UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

LICENCIATURA EM FÍSICA

VINICIUS DE SOUZA PAULUS

POSSÍVEIS INTERPRETAÇÕES FÍSICAS DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

MARINGÁ

2019

VINICIUS DE SOUZA PAULUS

POSSÍVEIS INTERPRETAÇÕES FÍSICAS DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Física pela Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

MARINGÁ
2019

VINICIUS DE SOUZA PAULUS

POSSÍVEIS INTERPRETAÇÕES FÍSICAS DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física pela Universidade Estadual de Maringá

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Daniel Gardelli (Orientador)
(Universidade Estadual de Maringá – UEM)

____

Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira
(Universidade Estadual de Maringá – UEM)

____

Prof. Dr. Rênio dos Santos Mendes
(Universidade Estadual de Maringá – UEM)

MARINGÁ
2019

“Oh pátria amada, por onde andarás?
Seus filhos já não aguentam mais!
Você que não soube cuidar
Você que negou o amor
Vem aprender na Beija-Flor”
(G.R.E.S. Beija-Flor de Nilópolis, 2019)

AGRADECIMENTOS

Meu profundo agradecimento aos meus pais, Adelar e Solimar, por sempre incentivarem os meus estudos, por não deixarem eu desistir dos meus sonhos, pelo apoio emocional e toda a confiança depositada em mim.

À minha namorada, Bruna, por todo o amor e carinho ao longo de toda a nossa jornada, assim como também por todo o apoio prestado e também às cobranças nos mais diversos aspectos da vida.

À Bateria Exateria, por me proporcionar inúmeras amizades e momentos ímpares na minha vida, assim como todos os ensinamentos que pôde me passar, além de tornar todo o processo que é se formar em Física um pouco mais agradável.

Ao grupo *Casca Esférica e Dia Útil* por todas as risadas, desabafos e momentos de reflexões que houve entre nós.

Ao professor Daniel Gardelli, por toda a dedicação e paciência que teve durante o processo de orientação, assim como por todas as coisas novas que me apresentou a respeito da própria Física e do processo educativo, além de incríveis indicações de livros, séries e filmes.

Aos professores da banca, pela disponibilidade em ler meu trabalho.

A todos aqueles que de maneira direta ou indireta, me ajudaram a passar por essa etapa da vida.

A todos vocês, meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

Atualmente, no contexto do Eletromagnetismo, entende-se que o potencial vetor magnético foi introduzido na Teoria Eletromagnética de Maxwell apenas como uma ferramenta matemática e tem como sua única função a de facilitar algumas contas em determinadas situações. O presente trabalho tem como um dos objetivos realizar um resgate histórico de como se deu o seu desenvolvimento e consequentemente, o desenvolvimento da própria teoria de Maxwell. Ao contrário do que é ensinado nas salas de aulas, o potencial vetor magnético desempenhou um papel central no trabalho de Maxwell, sendo considerado por ele como a pedra angular de sua teoria. Além disso, busca-se mostrar um pouco da relevância que a História da Ciência possui, tanto como agente enriquecedor dos conceitos científicos quanto para ser utilizada em sala de aula.

Palavras chave: James Clerk Maxwell, História da Ciência, Eletromagnetismo, Livros Didáticos.

ABSTRACT

Nowadays, in the context of Electromagnetism, it is understood that the magnetic vector potential was introduced in Maxwell's Electromagnetic Theory only as a mathematical tool and its only function is to facilitate some accounts in certain situations. The objective of the present work is to perform a historical review of how its development took place, consequently, the development of Maxwell's own theory. Contrary to what is taught in classrooms, the potential magnetic vector played a central role in Maxwell's work, being considered by him as the cornerstone of his theory. In addition, we seek to show some of the relevance that the History of Science has, both as an enriching agent of scientific concepts, and to be used in the classroom.

Keywords: James Clerk Maxwell, History of Science, Electromagnetism, Didatic Books.

Sumário

1. INTRODUÇÃO

Um dos objetivos da História da Física, um segmento da História da Ciência, dentre inúmeros outros objetivos, é o de tentar compreender como se deu o desenvolvimento das teorias físicas com o passar do tempo, assim como as mudanças nas formas de entender o mundo e até mesmo a superação de dogmas de cada época, podendo levar em conta fatores muito mais abrangentes do que apenas a falta de tecnologia de cada período, mas também o contexto político, econômico e até mesmo geográfico de cada cientista em seus anos dourados.

Tendo isso em mente, será apresentado um resgate histórico acerca do potencial vetor magnético, um conceito físico relacionado com a ciência da eletricidade e magnetismo, que atualmente é apresentado para alunos de graduação como sendo apenas uma ferramenta puramente matemática, que tem como objetivo facilitar algumas contas em determinadas situações, assim como de certa forma, tornar mais completa a Teoria Eletromagnética de Maxwell.

Dessa forma, durante boa parte do trabalho serão apresentadas e discutidas as obras de James Clerk Maxwell (1831-1879), que estão relacionadas com o nosso tema de interesse, assim como também serão apresentadas suas inspirações para tais trabalhos. Também será apresentado outro cientista, desta vez do continente, que realizou uma contribuição relacionada às suas ideias, no entanto, defendendo uma forma de pensar a Física que se opunha ao ponto de vista de Maxwell.

Além disso, procurou-se observar como os livros didáticos atuais apresentam o potencial vetor magnético, se levam em conta ou não tamanha importância que ele apresentou naquilo que se tornou a origem de uma das teorias física mais importante do século XIX. Também foi realizada uma entrevista com alguns professores que atuam no Ensino Superior, a respeito de como eles veem e compreendem o nosso objeto de estudo.

Isto posto, procura-se mostrar e ressaltar a importância que a História da Física de fato possui, não só como ferramenta para se utilizar em sala de aula, mas também como forma de melhorar e enriquecer a compreensão dos conceitos físicos por aqueles que já apresentam um certo domínio nesta área do conhecimento, uma vez que, quando se toma conhecimento dos textos originais dos criadores das teorias, somos é apresentados à real forma com que o cientista concebeu tal ideia, sem interpretações de terceiros e sem anacronismos, fazendo com que o leitor se sinta muito mais próximo do cientista e consequentemente muito mais interessado pela Ciência em si.

2 - Do Estado Eletrotônico ao Potencial Vetor Magnético

Neste capítulo será apresentado um pequeno recorte do desenrolar da história de como uma das ideias de Michael Faraday, neste caso, a do estado eletrotônico, que influenciou o desenvolvimento um tanto conturbado da teoria da eletricidade e magnetismo criada por James Maxwell. Tal estudo se deu por meio da leitura de fontes primárias e secundárias, relacionadas com as obras de Maxwell, como por exemplo os três artigos que antecedem a sua principal obra. Também serão mencionadas as contribuições significativas do físico alemão Franz Neumann.

O conceito de *estado eletrotônico* despertou o interesse de Maxwell logo após tomar conhecimento das ideias de Faraday. Ele demonstra tal interesse em uma carta enviada a William Thomson em 1853, apontando um crescente interesse seu em relação a ciência da eletricidade e magnetismo. Durante as pesquisas de Maxwell, o estado eletrotônico passou por inúmeras mudanças, tanto em sua nomenclatura quanto em sua estrutura matemática, até que finalmente veio a se tornar o que é conhecido atualmente como potencial vetor magnético em sua obra principal, intitulada *A Treatise on Electricity and Magnetism (Um Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo)*.

Dessa maneira, os próximos tópicos apresentarão um pouco da forma com que Maxwell tratou e desenvolveu a ideia do estado eletrotônico de Faraday ao longo de quase 40 anos, por meio de cartas, artigos e por fim, em seu *Tratado*.

2.1 - A influência de Faraday e a colaboração de Neumann

O físico inglês que influenciou o pensamento de seus conterrâneos de forma mais profunda no século XIX foi Michael Faraday. Nascido em Londres no final de setembro de 1791, ele cresceu longe dos muros acadêmicos e obteve toda sua formação de maneira informal, a saber:

> Em 1804, com 13 anos, Faraday começou a trabalhar para G. Riebau, como ajudante em sua livraria. Sua função era transportar o material e ajudar nas encadernações. Nesse contato com os livros ele teve a oportunidade de melhorar sua formação, lendo com grande interesse todos os livros que podia.

> Acredita-se que esta formação nada ortodoxa, colaborou para que ele elaborasse explicações tão diferentes das tradicionais de sua época (DIAS; MARTINS, 2004, p. 519).

Começou a trabalhar como assistente no laboratório de química de Humphry Davy aos 21 anos, onde permaneceu por toda a sua vida. Após a morte de Davy, Faraday assumiu o seu cargo de diretor. Muito influenciado pelas ideias de seu antigo superior, ele realizou experimentos voltados principalmente para a área da química, e conseguiu contribuições consideráveis relacionadas à eletrólise e à decomposição de elementos. Devido à sua falta de habilidade matemática, seu trabalho consistia na realização de experimentos e na invenção de modelos mecânicos para descrever qualitativamente os fenômenos observados por ele.

A partir de 1820, inspirado pela descoberta de Oersted, Faraday teve sua atenção voltada aos fenômenos físicos relacionados à eletricidade e magnetismo e assim passou a realizar experimentos relacionados a este assunto. Uma das motivações para estes experimentos foi a tentativa de buscar fenômenos na eletrodinâmica análogos aos já conhecidos na eletrostática.

Um desses fenômenos era o da eletrização por indução. Como já era sabido naquela época, ao aproximar uma carga elétrica de um condutor neutro, a primeira carga induz uma carga oposta no lado do condutor mais próximo da carga. Tendo isso em mente, Faraday utilizou um núcleo metálico para unir dois circuitos fechados, sendo que no primeiro circuito havia uma fonte de força eletromotriz enquanto que o segundo estava completamente isolado de qualquer fonte elétrica, mas ligado apenas em um medidor de corrente. Ele esperava que pela existência de uma corrente no primeiro circuito, seria gerada uma corrente semelhante no segundo circuito, de forma análoga ao caso eletrostático. Mas para sua surpresa, tal efeito não foi observado.

Apesar de verificar que sua previsão estava equivocada, Faraday constatou que o circuito apresentava outros comportamentos inesperados, sendo um deles o fato de que quando a bateria do primeiro circuito era ligada, uma corrente era gerada no segundo circuito mas que rapidamente tornava-se nula mesmo com a permanência da corrente no primeiro circuito. O mesmo comportamento era observado quando se desligava a bateria do primeiro circuito. No entanto, a corrente induzida no segundo circuito, causada pelo desligamento do primeiro circuito, ocorria no sentido contrário daquele gerado no processo de ligamento. A partir de tais observações, associadas com uma mente muito inventiva, Faraday concebeu a ideia do estado eletrotônico, numa tentativa de explicar a formação de corrente no segundo circuito somente quando há uma variação na corrente do primeiro.

Numa tentativa de matematizar esse fenômeno, Faraday sugeriu que a corrente induzida I_2 é originada de uma força eletromotriz, fem_{12}, proveniente de uma variação de fluxo magnético que atravessa a região definida pela área do circuito secundário onde a indução ocorre. Dessa forma, pode-se escrever a Lei de Faraday como:

$$I_2 = \frac{fem_{12}}{R_2}, \tag{2.1}$$

$$fem_{12} \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Phi_{\mathrm{B}} , \tag{2.2}$$

$$\Phi_{\mathrm{B}} \equiv \int_{S_2}\int \vec{\mathrm{B}}.\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{a}_2} . \tag{2.3}$$

Em (2.2), o sinal negativo foi colocado apenas em 1834, para adequar o fenômeno em linguagem matemática.

Outro físico que apresentou contribuições relevantes para a lei da indução foi o alemão Franz Ernst Neumann (1798-1895). Vale ressaltar o fato de ele ser um pesquisador da tradição continental. Pioneiro na matematização da Lei de Faraday, seu objetivo era deduzi-la tendo como ponto de partida a força de Ampère.

$$d^2\vec{F}_{21}^{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r^2{}_{12}}[2\left(d\vec{l}_1.d\vec{l}_2\right) - 3(\hat{r}_{12}.d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12}.d\vec{l}_2)] \tag{2.4}$$

Foi durante suas investigações que Neumann introduziu a ideia de potencial vetor magnético Ā:

$$\vec{A}(\vec{r}_2) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} \tag{2.5}$$

Este é o potencial vetor magnético no ponto r_2 devido a um circuito C_1 com corrente I_1. Aplicando-se o rotacional apenas nas variáveis de subíndice 2.

Portanto, $I_1\, d\vec{l}_1$ não será afetado e simultaneamente, utilizando as equações 2.6 e 2.7,

$$\nabla \times \left(u\,\vec{G}\right) = (\nabla u) \times \vec{G} + u\left(\nabla \times \vec{G}\right), \tag{2.6}$$

$$\nabla_1 \frac{1}{r_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{r_{12}} = -\frac{\hat{r}_{12}}{r^2{}_{12}}, \tag{2.7}$$

tem-se que:

$$\nabla_2 \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{\hat{r}_{12}}{r^2{}_{12}} \times I_1\, d\vec{l}_1 \tag{2.8}$$

Contudo, o lado direito da equação (2.8) é o (atual) campo magnético gerado pelo circuito 1, assim,

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \nabla_2 \times \vec{A}, \tag{2.9}$$

com o $\vec{A}$ dado por (2.5). Substituindo este resultado na equação (2.2) e utilizando o Teorema de Stokes, pode-se escrever a Lei de Faraday com a fem_{12} dada na forma:

$$fem_{12} = -\frac{d}{dt} \oint_{C_2} \vec{A}.d\vec{l}_2 = -\oint_{C_2} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).d\vec{l}_2 \tag{2.10}$$

Ou seja, Neumann conseguiu deduzir a Lei de Faraday sem mencionar o conceito de campo, somente através de seu potencial vetor $\vec{A}$.

Além disso, voltando ao Faraday, várias de suas ideias relacionadas à ciência da eletricidade, despertaram um enorme interesse em Maxwell. Uma delas, era a que concebia “que as ações entre ímãs, correntes, etc. ocorriam ao longo de linhas curvas e que tais ações resultavam de um estado de tensão do espaço” (COSTA, R. S., 2017), permeado por algo contíguo, ponto a ponto do espaço, o campo.

Em uma carta trocada com William Thomson em 13 de setembro de 1853, Maxwell expressa seu tremendo interesse na ciência da eletricidade e do magnetismo, além de apresentar de forma clara as suas intenções de aplicar esta ideia de estado eletrotônico de Faraday na explicação dos fenômenos elétricos já conhecidos. Em seguida, Maxwell também comenta que está muito animado com todo o trabalho matemático realizado envolvendo esta ideia, pois começa a perceber que tal conceito tem se mostrado muito frutífero. Ainda sobre o estado eletrotônico, Maxwell ressalta que “uma coisa ao menos é bem sucedida, ele reduz a um único princípio não apenas a atração e a indução de correntes mas também a atração de corpos eletrizados sem nenhuma nova suposição”. Tal afirmação parece estar relacionada com a intenção inicial de Faraday em buscar os análogos da eletrostática na eletrodinâmica.

2.2 – O artigo *On Faraday's Lines of Force*, de Maxwell

Em 1856, Maxwell publica seu primeiro artigo sobre uma teoria eletromagnética, chamado *On Faraday's Lines of Force (Sobre as linhas de força de Faraday)*. É nesse artigo que a teoria eletromagnética apresentada em sua famosa obra *A Treatise on Electricity and Magnetism (Um Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo)* começa a ter início, nascendo de uma maneira tímida e cheia de elementos metafísicos, os quais são completamente abandonados, após a morte de Maxwell, ao passar por uma reestruturação geral nas mãos dos chamados *maxwellianos*.

Voltando ao artigo, no final de sua primeira parte, Maxwell comenta sobre como o estado eletrotônico se manifesta. Para isso, ele dá o exemplo de um condutor que quando inserido em um campo magnético apresentará um certo estado devido a ação magnética. Caso este estado não se altere, nenhum efeito será observado, mas, caso o estado sofra alguma alteração, uma força eletromotriz dependente da intensidade e da direção que ocorreu tal mudança irá aparecer no material condutor. Sobre esse estado, numa tentativa de exprimir a ideia original atribuída a este conceito, Maxwell cita uma passagem de Faraday:

> Enquanto o fio está sujeito a uma indução volta-elétrica ou magneto-elétrica ele parece estar em um estado peculiar, pois resiste à formação de corrente elétrica; enquanto que, se na sua condição normal, tal corrente seria produzida; e quando não foi influenciado tem a capacidade de originar uma corrente, uma capacidade que o fio não possui sob circunstâncias normais. Esta condição elétrica da matéria não tinha sido conhecida até agora, mas provavelmente exerce uma influência muito importante em muitos, senão na maioria dos fenômenos produzidos por correntes de eletricidade. Por razões que aparecerão imediatamente, depois de conversar com vários amigos instruídos, tenho me aventurado em designá-lo como o

> estado eletro-tônico(FARADAY apud BORK,1967, p. 211, tradução nossa[1]).

Com esta afirmação, Faraday descreve algumas das características que seu obscuro conceito possui. Dessa forma, a intenção é que o leitor elucide algumas ideias a seu respeito e comece a imaginar de forma tímida um possível modelo de funcionamento do estado eletrotônico[2].

Na sequência, Maxwell aponta uma certa instabilidade no pensamento de Faraday:

> Concluindo que todos os fenômenos poderiam ser explicados de outra maneira, sem a referência ao estado eletrotônico, Faraday em sua segunda série [de pesquisas] o rejeitou por não ser necessário; mas em suas pesquisas recentes ele ainda parece pensar que pode haver alguma verdade física em sua conjectura sobre esse novo estado dos corpos (MAXWELL, 1855, p. 187, tradução nossa[3]).

Apesar de esse trecho parecer de certa forma, desencorajar a utilização e até mesmo a pesquisa relacionada a este conceito, Maxwell aparece, logo em seguida, defendendo a sua utilização baseando-se em argumentos que numa comunidade científica atual, poderia ser facilmente criticado:

> A conjectura de um filósofo tão familiarizado com a natureza às vezes pode estar mais permeada de verdade do que a melhor lei experimental estabelecida descoberta por investigadores empíricos e, embora não seja obrigado a admiti-la como uma verdade física,

[1] While the wire is subject to either volta-electric or magno-electric induction it appears to be in a peculiar state, for it resists the formation of an electrical current in it; whereas, if in its common condition, such a current would be produced; and when left uninfluenced it has the power of originating a current, a power which the wire does not possess under ordinary circumstances. This electrical condition of matter has not hitherto been recognized, but it probably exerts a very important influence in many if not most of the phenomena produced by currents of electricity. For reasons which will immediately appear I have, after advising with several learned friends, ventured to designate it as the *electro-tonic state*.

[2] Vale ressaltar que a escrita para Faraday e até mesmo em alguns momentos neste primeiro artigo de Maxwell, é utilizada a nomenclatura *estado eletro-tônico*. Somente no seu segundo artigo em diante ele decide remover o hífen de sua escrita.

[3] Original: Finding that all the phenomena could be otherwise explained without reference to the electro-tonic state, Faraday in his second series rejected it as not necessary; but is his recent researches he seems still to think that there may be some physical truth in his conjecture about this new state of bodies.

> podemos aceitá-la como uma nova idéia pela qual nossas concepções matemáticas podem ficar mais claras (MAXWELL, 1855, p.187, tradução nossa[4]).

Não obstante, Maxwell faz uma ressalva. Mesmo após tantos anos estudando o conceito do estado eletrotônico inventado por Faraday, ele afirma que esta ideia ainda não se apresenta à sua mente, de tal forma que a sua natureza e propriedades possam ser explicadas sem a utilização de símbolos. Esta incapacidade apontada por ele mesmo, parece estar intimamente relacionada com a sua formação acadêmica, que quando comparada com a formação diferenciada de Faraday, mostra-se demasiadamente regrada e com limitações criativas. Aliás, de um ponto de vista mais voltado ao ensino, os trechos mencionados acima, em que Maxwell aponta tanto uma certa dúvida no pensamento de Faraday relacionada à utilização ou não de seu conceito quanto onde ele mesmo se mostra de certa forma perdido ou inseguro das afirmações que está realizando, possui uma importância ímpar no que diz respeito à humanização da Ciência e até mesmo dos próprios cientistas, os quais na maioria das vezes são representados nos livros didáticos como gênios ou seres humanos com capacidades intelectuais muito acima da média. Tal situação endossa ainda mais a importância da utilização de textos originais, ou ao menos que os professores tenham conhecimento desses textos originais relacionados aos temas estudados em sala de aula.

Em seguida, Maxwell revela que estava realizando um cuidadoso estudo das leis dos sólidos elásticos e também do movimento de fluidos viscosos, com a intenção de encontrar um método para conseguir conceber um conceito mecânico do estado eletrotônico adaptado a casos genéricos. Mais uma vez é possível perceber a enorme necessidade que os ingleses apresentavam em interpretar os fenômenos físicos por meio de modelos mecânicos, sempre fugindo da utilização da ideia de ação a distância.

Na segunda parte do artigo, denominada *On Faraday's Electro-tonic State (Sobre o Estado Eletro-tônico de Faraday)*, é onde se encontra a questão mais importante deste artigo, o trabalho matemático que envolve o Estado Eletrotônico.

[4] Original: The conjecture of a philosopher so familiar with nature may sometimes be more pregnant with truth than the best established experimental law discovered by empirical inquirers, and though not bound to admit it as a physical truth, we may accept it as a new idea by which our mathematical conceptions may be rendered clearer.

Maxwell começa o capítulo reafirmando a condição em que o conceito inventado por Faraday aparentemente atua. Assim:

> Considerações desse tipo levaram o Professor Faraday a conectar com sua descoberta da indução de correntes elétricas, a concepção de um estado no qual todos os corpos são forçados pela presença de ímãs e correntes. Este estado não se manifesta por nenhum fenômeno conhecido enquanto não for perturbado, mas qualquer alteração nesse estado é indicado por uma corrente ou tendência a uma corrente (FARADAY apud BORK,1967, p. 212, tradução nossa[5]).

Aqui Maxwell afirma que Faraday relacionou a sua descoberta da indução de corrente elétrica com a sua ideia de estado eletrotônico, reforçando a possibilidade de representar com apenas um conceito, todos os fenômenos elétricos e magnéticos já conhecidos.

Dando uma atenção maior para o procedimento matemático realizado nesta parte do artigo, Maxwell sucede, como ele sugere, desta descrição verbal para um formulação matemática. Para isso, ele introduz três quantidades que são representadas pelos símbolos $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ e as relaciona por meio de teoremas integrais, atribuídos a Green e Thomson, com a força eletromotriz em um ponto e com o magnetismo também. Após uma dezena de páginas de intensa utilização de teoremas e identidades matemáticas, ele afirma:

> Obtivemos agora nas funções $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ os meios de evitar a consideração da quantidade de indução magnética que passa pelo circuito. Em vez deste método artificial, temos o natural de considerar a corrente com referência às quantidades existentes no mesmo espaço com a própria corrente. A esses, dou o nome de

[5] Original: Considerations of this kind led Professor Faraday to connect with his Discovery of the induction of electric currents the conception of a state into which all bodies are thrown by the presence of magnets and currents. This state does not manifest itself by any known phenomenon as long as it is undisturbed, but any chance in this state is indicated by a current or tendency towards a current

funções eletro-tônicas ou componentes da intensidade eletro-tônica (MAXWELL apud BORK, 1967, p.212, tradução nossa[6]).

em que é facilmente perceptível um comportamento parcial no que diz respeito à escolha da forma de desenvolver sua teoria, justificando tal escolha com um argumento relacionado à *naturalidade* com que se obtém as equações interessadas. Nesse ponto, a intenção de Maxwell é clara, encontrar quantidades que determine os efeitos da indução elétrica em um ponto em particular, não em termos de um circuito fechado e do comportamento da indução magnética dentro do circuito, mas por meio da utilização de funções no mesmo ponto em que a indução é procurada. Tais equações são:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha_0}{dt}, \beta_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\beta_0}{dt}, \gamma_2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\gamma_0}{dt}, \tag{2.11}$$

enquanto que as equações relacionadas com as quantidades magnéticas são três equações da forma

$$\alpha_1 = \frac{d\beta_0}{dz} - \frac{d\gamma_0}{dy} - \frac{dV}{dx}, \tag{2.12}$$

O que chama atenção nesta notação, é que Maxwell denota as componentes do campo elétrico (forças eletromotrizes) como $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ e as componentes do campo magnético como $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, de tal forma, que a notação das funções eletrotônicas $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ apresenta uma notação paralela às funções anteriores. Esta escolha de notação levanta a possibilidade que ele pretendia de estabelecer as funções eletrotônicas nos mesmos níveis daquelas que descrevem os campos elétrico e magnético, fazendo uma analogia trilateral envolvendo as quantidades (BORK, 1967, p. 212).

É de certa forma, inesperado, mas Maxwell pede desculpas pela quantidade de detalhes matemáticos que ele próprio julga apresentar em excesso. Assim, no final deste capítulo ele diz que “espero exibir a teoria do estado eletrotônico de uma forma que todas as suas relações possam ser distintamente concebidas sem

---

[6] Original: We have now obtained in the functions $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ the means of avoiding the cosideration of the quantity of magnetic induction which *passes through* the circuit. Instead of this artificial method we have the natural one of considering the current with reference to quantities existing in the same space with the current itself. To these I give the name of *Electro-tonic functions*, or *components of the Electro-tonic intensity*.

referência a cálculos analíticos". Tal preocupação pode ser entendida com uma passagem presente em uma carta enviada a Thomson, onde ele manifesta sua esperança de que Faraday tome conhecimento de seu artigo.

No capítulo seguinte, chamado *Summary of the Theory of the Electro-tonic State (Resumo da Teoria do Estado Eletro-tônico)*, ele apresenta uma série de leis relacionadas ao estado eletrotônico afirmando que é possível concebê-lo em qualquer ponto do espaço como uma quantidade determinada em magnitude e direção, o que lembra as características de sua forma moderna. No entanto, ele alerta antes de enunciá-las que essa representação não envolve teoria física, é apenas um tipo de notação artificial (MAXWELL, 1856). Antes de apresentar tais leis, ele faz uma proposição, que em tradução livre, pode ser expressa como:

Proposição 1. *Se sobre qualquer superfície for desenhada uma curva fechada, e se a superfície dentro dela for dividida em áreas pequenas, então toda a intensidade ao redor da curva fechada será igual à soma das intensidades em torno de cada área pequena, todas avaliadas na mesma direção[7].*

Na sequência, tem-se as leis:

Lei 1. *Toda a intensidade eletrotônica em torno do limite de um elemento de superfície mede a quantidade de indução magnética que passa através daquela superfície, ou, em outras palavras, [mede] o número de linhas de força magnética que passa através de tal superfície[8].*

Lei 2. *A intensidade magnética em qualquer ponto está conectada com a quantidade de indução magnética por um conjunto de equações lineares, chamadas de equações de condução[9].*

[7] Original: If on any surface a closed curve be drawn, and if the surface within it be divided into small areas, then the entire intensity round the closed curve is equal to the sum of the intensities round each of the small areas, all estimated in the same direction.
[8] Original: The entire electro-tonic intensity round the boundary of an element of surface measures the quantity of magnetic induction which passes through that surface, or, in other words, the number of lines of magnetic force which pass through that surface.
[9] Original: The magnetic intensity at any point is connected with the quantity of magnetic induction by a set of linear equations, called the equations of conduction

Lei 3. *A intensidade magnética total em torno do limite de qualquer superfície mede a quantidade de corrente elétrica que passa através dessa superfície*[10]*.*

Lei 4. *A quantidade e a intensidade de correntes elétricas são conectadas por um sistema de equações de condução*[11]*.*

Antes de dar sequência nas leis, Maxwell menciona que as quatro leis anteriores relacionadas com a quantidade e intensidade magnética e elétrica podem ser deduzidas dos valores das funções eletrotônicas, assim como assume que não discutiu os valores das unidades, alegando que isso seria melhor realizado com referência a experimentos reais. Continuando:

Lei 5. *O potencial eletro-magnético total de uma corrente fechada é medido pelo produto de uma quantidade de corrente pela intensidade eletro-tônica total estimada na mesma direção em torno do circuito*[12]*.*

Lei 6. *A força eletromotriz em qualquer elemento de um condutor é medida pela taxa instantânea de alteração da intensidade eletrotônica desse elemento, seja em magnitude ou em direção*[13]*.*

Logo abaixo, Maxwell comenta que nesta última lei, essa força eletromotriz em um condutor fechado é medida pela taxa de variação da intensidade eletrotônica total ao redor do circuito referido por unidade de tempo. Tal descrição, lembra a relação entre o campo elétrico e o futuro substituto do estado eletrotônico, o potencial vetor magnético, que na notação atual é

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{2.13}$$

[10] Original: The entire magnetic intensity round the boundary of any surface measures the quantity of electric current which passes through that surface.
[11] Original: The quantity and intensity of electric currents are connected by a system of equations of conduction.
[12] Original: The total electro-magnetic potential of a closed current is measured by the product of the quantity of the current multiplied by the entire electro-tonic intensity estimated in the same direction round the circuit.
[13] Original: The electro-motive force on any element of a conductor is measured by the instantaneous rate of change of the electro-tonic intensity on that element, whether in magnitude or direction.

neste caso, sem levar em conta uma carga elétrica *q* que deveria multiplicar o campo elétrico para ficar equivalente à equação da força elétrica atual.

Adiante, Maxwell diz que se esforçou em tentar expressar o fundamento matemático das ideias apresentadas no *Experimental Researches in Electricity (Pesquisas Experimentais em Eletricidade)* de Faraday por meio destas seis leis enunciadas acima. Ainda assim, ele afirma que o conteúdo deste artigo está longe de sequer apresentar uma sombra de uma verdadeira teoria física, mas que seu maior mérito era, mesmo na aparência. Logo após, é apresentada uma forma de pensar extremamente interessante, visto que atualmente os cientistas não costumam mais agir desta maneira. Ele apresenta a teoria eletrodinâmica de Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), fazendo inúmeros elogios a seu respeito, assim como apresenta alguns axiomas dessa teoria. No entanto, o trecho que merece destaque é o seguinte:

> Aqui está uma teoria realmente física, satisfazendo as condições necessárias melhor do que qualquer outra já inventada, e apresentada por um filósofo cujas pesquisas experimentais formam uma base ampla para suas investigações matemáticas. De que serve então imaginar um estado eletro-tônico do qual não temos uma concepção física distinta, em vez de uma fórmula de atração que possamos entender prontamente? Gostaria de dizer que é bom ter duas maneiras de encarar um assunto e admitir que existem duas maneiras de encará-lo (MAXWELL, 1855/6, p. 208, tradução nossa[14]).

Além deste trecho neste artigo, Maxwell começa a sua maior obra, o *Treatise*, com uma passagem muito parecida com esta, falando da importância de se ter mais de uma maneira de explicar os fenômenos, o que, novamente, não apenas não acontece na Ciência atual, mas como ainda são criados barreiras cada vez maiores para aqueles que ousam pensar diferente da teoria aceita pela maioria, as quais muitas vezes são equivocadamente chamadas de “corretas” ou até “verdadeiras”. A

[14] Original: Here then is a really physical theory, satisfying the required conditions better perhaps than any yet invented, and put forth by a philosopher whose experimental researches from an ample foundation for his mathematical investigations. What is the use then of imagining an electro-tonic state of which we have no distinctly physical conception, instead of a formula of attraction which we can readily understand? I would answer, that it is a good thing to have two ways of looking at a subject, and to admit that there *are* two ways of looking at it.

saber, o físico brasileiro André Koch Torres Assis, que desenvolve uma teoria que confronta a famosa teoria de Albert Einstein, assim como o que aconteceu com o astrônomo americano Halton Christian Arp(1927-2013), que criticava a teoria do Big Bang e era um defensor de uma cosmologia não linear.

Por fim, são apresentados inúmeros problemas a respeito de eletricidade e magnetismo relacionado às esferas.

2.3 – O artigo *On Physical Lines of Force*, de Maxwell

Cerca de 5 anos após o seu primeiro artigo, Maxwell publica um segundo em 1861-1862, com o título *On Physical Lines of Force (Sobre as Linhas Físicas de Força)*, um artigo majoritariamente matemático, em que ele apresenta uma versão quase que completa de sua teoria eletromagnética, assim como também sugere uma teoria eletromagnética da luz.

Logo no começo, ele exalta os feitos realizados no artigo anterior, como encontrar significado geométrico para o estado eletrotônico, lembrando que neste artigo ele remove o hífen, assim como deduz as relações entre estado eletrotônico, magnetismo, corrente elétrica, e força eletromotriz, utilizando representações mecânicas apenas para auxiliar a imaginação, mas não para explicar os fenômenos.

Após, como apontado anteriormente, é apresentada uma boa quantidade de conteúdo matemático referente às suas novas ideias, até que finalmente são apresentadas as novas equações. Maxwell opta por uma mudança de nomenclaturas, mas continua respeitando a ideia de utilizar três letras consecutivas, assim como no artigo anterior. Para facilitar o entendimento, foi confeccionada a seguinte tabela:

	Primeiro artigo	Segundo Artigo
Estado Eletrotônico	$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$	F, G, H
Campo Magnético	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$	α, β, γ
Campo Elétrico	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$	P, Q, R

Tabela 1: Letras utilizadas para representar as componentes das grandezas escritas por Maxwell relacionadas ao estado eletrotônico, campo magnético e campo elétrico nos dois primeiros artigos sobre o assunto.

Dessa forma, é possível apresentar as equações obtidas neste artigo. As primeiras são as equações das componentes do campo magnético, que no artigo são identificadas como equações de número 55:

$$\frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy} = \mu\alpha\,, \quad \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = \mu\beta\,, \quad \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} = \mu\gamma \qquad (2.14)$$

Em seguida, a equação 57, representa o que hoje é conhecido por “condição de gauge”. Note que Maxwell não tinha uma notação especial para derivadas parciais:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0 \qquad (2.15)$$

Em notação moderna, a equação acima diz o divergente do potencial vetor é nulo.

Por último, as equações 58, que apresentam as relações entre as funções eletrotônicas e as componentes do campo elétrico:

$$P = \frac{dF}{dt}, \quad Q = \frac{dG}{dt}, \quad R = \frac{dH}{dt} \qquad (2.16)$$

Estas equações fornecem a relação pontual entre o potencial vetor e o campo elétrico induzido com as componentes P, Q e R, sendo este o objetivo original do estado eletrotônico.

Vale mencionar que as equações 55 são o que atualmente representa o rotacional de A, assim como as equações 58 representam a atual relação do campo elétrico com a variação temporal do potencial vetor, no entanto, com o sinal positivo, ao invés de negativo como de costume. A seguir, segue a comparação entre a nova notação do artigo de Maxwell com a notação atual.

$$\frac{dG}{dz} - \frac{dH}{dy} = \mu\alpha \quad \frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = \mu\beta \quad \frac{dF}{dy} - \frac{dG}{dx} = \mu\gamma \rightarrow \vec{B} = \nabla \mathrm{x} \vec{A} \qquad (2.17)$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0 \rightarrow \nabla . \vec{A} = 0 \qquad (2.18)$$

$$P = \frac{dF}{dt} \quad Q = \frac{dG}{dt} \quad R = \frac{dH}{dt} \rightarrow \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.19}$$

Após a obtenção das equações, Maxwell afirma:

> Nós temos determinado três quantidades, F, G, e H, a partir das quais podemos encontrar P, Q, e R considerando estas últimas quantidades como as taxas às quais as primeiras variam. No artigo já mencionado, eu tenho dado razões para considerar as quantidades F, G, e H como as partes determinadas daquilo que Faraday conjecturou existir, e o chamou de *estado eletrotônico*. Neste artigo eu afirmei as relações matemáticas entre este estado eletrotônico e as linhas de força do campo magnético como expresso na equação (55) e também entre o estado eletrotônico e a força eletromotriz como expresso na equação (58). Devemos agora tentar interpretá-los de um ponto de vista mecânico em conexão com nossa hipótese. (MAXWELL, 1861-1862, p. 291, tradução nossa[15])

Neste trecho, Maxwell parece estar se afastando um pouco da ideia de Faraday que anteriormente se mostrava tão convicto e interessado, tanto que em seu próximo artigo sobre o assunto, ele mudará muito a sua visão em relação a esta ideia.

2.4 – O artigo *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, de Maxwell

No ano de 1865, Maxwell publicou seu terceiro artigo sobre eletromagnetismo, o qual chamou de *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field (Uma Teoria Dinâmica da Teoria do Campo Eletromagnético),* em que já são apresentadas as 20 equações de sua famosa teoria eletromagnética.

[15] Original: We have determined three quantities, F, G, H, from which we can find P, Q, and R by considering these latter quantities as the rates at which the former ones vary. In the paper already referred to, I have given reasons for considering the quantities F, G, H as the resolved parts of that which Faraday has conjectured to exist, and has called the *electrotonic state*. In that paper I have stated the mathematical relations between this electrotonic state and the lines of magnetic force as expressed in equations (55) and also between the electrotonic state and electromotive force as expressed in equations (58). We must now endeavour to interpret them from a mechanical point of view in connexion with our hypothesis.

De início ele fala que o fenômeno mecânico mais óbvio nos experimentos envolvendo eletricidade e magnetismo é o de ação mútua pelo qual os corpos se colocam em movimento, assim como o primeiro passo a ser tomado numa situação dessas, de um ponto de vista científico, é a verificação da magnitude e da direção que a força que age entre os corpos apresenta, assim como perceber a sua dependência da posição relativa dos corpos em questão (MAXWELL, 1865, p. 459). Diferentemente do apontamento realizado logo acima, ele menciona mais uma vez a teoria desenvolvida por Weber e menciona que a força utilizada na respectiva teoria não depende apenas da posição relativa, mas também das velocidades relativas. Dessa maneira, é possível englobar tanto os fenômenos eletrostáticos, assim como os eletrodinâmicos. Nas palavras de Maxwell:

> Essa teoria, desenvolvida por Weber e C. Neumann, é extremamente engenhosa e maravilhosamente abrangente em sua aplicação aos fenômenos de eletricidade estática, atrações eletromagnéticas, indução de correntes e fenômenos diamagnéticos; e chega até nós com mais autoridade, pois serviu para guiar as especulações de quem fez um avanço tão grande na parte prática da ciência elétrica, introduzindo um sistema consistente de unidades na medição elétrica e, na verdade, determinando quantidades elétricas com uma precisão até então desconhecida (MAXWELL, 1865, p. 459, tradução nossa[16]).

Na segunda parte deste artigo, são apresentados inúmeros tópicos em que a sua proposta de teoria dinâmica é apresentada. Alguns desses tópicos se referem ao momento eletromagnético de uma corrente, ação mútua de duas correntes, relações eletromagnéticas de dois circuitos condutores, calor produzido por uma corrente, entre outros. Até que no tópico chamado *Mechanical Action between Conductors (Ação Mecânica entre Condutores)*, é apresentada uma passagem de extrema importância:

[16] Original: This theory, as developed by Weber and C. Neumann, is exceedingly ingenious, and wonderfully comprehensive in its application to the phenomena of statical electricity, electromagnetic attractions, induction of currents and diamagnetic phenomena; and it comes to us with the more authority, as it has served to guide the speculations of one who has made so great an advance in the practical part of electric science, both by introducing a consistent system of units in electrical measurement, and by actually determining electrical quantities with an accuracy hitherto unknown.

> Parece, portanto, que se admitirmos que a parte não resistente da força eletromotriz continua enquanto ela atua, gerando um estado auto-persistente da corrente, que podemos chamar (por analogia mecânica) de seu momento eletromagnético, e que esse momento depende de circunstâncias exteriores ao condutor, então tanto a indução de correntes quanto as atrações eletromagnéticas podem ser comprovadas pelo raciocínio mecânico.
>
> O que chamei de momento eletromagnético é a mesma quantidade que Faraday chama de estado eletrotônico do circuito, cuja mudança envolve a ação de uma força eletromotriz, assim como a mudança de momento envolve a ação da força mecânica (MAXWELL, 1865, p. 471, tradução nossa[17]).

Neste último parágrafo, Maxwell define uma mudança de significado físico da ideia que vinha emprestando de Faraday. Dessa maneira, é decretado um certo rompimento de pensamento entre eles. Durante o primeiro e o segundo artigo, o estado eletrotônico era uma forma de representação de um suposto estado no qual eram encontrados os materiais condutores na iminência da formação de uma corrente elétrica. Agora, por meio de uma analogia totalmente mecânica, Maxwell relaciona este conceito com uma suposta forma de momento eletromagnético. Esta mudança está muito relacionada com a comparação matemática do momento mecânico com a relação do campo elétrico com o estado eletrotônico (potencial vetor magnético), uma vez que a força mecânica é a variação temporal do momento mecânico, e na versão eletromagnética, a taxa de variação temporal do estado eletrotônico resulta na força eletromotriz no respectivo ponto.

Outro ponto interessante deste trabalho, é o fato de que no tópico *Electromagnetic Momentum (Momento eletromagnético)*, o conjunto de equações que representam o campo elétrico é novamente mencionado, assim como no artigo anterior, no entanto, de uma forma mais semelhante à nossa notação atual, apresentando o sinal negativo, assim:

---

[17] Original: It appears, therefore, that if we admit that the unresisted part of electromotive force goes on a long as it acts, generating a self-persistent state of the current, which we may call (from mechanical analogy) its electromagnetic momentum, and that this momentum depends on circumstances external to the conductor, then both induction of currents and electromagnetic attractions may be proved by mechanical reasoning.
What I have called electromagnetic momentum is the same quantity which is called by Faraday the electrotonic state of the circuit, every change of which involves the action of an electromotive force, just as change of momentum involves the action of mechanical force.

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt} \tag{2.20}$$

Mais adiante, na parte 6 do artigo, Maxwell apresenta uma versão mais completa de sua teoria eletromagnética da luz, a qual possui todas as suas equações, aliás, não só desta parte, mas também de todo o artigo, expressas em função das equações do momento eletromagnético. Dessa forma, deve-se atentar a uma questão, como aponta Bork:

> Assim vemos que na primeira tentativa de Maxwell de fornecer uma declaração completa das equações do campo eletromagnético, a quantidade que definimos mais tarde como potencial vetor é encontrada nos conceitos básicos e nas equações básicas. Nada sugere que seja apenas um dispositivo matemático (BORK, 1967, p. 215, tradução nossa[18]).

Portanto, Maxwell atribui significado físico ao potencial vetor magnético, diferentemente do que é dito e entendido pelos professores e alunos nas salas de aula dos cursos de Eletromagnetismo, assim como nos livros textos utilizados para ministrar tais cursos. Tal afirmação se baseia no estudo que se aprensta nos capítulos 3 e 4 deste trabalho.

2.5 – O livro *A Treatise on Electricity and Magnetism,* de Maxwell

Finalmente, abordaremos a principal obra de eletricidade e magnetismo do século XIX, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Um Tratado Sobre Eletricidade e Magnetismo), a obra mais famosa e influenciadora de Maxwell, mas ao mesmo tempo a menos lida pelos professores e estudantes do século XXI.

Ao longo do primeiro volume, o conceito de potencial vetor magnético não aparece. Apenas no volume 2 ele é apresentado e utilizado. Essa obra é dividida em artigos, e um desses artigos leva o nome dessa quantidade. O artigo 405 do *Tratado* é intitulado *The Vector Potencial of Magnetic Induction* (O Potencial Vetor de Indução Magnética), já apresentando assim, o terceiro nome dado por Maxwell a este conceito. Outro fator que sofreu uma leve alteração foi a questão da estrutura

[18] Original: Thus we see that in Maxwell's first attempt to give a complete statement of the electromagnetic Field equations, the quantity which we later define as vector potential is occurring in the basic concepts and in the basic equations. Nothing suggests that it is only a mathematical device.

matemática empregada. Após uma troca de correspondências com Peter Guthrie Tait (1831-1901), Maxwell é influenciado a utilizar a estrutura de quatérnions ao invés da sua tradicional forma de componentes, o que não dificulta o entendimento, visto que a maior parte de seus quatérnions não possuem o termo escalar. Ainda assim, seus termos ainda são representados pelas letras F, G e H.

Nesta época, o termo "potencial" apresentava algumas formas de interpretação. Nessa época, geralmente esse termo era associado à ideia de "energia potencial" e sempre na sua forma escalar. Uma dessas interpretações, inclusive a utilizada por Maxwell no artigo 16 do volume 1 do *Tratado*, é a do modelo que se baseia nas relações entre potencial e força utilizado na mecânica, o qual associa a força com a derivada do respectivo potencial. Sua intenção, neste momento, era encontrar um potencial relacionado com a força magnética, e dessa forma, no fim do artigo 406, Maxwell resgata o conceito de potencial escalar magnético, V, utilizado nos seus trabalhos anteriores, escrevendo a relação entre a força magnética e este potencial,

$$\mathfrak{H} = -\nabla V$$

No entanto, é necessário saber que o lado direito desta equação está representada por meio da notação de quatérnion, sendo o produto de quatérnions entre o operador ∇ e um quatérnion, ou um vetor ou um escalar. Em seguida, Maxwell diz:

> Parece que, a partir da presente investigação, a indução magnética B é derivada do potencial vetor U pela aplicação do mesmo operador e que o resultado é verdadeiro tanto na presença quanto na ausência de um ímã.
> A aplicação deste operador em uma função vetorial produz, em geral, uma quantidade escalar e um vetor. A parte escalar, no entanto, que chamamos de convergência da função vetorial, desaparece quando a função vetorial satisfaz a condição solenoidal
> $$\frac{dF}{d\xi} + \frac{dG}{d\eta} + \frac{dH}{d\zeta} = 0$$
> Ao diferenciar as expressões para F, G, H nas equações 22 [as expressões gerais mencionadas acima], descobrimos que essa questão é satisfeita por essas quantidades.
> Portanto, podemos escrever a relação entre a indução magnética e seu potencial vetorial:

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A}$$

> que pode ser expresso em palavras dizendo que a indução magnética é o rotacional do seu potencial vetorial (MAXWELL, v.2, 1954, p. 31-32, tradução nossa[19]).

Apesar de esta última equação apresentar uma grande semelhança com a equação do potencial escalar magnético, por ambas estarem realizando um produto de quatérnion entre o operador ∇ e no primeiro caso, um escalar, e no segundo caso, um vetor, elas não são parecidas nem na notação das componentes, nem na notação moderna de vetores. A semelhança ocorre quando é utilizado aquilo que atualmente é chamado de condição de gauge, ou seja, quando a parte escalar do produto de quatérnion for nulo.

Retomando a discussão acerca do sentido empregado à palavra "potencial", no artigo 17 do volume 1 do *Tratado*, Maxwell reafirma a sua intenção ao utilizar o operador ∇. Ele afirma que "a natureza geométrica da relação entre o potencial e o vetor assim derivado recebe muita luz da descoberta de Hamilton da forma do operador pelo qual o vetor é derivado do potencial" (MAXWELL, p. 15, 1873).

Avançando agora para o volume 2 do *Tratado*, no artigo 540, é apresentada uma passagem que não pode de maneira alguma ser deixada de lado. Com a intenção de repassar a real intenção do autor, foi realizado um recorte quase que completo do trecho. Assim:

> A concepção de tal quantidade, sobre as mudanças segundo as quais, e não sobre seu valor absoluto, depende a corrente de indução, ocorreu à Faraday nos primeiros estágios de suas pesquisas. Ele observou que no circuito secundário, quando em repouso em um campo eletromagnético que

[19] Original: It appears from the present investigation that the magnetic induction B is derived from the vector-potential U by the application of the same operator, and that the result is true within the magnet as well as without it.

The application of this operator to a vector-function, vanished when the vector function satisfies the solenoidal condition.

$$\frac{dF}{d\xi} + \frac{dG}{d\eta} + \frac{dH}{d\zeta} = 0$$

By differentiating the expressions for F, G, H in equations 22, we find that this question is satisfied by these quantities.

We may therefore write the relation between the magnetic induction and its vector-potential:

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A}$$

which may be expressed in words by saying that the magnetic induction is the curl of its vector potential.

> permanece com intensidade constante, não apresenta qualquer efeito elétrico, enquanto que, se o mesmo estado do campo for produzido repentinamente, aparecerá uma corrente. De novo, se o circuito primário for removido do campo, ou as forças magnéticas forem abolidas, surgirá uma corrente no sentido oposto. Portanto, ele reconheceu no circuito secundário, dentro do campo eletromagnético, uma “condição peculiar da matéria” a qual ele deu o nome de Estado Eletrotônico. Posteriormente, ele descobriu que poderia dispensar sua ideia, por meio de considerações baseadas nas linhas de força magnética, mas mesmo em suas pesquisas mais recentes, ele diz, “Repetidas e repetidas vezes a ideia de um *estado eletrotônico* tem sido imposto à minha mente”.
>
> Toda a história dessa ideia na mente de Faraday, como mostrado em suas pesquisas publicadas, é bem digna de estudo. Por uma série de experimentos, guiados por uma intensa aplicação do pensamento, mas sem a ajuda de cálculos matemáticos, ele foi levado a reconhecer a existência de algo que agora nós sabemos ser uma quantidade matemática, e que pode até mesmo ser chamada de quantidade fundamental da teoria eletromagnética (MAXWELL, 1873, p. 187, tradução nossa[20]).

Após a leitura de tal trecho, fica evidente o tamanho da importância que o autor atribui a este conceito. Dessa forma, resta questionar quais foram os motivos e os métodos utilizados para que “a quantidade fundamental da teoria do eletromagnetismo” fosse desprezada com tamanha intensidade, sendo reduzida a apenas um mero artifício matemático completamente vazio de significado físico.

Um argumento utilizado por aqueles que tomaram conhecimento da passagem anterior e ainda assim, continuam por afirmar a falta de significado físico

---

[20] Original: The conception of such a quantity, on the changes of which, and not on its absolute magnitude, the induction current depends, occurred to Faraday at an early stage of his researches. He observed that the secondary circuit, when at rest in an electromagnetic field, wich remains of constant intensity, does not show any electrical effect, whereas, if the same state of the field had been suddenly produced, there would have been a current. Again, if the primary circuit is removed from thew field, or the magnetic forces abolished, there is a current of the opposite kind. He therefore recognized in the secondary circuit, within the electromagnetic field, a "peculiar condition of matter" to which he gave the name of the Electrotonic State. He afterwards found that he could dispense with this idea by means of considerations founded on the lines of magnetic force, but even in his latest researches, he says, "Again and again the idea of an electrotonic state has been forced upon my mind".

The whole history of this idea in the mind of Faraday, as shewn in his published researches, is well worthy of study. By a course of experiments, guided by intense application of thought, but without the aid of mathematical calculation, he was led to recognize the existence of something which we now know to be a mathematical quantity, and which may even be called the fundamental quantity in the theory of electromagnetism.

ou até mesmo a sua insignificância na visão atual que se tem de sua Teoria Eletromagnética, é o fato de que Maxwell faz uso da distinção entre quantidades físicas e matemáticas. No entanto, o contexto em que ele utiliza este termo para se referir ao potencial vetor magnético, não demonstra ser uma atitude depreciativa, lembrando que em nenhum momento ele descarta a possibilidade de que o potencial vetor também tenha um significado físico.

Mais adiante, no artigo 590, Maxwell retoma o conceito do potencial vetor atribuindo-lhe um novo significado:

> O vetor U representa em direção e magnitude a integral no tempo da força eletromotriz que uma partícula colocada no ponto x, y, z experimentaria se a corrente primária fosse subitamente interrompida. Portanto, chamaremos isso de Momento Eletrocinético no ponto x, y, z. É idêntico à quantidade que investigamos no art. 405 sob o nome do potencial vetorial de indução magnética (MAXWELL, 1873, p. 215, tradução nossa[21])

Além de um novo significado, é atribuído também um novo nome, Momento Eletrocinético, o que lembra muito o seu antigo nome, Momento Eletromagnético.

Sobre o termo "quantidade", utilizado frequentemente por Maxwell, é interessante apontar a explicação que Paulo Abrantes apresenta. Ele diz que "uma grandeza do tipo "quantidade" aparece normalmente em integrais de superfície (por exemplo, o deslocamento elétrico), ao passo que as de tipo "intensidade" são operadas por integrais de linha (por exemplo, a corrente elétrica e a força eletromotriz).

Por fim, no artigo 617, Maxwell aponta novamente outra nomenclatura para este termo, a saber:

> Podemos, portanto, adotar, como definição de U, que é o potencial vetor da corrente elétrica, estando na mesma relação com a corrente elétrica, assim como o potencial escalar está relacionado com a matéria da qual ele é potencial, e obtido por um processo semelhante de integração, que pode ser assim descrito:

[21] Original: The vector U represents in direction and magnitude the time-integral of the elctromotive force which a paticle placed at the point (x, y, z) would experience if the primary current were suddenly stopped. We shall therefore call it the Electrokinetic Momentum *at the point (x, y, z)*. Its identical with the quantity which we investigated in Art. 405 under the name of the vector-potential of magnetic induction.

> A partir de um dado ponto, seja desenhado um vetor, representando em magnitude e direção um dado elemento de uma corrente elétrica, dividido pelo valor numérico da distância do elemento a partir do ponto especificado. Faça isso para todos os elementos da corrente elétrica. O resultado de todos os vetores assim encontrados é o potencial da corrente total. Como a corrente é uma quantidade vetorial, seu potencial também é um vetor (MAXWELL, 1873, p. 238, tradução nossa[22]).

Maxwell deixa bem evidente a analogia entre o potencial escalar elétrico e o potencial vetor magnético, principalmente pela questão do potencial elétrico estar relacionado com uma grandeza escalar (uma carga elétrica parada) e o potencial magnético, estar relacionado a uma situação na qual sejam necessárias mais informações, no caso, direção e sentido (uma corrente elétrica pode ser considerada uma carga em movimento, ou seja, representada por um vetor).

Dessa forma, após uma série de mudanças de nomes e interpretações, tem-se aquilo que atualmente é conhecido por potencial vetor magnético, e que teve seu último nome atribuído no *Tratado* como *potencial vetor da corrente elétrica*. Além disso, faz-se necessária uma continuação deste estudo procurando entender como se deu o processo de transformação da teoria final elaborada por Maxwell, realizada por seus seguidores após a sua morte, assim como quais as motivações envolvidas no processo a partir de um olhar mais epistemológico.

[22] Original: We may therefore adopt, as a definition of **U**, that it is the vector-potential of the electric current, standing in the same relation to the electric current that the scalar potential stands to the matter of which it is the potential, and obtained by a similar process of integration, which may be thus described:

From a given point let a vector be drawn, representing in magnitude and direction a given element of an electric current, divided by the numerical value of the distance of the element from the given point. Let this be done for every element of the electric current. The resultant of all the vectors thus found is the potential of the whole current. Since the current is a vector quantity, its potential is also a vector.

3 – O Potencial Vetor Magnético nos livros didáticos de:

Neste capítulo será mostrada a abordagem que alguns dos livros didáticos mais populares apresentam sobre o potencial vetor magnético.

3.1. David Jeffrey Griffiths

Comecemos com o livro mais utilizado para esta disciplina no curso de Física da UEM, *Introdução à Eletrodinâmica* de David J. Griffiths, 3ª edição, Editora Pearson. Nosso objeto de estudo é encontrado na última seção do capítulo 5, referente à Magnetostática.

O autor introduz o conceito por meio de uma analogia ao potencial escalar elétrico, V. Dizendo que, como o rotacional de **E** sendo nulo na eletrostática permitiu introduzir o gradiente de V, o divergente de **B** sendo nulo, permite a introdução de um potencial *vetor* **A** em magnetostática, tal que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3.1}$$

Em seguida, ele garante a validade dessa afirmação baseando-se em teoremas mostrados em capítulos anteriores. Além disso, ele propõe a verificação dos resultados que essa afirmação provoca nas equações de Maxwell que estão relacionadas com o **B**. A primeira a ser testada é a segunda equação de Maxwell, também conhecida como Lei de Gauss para o magnetismo, que diz que o divergente de **B** é nulo, o que se mantém como correto após a substituição proposta, pois o divergente de um rotacional é sempre nulo.

Na sequência, ele analisa as consequências dessa afirmação na quarta equação, chamada de Lei de Ampère, que afirma que o rotacional de **B** é equivalente à constante magnética vezes a densidade de corrente. Neste caso, no lado esquerdo da equação temos que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{3.2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \tag{3.3}$$

Como:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla.\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}\ , \qquad (3.4)$$

então:

$$\nabla(\nabla.\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} \qquad (3.5)$$

Nesse ponto ele relata que o potencial elétrico possuía uma ambiguidade, a de que era possível adicionar a V qualquer função cujo gradiente fosse nulo, de tal forma que isso não interferiria na quantidade física $\vec{E}$. Dando continuidade à analogia, é dito que pode ser adicionado ao valor de $\vec{A}$ qualquer função cujo rotacional seja nulo, sem que isso altere de fato o valor de $\vec{B}$. Além disso, o autor se aproveita de tal liberdade e assume que seja escolhido para $\vec{A}$ uma função cujo divergente seja nulo. Para a prova, é assumido um $\vec{A}_0$ inicial que não tenha divergente nulo e que seja adicionado a ele o gradiente de ƛ, dessa forma $\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla ƛ$. Fazendo o divergente de $\vec{A}$**,** será obtido que:

$$\nabla.\vec{A} = \nabla.\vec{A}_0 + \nabla^2 ƛ \qquad (3.6)$$

Nesse ponto é aplicada a condição de que o divergente de **A** seja nulo, assim é obtido que:

$$\nabla^2 ƛ = -\nabla.\vec{A}_0 \qquad (3.7)$$

É ressaltado que essa equação é *matematicamente* idêntica à equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (3.8)$$

Em que $\nabla.\vec{A}_0$ faz o papel de $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ como sendo o termo 'fonte'. Em seguida, é lembrado que esta última equação já tinha sido resolvida anteriormente, sobretudo, se ρ tende a zero no infinito, a solução é dada por:

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho}{r} dr' \qquad (3.9)$$

Dessa forma, se o $\nabla.\vec{A}_0$ tende a zero no infinito, o análogo é:

$$ƛ = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla.\vec{A}_0}{r} dr' \qquad (3.10)$$

Neste ponto é lembrado que se o $\nabla.\vec{A}_0$ não tender a zero no infinito, é necessário utilizar de outros meios para encontrar ƛ, assim como quando é necessário obter o potencial elétrico de uma distribuição de cargas que se estende ao infinito. Em seguida, é chamada a atenção para um ponto dito essencial: *é sempre possível fazer com que o potencial vetor tenha divergente nulo* (GRIFFITHS, 1999). Pois a definição especifica apenas que o rotacional de **A** é **B**, mas não é dada nenhuma informação a respeito do divergente de **A**, dessa forma, o autor conclui que tem a liberdade de escolher o que for de maior agrado. Portanto, zero, geralmente é a escolha mais simples.

Assim, a Lei de Ampère sob esta condição é dada por:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J} \tag{3.11}$$

Que assim como a (9), é novamente a Equação de Poisson. Portanto, se o **J** tender a zero no infinito, sua solução será dada por:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}\prime)}{\mathscr{r}}dr' \tag{3.12}$$

Assim como para linhas de correntes e correntes superficiais:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{I}}{\mathscr{r}}dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{1}{\mathscr{r}}dl' \tag{3.13}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}}{\mathscr{r}}da' \tag{3.14}$$

Para finalizar, é dito que o potencial **A** não é tão útil quanto o V, visto que como é um vetor, ainda que seja mais fácil trabalhar com as equações (3.12), (3.13) e (3.14) do que com a equação de Biot-Savart, é necessário preocupar-se com suas componentes. Do ponto de vista do autor, a melhor saída seria encontrar um potencial escalar, como por exemplo:

$$\vec{B} = -\nabla U \tag{3.15}$$

mas acabaria encontrando problemas na aplicação na Lei de Ampère, visto que o rotacional de um gradiente é sempre nulo. Para concluir o autor diz:

> Além do mais, como forças magnéticas não realizam trabalho, **A** não admite uma interpretação física simples em termos da energia potencial por unidade de carga. (Em alguns contextos pode ser

> interpretado como *momento* por unidade de carga.) De qualquer forma, o potencial vetorial tem uma importância teórica substancial, como veremos no Capítulo 10.(GRIFFITHS, ANO, p.)

Adiante o livro trabalha alguns problemas relacionados à geometrização de problemas, direção do **A**, assim como a questão citada anteriormente sobre o caso de quando o **J** não tende a zero no infinito.

Dessa maneira, é possível perceber que a única preocupação envolvida com o conceito de potencial vetor magnético neste livro é no sentido matemático. Aliás, no único momento em que era esperado que fosse tratado de alguma possível interpretação física, nesse caso, o parágrafo citado acima, o autor diz que sua interpretação física não é simples e que ele será utilizado em outro tema mais adiante no livro. No entanto, no capítulo 10, a importância dada ao potencial vetor é mais uma vez, apenas no sentido matemático.

3.2. John Richard Reitz

Neste livro, o objeto de investigação aparece no capítulo 8, intitulado “Campo Magnético em Correntes Estacionárias”, possui um subcapítulo reservado para o potencial vetor magnético. Logo de início, ao introduzir esse, o autor realiza uma certa analogia entre as entidades elétricas e magnéticas,

> O cálculo dos campos elétricos foi bastante simplificado com a introdução do potencial eletrostático. A possibilidade de fazer esta simplificação resultou da anulação do rotacional do campo elétrico. O rotacional da indução magnética não se anula; todavia, seu divergente sim. Como o divergente de qualquer rotacional é igual a zero, é razoável supor que a indução magnética possa ser expressa por: **B** = rot**A** (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982, p. 175).

Novamente trata-se uma introdução do conceito de potencial vetor magnético totalmente baseada em argumentações matemáticas, sem nenhum indício de questionamento relacionado às unidades de medida ou sequer uma tentativa de interpretação física análoga à do potencial escalar elétrico.

Dando continuidade às questões matemáticas envolvidas, o autor diz que a única condição que é imposta ao vetor **A**, é que:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \tag{3.16}$$

e que, através da identidade

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\nabla . \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}, \tag{3.17}$$

juntamente com a utilização do calibre de Lorentz, força o divergente de **A** ser nulo. Neste caso, os autores simplesmente aplicam a condição sem nem mencionar nada sobre o nome desta condição, muito menos o motivo pelo qual se deve aplicá-la. No entanto, obtém-se que:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{3.18}$$

e após uma integração em coordenadas retangulares e tomando como referência a solução da equação de Poisson, tem-se:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} dv_1 \tag{3.19}$$

Neste momento, o autor afirma que esta expressão apresenta integrais muito mais simples de serem resolvidas do que as encontradas na Lei de Biot-Savart. No entanto, ressalta que ainda assim são mais complicadas do que as utilizadas no contexto do potencial eletrostático.

Além dessa forma de obter a equação do potencial vetor magnético, o livro destaca que é possível encontrar esta mesma equação por um processo diferente do apresentado inicialmente. Tal método tem como ponto de partida a seguinte equação, conhecida como Lei de Biot-Savart, já mencionada anteriormente, que é:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} dv_1 \tag{3.20}$$

Utilizando do fato de que

$$\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\nabla_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{3.21}$$

lembrando que o operador ∇_2 atua apenas em $\vec{r}_2$ e fazendo o uso da seguinte identidade:

$$\nabla \times \left(\varphi \vec{F}\right) = \varphi \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \times \nabla \varphi, \tag{3.22}$$

seguido por uma sequência de manipulações algébricas, finalmente é possível obter o mesmo resultado encontrado da forma anterior:

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1} \frac{\vec{J}(\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} dv_1 \tag{3.23}$$

Para finalizar o subcapítulo, o autor faz um alerta ao leitor:

> Para evitar uma falsa impressão, isto é, que o potencial vetor seja tão útil quanto o potencial eletrostático no cálculo de campo simples, deve-se observar que não há essencialmente casos em que **A** possa ser calculado numa forma fechada simples (embora isto se possa sempre fazer numericamente para distribuições de correntes limitadas). O longo fio reto dá um resultado infinito para **A** quando se usa a Eq. (8-61). A espira circular envolve integrais elípticas e assim por diante. Deve-se notar, também, que o cálculo do potencial vetor num só ponto não é útil porque a indução magnética é obtida por derivação. A principal utilidade do potencial vetor é em aproximações como as que serão expostas na próxima seção e em problemas que tratam de radiação eletromagnética (REITZ; MILFORD; CHRISTY, 1982, p. 176).

No subcapítulo seguinte, chamado de “Campo Magnético de um circuito distante”, o autor afirma que o potencial vetor magnético de um pequeno circuito muito distante, pode ser calculado com relativa facilidade. No entanto, deve-se substituir o elemento **J**(**r**) dv por i **dr**. Dessa forma, a equação fica

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{V_1} \frac{d\vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{3.24}$$

Expandindo em série o dividendo e realizando algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{I}{2}\int_{V_1} \vec{r}_1 \times d\vec{r}_1\right] \times \frac{\vec{r}_2}{{r_2}^3} \tag{3.25}$$

Chamando a quantidade de dentro do colchetes de momento magnético, **m**, do circuito, fica

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_2}{{r_2}^3} \tag{3.26}$$

Sendo assim, esta é a equação do potencial vetor para um dipolo magnético. Em seguida, continua um trabalho de manipulações algébricas que não se fazem necessárias aqui. Ainda assim, em nenhum momento o autor sequer se preocupa em tratar o potencial vetor como algo que não esteja relacionado apenas com questões matemáticas.

No final deste capítulo, há um bloco de resumo, em que do ponto de vista do autor são revisados os tópicos mais importantes apresentados anteriormente. O potencial vetor magnético é citado no tópico 4. No entanto, de uma forma que apenas reforça a sua origem moderna unicamente matemática. Nas palavras dos autores, "a existência da função potencial vetor **A**(**r**) provém da equação do divergente, de forma que **B** = rot **A**", em seguida, é relembrada a equação de **A** na forma integral para uma distribuição espacial de densidade de corrente. No item 5 também, neste caso, é relembrado que "a uma grande distância da região onde se localizam as correntes fonte **J**, a expansão multipolar de **A** é: "

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_2}{r_2^3} + \cdots \tag{3.27}$$

lembrando da não existência do termo do monopolo. Em seguida são apresentados exercícios matemáticos envolvendo o conteúdo apresentado em todo o capítulo. No entanto, nenhum estava relacionado com algo não matemático referente ao potencial vetor magnético.

Nossa quantidade de interesse só volta a aparecer no subcapítulo 6, intitulado "Equação de onda com fontes", que se encontra no capítulo 16, intitulado "Equações de Maxwell". Nesta parte, o autor pretende considerar distribuições prescritas de carga e de corrente, ρ(**r**,t) e **J**(**r**,t), e encontrar os campos por eles produzidos. Além disso, é mencionado que existem diversas formas de lidar com esta situação. No entanto, é dito que o procedimento potencial é o mais proveitoso, destacando o caráter de ferramenta facilitadora de cálculos do potencial vetor magnético.

Para isso, tem-se como ponto de partida a equação de Maxwell que envolve o rotacional de $\vec{E}$, a chamada Lei da Indução de Faraday. Além disso, é relembrado que $\vec{B}$ pode ser escrito como sendo o rotacional de $\vec{A}$. Supondo a continuidade dos campos, é possível trocar a diferenciação temporal pela espacial, e dessa forma a equação fica:

$$\nabla \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = 0 \qquad (3.28)$$

Assim, o vetor **E**+∂**A**/∂t terá o rotacional nulo, portanto, pode ser escrito como o gradiente de um escalar, nesse caso

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (3.29)$$

Dessa forma, tanto o campo $\vec{B}$ quanto $\vec{E}$ estão escritos em função dos potenciais, que quando substituídos na equação de onda, ainda a satisfazem. A equação de onda, é obtida a partir da substituição das equações de $\vec{B}$ e $\vec{E}$ escritas em função dos potenciais na equação de Maxwell em que aparece o rotacional de $\vec{B}$. Então

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = \vec{J} \qquad (3.30)$$

Neste momento, é necessário a utilização da identidade matemática do produto vetorial triplo do operador nabla. Além disso, o autor impõe a chamada *condição de Lorentz*,

$$\nabla . \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (3.31)$$

Com essa condição, é obtida uma simplificação considerável. Assim a equação fica

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = -\mu \vec{J} \qquad (3.32)$$

Para o caso elétrico, a equação de onda para o potencial escalar elétrico fica

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \qquad (3.33)$$

Em seguida, comenta-se sobre os procedimentos necessários para a obtenção das soluções dessas equações.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,', t')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' \,, \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dv' \qquad (3.34)$$

em que t'= t - |**r**- **r**'|/*c* é denominado *tempo retardado*, φ é conhecido como *potencial escalar retardado* e $\vec{A}$ é o *potencial vetor retardado*. Logo após, o autor menciona que a interpretação física dos potenciais retardados é interessante, no entanto, a interpretação a qual ele se refere é apenas no sentido relativístico e não sobre a natureza dos potenciais em si.

Por fim, novamente como no capítulo citado anteriormente, é apresentado um resumo do capítulo e novamente o potencial vetor magnético está presente. No item 5, é relembrado que os campos $\vec{B}$ e $\vec{E}$ podem ser encontrados a partir da derivação temporal e espacial dos potenciais. No item 6, é dito que os potenciais elétrico e magnético irão satisfazer as equações de onda não homogêneas, encontradas acima, se a condição de Lorentz for imposta.

Dessa maneira, novamente, nenhuma interpretação física do potencial vetor magnético foi apresentada. Apenas foi reforçada a sua "origem" puramente matemática, além de que em nenhum momento foi mencionada alguma questão relacionada à sua história.

3.3. John David Jackson

Neste livro, o potencial vetor magnético se encontra no subcapítulo 4, intitulado "O Potencial Vetor" no capítulo 5 chamado "Magnetostática". Logo de começo, mais uma vez, o autor parte das equações, afirmando que as equações básicas da magnetostática, na forma diferencial, são

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \nabla . \vec{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

e aponta que o problema é encontrar as soluções destas equações. Dá início à abordagem supondo que $\vec{J}$ vale zero na região de interesse, dessa forma, $\nabla \mathrm{x} \vec{B} = 0$. Assim, somente através de identidades matemáticas, é possível escrever o campo vetorial da indução magnética $\vec{B}$ como o gradiente de um *potencial escalar magnetostático*, $\vec{B} = -\nabla \Phi_m$. Em seguida, é dito que com isso as equações acima se reduzem à equação de Laplace para o Φ_m e isso é o necessário para encontrar suas soluções. Adiante, é apontado o método geral de abordagem para esta situação, o qual se baseia na segunda equação, afirmando assim como nos outros livros, que quando o divergente de um campo vetorial é nulo, neste caso, $\nabla.\vec{B} = 0$, o campo vetorial $\vec{B}$ pode ser escrito como o rotacional de um outro campo vetorial, neste caso,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) \tag{3.36}$$

onde $\vec{A}_{(x)}$ é denominado de *potencial vetor*. Neste momento, é resgatada uma equação encontrada anteriormente no texto, a equação geral do campo vetorial $\vec{B}$, sendo ela

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}\prime)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \tag{3.37}$$

o que torna possível escrever uma equação para o campo vetorial **A**:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}\prime)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' + \nabla\Psi(\vec{x}) \tag{3.38}$$

Note que esta equação apresenta um gradiente de uma função escalar arbitrária. Isto significa que o potencial vetor $\vec{A}$ pode ser transformado livremente de acordo com $\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Psi$, o que é chamado de *transformação de calibre*. Esta liberdade atribuída a $\vec{A}$, permite escrever o campo vetorial da forma mais conveniente em cada situação.

Substituindo-se o $\vec{B}$ escrito na forma de rotacional nas equações básicas da magnetostática, obtém-se

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ \nabla\left(\nabla.\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Utilizando da liberdade mencionada anteriormente envolvendo o divergente do potencial vetor, iremos considerar nesta situação que ele seja nulo, $\nabla.\vec{A} = 0$. Tal condição é conhecida como *calibre de Coulomb*. Assim, da segunda equação é possível obter que

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{3.40}$$

sendo esta a equação de Poisson para a magnetostática. Dessa forma, o autor conclui que “das nossas discussões da eletrostática, é claro que a solução para $\vec{A}$, no espaço ilimitado, é”:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}\prime)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \tag{3.41}$$

com Ψ = constante.

A seguir, a utilização do potencial vetor magnético nos subtópicos posteriores é tratada de forma completamente matemática, fazendo o uso de funções delta, integrais elípticas, entre outras ferramentas matemáticas. Infelizmente, mas já esperado, não é tratado em nenhuma parte de todo o texto, algo relacionado com a interpretação física do potencial vetor, nem mesmo uma tentativa de analogia aos fenômenos elétricos foi instigada, havendo no máximo comparações entre semelhanças matemáticas.

3.4. Kleber Daum Machado

Nosso objeto de interesse aparece no capítulo 16, chamado de “Campos Magnéticos II: Potenciais Magnéticos”. Antes de ser apresentado o primeiro tópico, o autor faz uma breve introdução comentando e apresentando o conteúdo que será visto ao longo da seção.

No começo dessa introdução o autor resgata o estudo feito realizado anteriormente em relação à Eletrostática, no qual o campo elétrico foi estudado inicialmente e apenas em seguida o potencial elétrico veio a ser apresentado. Nesta parte, segundo Kleber Daum Machado (2002): *o potencial elétrico é uma função escalar associada ao campo elétrico ligada também à quantidade de trabalho realizado para deslocar uma carga sob a ação de forças elétricas.* Além disso, é ressaltado que as diferenças de potenciais são grandezas que podem ser medidas, portanto, reais, e também desempenham um papel muito importante neste estudo da Eletrostática.

Esse raciocínio leva o leitor a se perguntar se existe algum potencial magnético que produza efeitos semelhantes para o campo magnético assim como o potencial escalar elétrico produz para o campo elétrico. O autor ressalta que é necessário cuidado ao responder esta pergunta. Mesmo existindo potenciais magnéticos que permitem que sejam encontrados os campos magnéticos da mesma forma que o seu análogo elétrico, o autor diz:

> Entretanto, o potencial elétrico é uma grandeza física mensurável, ao passo que os potenciais magnéticos, no Eletromagnetismo Clássico, são apenas ferramentas matemáticas auxiliares. Esses potenciais não possuem realidade física, mas em certos casos eles facilitam bastante o estudo de um problema. Assim, os potenciais elétricos e magnéticos são fisicamente muito diferentes, mesmo que as equações matemáticas que envolvem essas grandezas não o sejam (MACHADO, 2002, p. 357).

Dessa forma, é evidente que para o autor o objeto fundamental da teoria de Maxwell é reduzido a apenas uma ferramenta matemática. Ademais, na nota de rodapé da mesma página, há um comentário dizendo que é apenas no domínio quântico que o potencial e o campo magnético passam a ser igualmente relevantes e que o efeito Bohm-Aharonov consegue atribuir uma realidade física ao potencial vetor magnético, mas exclusivamente no caso quântico.

Em seguida, dá-se início ao subcapítulo 16.1, chamado de “Potencial Vetor Magnético”. De início, o autor relembra que o campo magnético está sujeito à segunda Lei de Maxwell:

$$\nabla . \vec{B} = 0 \tag{3.42}$$

e ainda ressalta a tradicional implicação física desta equação, que é, o fluxo magnético através de uma superfície fechada é nulo, ou seja, o “fato” físico da não existência de monopolos magnéticos.

Além disso, é ressaltado que quando um campo vetorial possui seu divergente nulo, é possível escrever este primeiro campo vetorial na forma de um rotacional de um segundo campo vetorial, dessa maneira

$$\nabla . \nabla \times \vec{A} = 0 \tag{3.43}$$

em que $\vec{A}$ seria este outro campo vetorial. Voltando ao objeto de interesse inicial do autor, tem-se uma nova forma de escrever o campo magnético,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{3.44}$$

o campo vetorial $\vec{A}$, é o Potencial Vetor Magnético. O autor resgata a equação do campo magnético na forma integral, a chamada Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\prime)\times(\vec{r}-\vec{r}\prime)}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|^3}dV \qquad (4.45)$$

A partir da utilização de identidades matemáticas abaixo e uma série de manipulações algébricas

$$\nabla\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}\right] = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\prime}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|^3} \qquad (4.46)$$

$$\nabla\times\left(\Phi\vec{A}\right) = (\nabla\Phi)\times\vec{A}+\Phi(\nabla\times\vec{A}) \qquad (4.47)$$

chegamos em

$$\vec{B} = \nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}dV\right] \qquad (4.48)$$

nessa equação, é possível notar a semelhança com a equação $\vec{B} = rot\vec{A}$, e dessa forma obtém-se:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}dV \qquad (4.49)$$

Em seguida, o autor propõe uma comparação entre a equação encontrada para o potencial vetor magnético e a equação do potencial escalar elétrico, encontrada em um capítulo anterior, sendo essa última expressa por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\prime)}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}dV \qquad (4.50)$$

Sobre a comparação, o autor comenta:

> Da comparação, percebemos que as duas expressões são matematicamente semelhantes. Entretanto, em geral a equação 16.5 [do PVM] é muito menos útil do que a 5.12 [do potencial elétrico], pois, mesmo para distribuições simples de corrente, a integral que aparece nela não pode ser resolvida exatamente, mesmo em casos simples, como veremos nos exemplos a seguir. A principal utilidade do potencial vetor magnético consiste em facilitar resoluções aproximadas para alguns problemas importantes, como os que envolvem a radiação eletromagnética, que será estudada no Volume III.

O exemplo mencionado neste trecho refere-se à impossibilidade de se encontrar o potencial vetor magnético para um fio muito longo que é percorrido por uma corrente i ao longo da parte positiva do eixo z. A impossibilidade está relacionada com o fato de a integral necessária para a solução do problema divergir em alguns pontos.

Além disso, o autor também cita a situação em que as correntes se distribuem ao longo de fios, ao invés de regiões volumétricas. Dessa forma, ao invés de utilizarmos a densidade de corrente e um infinitesimal de volume, passa-se a utilizar a própria corrente e um elemento infinitesimal de linha orientado. Esta orientação do termo infinitesimal, faz com que o potencial vetor magnético oriente-se paralelamente à corrente. Neste caso em particular, devido a simetria do sistema, pode servir como um auxílio para que consigamos compreender algumas das ideias de significado físico do potencial vetor magnético atribuídas por Maxwell. Em seguida, são realizados alguns exemplos, tais como, encontrar o potencial vetor em um fio infinito, em um solenóide muito comprido, em uma espira, entre outros.

Adiante, dá-se início ao subcapítulo 16.2, chamado de “Potencial Vetor e Campo Magnético de um Dipolo Magnético”, em que é utilizado de muito traquejo matemático para chegar na equação do campo magnético de um dipolo magnético, que é dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left[\vec{m}.\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right]\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{\frac{5}{2}}} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{\frac{3}{2}}}\right] \qquad (4.51)$$

e novamente o autor realiza a comparação entre o formato matemático da equação para o campo magnético de um dipolo magnético e a equação para o campo elétrico de um dipolo elétrico (o que parece ser uma forma inconsciente de buscar uma analogia entre fenômenos de naturezas diferentes):

$$\vec{\varepsilon}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\left[\vec{p}.\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right]\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{5}} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{3}}\right] \qquad (4.52)$$

A seguir, ele comenta sobre o fato de os campos serem mais intensos entre os dipolos, tanto elétrico quanto no magnético. Após isso, apenas é realizado um aprofundamento nas questões matemáticas em casos onde apenas a geometria do sistema se modifica. Nada relacionado às implicações físicas desta entidade é mencionado até o final do capítulo.

Como pudemos observar, nenhum dos quatro livros analisados apresentam qualquer indício de significado físico ao potencial vetor magnético.

4 - Entrevistas com os professores

Neste capítulo será apresentado um pequeno questionário que foi respondido por três professores que atuam em uma instituição de ensino superior. Tais professores ministram aulas da disciplina de Eletromagnetismo ou semelhantes, e portanto, espera-se que os conceitos relacionados ao Eletromagnetismo sejam compreendidos por eles com certa naturalidade e desenvoltura.

O objetivo deste capítulo é tomar conhecimento da visão que os professores possuem e consequentemente repassam para seus alunos em relação a esse tópico do Eletromagnetismo.

O questionário aplicado para os professores possuía as seguintes perguntas:

1. O que é o Potencial Vetor Magnético?
2. Qual a sua função/utilidade?
3. Qual o seu significado matemático?
4. Ele possui algum significado físico? Se sim, qual?
5. Qual a sua importância para a Teoria Eletromagnética?

4.1 As respostas dos professores

As respostas do primeiro professor, suas respostas foram as seguintes:

1 - O que é o Potencial Vetor Magnético?
Pra mim é só uma função matemática.

2 - Qual a sua função/utilidade?
É encontrar o campo magnético e o campo elétrico.

3 - Qual o seu significado matemático?
Uma função cujo o seu rotacional nos fornece o campo magnético e a derivada temporal parcial dela nos fornece o campo elétrico.

4 - Possui algum significado físico? Se sim, qual?
Na minha opinião, na minha interpretação eu não consigo ver nenhum.

5 - Qual a sua importância para a Teoria Eletromagnética?

É pra facilitar você encontrar campos elétricos e magnéticos né, você pode mais facilmente encontrar esses campos por meio delas ao invés de calcular diretamente a solução das equações de Maxwell ou a lei de Biot-Savart.

As respostas do segundo professor foram as seguintes:

1 - O que é o potencial vetor magnético?
O potencial vetor magnético é análogo do potencial escalar, como o nome já diz, é um vetor. Tipicamente, se a gente tem divergente de B = 0 implica, se e somente se, B puder ser escrito como o rotacional de um vetor. E esta é a maneira tradicional de se introduzir o potencial vetor ao longo dos diversos livros de eletromagnetismo. É claro que historicamente pode haver várias outras opções, mas essa é a mais usada, divulgada, ou seja, muitas vezes com a evolução do conhecimento as pessoas acabam arrumando uma maneira mais breve, mais direta de apresentar. Esse é o procedimento padrão de fazer a apresentação. Uma outra possibilidade que tem do PVM, diretamente ligada a essa, é partir da Lei de Biot-Savart, aquela que fala que o campo magnético é igual a uma integral da densidade de corrente, que tem estrutura semelhante à estrutura do campo elétrico em termos da densidade de carga. Só que como tem essa natureza vetorial, que está relacionada com a densidade de corrente, e a densidade de corrente é um vetor e a densidade de carga é um escalar, lá dentro aparece uma estrutura de um produto vetorial. Uma pequena manipulação desta fórmula, permite escrever B como o rotacional de uma integral, basicamente integral de J(r') /|r-r'| integrado no volume da variável linha. Este é mais um procedimento para obter o potencial vetor.

2 - Qual é a função e utilidade do potencial vetor magnético?
Voltando à maneira tradicional de estudar eletromagnetismo, eu vou começar fazendo um paralelo. A vertente é a seguinte, por exemplo, na eletrostática tem-se o potencial escalar, o campo elétrico é um vetor, quando você escreve o campo elétrico como menos o gradiente do potencial escalar, ou seja, se você souber uma única grandeza do potencial escalar, você saberá a grandeza de seu grande interesse que é o campo elétrico, que é um vetor. Então, olhando sobre esse enfoque, ele simplifica a maneira de se encontrar o campo elétrico. Então, por exemplo, aparece a equação de Laplace ou de Poisson, quando tem a presença de densidade de carga, a equação para resolver para o potencial escalar, o potencial da eletrostática. E então funciona desse jeito. Além disso, tem uma outra coisa muito curiosa que aparece o potencial escalar, ele pode ser visto como uma energia por carga, então ele tem essa interpretação que é interessante. Certo, agora que falamos sobre isso, conecta-se suavemente, amigavelmente com os conceitos de mecânica clássica. Agora vamos passar para o potencial vetor, curiosamente, ele não ajuda no ponto de vista de diminuir o número de quantidades que você quer analisar, por que, antes a gente tinha o campo elétrico igual ao menos gradiente do potencial escalar, uma única grandeza e o campo elétrico três, mas, quando você

escreve o campo magnético igual ao rotacional do potencial vetor, o que acontece? O potencial vetor tem três componentes e o campo magnético três, então neste aspecto ele não ajuda, mas assim mesmo ele tem a estrutura formal de se comportar em algum sentido como um potencial, no sentido de que você tem que tomar a derivada dele para obter o campo, nesse caso o rotacional. Isso no âmbito da magnetostática, quando avançamos para a eletrodinâmica, ou seja, quando os campos elétricos e magnéticos podem depender do tempo e as equações de Maxwell ficam interligadas, aí aparece não só separado o potencial vetor para campo magnético e o potencial escalar para campo elétrico, mas aparece uma mistura deles. Ainda preserva a estrutura, o campo magnético é igual ao rotacional do potencial vetor, mas o campo elétrico fica menos o gradiente do potencial escalar menos a derivada temporal do potencial vetor, chamo atenção que essa maneira de falar pode aparecer uma constante aí na frente a depender do sistema de unidades, esse que eu to falando é o sistema internacional mks. Pois bem, por quê? Porque campo elétrico e magnético estão interligados quando interagem, então se o campo magnético só escreve em função do potencial vetor, o campo elétrico, para ter alguma relação com o campo magnético, o potencial vetor deve aparecer no campo elétrico, então aparece menos a derivada dele em função do tempo. Pois bem, então posto desta forma, ele se comporta como um potencial, então curiosamente, as componentes do campo elétrico são três, as do campo magnético são três, então são seis grandezas desconhecidas, ao passo que o potencial escalar junto com o potencial vetor, resultam em quatro grandezas a serem conhecidas, então nesse sentido, no total diminuiu, três do potencial vetor e uma do potencial escalar. Então é uma maneira muito comum escrever as equações para os potenciais escalar e vetor e tentar resolvê-las, isso do ponto de vista da eletrodinâmica clássica, e ainda, quando as pessoas vão fazer mecânica quântica da eletrodinâmica, a maneira tradicional que aparece nos livros textos é tomar como objetos bases de partida, os potenciais, como as variáveis básicas, assim como na mecânica clássica é a posição das partículas e têm suas velocidades, lá quando faz essa mecânica quântica têm os potenciais, que fazem o papel das posições das partículas, e o análogo das velocidades são as derivadas temporais. Então essas teorias já começam usando o potencial escalar e o potencial vetor. Portanto, hoje tem essa visão unificada de como que usa o potencial vetor. Resumindo. Parece que a maneira *standart* que é usada nos livros textos, provavelmente em grande proporção, é motivado também pelo sucesso de como eles são usados em outras teorias, em outras generalizações que vem além da eletrodinâmica tradicional, por exemplo, aquelas teorias que descrevem interações fortes e fraca, são todas formuladas em coisas que se assemelham a uma eletrodinâmica e é aí onde os potenciais, análogo de vetor fica mais complicado, tem mais componentes, a teoria geral faz parte da mesma família, então, parece que solidifica a maneira de ver como que ele surge. Para complementar, acontece uma outra possibilidade, acho q nos anos 50, tem uma coleção famosa de física, dos russos, Landau e Lifshitz, volume 2, teoria do campo, a maneira como ele introduz o eletromagnetismo, provavelmente muito mais voltada para essas vertentes de teorias de campo relacionada com partícula, ele começa propondo que vale na natureza a relatividade restrita e arruma alguma maneira de no início da conversa, logo no início, quando quer falar da dinâmica de uma partícula, supor, que já tem um potencial vetor de partida, e daí pra frente ele acha a força de Lorentz, depois supõe que tem uma dinâmica, investigando com o princípio da mínima ação e chega nas equações de Maxwell, ou seja, totalmente diferente da vertente tradicional da maioria esmagadora dos livros textos que primeiro apresenta a eletrostática, a magnetostática, depois introduz a dependência temporal, ou seja, no sentido de os campos não precisarem ser estacionários e aí depois fala do contexto com relatividade e avança.

3 - Qual o sentido matemático do potencial vetor magnético?
Eu não entendi direito a pergunta, quer dizer, talvez eu possa responder alguma coisa a mais, mas tudo o que eu tinha para falar eu já falei antes. Se tivesse uma maneira mais simples neste cenário que eu expliquei, de introduzir o potencial vetor, seria o análogo do potencial escalar para o caso do magnetismo.

4 - Ele possui algum significado físico?
Vamos fazer o paralelo de novo com o potencial escalar. O potencial escalar, ele representa, como eu disse bem, a energia por carga, assim como o campo elétrico representa a força por carga, porque, por exemplo, a força igual a carga vezes o campo elétrico, no domínio da eletrostática. Força é a única coisa que tem um significado primário, porque ele mexe na segunda lei de Newton, é a força que faz a partícula andar, não é o potencial, a energia potencial, seria o menos gradiente dela para dar a força. Então, ela está intimamente conectada com a força, mas ela vem tipo uma integração, na realidade vem junto com o conceito de energia definido a menos de uma constante aditiva. Então, o que aparece assim no final da história é a menos de uma constante aditiva assim como a energia, você tem que definir uma origem para ele para comparar. Aí agora passando o paralelo para o potencial vetor. O potencial vetor ele não representa uma energia, não tem energia vetorial, aí o que sobra dele basicamente é o análogo de quando tomar uma derivada, no seu caso o rotacional, se obtém o campo magnético, portanto sobra este paralelo. Só que ele também não é definido univocamente igual o potencial escalar, no caso da magnetostática, se você toma o rotacional dele e a ele você modifica adicionando o gradiente de qualquer função, rotacional de um gradiente dá zero, então você pode somar à ele qualquer gradiente, isso faz com que tenha uma liberdade muito maior na sua escolha do que no potencial escalar. E com isso fica mais difícil de falar que ele representa alguma grandeza física. O que pode acontecer e acontece muitas vezes é o seguinte, olha que coisa curiosa, o campo magnético é o que vai conduzir a força direto, e aumentando um tantinho ele, já muda o que é que fica, mas falamos que o potencial vetor têm três componentes e o campo magnético também tem três componentes, neste sentido não haveria ganho nenhum, entretanto, o potencial vetor tem uma liberdade tão grande que parece q a informação contida nele é de certa forma um pouco redundante. Então eles usam um procedimento que

chama “fixação do gauge”, que vem do francês que quer dizer medida, é porque você pode variar a medida do potencial vetor, escolhendo livremente o gradiente desta função escalar, então, fixa, e quando fixa, diminuir um pouco a liberdade, apesar dele continuar sendo um vetor de três componentes ele fica mais restrito e obriga uma condição sobre ele, aí sim ele passa a ter um significado direto, pq ele não passa mais a ter redundância. Num caso, muito relacionado a situações não relativísticas, usa o tal do Gauge de Coulomb, que é o div do pvm ser igual a zero, aí quando fixa isso, aí sim, qualquer pedacinho dele mudado, reflete direto em B, aí sim, vc tirou toda a possível arbitrariedade que podia ter nele, e assim é claro que vc ainda pode somar uma constante, mas ele fica muito mais unívoco em relação a B do q antes. Mas quero dizer assim, no contexto da teoria clássica, E e B, tem toda a informação que vc precisa sobre o sistema, são eles que vão aparecer na força que vai movimentar uma partícula por exemplo, aí tem os artifícios de usar os potenciais, mas usando os potenciais a gente chega a E e B e ainda restringindo a liberdade que eu falei, eles ficam muito mais unívocos o valor deles em relação a E e B, isso tudo no contexto clássico. Agora, o eletromagnetismo é usado também, em alta proporção, para estudar fenômenos que extrapolam a mecânica clássica, no contexto da mecânica quântica, porque por exemplo, a mecânica quântica é fabulosa assim para o desenvolvimento da física, porque não teria jeito de formar uma átomo na clássica, por que um elétron orbitando um núcleo, estaria acelerada, irradiaria, e cairia no núcleo, então a mecânica quântica garante uma coisa assim sensacional, garante que a matéria seja estável, se não ela colapsaria toda. Então o eletromagnetismo quando vai aplicar nesse domínio quântico, ele deve ser convenientemente tratado, então você deve se perguntar, como que aparece o potencial escalar e o potencial vetor neste contexto? Então como eu falei antes que para fazer a mecânica quântica do campo eletromagnético apareceria, basicamente, o potencial escalar e o potencial vetor, e lembre-se, aquela coisa de fixar o gauge tem que acontecer também, porque aí ele não fica geral, tem que matar essa redundância. Aí tem o gauge que é para o domínio relativístico, eu falei o gauge de Coulomb, tem o outro tipo, que é o gauge de Lorentz. Mas tudo bem, agora voltemos ao potencial vetor, o que acontece nesse império, é que quando vai inventar alguma coisa para analisar, esta uma coisa tem que ser um invariante de gauge, o que quero dizer com isso, no caso do potencial vetor que tem que somar o gradiente de um escalar e nada muda, tem que ser uma expressão que este tipo de estrutura é preservada. Por exemplo, tem umas histórias de partícula passar por fenda, não passar por fenda, que é chamado de efeito Aharonov-Bohm, e lá, tem a possibilidade de passar numa dupla fenda, colocar a presença de um campo eletromagnético. Utilizando o formalismo lagrangeano, por exemplo, uma partícula na presença de um campo eletromagnético, se fosse na eletrostática, você escreveria a energia cinética menos a energia potencial, que seria a carga vezes o potencial elétrico. E quando tem o caso magnético? Tem que aparecer a carga, a velocidade, produto escalar do potencial vetor. Ele aparece lá também, mas, apesar de não aparecer numa analogia de uma energia por carga do potencial vetor, quando ele combina com a velocidade essa parte faz um análogo de uma energia potencial por carga, só que dependendo da velocidade. Então, voltando a história, aparece a expressão relacionada com o potencial vetor. E lá vai aparecer uma situação que é tipo assim, uma integral de linha do potencial vetor, só que você faz a integral de linha num percurso fechado, então vamos supor que você troque o potencial vetor, adicionando um gradiente de um escalar. Mas, quando você faz uma integral de linha fechada de um gradiente de uma função, ela dá a função no ponto inicial menos o final, como o circuito é fechado, dá zero, então esta liberdade que tinha desaparece. Então, o resultado não depende da fixação do gauge. Então, basicamente, pode pensar essa vertente e coisas que quando vai estudar o eletromagnetismo ou teorias que eu falei que são formalmente, generalização do eletromagnetismo que usa para interações fortes e fracas, os objetos importantes a serem analisados são objetos que são invariantes de gauge. Um objeto típico é o campo elétrico ou o campo magnético, o outro é uma combinação que não é campo elétrico nem campo magnético, por exemplo, a integral de linha do potencial vetor.

5 – Qual a sua importância dele para a teoria eletromagnética?
Da maneira como hoje a gente estuda as coisas, apesar do campo elétrico e do campo magnético serem os entes básicos - voltando ao contexto da mecânica clássica - para falar qual é a força que atua em uma partícula e portanto saber como que muda a posição da partícula com o tempo, para descrever a trajetória da partícula, a razão do movimento dela, a presença do campo elétrico e magnético, mas o potencial vetor faz um papel fundamental para todas as generalizações e entendimentos atuais que a gente usa o eletromagnetismo, tanto na sua vertente clássica, quântica e até mesmo aquelas generalizações relacionadas com interações fortes e fracas. Mesmo que ele não seja em algum sentido tão fundamental, mas todas as maneiras que são construídas as coisas nos livros textos, ele se torna essencial.

As respostas do terceiro professor foram as seguintes:

1 - O que é o potencial vetor magnético?
O potencial definido a partir do rotacional, que define o campo magnético a partir do rotacional dele, é uma definição matemática, isso é o potencial vetor magnético, que está associado ao campo magnético, mas definido a partir do rotacional.

2 - Qual a sua função/utilidade?
Basicamente é calcular o campo **B**.

3 - Qual o seu significado matemático?
O Potencial Vetor Magnético, tem o símbolo **A**, ele surge da relação de uma das equações de Maxwell, que é o divergente do campo magnético igual a zero. Então, tem uma relação matemática que diz que o divergente de um rotacional é sempre nulo, então esse B é expresso como um rotacional de um vetor, é pra satisfazer essa relação matemática, então o significado matemático é esse, um vetor que

satisfaz uma das relações, uma das equações de Maxwell, chamada de equação de Gauss magnética, que é o divergente de B igual a zero. Essa expressão matemática, a Lei de Gauss Magnética, ela representa ou nos diz algo a respeito da inexistência de monopolos magnéticos, então, esse vetor A está associado de alguma forma à essa realidade da natureza, mas não significa diretamente a inexistência de monopolos, a inexistência está expressa em termos do divergente do campo igual a zero. Então surge de uma relação matemática, onde o significado físico associado a esse vetor é a inexistência de monopolos magnético, diferentemente do divergente do outro campo, que o divergente do campo elétrico dá o rho sobre epsilon zero, que é a Lei de Gauss Elétrica, ilustrando que existem cargas elétricas individuais, a carga positiva separada da carga negativa, e quando o divergente for nulo, no caso magnético, nos diz que não há uma carga magnética, polo norte separado do polo sul, sempre dipolos. Então esse vetor A está associado a isso, de forma indireta, então ele surge dessa relação matemática, que o divergente de um rotacional é nulo, então esse B, que é um vetor magnético, vai estar associado ao rotacional de um outro vetor, esse outro vetor é o chamado vetor magnético, porque é o magnético.

4 – Ele possui algum significado físico? Se sim, qual?
Essencialmente é uma relação matemática, não tem assim uma aplicação direta desse vetor. Porque, veja, o campo utilizado é o campo magnético B, e esse vetor está associado ao campo magnético pelo rotacional, o B você usa, o A não.

5 - Qual a sua importância para a Teoria Eletromagnética?
Ele faz parte dos potenciais, então tem o potencial escalar e esse é o potencial vetor. Eu vejo a importância dele pela própria das equações de Maxwell, de novo o divergente de B é nulo, então tem que ter um vetor A cujo rotacional é igual a B para satisfazer uma igualdade matemática, então você tem em termos de completeza ou simetria das equações de Maxwell, tem que existir esse vetor para poder satisfazer uma igualdade matemática e a equação de Gauss magnética ter um significado físico, que o divergente é igual a zero, o divergente do campo magnético nulo, e isso tem um significado que é a inexistência de monopolos magnéticos. Veja que chega no vetor A a partir dessa evidência inicial, o divergente de B igual a zero, aí você tem uma relação matemática. Então seria isso, a importância desse vetor, eu entendo como sendo como um termo de completeza da teoria, para deixar a teoria completa, tem q ter esse vetor para satisfazer a igualdade matemática, senão a teoria fica incompleta, não furada, incompleta, não fica uma teoria fechada, e dessa forma ela fica bem fechada, então tem que existir esse vetor A, embora não tenha assim um significado físico claro do que é o vetor A fisicamente, eu digo que vem de uma definição matemática, mas carregando conteúdo físico, que é a inexistência de monopolos magnéticos, esse é o conteúdo físico da natureza. Se for descoberto um monopolo magnético, bom aí a coisa muda, a Lei de Gauss Magnética não será satisfeita, aí terá carga magnética independente, sei lá, um polo norte separado de um polo sul, aí essa igualdade não será satisfeita. Então esse é o conteúdo físico

que essa equação representa, que expressa a natureza, que se observa na natureza, que no fundo eu acho que as equações, não só de Maxwell mas todas as equações, expressam o que acontece na natureza. Expressa a natureza, os comportamentos da natureza, e essa aqui expressa o comportamento dos campos magnéticos, que você não encontra um pólo norte separado de um pólo sul, só existem dipolos, então o divergente desse campo é sempre nulo, aí como o divergente do rotacional é zero, então o campo magnético tem que ser igual ao rotacional de um outro vetor, aí esse vetor, é o chamado vetor magnético.

5. Possíveis interpretações físicas do Potencial Vetor Magnético

Tendo em vista que ao longo do desenvolvimento da Teoria Eletromagnética, Maxwell atribuiu algumas interpretações físicas para aquilo que atualmente é entendido por Potencial Vetor Magnético, o objetivo deste capítulo será o de apresentar duas possíveis formas de se interpretar o conceito do Potencial Vetor Magnético, para isso, será resgatada a equação (2.5) feita por Franz Neumann para matematizar o potencial vetor magnético $\vec{A}$,

$$\vec{A}(\vec{r}_2) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}$$

sendo a sua unidade de medida,

$$\left[\vec{A}\right] = \frac{N}{A} = \frac{kg}{C} . \frac{m}{s} \tag{5.1}$$

Tendo conhecimento disso, começaremos partindo da equação que relaciona o campo elétrico com gradiente do potencial escalar elétrico e a derivada temporal do potencial vetor magnético, ou seja:

$$\vec{\mathrm{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}} \tag{5.2}$$

Ignorando os sinais da equação e se preocupando apenas com as unidades de medidas, tem-se:

$$\frac{N}{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} + \frac{[\vec{A}]}{\mathrm{s}} \tag{5.3}$$

Isolando o termo referente ao potencial vetor magnético

$$\left[\vec{A}\right] = \frac{kg}{C} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{5.4}$$

em que kg.m/s é a unidade de medida de momento linear. Dessa forma, pode-se reescrever (dimensionalmente) a equação de **A** como sendo:

$$\vec{A} = \frac{\vec{p}}{\mathrm{q}} \tag{5.5}$$

Assim, essa possível interpretação dada ao potencial vetor magnético, lembra a ideia do *Momento Eletrocinético* atribuído por Maxwell a essa grandeza no *Tratado*.

Outra forma de chegar nessa conclusão é partindo da relação entre o campo elétrico e o potencial vetor magnético,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\frac{\partial A}{\partial \mathrm{t}}} \tag{5.6}$$

do lado esquerdo da equação temos o campo elétrico, que pode ser escrito como

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} \tag{5.7}$$

Assim,

$$\vec{F} = -q\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial \mathrm{t}} \tag{5.8}$$

Substituindo a definição de força no lado esquerdo,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -q\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{5.9}$$

para que as derivadas sejam iguais, as funções também devem ser. Assim, ao eliminar formalmente os diferenciais,

$$\vec{p} = -q\vec{A} \tag{5.10}$$

isolando o **A**, tem-se

$$\vec{A} = -\frac{\vec{p}}{q} \tag{5.11}$$

Assim, é possível obter novamente uma equação que pode ser interpretada da forma que o potencial vetor magnético apresente alguma relação com o momento atribuído à carga.

Outra maneira de se pensar é partindo de uma comparação entre as unidades de medidas dos campos elétricos e magnéticos e dos respectivos potenciais. Assim, as unidades de medida de **E** e **B**, são:

$$[\vec{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \text{ e } [\vec{B}] = \frac{\mathrm{N}}{C.\frac{m}{s}} \tag{5.12}$$

Percebe-se que a diferença é apenas de um termo referente à velocidade no denominador da unidade de B. Assim, é possível inferir, por analogia,

$$[V] = \frac{J}{\mathrm{C}} \text{ e } [\vec{A}] = \frac{J}{\mathrm{C}.\frac{\mathrm{m}}{s}} \tag{5.13}$$

em que o primeiro termo, o do potencial escalar elétrico, representado pela unidade joule por coulomb, energia por unidade de carga, pode ser interpretado como o trabalho realizado para se trazer uma carga q do infinito até determinado ponto na presença de uma carga fixa. Analogamente, pode-se entender que para o caso do potencial vetor magnético, tem-se que; reorganizando as unidades de medida:

$$[\vec{A}] = \frac{\mathrm{J}}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}.m} \tag{5.14}$$

$$[\vec{A}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A.m}} \tag{5.15}$$

Ou seja, as unidades de medida no denominador estão relacionadas com corrente elétrica e distância. Para facilitar a interpretação do que isso pode significar, consideremos que A.m seja a unidade de medida de um elemento de corrente.

Assim sendo, o potencial vetor magnético poderia ser entendido, analogamente ao potencial elétrico, salvo pelo aspecto vetorial, como o trabalho realizado (J) para trazer um circuito que possui uma corrente (i) do infinito até um certo ponto a uma certa distância de um outro circuito com corrente elétrica.

Ou seja, manipulando-se as unidades de medida envolvidas com o potencial vetor magnético, é possível atribuir pelo menos dois significados físicos a este conceito, conforme o próprio Maxwell assim o fez.

6. Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo realizar um resgate histórico acerca do potencial vetor magnético, ressaltando a sua importância para a Teoria Eletromagnética de Maxwell, bem como a existência de várias interpretações físicas ao longo do seu desenvolvimento como conceito central de sua teoria.

Além disso, evidenciou-se a enorme distorção e até mesmo perda de significado, que a própria teoria de Maxwell e de seus conceitos sofreram com os passar do tempo. Muito dessa distorção está intimamente relacionada com a forma que a Ciência é feita e ensinada, tida como um processo linear em que cada pequeno avanço e "descoberta" é entendida como um passo necessariamente para frente, deixando-nos cada vez mais próximo de algo final que está relacionado a uma Verdade, a qual na realidade, não existe. No entanto, basta acompanhar o desenvolvimento de uma teoria ou um conceito qualquer, utilizando as obras originais de seus criadores, para perceber que na verdade a Ciência caminha em passos incertos, sem uma direção correta, e ainda, que é feita por pessoas normais, inseguras e que também erram.

Dessa forma, é necessário realizar o seguinte questionamento: por que absolutamente todas as partes de todo esse rico debate envolvendo a entidade aqui trabalhada é completamente descartada dos livros didáticos? O resultado que isso provoca já é conhecido: alunos confusos, alunos e também professores que desconhecem o desenvolvimento histórico daquilo que está sendo estudado, além de que, num panorama geral da educação, aqueles pequenos trechos que aparecem nos livros didáticos de ensino médio contando de forma resumida a história do conceito ali apresentado, prestam um enorme desserviço, pois apresentam apenas o resultado final e ainda acabam propagando mitos relacionados aos cientistas e a seus trabalhos.

Finalizando, é oportuno dizer que se faz necessária uma pesquisa mais profunda relacionada com o desenvolvimento do potencial vetor magnético sob a perspectiva dos cientistas do continente, como o idealizador original do conceito Franz Neumann, assim como investigar quais as influências da dicotomia campo versus ação a distância, na criação e desenvolvimento da "quantidade fundamental da teoria eletromagnética", de acordo com as palavras do próprio Maxwell.

Enfim, o que vem à tona mais uma vez é a mais que necessária mudança na maneira de se ensinar e fazer Ciência, começando pela formação dos futuros professores, que são a base dessa transformação.

7. Referências Bibliográficas

ABRANTES, Paulo César. Imagens de Natureza, Imagens de Ciência. 1996.

ARCHIBALD, Thomas. Carl Neumann versus Rudolf Clausius on the propagation of electrodynamic potentials. **American Journal of Physics**, v. 54, n. 9, p. 786-790, 1986.

ASSIS, André Koch Torres. Curso de Eletrodinâmica de Weber. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas—UNICAMP, Campinas, 1992. **Notas de Física IFGW**, n. 5.

ASSIS, André Koch Torres. Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios. Editora da Unicamp, 1995.

BORK, Alfred Morton. Maxwell and the vector potential. **Isis**, v. 58, n. 2, p. 210-222, 1967.

DIAS, Valéria Silva; MARTINS, Roberto de Andrade. Michael Faraday: o caminho da livraria à descoberta da indução eletromagnética. **Ciência & Educação**. 2004

DONCEL, Manuel Garcia; LORENZO, José Antonio de. The electrotonic state, a metaphysical device for Maxwell too? **European Journal of Physics**, v. 17, n. 1, p. 6-10, 1996.

FARADAY, Michael. EXPERIMENTAL RESEARCHES IN ELECTRICITY, first series, parágrafo 3, artigo 60. **Great Books of the Western World**, v. 45, p. 273, 1952.

GIULIANI, Giuseppe. Vector potential, electromagnetic induction and ‘physical meaning’. **European Journal of Physics**, v. 31, n. 4, p. 871, 2010.

GRIFFITHS, David John. **Introduction to Electrodynamics**. 3rd edition. Prentice Hall, 1999.

LIMA, Marcelo Costa de. Sobre a representação mecânica das forças elétrica, magnética e galvânica, de William Thomson: uma leitura comentada. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, 2017.

MARTINS, Roberto de Andrade. Mechanics and electromagnetism in the late nineteenth century: the dynamics of Maxwell's ether. **Physics before and after Einstein**, p. 21-48, Amsterdam, 2005.

MAXWELL, James Clerk. On Faraday's Lines Of Force. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, vol. 10, Londres, 1856.

MAXWELL, James Clerk. On Physical Lines Of Force. **Philosophical Magazine**, Londres, 1861.

MAXWELL, James Clerk. A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, Londres, 1865.

MAXWELL, James Clerk. **A Treatise on Electricity and Magnetism**, Londres, 1873.