}{e})$  e recebe o nome de vórtice.

Encontrar o tensor momento-energia de uma corda é um problema muito difícil, uma solução exata ainda não foi encontrada. No entanto, é possível obter a solução para o caso de uma corda reta e infinita ao assumir que a espessura da corda seja muito menor que suas outras dimensões e que sua escala de energia não seja muito grande [16], isto é,

$$T_\nu^\mu = \mu \delta(x) \delta(y) (1, 0, 0, 1). \quad (2.59)$$

Assim como no caso de paredes infinitas, a pressão (tensão linear) é negativa e igual a menos a densidade de energia o que gera efeitos gravitacionais não newtonianos. Uma corda cósmica finita de raio  $R$  gera um campo gravitacional que, a grandes distâncias do centro da corda, se assemelha ao campo de uma massa pontual, sendo  $\frac{\dot{L}}{L} m = 2\pi R \mu$ .

Uma corda infinita localizada no eixo  $z$  possui  $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, 0, 0, \rho)$ , sendo assim, no limite clássico a equação de Poisson torna-se

$$\Delta \phi = 0, \quad (2.60)$$

o fato do lado direito da equação ser nulo sugere que uma corda cósmica reta não gera uma força gravitacional. Em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , a métrica de uma corda reta é

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\theta^2, \quad (2.61)$$

no entanto, esta solução só é válida para  $G\mu \ll 1$  [17].

O espaço-tempo devido a uma corda reta se assemelha ao espaço-tempo plano de Minkowski, a única diferença é que o ângulo polar pode assumir valores limitados entre

$$0 < \theta < 2\pi(1 - 4G\mu). \quad (2.62)$$

Em algum sentido, o espaço contrai na direção polar por um ângulo  $\Delta\theta = 8\pi G\mu$ , ou seja, uma superfície de  $t$  e  $z$  constantes possui a geometria de um cone ao invés de um plano como pode ser visto na Figura 2.3. Este efeito é conhecido como a singularidade cônica.

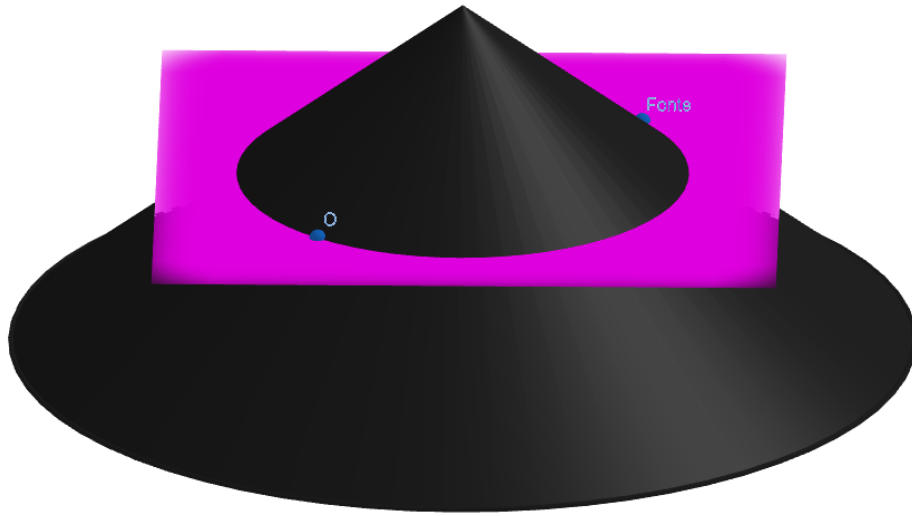


Figura 2.3: O plano em rosa representa o espaço-tempo plano, o cone em preto seria o espaço-tempo devido a singularidade cônica. Um feixe de luz que saísse da fonte iria percorrer o caminho na superfície do cone até o observador  $O$ . Imagem feita utilizando o Geogebra. Fonte: o autor, 2021

Uma das consequências da singularidade cônica é a formação de imagens duplas de um objeto.

Uma corda reta e infinita normal ao plano que contém um observador e uma fonte de luz faz com que o observador veja duas imagens com uma separação angular de  $\delta\alpha$  dado por

$$\delta\alpha = 8\pi G\mu \frac{l}{d+l}, \quad (2.63)$$

[18] sendo  $d$  a distância entre o observador e a corda, e  $l$  é a distância entre a corda e a fonte.

Um observador veria duas imagens do mesmo ponto da última superfície de espalhamento da radiação cósmica de fundo caso houvesse uma corda entre eles. No limite  $d \ll l$ , as fontes de luz vistas pelo observador ficam separadas por uma distância angular igual a os pontos ficam separados por uma distância angular igual a  $\delta\alpha$

O movimento da corda iria gerar variações na temperatura da radiação de fundo devido ao efeito Doppler. Se  $v$  é a componente da velocidade na direção perpendicular à linha de observação, então a variação na temperatura [19, 20] através da corda é

$$\frac{\delta T}{T} = 8\pi G\mu v. \quad (2.64)$$



Isso só é consistente com a isotropia da Radiação Cós mica de Fundo caso as cordas cósmicas existentes atualmente possuam uma escala de energia

$$G\mu \lesssim 10^{-5}. \quad (2.65)$$

O movimento das cordas também faz com que a matéria, próxima a corda, adquira uma velocidade em direção ao plano definido pela sua trajetória. Tal efeito pode ter sido crucial para a formação de estruturas no Universo [21–23].

As transições de fase no Universo primordial originariam uma rede de cordas cósmicas de acordo com o Mecanismo de Kibble. Logo após sua formação, a rede seria composta de cordas infinitas e cordas fechadas. A expansão do Universo faz com que a rede se expanda, sendo assim, as cordas se esticariam, este efeito é predominante em escalas maiores que  $H^{-1}$ . Em escalas menores que  $H^{-1}$ , as cordas evoluirão de modo a minimizar suas curvaturas devido suas tensões.

Assim como no caso de paredes, a rede de cordas pode ser tratada como um gás perfeito. O tensor momento-energia de um conjunto de cordas, com velocidades média  $v_c$ , pode ser obtido de maneira similar a aquela apresentada na seção anterior, ou seja, fazendo as médias obtém-se

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{\mu}{3L^2} \begin{pmatrix} 3\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v^2\gamma^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (v^2\gamma^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

em que,  $L$  é a separação média entre as cordas. A equação de estado para um gás de cordas é

$$p_c = \left( \frac{2}{3}v_c^2 - \frac{1}{3} \right) \rho_c, \quad (2.67)$$

dessa equação fica claro que  $w = \frac{p_c}{\rho_c}$ , logo  $\rho_c \propto a^{-3(1+w)}$  e  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$ . No entanto, esta análise está incompleta, e para uma descrição consistente da rede de cordas é necessário levar em conta alguns efeitos adicionais.

O primeiro deles é que segmentos de cordas que se interseccionam sofrem um corte no ponto de intersecção. Esse processo faz com que cordas grandes sejam continuamente cortadas em pedaços menores.

Suponha duas cordas, tal que, os mapeamentos de esferas  $S^1$  ao entorno de cada corda corresponda aos lacetes  $\alpha$  e  $\beta$  na variedade de vácuo. O resultado devido ao cruzamento entre essas duas cordas é determinado pelo lacete  $\xi$  [7]. É possível mostrar que esse lacete corresponde ao elemento

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \xi, \quad (2.68)$$

em que, o  $\alpha$  e  $\beta$  começam e terminam no mesmo ponto  $p$ , que é mantido fixo.

Se  $\pi_1(M)$  for abeliano, os elementos comutam, sendo assim,  $\xi$  é equivalente ao elemento identidade. É topologicamente possível que duas cordas passem através uma da outra sem que nada ocorra.

Existe outra possibilidade, as cordas podem se reconectar no ponto de intersecção caso  $\alpha = \beta^{-1}$  como mostra a Figura 2.4, as cordas resultantes correspondem a junção dos segmentos opostos das cordas anteriores ao cruzamento. Em algum sentido, é como se houvesse uma troca de padrões. Este processo é conhecido como inter-comutação. Após a reconexão, as cordas coalescem e se aniquilam no ponto de intersecção, em seguida elas se afastam devido a suas tensões. Se houver energia o suficiente após a reconexão, um falso

vácuo do campo de Higgs pode surgir em forma de uma corda fechada muito pequena, ela rapidamente coalesce e se aniquila.

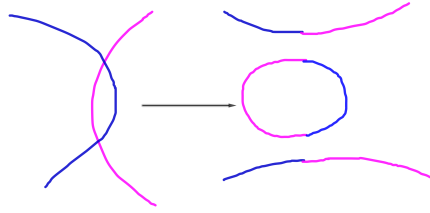


Figura 2.4: Ilustra a intercomutação de duas cordas e a formação de uma corda pequena fechada. Esse *loop* vai coalescer e sumir, e minimizar a sua energia. Imagem feita utilizando o Geogebra. Fonte: o autor, 2021

Apesar dos dois resultados serem topologicamente aceitáveis, qual deles ocorrerá depende dos detalhes da dinâmica da teoria de campos em questão. Simulações numéricas sugerem que na maioria dos casos (probabilidade  $\approx 1$ ) as cordas irão inter-comutar [24,25].

Outro efeito importante na evolução da rede é o decaimento de pequenas cordas fechadas a partir da emissão de ondas gravitacionais. Quando o raio de curvatura  $R$  da corda é muito maior que sua espessura  $\delta$ , a corda pode ser tratada como um objeto unidimensional. Sua trajetória forma uma superfície bidimensional no espaço-tempo, denominado de uma folha do Universo (linguagem no âmbito da teoria de cordas). Usando o sistema de coordenadas  $\zeta^a = (\zeta^0, \zeta^1)$  para parametrizar a folha do Universo,

$$x^\mu = x^\mu(\zeta^a). \quad (2.69)$$

Pode-se escrever o intervalo de espaço-tempo entre dois pontos vizinhos na folha do Universo como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu d\zeta^a d\zeta^b, \quad (2.70)$$

em que,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica quadridimensional. Logo, a métrica bidimensional para a folha de Universo é dada por

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu, \quad (2.71)$$

e o tensor contravariante  $\gamma^{ab}$  pode ser definido como  $\gamma^{ab} \gamma_{ab} = \delta_b^a$ .

Partindo do fato de que  $R \ll \delta$  e de que a densidade de lagrangiana é proporcional a menos a densidade de energia  $-\mu$ , a ação para a folha do Universo pode ser escrita de uma forma simples

$$S = -\mu \int \sqrt{-\gamma} d^2\zeta, \quad (2.72)$$

sendo  $\gamma$  o determinante de  $\gamma_{ab}$ . Conhecida como ação de Nambu<sup>5</sup>, ela mostra que uma corda evolui de modo a minimizar a área de sua folha do Universo, ou seja, uma corda diminui seu comprimento para minimizar sua energia.

<sup>5</sup>Ação proposta por Yoishiro Nambu e Goto Tetsuo, Físicos Japoneses. A saber, Yoishiro Nambu foi um dos responsáveis sobre a descoberta do mecanismo de quebra de simetria espontânea na física subatômica. Nambu juntamente com mais dois Físicos Japoneses, Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa, foram os Prêmios Nobel em Física de 2008, com o trabalho que explica como ocorre a violação de um tipo de simetria. Esses dois trabalhos levaram os Físicos a compreender o mecanismo responsável pelo surgimento do Universo.

Considerando o espaço-tempo plano  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e variando a ação eq. (2.72) em relação a  $x^\mu(\zeta^a)$  obtém-se a equação de movimento

$$\partial_a = (\overline{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_b x^\mu) = 0. \quad (2.73)$$

Além disso, a ação de Nambu é invariante sobre mudança de coordenadas, ou seja, a folha do Universo pode ser parametrizada livremente. Uma escolha conveniente é  $\gamma_{01} = 0$  e  $\gamma_{00} = \gamma_{11} = 0$ , usando  $\gamma_{ab} = g_{\mu\nu}\partial_a x^\mu\partial_b x^\nu$  tem-se

$$0 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^1}, \quad (2.74)$$

$$0 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^0} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^1}. \quad (2.75)$$

Usando  $t = x^0 = \zeta^0$ , a trajetória da corda torna-se um vetor  $\vec{x}(\zeta, t)$ , sendo assim, as duas últimas equações podem ser reescritas como

$$0 = \dot{x} \cdot x, \quad (2.76)$$

$$0 = \dot{x}^2 + x^2. \quad (2.77)$$

A equação de movimento também pode ser reescrita de uma maneira simples

$$\ddot{\vec{x}} - \vec{x} = 0, \quad (2.78)$$

uma corda fechada de raio  $R$  oscila relativisticamente com um período  $\tau \sim R$ . Conforme oscila ela irá irradiar ondas gravitacionais devido a variação temporal de seu momento de quadrupolo,  $Q \sim \mu R^3$ . A potência irradiada é dada por

$$P_{og} = C_{og} G \mu^2, \quad (2.79)$$

em que  $C_{og}$  é uma constante de ordem 100 [26].

O tempo característico  $\tau_{og} \sim (C_{og} G \mu)^{-1} R$  é o tempo que leva para uma corda fechada irradiar toda sua energia. Nesse período, a corda oscilará por volta de  $10^{-2} (G \mu)^{-1}$  vezes. Por fim, ela colapsa a um ponto e some fazendo com que reste apenas a fase de menor simetria.

Em um tempo  $t$  a menor das cordas tem um tamanho característico  $R_{\min} \sim C_{og} G \mu t$  e possui uma energia mínima de  $E_{\min} \sim C_{og} G \mu t^2$ .

Simulações numéricas [27, 28] mostram que, em uma rede de cordas cósmicas, as cordas infinitas contribuem com a maior parte da densidade de energia e são geralmente poucas, uma por horizonte. O restante da energia é devido às cordas fechadas que possuem um regime de escala. Além disso, as simulações também sugerem que a densidade de energia em um Universo dominado por radiação deve ser aproximadamente de

$$\rho_c \sim 30 \frac{\mu}{t^2} \sim a^{-4}, \quad (2.80)$$

e a razão,

$$\frac{\rho_c}{\rho_r} \sim 30 \frac{32\pi}{2} G \mu \quad (2.81)$$

permanece fixa ao longo do tempo.

Em um tempo  $t$  a densidade de cordas fechadas com energia entre  $E$  e  $E + dE$  é aproximadamente

$$n_{cf}(E, t)dE = 0,3 \left(\frac{\mu t}{E}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{dE}{Et^3}. \quad (2.82)$$

Portanto, de uma maneira não muito precisa, a densidade de energia devido a cordas fechadas é

$$\rho_{cf} = \int_{E_{min}}^{\mu t} E n_{cf} dE = 0,6 \mu^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} E_{min}^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.83)$$

lembrando que  $E_{min} = C_{og} G \mu t^2$  tem-se

$$\rho_{cf} = (C_{og} G \mu)^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu}{t^2}, \quad (2.84)$$

sendo assim, a densidade escala da mesma maneira que as cordas longas ou seja, com  $a^{-2}$ .

No intervalo de tempo  $t = t + dt$  as cordas fechadas terão um tamanho  $R = R + dR$ , ou seja,

$$C_{og} G \mu t = C_{og} G \mu (t + dt). \quad (2.85)$$

Como foi visto, ao diminuírem seus comprimentos elas irradiam ondas gravitacionais. Usando a equação (2.82) e levando em conta que o fato de que ondas gravitacionais são desviadas para o vermelho, efeito Doppler, com  $a^{-4}$ , tem-se

$$\dot{\rho}_{og} + 4H \rho_{og} = \left(\frac{G\mu}{C_{og}}\right)^{\frac{1}{2}} (Gt^3)^{-1}, \quad (2.86)$$

sendo  $\rho_{og}$  a densidade de energia das ondas gravitacionais emitidas pelas cordas fechadas.

De maneira equivalente, pode-se reescrever a última expressão como

$$a^{-4} \frac{d}{dt} (a^4 \rho_{og}) = \left(\frac{G\mu}{C_{og}}\right)^{\frac{1}{2}} (Gt^3)^{-1}. \quad (2.87)$$

Assumindo que o Universo é dominado por radiação com densidade de energia  $\rho_r = \frac{3}{32\pi G t^2} a^{-4}$  e substituindo na equação (2.87) obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_{og}}{\rho_r}\right) = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{G\mu}{C_{og}}\right)^{\frac{1}{2}} t^{-1}. \quad (2.88)$$

Se a rede de cordas se formou em um tempo  $t_{form} = \frac{m_{pl}}{\mu}$ , então o tempo que ela começou a irradiar ondas gravitacionais será aproximadamente  $t_i = (C_{og} G \mu)^{-1} t_{form}$ .

É possível obter a razão entre a densidade de radiação e a densidade de ondas gravitacionais devido a cordas fechadas, para tal é necessário integrar a expressão (2.88) de  $t_i$  até um tempo arbitrário  $t$ , o que resulta em

$$\frac{\rho_{og}}{\rho_r} = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{G\mu}{C_{og}}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{t}{t_i}. \quad (2.89)$$

Uma das possíveis maneira de detectar uma corda seria procurar pelas ondas gravitacionais geradas durante a vida da rede de defeitos. De alguma forma, a rede deixaria uma radiação cósmica de fundo de ondas gravitacionais.

### 2.4.3 Monopolos

Os defeitos topológicos do tipo monopolo surgem em teorias em que a variedade de vácuo possui o segundo grupo de homotopia  $\pi_2(M)$  não trivial, ou seja, superfícies bidimensionais como a esfera  $S^2$  não podem ser contraídas a um ponto. Se  $G$  for simplesmente conectado, então

$$\pi_2\left(\frac{G}{H}\right) = \pi_1(H). \quad (2.90)$$

Caso  $G$  não seja simplesmente conectado, a expressão anterior é modificada, isto é,

$$\pi_2\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{\pi_1(H)}{\pi_1(G)}. \quad (2.91)$$

Um grupo semi-simples  $G$  que é quebrado em um subgrupo  $H$  que contém  $U(1)$  explicitamente

$$G = K \times U(1) \quad (2.92)$$

gera  $\pi(H)$  não trivial. Sendo assim, a solução de tipo monopolo deve existir [29, 30] por que  $\pi(U(1)) = \mathbb{Z}$ . Eles possuem cargas que correspondem aos elementos do grupo de homotopia. Além disso, defeitos de cargas topológicas opostas são aniquilados mutuamente. O núcleo do monopolo é formado pela fase de maior simetria do campo de Higgs.

O modelo mais simples que apresenta monopolos é a teoria de calibre  $SO(3)$ . Ela possui o padrão de quebra de simetria

$$SO(3) = U(1) \quad (2.93)$$

e é descrita por uma densidade lagrangiana da forma:

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \Phi^a D^\mu \Phi^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{8} \lambda (\Phi^a \Phi^a - \sigma^2)^2, \quad (2.94)$$

em que,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e \epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.95)$$

e

$$D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^a - e \epsilon_{abc} A_\mu^b \Phi^c. \quad (2.96)$$

Este modelo é descrito pelo vetor  $\Phi^a$ , suas componentes são campos escalares, no entanto, ele não é um vetor no espaço de Minkowski como  $x^\mu$  e  $p^\mu$  o são. Ele é um vetor no espaço do grupo de simetria, no sentido de que os elementos de  $SO(3)$  atuam nele rotacionando-o.

A minimização do potencial tem o efeito de fixar a magnitude  $|\Phi| = \sigma$ , no entanto, a direção no espaço do grupo é arbitrária. A minimização do termo com gradiente faz com que  $\Phi^a(\vec{x}) = \text{constante}$ . Outra maneira de sumir com a dependência espacial da direção de  $\Phi^a$  é usando uma transformação de calibre, isto é, escolher  $A_\mu^a(\vec{x})$  de tal modo a anular  $D_\mu \Phi^a$ .

A configuração de monopolo possui uma dependência espacial que não some com nenhuma transformação de calibre. Esta configuração é esfericamente simétrica e conforme  $r$

$$\Phi^a(r, t) = \sigma \hat{r}, \quad (2.97)$$

$$A_\mu^a(r, t) = \frac{\epsilon_{\mu ab} \hat{r}^b}{er}. \quad (2.98)$$

A condição de continuidade força o campo de Higgs a ser nulo no limite  $r \rightarrow 0$ , sendo assim, seu núcleo é composto da fase mais simétrica e possui um tamanho da ordem de  $\sigma^{-1}$ .

Existe um campo magnético associado ao monopolo, a grandes distâncias  $r \rightarrow \infty$  ele assume a forma

$$B_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = \frac{\hat{r}_i \hat{r}^a}{er^a}. \quad (2.99)$$

Essa configuração corresponde ao campo magnético de um monopolo magnético com carga  $h = \frac{1}{e}$ .

A teoria possui um monopolo magnético como consequência não como entidade fundamental. Em algum sentido, ele aparece como da solução do campo clássico que só depende da topologia do valor esperado no vácuo.

A energia de um monopolo é composta da energia no vácuo presente no núcleo, e da energia devido a variação espacial do campo, e ela pode ser calculada usando a expressão

$$E = - \int \mathcal{L} d^3x. \quad (2.100)$$

Fazendo  $\Phi^a = \frac{H(r)}{\hat{r}^a}$ ,  $A_0^a = 0$  e  $A_i^a = \epsilon^{aij} \hat{r}_j (a - H(r))/er$  tem-se

$$E = \frac{4\pi}{e^2} \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\partial K}{\partial r} \right)^2 + \frac{(k^2 - 1)^2}{2r^2} + \frac{H^2 K^2}{r^2} + \left( r \frac{\partial H}{\partial r} - H \right)^2 \frac{1}{2r^2} + \frac{\lambda r^2}{8e^2} \left( \frac{H^2}{r^2} - \sigma^2 e^2 \right)^2 \right] dr. \quad (2.101)$$

As funções  $H(r)$  e  $K(r)$ , assim como a massa do monopolo  $m_M$ , dependem da razão  $\frac{\lambda}{e}$ .

Em geral, não existe um solução fechada para essas funções. No limite de Prasad-Sommerfield [31],  $\frac{\lambda}{e} \rightarrow 0$ , a solução é

$$K(r) = \frac{\frac{r}{r_0}}{\sinh \frac{r}{r_0}}; \quad (2.102)$$

$$H(r) = \left( \frac{r}{r_0} \right) \coth \frac{r}{r_0} - 1; \quad (2.103)$$

$$m_M = \frac{4\pi\sigma}{e}, \quad (2.104)$$

em que  $r_0 = (e\sigma)^{-1}$ .

Na transição de fase, a direção  $\Phi^a$  do valor esperado no vácuo é determinado aleatoriamente.

Defeitos do tipo monopolo surgirão via o mecanismo de Kibble, isto é, seu comprimento de correlação é limitado pelo horizonte causal  $d_h \sim H^{-1} \sim m_{pl}/T^2$ . Deve existir cerca de um monopolo, ou antimonopolo, por volume de horizonte,

$$n_M \sim d_H^{-3} \sim \frac{T_c}{m_{pl}^3}. \quad (2.105)$$

A densidade de entropia na temperatura crítica é  $s \sim T_c^3$ , sendo assim, a razão entre o número de monopolos e a densidade de entropia

$$\frac{n_M}{s} \sim 10^{-13}. \quad (2.106)$$

Como o processo de aniquilação é pouco significativo, esta última razão, eq. (2.106), fica constante.

Existem outros modelos que apresentam monopolos, os mais conhecidos são as teorias de grande unificação (GUT). Elas tentam unificar as interações eletromagnéticas, forte e a fraca em só um grupo de simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  e monopolos existirão devido ao grupo  $U(1)$ .

Em tais teorias, a transição de fase, de segunda ordem ou fraca de primeira, ocorre a uma temperatura  $T_c \sim 10^{14} GeV$  e a massa dos monopolos que ela produz é  $m_M \sim 10^{16} GeV$ , ou seja, são supermassivos. Sua massa é comparável a de uma Amoeba, o protozoário.

A abundância de monopolos é

$$\frac{n_M}{s} \sim 10^{-13}. \quad (2.107)$$

Sendo assim, a densidade de monopolos no presente seria de  $10^{11} \rho_c$ , ou seja, cem bilhões de vezes maior do que o observado. Lembrando que se a densidade do Universo for maior que  $\rho_c$ , ele possuiria  $k = +1$  e seria fechado, conforme visto na seção 1.5, o que vai de encontro com a base de dados observacionais que corroboram para um Universo plano.

Em modelos com simetria  $SU(5)$  a transição de fase ocorre a uma temperatura  $T_c \sim 10^{14} GeV$  e a massa do monopolo é  $m_M \sim 10^{16} GeV$ , sendo assim,

$$\frac{n_M}{s} \sim 10^2 \left( \frac{T_c}{m_{pl}} \right)^3 \sim 10^{-13}. \quad (2.108)$$

Além disso, nesse modelo a aniquilação de monopolos pode ser negligenciada [32, 33]. Assumindo que a expansão foi adiabática resulta em um fluxo médio de monopolos

$$F_M = \frac{n_M v_M}{4\pi} = 10^{-3} \left( \frac{T_c}{10^{14} GeV} \right)^3 \left( \frac{v_M}{10^{-3} c} \right) cm^{-2} sr^{-1} sec^{-1}, \quad (2.109)$$

sendo que  $sr$  é a unidade que representa o ângulo sólido. Também é possível calcular a fração que os monopolos contribuem para a densidade crítica

$$\Omega_M h^2 \sim 10^{11} \left( \frac{T_c}{10^{14} GeV} \right)^3 \left( \frac{m_M}{10^{16} GeV} \right). \quad (2.110)$$

Esse modelo gera um fluxo de monopolos que é fácil de detectar, no entanto, sua densidade de massa é muito alta.

Uma transição de fase forte de primeira ordem ocorreria a uma temperatura  $T_N \ll T_c$ . Devido ao nucleamento, a expectativa seria de um monopolo por bolha nucleada. De acordo com [34], essa transição geraria

$$\frac{n_M}{s} \sim \left[ \left( \frac{T_c}{m_{pl}} \ln \left( \frac{m_{pl}^4}{T_c^4} \right) \right) \right]^3, \quad (2.111)$$

sendo que,  $m_{pl}$  é a massa de Planck. Infelizmente, o fator logarítmico torna o problema ainda pior que no caso da transição de segunda ordem.

É evidente que até mesmo os modelos mais simples de grande unificação são inconsistentes com a cosmologia padrão. Essa catástrofe é conhecida como o problema do

monopolo. Uma maneira de sumir com a inconsistência é assumir um limite para  $\Omega_M$  baseado na idade do Universo, isso também restringe  $T_c \cdot 10^{11} GeV$  para  $m_M \sim \frac{T_c}{\alpha}$ .

A solução mais promissora do problema de monopolos é a inflação cósmica do Universo. Ela faz com que uma região menor que o horizonte, onde o campo de Higgs é correlacionado, expanda de modo a cobrir todo o Universo observável. Isso restringe o Mecanismo de Kibble a produzir menos de um monopolo por Universo observável. Em algum sentido, o valor inicial da abundância de monopolos é diluída exponencialmente.

Outra possível solução é supor uma série de quebras de simetrias mais complexas, isto é, um modelo com

$$SU(5) \quad SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad SU(3) \quad SU(3) \times U(1). \quad (2.112)$$

Esse modelo produziria uma densidade de monopolos aceitável [35]. A primeira transição de fase ocorre em  $T_1 = T_c = 10^{14} GeV$ , a segunda em  $T_2$  e a terceira em  $T_3$ . Existe uma fase  $T_2 < T_3$  onde o grupo  $U(1)$  do eletromagnetismo é quebrado. Essa fase é supercondutora, sendo assim, linhas fluxo magnético não podem se espalhar no espaço e são limitadas o que reduz a aniquilação de monopolos e gera

$$\frac{n_M}{s} = 10^{-46} \left( \frac{T_2}{10^3 GeV} \right)^3. \quad (2.113)$$

Esse modelo só resolve o problema de monopolos se  $T_3 \ll 10^4 GeV$ .

Além do Mecanismo de Kibble, monopolos poderiam ser produzidos em colisões entre partículas energéticas

$$\text{partícula} + \text{antipartícula} \quad \text{monopolo} + \text{antimonopolo}. \quad (2.114)$$

Caso isso ocorra, seria esperado de se encontrar monopolos aos pares (norte e sul). Existem duas possibilidades. Haveriam poucos para serem detectados ou haveria muitos e o modelo seria inconsistente com a Cosmologia.

Outro fator importante para detecção de monopolos é a velocidade que eles teriam caso existissem. Em uma época  $t = 10s$  o Universo teria a temperatura  $T = 0.3 MeV$  e a velocidade de dispersão interna seria

$$v_m^2 \sim \sqrt{\frac{T}{m_M}} = 30 cm s^{-1} \left( \frac{10^{16} GeV}{m_M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.115)$$

Após essa época, os monopolos podem ser considerados livres de colisões, sendo assim, sua velocidade de dispersão decairia com  $a(t)^{-1}$ . Caso os efeitos gravitacionais e magnéticos com outras partículas sejam desconsiderados, sua velocidade atual seria de

$$v_m^2 \sim 10^{-8} cm s^{-1} \left( \frac{10^{16} GeV}{m_M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.116)$$

Quando o Universo deixa de ser dominado pela radiação, a matéria começa a se agrupar e possibilita a formação de estruturas. Os monopolos também deveriam se agrupar com a matéria e fazer parte desse processo [36–39].

No entanto, eles não podem dissipar sua energia gravitacional, sendo assim, não colapsariam em objetos mais condensados como estrelas, planetas e as outras estruturas encontradas no Universo. As estruturas cuja formação não necessita de dissipação, como



os aglomerados de galáxias, seriam os lugares mais prováveis de encontrar um monopolo. Outra estrutura possível é o Halos galácticos, ele é a região ao redor das galáxias espirais, possui um tamanho de aproximadamente  $15Kpc$  e é formado de gás interestelar pouco denso, como as anãs vermelhas, anãs marrons e matéria escura.

Os monopolos seriam acelerados devido ao campo gravitacional de distribuições não homogêneas de massa. Por exemplo, o campo gravitacional de uma galáxia vai acelerar o monopolo até uma velocidade perto de  $10^{-3}c$ , um aglomerado de galáxias aceleraria até  $10^{-2}c$ . Infelizmente a probabilidade de um monopolo encontrar um galáxia ou um aglomerado é quase nulo, visto que, a distância média percorrida por um monopolo entre encontros sucessivos é de  $\Delta L_{galáxia} = 10^{26}cm$  e  $\Delta L_{aglomerado} = 3 \times 10^{28}cm$ , enquanto que a distância que um monopolo percorre em um tempo de Hubble é de apenas  $10^{25}h^{-1} \left( \frac{v_M}{10^{-3}c} \right) cm$ .

Outra fonte de aceleração é o campo magnético intergalático, sua existência e intensidade não são comprovadas. Caso existisse, um campo com força  $10^{-11}G$  iria acelerar um monopolo a uma velocidade

$$v_M = 3 \times 10^{-4}c \left( \frac{B}{10^{-11}G} \right) \left( \frac{10^{16}GeV}{m_M} \right). \quad (2.117)$$

O campo magnético de uma galáxia é aproximadamente  $3 \times 10^{-6}G$ , sendo assim, um monopolo que percorresse  $300Pc$  do campo teria uma velocidade

$$v_M = 3 \times 10^{-3}c \left( \frac{10^{16}GeV}{m_M} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.118)$$

Independente do processo, a velocidade de um monopolo é estimada para ser no mínimo da ordem de  $10^{-3}c$ . Se monopolos estivessem distribuídos uniformemente pelo Universo e sua velocidade for  $v = 10^{-3}c$ , então o fluxo médio ficaria limitado a

$$F_M = 10^{-14}cm^{-2}sr^{-1}sec^{-1} \left( \frac{m_M}{10^{16}GeV} \right)^{-1}. \quad (2.119)$$

Esse fluxo seria maior caso os monopolos se agruparem em galáxias.

A densidade de massa nas vizinhanças do Sol é de aproximadamente  $10^{-23}gcm^{-3}$ . Metade desse valor é devido a estrelas, gás, poeira cósmica e outras coisas que são observáveis. A outra metade, não observável, deve estar associada ao disco galáctico.

É certo que uma massa não está associada ao Halo, se estivesse, a massa do interior do Halo resultaria em uma velocidade orbital do sistema solar de  $1100 \frac{km}{s}$ , o que corresponde a cinco vezes o valor observado. É estimado que a densidade local do Halo seja  $\rho_{Halo} = 0.5 \times 10^{-24}gcm^{-3}$ . É razoável pensar que a densidade de monopolos seria menor que  $10^{-24}gcm^{-3}$ , sendo assim, o limite do fluxo médio resulta em

$$F_M = 10^{-10}cm^{-2}sr^{-1}sec^{-1} \left( \frac{m_M}{10^{16}GeV} \right)^{-1}. \quad (2.120)$$

Outra restrição para o fluxo de monopolos é o limite de Parker. Ele existe devido a interação dos monopolos com o campo magnético presentes dentro das galáxias. A energia cinética que um monopolo, inicialmente em repouso  $v_0 = 0$ , teria após percorrer uma distância  $l$  por um campo magnético  $B$  uniforme é

$$\frac{1}{2}m_M v_{mag}^2 = hBl = 10^{11}GeV \left( \frac{B}{3 \times 10^{-6}G} \right) \left( \frac{l}{300Pc} \right), \quad (2.121)$$

ou seja,

$$v_{\text{mag}} = \left( \frac{2hBl}{m_M} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 3 \times 10^{-3} c \left( \frac{Bl10^{16} \text{GeV}}{3 \times 10^{-6} G 300 \text{Pc} m_M} \right). \quad (2.122)$$

Se o monopolo possuir uma velocidade inicial  $v_o \ll v_{\text{mag}}$ , então ele sofrerá uma grande aceleração. Por outro lado, ele não será afetado significativamente se  $v_o \ll v_{\text{mag}}$ .

O campo magnético da nossa galáxia é de aproximadamente  $B \approx 3 \times 10^{-6} G$ , e seu tamanho é  $l \approx 300 \text{Pc}$ . Sendo assim, um monopolo inicialmente em repouso seria acelerado até uma velocidade  $v_{\text{mag}} \approx 3 \times 10^{-3} c \left( \frac{10^{16} \text{GeV}}{m_M} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Os monopolos que eventualmente entrassem na galáxia provavelmente teriam uma velocidade inicial  $v_0 \approx 10^{-3} c$ . Logo, monopolos mais leves que  $10^{17} \text{GeV}$  serão ejetados para fora da galáxia em um tempo relativamente curto.

Caso tivessem a massa de  $10^{20} \text{GeV}$ , eles seriam ejetados em um tempo comparável a idade da galáxia [40]. Se o campo magnético de uma galáxia é gerado pelo efeito dínamo [41], similar ao efeito que gera o campo magnético da Terra e do Sol, então o fluxo de monopolos com massas  $m_M \approx 10^{17} \text{GeV}$  ficaria restrito a

$$F_M \approx 10^{-16} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{sec}^{-1} \left( \frac{m_M}{10^{16} \text{GeV}} \right) \left( \frac{3 \times 10^7 \text{anos}}{\tau} \right) \left( \frac{300 \text{Pc}}{l} \right), \quad (2.123)$$

em que  $\tau \approx 10^8 \text{anos}$ .

O campo magnético entre aglomerados de galáxias é  $B \approx 10^{-7} G$ , que gera e restringe o fluxo a, [42],

$$F_M \approx 10^{-18} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{sec}^{-1}. \quad (2.124)$$

Além disso, monopolos podem fazer parte do processo que gera e mantém o campo magnético de uma galáxia [43, 44]. Caso isso ocorra, iria dar origem a um limite inferior ao fluxo

$$F_M \approx 10^{-14} \left( \frac{m_M}{10^{16} \text{GeV}} \right) \left( \frac{1 \text{Kpc}}{l} \right)^2 \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{sec}^{-1}. \quad (2.125)$$

Os prótons e os nêutrons são compostos de três quarks ligados pela interação forte, e tais estruturas são conhecidas como hádrons. O spin resultante dos quarks faz com que os prótons e os nêutrons obedeam a estatística de Fermi, ou seja, são férmions. Os monopolos podem servir como catalisadores do decaimento nuclear, sua secção de choque de interação é  $(\sigma v) \approx 10^{-28} \text{cm}^2$ .

O núcleo do monopolo deve possuir um tamanho  $M^{-1}$  e dentro dele a simetria de calibre é restaurada, sendo assim, é razoável supor que a secção de choque seja de  $\sigma \approx M^{-2} \approx 10^{-56} \text{cm}^2$ . Quando um feixe de férmions é disparado em direção a um monopolo magnético sua função de onda é sugada para dentro do núcleo do defeito devido ao potencial resultando em  $(\sigma v) \approx (\text{energia do fermion})^{-2}$ .

Por exemplo, na teoria de calibre  $SU(5)$  a seguinte reação é possível

$$M + n \rightarrow M + \pi^- + e^+, \quad (2.126)$$

esse decaimento é lido da seguinte maneira: um nêutron  $n$  após interagir com um monopolo  $M$ , decai em um pión  $\pi^-$  e um pósitron  $e^+$ .

Dentro do Sol, acontece a reação  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$  em que cerca de 0,7% da massa de repouso é convertida em energia. Como o monopolo age como um catalisador,

a reação passa a converter 100% da massa. A energia liberada devido a um monopolo e a uma densidade de prótons ou nêutrons  $\rho_n$  será

$$\dot{e}_{cat} = n_N(\sigma v) \left( \frac{3 \times 10^3(\sigma v)}{10^{-28}cm^2} \right) \left( \frac{\rho_N}{gcm^{-3}} \right) ergs^{-1}. \quad (2.127)$$

Sendo assim, seria necessário cerca de  $10^{28}$  monopolos no centro do Sol para produzir toda a luminosidade solar  $L = 4 \times 10^{33}ergs^{-1}$ . Deve haver poucos monopolos em objetos astrofísicos como estrelas, planetas e outros, caso contrário a luminosidade deles ficaria em desacordo com a observada atualmente.

Uma estrela de nêutrons é um núcleo colapsado de uma estrela supermassiva. Sua luminosidade seria no mínimo  $L = 3 \times 10^{30}ergs^{-1}$ , logo o limite de monopolos que ela pode possuir é de

$$N_m \cdot 10^{12} \left( \frac{\sigma v}{10^{-28}cm^2} \right)^{-1}. \quad (2.128)$$

Usando o mesmo raciocínio, a Terra teria  $N_m N_m \cdot 10^{15} \left( \frac{\sigma v}{10^{-28}cm^2} \right)^{-1}$ , as anãs brancas teriam  $N_m N_m \cdot 10^{18} \left( \frac{\sigma v}{10^{-28}cm^2} \right)^{-1}$  e Júpiter teria  $N_m N_m \cdot 10^{20} \left( \frac{\sigma v}{10^{-28}cm^2} \right)^{-1}$ . Todos esses são limites superiores impostos de tal modo a manter a luminosidade consistente com a observada.

No período em que são formados, os objetos astrofísicos não devem possuir monopolos em uma quantidade significativa. Conforme o tempo passa, eles irão acumular monopolos, tal valor deve ser em torno de

$$N_m = (4\pi R^2)(\pi - sr) \left( 1 = \frac{2GM}{Rv_m^2} \right) F_M \epsilon \tau, \quad (2.129)$$

sendo  $M$  a massa do objeto,  $R$  é seu raio,  $\tau$  é a sua idade e  $v_m$  é a velocidade do monopolos que atingem sua superfície.

Além disso,  $\frac{2GM}{Rv_m^2}$  é razão entre a seção de choque de captura gravitacional e a seção de choque geométrica. O fator  $\epsilon$  é a eficiência com que o objeto captura monopolos e depende da massa e velocidade do monopolo. A energia dissipada dentro do objeto também afeta esse valor.

As estrelas de sequência principal com massa entre  $0,6M$  e  $30M$ , irão capturar monopolos mais leves que  $10^{18}GeV$  e mais lentos que  $10^{-3}c$ , ou seja,  $\epsilon = 1$ . Durante a existência da estrela ela irá capturar cerca de  $10^{40} F_M$  monopolos, esse processo independe da massa da estrela [45, 46]. As estrelas de nêutrons irão capturar cerca de  $10^{37}$  monopolos com massa de até  $10^{20}GeV$  em cerca de  $10^{10}$ anos.

Os pulsares são estrelas de nêutrons que giram muito rápido, sua energia rotacional é convertida em energia eletromagnética fazendo com que seus polos magnéticos emitam radiação. O PSR 1929+10 é um pulsar que está a uma distância de  $60Pc$  da Terra, sua idade é estimada em  $3 \times 10^6$  anos e sua luminosidade é  $L = 3 \times 10^{30}ergs^{-1}$  o que corresponde a uma temperatura superficial de  $30 eV$ . Ele deve ter capturado cerca de  $10^{33}$  monopolos, o limite é  $N_m = 10^{12} \left( \frac{\sigma v}{10^{28}cm} \right)^{-1}$ , substituindo esses valores na eq. (2.129) resulta em, [47],

$$F_M \approx 10^{-21} \left( \frac{\sigma v}{10^{28}cm} \right)^{-1} cm^{-2}sr^{-1}sec^{-1}. \quad (2.130)$$

Esse limite é, em algum sentido, considerado o padrão e corresponde a menos de um monopolo por Terra por ano, devido a essa raridade os monopolos são muitas vezes chamados de relíquias.

O que se espera é que quando um monopolo passe por um fio condutor ele altere o fluxo de campo magnético, com efeito de gerar uma corrente elétrica  $I = \frac{4\pi h}{L}$ , sendo  $L$  a indutância do fio. Um detector induzido funciona dessa maneira, em geral eles são bem isolados e o material usado é supercondutor. Cabrera detectou um monopolo em 14 de fevereiro de 1982 [48], desde então a sensibilidade dos detectores foram aumentadas, no entanto, outros monopolos não foram detectados.

Os monopolos perdem energia ao interagir com elétrons ligados, eles sentem um força de Lorentz de uma partícula com carga  $e$   $\alpha c \times h = \frac{e}{2}$ . Os detectores baseados em ionização tentam medir esse efeito. A grande vantagem deles é que podem ser feitos em grandes escalas [49].

Também existem os detectores exóticos, que tentam medir o efeito de monopolos que atingem núcleos com  $Z \approx 10$  (Al) em sua jornada através da Terra. O monopolo causará um dano a qualquer tipo de mica que encontrar em seu caminho. Buford Price e seus colaboradores [50] analisaram uma amostra de mica com área de  $13,5 \text{ cm}^2$  que estava a uma profundidade de  $5 \text{ Km}$  no estado de Minas Gerais. É especulado que aquela mica estivesse ali por pelo menos  $0,45 \times 10^9$  anos. Infelizmente nenhum registro de monopolos foi encontrado.

Outro possível meio de detectar monopolos seria detectar neutrinos energéticos produzidos no decaimento nuclear do Sol que tenha sido catalisado por um monopolo. Assim, ele poderia ser diferenciado dos outros neutrinos pois estaria apontado para o Sol.

Portanto, a influência das transições de fase no Universo Primordial no presente trabalho, está ligado com a existência dos possíveis defeitos topológicos apresentados e as suas consequências.

# Considerações Finais

Como apresentado, a influência da transição de fase no Universo Primordial conduz a formação de defeitos topológicos por um quebra espontânea de simetria, e esse é justificado por meio do Mecanismo de Kibble.

O Mecanismo de Kibble é feito de uma base argumentativa forte, isto é, ele apenas parte da proposição de que a correlação do Campo de Higgs é limitado pelo horizonte causal. Sendo assim, a existência de defeitos topológicos e sua formação no Universo Primordial também possui um peso argumentativo.

Outro ponto a favor da existência de defeitos topológicos cósmicos é que eles são uma consequência direta e única das propriedades do grupo de simetria da Teorias de Campos em questão.

Referente a tais defeitos, os defeitos do tipo parede parecem ser catastróficos em todos os cenários possíveis. Enquanto que, os defeitos do tipo corda cósmica são os mais consistentes com a Cosmologia Padrão, a sua irradiação de ondas gravitacionais é o efeito que os tornam detectáveis. E, não menos importante os defeitos do tipo monopolo possuem diversos efeitos astrofísicos, no entanto, o problema dos monopolos magnéticos supermassivos é a pior das catástrofes. Todas essas inconsistências indicam que, as Teorias de Unificação (GUT) são inconsistentes com o Modelo Padrão da Cosmologia, sendo assim, um deles ou os dois devem ser alterados pois, até o momento, não são apropriados para descrever o Universo Primordial.

Em relação a transição de fases, existe evidência o suficiente para afirmar a existência da transição eletro-frac. É razoável esperar que defeitos seriam gerados em tais transições, no entanto, eles são impossíveis de serem produzidos em laboratório, sua formação seria possível apenas no Universo Primordial. E uma das formas citadas como alternativa no estudo de defeitos topológicos, é usar o sistema da matéria condensada como um suposto laboratório cosmológico. Citou-se como exemplo os sistemas líquidos cristalinos, que na transição de fase nemático-isotrópico observam-se os defeitos tipo corda na textura *Schlieren*.

# Apêndice A

## Topologia

Na matemática, espaços são elementos definidos por funções que preservam uma certa estrutura, sendo que, uma função é uma regra que relaciona elementos de dois conjuntos.

**Definição A.0.1** *Sejam,  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Uma  $\phi : A \rightarrow B$  é uma relação tal que para cada  $a \in A$ , existe exatamente um  $b \in B$  tal que  $\phi(a, b)$ .*

$$\begin{array}{l} \phi A \rightarrow B \\ a \mapsto \phi(a) \end{array}$$

Sendo que o conjunto  $A$  é chamado de domínio da função,  $B$  de contradomínio e existe um subconjunto de  $B$  chamado imagem  $\phi(A) = \text{im}_\phi(A) := \{\phi(a) \mid a \in A\}$ , isto é, apenas os elementos de  $B$  que a função  $\phi$  mapeia.

**Definição A.0.2** *Uma função  $\phi : A \rightarrow B$  é dita ser:*

- injetora caso  $a_1, a_2 \in A : \phi(a_1) = \phi(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ ;
- sobrejetora caso  $\text{im}_\phi(A) = B$ ;
- bijetora caso seja injetora e sobrejetora.

**Definição A.0.3** *Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados isomorfos caso exista um mapeamento bijetivo entre eles, denotado por  $A \cong_{\text{set}} B$ .*

O fato de uma bijeção associar um elemento de  $A$  para cada elemento de  $B$  implica que os dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos, sendo assim, eles têm o mesmo tamanho. Isso é válido para conjuntos finitos e infinitos

**Definição A.0.4** *Um conjunto  $A$  é:*

- infinito - Caso exista um subconjunto próprio  $B \subset A$  tal que  $B \cong_{\text{set}} A$ . Caso  $A$  seja infinito ainda é possível definir:

*Infinitamente contável, caso  $A \cong_{\text{set}} \mathbb{N}$ ;*

*Infinitamente incontável, caso contrário.*

- finito - caso não seja infinito, tem-se que:  $A \cong_{\text{set}} \{1, 2, \dots, N\}$  para um  $N \in \mathbb{N}$ , e a cardinalidade de  $A$ , denotada por  $|A|$ , é  $N$ .

Dado duas funções  $\phi : A \rightarrow B$  e  $\psi : B \rightarrow C$ , é possível criar uma terceira  $\psi \circ \phi$ , que é a composição de  $\phi$  e  $\psi$ , isto é,

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi : A &\rightarrow C \\ a &\mapsto \psi(\phi(a)). \end{aligned}$$

**Definição A.0.5** Seja  $\phi : A \rightarrow B$  uma bijeção. Então a inversa de  $\phi$ ,  $\phi^{-1}$ , é:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \circ \phi &= \text{id}_A \\ \phi \circ \phi^{-1} &= \text{id}_B. \end{aligned}$$

**Definição A.0.6** Seja  $\phi : A \rightarrow B$  uma função e seja  $V \subseteq B$  um conjunto, define-se a pré-imagem de  $V$  sobre  $\phi$  como:

$$\text{imagem}_\phi(V) := \{a \in A \mid \phi(a) \in V\}.$$

Dado um conjunto é possível inferir sobre sua estrutura a partir da identificação de seus elementos, isto é, agrupá-los em classes que representam uma propriedade compartilhada entre eles.

**Definição A.0.7** Seja  $M$  um conjunto, uma relação de equivalência ( $\sim$ ) deve satisfazer as seguintes condições:

- i) reflexividade:  $m \in M : m \sim m$ ;
- ii) simetria:  $m, n \in M : m \sim n \Rightarrow n \sim m$ ;
- iii) transitividade:  $m, n, p \in M : (m \sim n \wedge n \sim p) \Rightarrow m \sim p$ .

Logo  $\sim$  é dita uma relação de equivalência em  $M$ .

**Definição A.0.8** Seja  $\sim$  uma relação de equivalência em  $M$ . Então, para qualquer  $m \in M$ , define-se o conjunto:

$$[m] := \{n \in M \mid m \sim n\},$$

denominada classe de equivalência de  $m$ .

**Definição A.0.9** Seja  $\sim$  uma relação de equivalência em  $M$ . Então o conjunto quociente de  $M$  por  $\sim$  é:

$$M/\sim := \{[m] \mid m \in M\}.$$

O conjunto quociente as vezes também é chamado de partição de  $M$ .

Espaços topológicos são conjuntos com o tipo mais simples de estrutura que fornece a definição de conceitos tais como convergência, conexidade e continuidade.

**Definição A.0.10** Seja  $M$  um conjunto e  $P(M)$  o conjunto que possui todos os subconjuntos de  $M$  como elementos. Uma topologia em  $M$  é um conjunto  $\mathcal{O} \subseteq P(M)$ , tal que:

- $\emptyset \in \mathcal{O}$  e  $M \in \mathcal{O}$ ;

- $\{U, V\} \subseteq \mathcal{O} \implies \{U, V\} \subseteq \mathcal{O}$ ;
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} \implies \bigcup \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ .

O par  $(M, \mathcal{O})$  é chamado de espaço topológico. Em geral, dado um conjunto, existem muitos outros conjuntos que servem como topologia. Uma terminologia comumente usada é que quanto mais elementos ela possuir mais forte ela é, sendo assim,  $\mathcal{O} = P(M)$  é a topologia mais forte que um conjunto pode ser, e a mais fraca é  $\mathcal{O} = \{\emptyset, M\}$ .

**Definição A.0.11** *Seja  $(M, \mathcal{O})$  um espaço topológico. Um subconjunto  $S$  de  $M$  é dito aberto, em relação a  $\mathcal{O}$ , caso  $S \in \mathcal{O}$ . Se  $M/S \notin \mathcal{O}$  então  $S$  é dito fechado.*

Nesse sentido, aberto e fechado não são mutuamente exclusivos, um conjunto pode ser fechado e aberto, um exemplo é o conjunto vazio.

**Definição A.0.12** *Para qualquer  $x \in \mathbb{R}^d$  e qualquer  $r \in \mathbb{R}^+ := \{s \in \mathbb{R} / s > 0\}$ , logo uma bola aberta<sup>1</sup> de raio  $r$  centrada em um ponto  $x$  é definida como:*

$$B_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d / \sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2} < r \right\},$$

em que  $x := (x_1, x_2, \dots, x_d)$  e  $y := (y_1, y_2, \dots, y_d)$ , com  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ .

A quantidade  $\sqrt{\sum_{i=1}^d (y_i - x_i)^2}$  se torna a norma em um espaço vetorial.

**Definição A.0.13** *A topologia usual do conjunto do  $\mathbb{R}^d$ , denotada por  $\mathcal{O}_s$ , é*

$$\mathcal{O}_s := \{ U \subseteq \mathbb{R}^d : \forall p \in U, \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U \}.$$

**Definição A.0.14** *Seja  $(M, \mathcal{O})$  um espaço topológico e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $M$ , então o conjunto quociente:*

$$M/\sim = \{ [m] \in P(M) / m \in [m] \},$$

é pode ser equipado com a topologia quociente  $\mathcal{O}_{M/\sim}$  definida por:

$$\mathcal{O}_{M/\sim} := \{ U \subseteq M/\sim : \bigcup U = \bigcup_{[a] \in U} [a] \in \mathcal{O} \}.$$

Em algum sentido, os elementos do conjunto quociente  $M/\sim$  correspondem a todos os elementos do conjunto  $M$  que são equivalentes entre si.

**Definição A.0.15** *Seja  $M$  um conjunto. A sequência de pontos em  $M$  é uma função  $q : \mathbb{N} \rightarrow M$ .*

**Definição A.0.16** *Seja  $(M, \mathcal{O})$  um espaço topológico. A sequência  $q$  em  $M$  converge para um ponto limite  $a \in M$  caso:*

$$\forall U \in \mathcal{O} : a \in U \implies \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies q(n) \in U.$$

<sup>1</sup>A definição de bola em matemática, é o espaço interior a uma esfera. Se fechada inclui os pontos da fronteira, e se aberta não os inclui.



**Definição A.0.17** Seja  $(M, O_M)$  e  $(N, O_N)$  dois espaços topológicos, uma função  $\phi : M \rightarrow N$  é dita contínua, em relação as topologias  $O_M$  e  $O_N$ , se:

$$S \in O_N, \text{preim}_\phi(S) \in O_M.$$

sendo  $\text{preim}_\phi(S) := \{m \in M : \phi(m) \in S\}$  é a pré imagem de  $S$  sobre  $\phi$ .

Outra maneira equivalente de definir continuidade é dizer que a imagem de conjuntos abertos são abertos.

**Definição A.0.18** Seja  $(M, O_M)$  e  $(N, O_N)$  dois espaços topológicos, uma bijeção  $\phi$  é dita ser um homeomorfismo, caso ambas  $\phi : M \rightarrow N$  e  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$  sejam contínuas.

Homeomorfismos são funções que preservam as estruturas do espaço topológico, isto se deve ao fato desta função relacionar cada conjunto aberto de seu domínio a um conjunto aberto no contradomínio.

**Definição A.0.19** Se existir um homeomorfismo entre dois espaços topológicos  $(M, O_M)$  e  $(N, O_N)$  então os dois espaços são homeomorfos ou topologicamente isomorfos, e são denotados por  $(M, O_M) \cong_{top} (N, O_N)$ , sendo assim,  $M \cong_{set} N$ .

**Definição A.0.20** Um espaço topológico  $(M, O)$  é dito T1 caso quaisquer dois pontos distintos  $p, q \in M, p \neq q$  :

$$U(p) \in O : q \notin U(p).$$

**Definição A.0.21** Um espaço topológico  $(M, O_M)$  é tido T2 ou Hausdorff caso, para quaisquer dois pontos distintos, existir vizinhanças disjuntas:

$$p, q \in M : p \neq q \quad \exists U(p), V(p) \in O : U(p) \cap V(p) = \emptyset.$$

**Definição A.0.22** Seja  $(M, O)$  um espaço topológico. Um conjunto  $C \subseteq P(M)$  é chamado cobertura (de  $M$ ) se:

$$\bigcup C = M$$

também é dito ser uma cobertura aberta caso  $C \subseteq O$ .

**Definição A.0.23** Seja  $C$  uma cobertura. Então qualquer subconjunto  $\tilde{C} \subseteq C$  tal que  $\tilde{C}$  ainda seja um cobertura é dito subcobertura. Uma subcobertura finita é um conjunto finito.

**Definição A.0.24** Um espaço topológico  $(M, O)$  é dito compacto caso toda cobertura aberta possuir uma subcobertura finita

**Definição A.0.25** Seja  $(M, O)$  um espaço topológico e seja  $C$  uma cobertura. Um refinamento em  $C$  é uma cobertura  $R$  tal que:

$$U \in R : \exists v \in C : U \subseteq v.$$

Um refinamento é dito ser aberto caso  $R \subseteq O$ , e é dito ser localmente finito se para qualquer ponto  $p \in M$  existir uma vizinhança  $U(p)$  tal que o conjunto:

$$\{U \in R / U \cap U(p) \neq \emptyset\}$$

seja um conjunto finito.

**Definição A.0.26** Um espaço topológico  $(M, \mathcal{O})$  é paracompacto caso toda cobertura aberta admita um refinamento localmente finito.

Todo espaço topológico compacto também é paracompacto.

Em geral é difícil verificar se um espaço é compacto, no entanto, para os reais  $\mathbb{R}^d$  equipado com a topologia usual  $\mathcal{O}_s$ , o teorema de Heine-Borel facilita a verificação. Este afirma que um subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  é compacto se, e somente se, ele for fechado e limitado. Um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^d$  é dito limitado caso:

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ : S \subseteq B_r(0).$$

Também é possível generalizar esse resultado para espaços métricos arbitrários, sendo que um espaço métrico é um par  $(M, d)$ , sendo  $M$  um conjunto e  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que, para todos os pontos  $x, y, z \in M$ , satisfaça:

- $d(x, y) \geq 0$  ;
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$  ;
- $d(x, y) = d(y, x)$  ;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$  .

Um espaço métrico em um conjunto  $M$  induz uma topologia  $\mathcal{O}_d$  em  $M$  dada por:

$$U \in \mathcal{O}_d : \exists p \in U : \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U,$$

sendo que, a bola aberta em um espaço métrico é definida como:

$$B_r(p) := \{x \in M \mid d(p, x) < r\}.$$

**Definição A.0.27** Um espaço topológico  $(M, \mathcal{O})$  é dito ser conexo a menos que existam dois conjuntos não vazios, disjuntos e abertos  $A$  e  $B$  tal que  $M = A \cup B$ .

Dizer que um espaço é conexo, em algum sentido, é equivalente a afirmar que ele é feito de um só pedaço. Formalmente um espaço topológico  $(M, \mathcal{O})$  é conexo se, e somente se,  $M$  e  $\emptyset$  sejam os únicos conjuntos que são ao mesmo tempo abertos e fechados.

**Definição A.0.28** Um espaço topológico  $(M, \mathcal{O})$  é dito conexo por caminhos, se para todos os pares de pontos  $p, q \in M$  existir uma curva contínua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ .

Se um espaço topológico é conexo por caminhos, então, ele também é conexo.

**Definição A.0.29** Um espaço topológico  $(M, \mathcal{O})$  que é Hausdorff e paracompacto é dito ser uma variedade  $n$ -dimensional se para todo ponto  $p \in M$  existir uma vizinhança  $U(p)$  e um homeomorfismo  $x : U(p) \rightarrow X(U(p)) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Ou seja, uma variedade é um espaço topológico tal que cada ponto do espaço se parece localmente com o  $\mathbb{R}^n$ . O espaço do parâmetro de ordem que será apresentado no capítulo seguinte é uma variedade. Uma variedade também pode ser definida nos complexos, isto é, a vizinhança de cada ponto do conjunto possui um isomorfismo com o conjunto dos números complexos.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Mukai, Fernandes, P. R. G., B. F. de Oliveira, and G. S. Dias, “Defect-antidefect correlations in a lyotropic liquid crystal from a cosmological point of view,” *Physical Review E*, vol. 75, no. 6, p. 061704, 2007.
- [2] C. Joas, O. Freire Jr(org), O. Pessoa Jr(org), and J. L. Bromberg(org), “Campos que interage: Física quântica e a transferência de conceitos entre física de partículas, nuclear e do estado sólido,” in *Teoria quântica: Estudos históricos e implicações culturais*, pp. 107–149, Editora da Universidade Estadual da Paraíba; Livraria da física, 2010.
- [3] K. S. Thorne, C. W. Misner, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Freeman, 2000.
- [4] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [5] A. Friedmann, “Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 21, no. 1, pp. 326–332, 1924.
- [6] H. Mukai, “Sobre a reversão da helicidade de particulas de dirac de spin 1/2 no contexto do eletromagnetismo de ordem superior,” Tese, IFT/UNESP, 1995.
- [7] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, 2000.
- [8] S. Weinberg, “Gauge and global symmetries at high temperature,” *Physical Review D*, vol. 9, no. 12, p. 3357, 1974.
- [9] L. Dolan and R. Jackiw, “Symmetry behavior at finite temperature,” *Physical Review D*, vol. 9, no. 12, p. 3320, 1974.
- [10] R. Ray, “Defect correlation liquid crystal: Experimental verification of cosmological kibble mechanism,” *PRAMANA - journal of physics*, vol. 53, no. 6, pp. 1087–1091, 1999.
- [11] S. Digal, R. Ray, and A. M. Srivastava, “Observing correlated production of defects and antidefects in liquid crystals,” *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 24, p. 5030, 1999.
- [12] B. F. de Oliveira, “Estudos numéricos da formação e dinâmica de defeitos topológicos em cristais líquidos nemáticos,” Tese, UFPB, 2012.
- [13] B. Ya, “Zel’dovich, i yu kobzarev and lb okun,” *Sov. Phys.-JETP*, vol. 40, no. 1, 1975.

- [14] H. B. Nielsen and P. Olesen, “Vortex-line models for dual strings,” *Nuclear Physics B*, vol. 61, pp. 45–61, 1973.
- [15] C. T. Hill, H. M. Hodges, and M. S. Turner, “Bosonic superconducting cosmic strings,” *Physical Review D*, vol. 37, no. 2, p. 263, 1988.
- [16] D. Förster, “Dynamics of relativistic vortex lines and their relation to dual theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 81, no. 1, pp. 84–92, 1974.
- [17] R. Gregory, “Gravitational stability of local strings,” *Physical review letters*, vol. 59, no. 6, p. 740, 1987.
- [18] M. . B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, “Cosmic strings,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 58, no. 5, p. 477, 1995.
- [19] A. Stebbins, “Cosmic strings and the microwave sky. i-anisotropy from moving strings,” *The Astrophysical Journal*, vol. 327, pp. 584–614, 1988.
- [20] F. R. Bouchet, D. P. Bennett, and A. Stebbins, “Patterns of the cosmic microwave background from evolving string networks,” *Nature*, vol. 335, no. 6189, pp. 410–414, 1988.
- [21] T. Vachaspati, “Cosmic strings and the large-scale structure of the universe,” *Physical review letters*, vol. 57, no. 13, p. 1655, 1986.
- [22] J. C. Charlton, “Cosmic string wakes and large-scale structure,” *The Astrophysical Journal*, vol. 325, pp. 521–530, 1988.
- [23] A. Stebbins, S. Veeraraghavan, R. Brandenberger, J. Silk, and N. Turok, “Cosmic string wakes,” *The Astrophysical Journal*, vol. 322, pp. 1–19, 1987.
- [24] E. Shellard, “Cosmic string interactions,” *Nuclear Physics B*, vol. 283, pp. 624–656, 1987.
- [25] R. A. Matzner, “Interaction of u (1) cosmic strings: numerical intercommutation,” *Computers in physics*, vol. 2, no. 5, pp. 51–64, 1988.
- [26] T. Vachaspati and A. Vilenkin, “Gravitational radiation from cosmic strings,” *Physical Review D*, vol. 31, no. 12, p. 3052, 1985.
- [27] A. Albrecht and N. Turok, “Evolution of cosmic strings,” *Physical Review Letters*, vol. 54, no. 16, p. 1868, 1985.
- [28] D. P. Bennett and F. R. Bouchet, “Evidence for a scaling solution in cosmic-string evolution,” *Physical Review Letters*, vol. 60, no. 4, p. 257, 1988.
- [29] G. t Hooft, “Magnetic monopoles in unified theories,” *Nucl. Phys. B*, vol. 79, no. CERN-TH-1876, pp. 276–284, 1974.
- [30] A. Polyakov, “Pisma jetp 20, 430 (1974),” *Sov. Phys. JETP Lett*, vol. 20, p. 194, 1974.
- [31] M. Prasad and C. M. Sommerfield, “Exact classical solution for the’t hooft monopole and the julia-zee dyon,” *Physical Review Letters*, vol. 35, no. 12, p. 760, 1975.

- [32] J. P. Preskill, “Cosmological production of superheavy magnetic monopoles,” *Physical Review Letters*, vol. 43, no. 19, p. 1365, 1979.
- [33] Y. B. Zeldovich and M. Y. Khlopov, “On the concentration of relic magnetic monopoles in the universe,” *Physics Letters B*, vol. 79, no. 3, pp. 239–241, 1978.
- [34] A. H. Guth and E. J. Weinberg, “Could the universe have recovered from a slow first-order phase transition?,” *Nuclear Physics B*, vol. 212, no. 2, pp. 321–364, 1983.
- [35] P. Langacker and S.-Y. Pi, “Magnetic monopoles in grand unified theories,” *Physical Review Letters*, vol. 45, no. 1, p. 1, 1980.
- [36] T. Goldman, E. W. Kolb, and D. Toussaint, “Gravitational clumping and the annihilation of monopoles,” *Physical Review D*, vol. 23, no. 4, p. 867, 1981.
- [37] D. A. Dicus, D. N. Page, and V. L. Teplitz, “Two- and three-body contributions to cosmological monopole annihilation,” *Physical Review D*, vol. 26, no. 6, p. 1306, 1982.
- [38] J. Fry, “Gravitational correlations and the monopole problem,” *The Astrophysical Journal*, vol. 246, pp. L93–L97, 1981.
- [39] J. Fry and G. M. Fuller, “Supermassive monopole stars,” *The Astrophysical Journal*, vol. 286, pp. 397–402, 1984.
- [40] M. S. Turner, E. N. Parker, and T. Bogdan, “Magnetic monopoles and the survival of galactic magnetic fields,” *Physical Review D*, vol. 26, no. 6, p. 1296, 1982.
- [41] E. N. Parker, “The origin of magnetic fields,” *The Astrophysical Journal*, vol. 160, p. 383, 1970.
- [42] Y. Rephaeli and M. S. Turner, “The magnetic monopole flux and the survival of intracluster magnetic fields,” *Physics Letters B*, vol. 121, no. 2-3, pp. 115–118, 1983.
- [43] E. E. Salpeter, S. L. Shapiro, and I. Wasserman, “Constraints on cosmic magnetic monopoles imposed by the galactic magnetic field,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 15, p. 1114, 1982.
- [44] J. Arons and R. Blandford, “Decay and regeneration of the galactic magnetic field in the presence of magnetic monopoles,” *Physical review letters*, vol. 50, no. 7, p. 544, 1983.
- [45] E. W. Kolb, S. A. Colgate, and J. A. Harvey, “Monopole catalysis of nucleon decay in neutron stars,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 19, p. 1373, 1982.
- [46] S. Dimopoulos, J. Preskill, and F. Wilczek, “Catalyzed nucleon decay in neutron stars,” *Physics Letters B*, vol. 119, no. 4-6, pp. 320–322, 1982.
- [47] K. Freese, M. S. Turner, and D. N. Schramm, “Monopole catalysis of nucleon decay in old pulsars,” *Physical Review Letters*, vol. 51, no. 18, p. 1625, 1983.
- [48] B. Cabrera, “First results from a superconductive detector for moving magnetic monopoles,” *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 20, p. 1378, 1982.

- [49] D. E. Marzo, “Macro- a large-area detector at the gran sasso laboratory((monopole, astrophysics and cosmic ray observatory)),” *Nuovo Cimento C, Serie 1*, vol. 9, pp. 281–292, 1986.
- [50] P. Price, S.-l. Guo, S. Ahlen, and R. Fleischer, “Search for grand-unified-theory magnetic monopoles at a flux level below the parker limit,” *Physical Review Letters*, vol. 52, no. 15, p. 1265, 1984.