

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**  
**LICENCIATURA EM FÍSICA**

**GABRIEL LUIZ NALON MACEDO**

**MATERIAL DE APOIO PARA ABORDAGEM DAS TRÊS LEIS DE KEPLER NO  
ENSINO MÉDIO**

MARINGÁ, PR  
2019

**GABRIEL LUIZ NALON MACEDO**

**MATERIAL DE APOIO PARA ABORDAGEM DAS TRÊS LEIS DE KEPLER NO  
ENSINO MÉDIO**

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

MARINGÁ, PR  
2019

**GABRIEL LUIZ NALON MACEDO**

**MATERIAL DE APOIO PARA ABORDAGEM DAS TRÊS LEIS DE KEPLER NO  
ENSINO MÉDIO**

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. DANIEL GARDELLI – Orientador  
Universidade Estadual de Maringá – UEM

---

Prof. Dr. LUCIANO CARVALHAIS GOMES  
Universidade Estadual de Maringá – UEM

---

Prof. Dr. BRENO FERRAZ DE OLIVEIRA  
Universidade Estadual de Maringá - UEM

MARINGÁ, PR  
2019

Dedico este trabalho à minha família e amigos, especialmente à minha mãe, ao meu pai e a minhas duas irmãs, que deram suporte e apoio para que eu pudesse concluir a graduação.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à minha família – minha mãe, Cristiane, meu pai, Cleber, e minhas irmãs, Rita e Jéssica – por todo apoio e suporte que sempre me deram para que eu concluísse a graduação.

Agradeço aos meus amigos – Gabriel, Gustavo Ast, Juliano, Fernanda, Vinícius, Rafaela, Gustavo, Leandro, Emanuel e Elaine – que me ajudaram tanto nos momentos de descontração como nos momentos complicados durante a graduação. E também a colegas de sala pelas conversas e troca de ideias durante a graduação.

Ao Professor Daniel Gardelli, pela orientação, suporte, pelas aulas inspiradoras sobre ciência e educação, e por ser o primeiro professor a inspirar em mim o desejo pela história da ciência.

Ao Professor Breno Ferraz pelas aulas detalhadas e explicativas, paciência de suportar meus questionamentos sobre conceitos físicos e pela oportunidade do meu ingresso como preceptor no PROINTE durante o último ano da graduação.

Agradeço também ao Professor Luciano Carvalhais pela contribuição na minha formação como licenciando e futuro professor por meio das diversas discussões sobre educação e Ensino de Física durante as aulas e durante a minha passagem pelo PIBID e também pela oportunidade do meu ingresso como monitor no MUDI e orientação.

Aos professores Jurandir Rohling pela orientação durante a minha passagem como preceptor e a Alice Iramina pela oportunidade do meu ingresso como bolsista no PIBID durante os anos iniciais da graduação.

Agradeço a Professora Emília Irikuchi pelas aulas de física durante o Ensino Médio que me inspiraram a escolher essa graduação e pela ajuda, junto a Professora Maria Lídia, na revisão de português da monografia.

Aos membros da banca, pela disponibilidade em ler meu trabalho.

Obrigado!

## RESUMO

A gravitação é um tema excluído no 1º ano do ensino médio. Para incluí-lo de forma objetiva e trazer uma abordagem histórica e filosófica, diante da grande quantidade de conteúdos a serem selecionados pelo professor, o presente trabalho apresentará textos históricos e propostas de aulas para iniciar o conteúdo de gravitação partindo das três leis de Kepler. Baseado em questões sobre o desenvolvimento da ciência, esse estudo dará enfoque à investigação da construção do processo histórico sobre o estudo do movimento planetário de Johannes Kepler buscando evidenciar o processo até as três Leis.

**Palavras-chaves:** Movimento planetário, História da Ciências, Kepler, Propostas de aulas.

## **ABSTRACT**

The gravitation is an excluded theme on the first year of high school. To include it objectively and bring a historical and philosophical approach, given the large amount of content to be selected by the teacher, this paper will present class proposals to start the gravitation content starting from Kepler's three laws. Based on questions about the development of science, this study will focus on investigating the construction of the historical process on the study of Johannes Kepler's planetary motion in order to highlight the process up to the three Laws.

**Keywords:** Planetary motion, History of Sciences, Kepler, Class proposals.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	9
<b>2. CAPÍTULO 1 – AS INFLUÊNCIAS MILENARES</b> .....	11
<b>2.1 Pitágoras de Samos</b> .....	11
<b>2.2 A música dos astros</b> .....	13
<b>2.3 Os dogmas de Platão e Aristóteles</b> .....	14
<b>2.4 O sistema geostático de Ptolomeu</b> .....	17
<b>2.5 Plano para a primeira aula</b> .....	22
<b>3. CAPÍTULO 2 – O COMEÇO DA MUDANÇA</b> .....	23
<b>3.1 A reparação do modelo de Aristarco por Copérnico</b> .....	23
<b>3.2 A aula copernicana</b> .....	29
<b>4. CAPÍTULO 3 – O PAI DA ASTRONOMIA MODERNA: JOHANNES KEPLER</b> ...	32
<b>4.1 Os sólidos platônicos entre as esferas transportadora dos planetas</b> .....	32
<b>4.2 Aula introdutória as ideias keplerianas</b> .....	41
<b>5. CAPÍTULO 4 – A PRECISÃO DOS DADOS DE TYCHO BRAHE: CAMINHO ÀS LEIS DO MOVIMENTO PLANETÁRIO</b> .....	42
<b>5.1 O maior astrônomo da era pré-telescópia</b> .....	42
<b>5.2 Assim na Terra como no Céu: A física terrestre sendo aplicada no sistema solar</b> ..	48
<b>5.3 Aula sobre Tycho Brahe e o caminho para a Segunda Lei de Kepler</b> .....	56
<b>6. CAPÍTULO 5 – A REINTERPRETAÇÃO DAS ÓRBITAS DOS PLANETAS</b> .....	61
<b>6.1 O fim da disputa contra Marte: A Primeira Lei de Kepler</b> .....	61
<b>6.2 Plano para a aula sobre a Primeira Lei de Kepler</b> .....	68
<b>7. CAPÍTULO 6 – A MÚSICA KEPLERIANA</b> .....	76
<b>7.1 A lei que posteriormente levaria à Gravitação Universal newtoniana</b> .....	76
<b>7.2 Aula sobre a 3º Lei de Kepler</b> .....	79
<b>7.3 Análise da aprendizagem dos alunos</b> .....	81
<b>8. CONCLUSÃO</b> .....	85
<b>9. BIBLIOGRAFIA</b> .....	88

## 1. INTRODUÇÃO

O Universo fascina e encanta os seres humanos há eras, diversas sociedades antigas (como gregas, babilônias, entre outras) buscavam entender como funciona o nosso Sistema Solar. Diante de tantas contribuições em um longo processo histórico podemos citar a divisão do dia em 24 horas, padrão adotado devido ao movimento da Terra em torno do seu próprio eixo, o ano formado por aproximadamente 365 dias, tempo necessário para a Terra dar uma volta em torno do Sol, saber em quais meses ocorre cada estação do ano é de suma importância para a agricultura e para a produção de alimentos. Entender o Universo e como ele opera é importante para a humanidade. Devido a essa importância, muitos estudiosos dedicaram toda as suas carreiras para entender a sua estrutura.

Vários filósofos da Grécia Antiga buscavam entender o Universo. Dentre eles salienta-se os trabalhos de Aristóteles (c.384 – c.322 A.E.C). Em suas obras, ele interpretou que a Física da Terra era diferente da Física do céu, ou seja, as explicações dos movimentos na Terra eram diferentes da explicação dos movimentos dos astros nos céus. Essa ideia aristotélica assombrou o desenvolvimento da Astronomia por um longo tempo. Mas a partir dos estudos de Isaac Newton (1642– 1727 E.C.) sobre a Gravitação Universal, os movimentos começaram a ser explicados por uma mesma Física, tanto na Terra quanto no Universo. Para Newton chegar a este grande feito no estudo da dinâmica, ele recorreu à Lei dos períodos, também conhecida como a 3º Lei de Kepler. Os estudos de Kepler foram de suma importância para Newton concluir a Lei da Gravitação Universal.

Por isto, o presente trabalho traz textos históricos e propostas de aulas para iniciar o conteúdo de Gravitação no Ensino Médio, com base nas três leis do movimento planetário formulada por Kepler no século XVII.

Devido ao pouco tempo de aula destinado à Física nas escolas públicas do Brasil (duas por semana), o tempo para o professor aplicar o conteúdo se torna escasso, obrigando o professor a escolher quais conteúdos serão apresentados aos alunos durante o ano. Infelizmente o conteúdo gravitação é geralmente subtraído no 1º ano do ensino médio.

Antes de abordar os estudos de Kepler, é preciso contextualizar as ideias científicas na sua época, e bem como os principais cientistas que o antecederam e o influenciaram no desenvolvimento de seus estudos sobre o movimento planetário.

Após esta contextualização, uma das propostas de aula traz como tema gerador a seguinte pergunta aos alunos: “Por que o sistema solar é formado por oito planetas e não mais, e nem menos do que isso?”. Esta pergunta está presente na obra *Mysterium Cosmographicum*

de 1596 de Kepler. Devido a sua relevância representação, acredita-se que ela é fundamental para iniciar a discussão sobre as ideias de Kepler e sobre a sua visão do Universo.

Nessa obra, Kepler propôs a ideia de que entre as esferas transportadoras dos planetas, na época descoberto apenas seis, havia um dos cinco sólidos platônicos encaixados entre elas. Essa combinação formava o sistema solar.

Além da apresentação estrutural do Sistema Solar formado pelos sólidos platônicos proposta por Kepler, se discutirá sobre a centralidade do Sol nesse sistema.

Se abordará como Kepler abandonou a ideia do movimento dos planetas em torno de um ponto matemático (equante) em prol do movimento em torno de um corpo físico, no caso o Sol. Assim, Kepler passa a aceitar o heliocentrismo.

No final do século XVI e início do século XVII Tycho Brahe, um dos maiores astrônomos da era pré-telescópica, convidou Johannes Kepler para trabalharem juntos em Praga a serviço do Imperador Rodolfo II. A partir desse momento Kepler teria acesso aos melhores dados observacionais já feitos na época. A partir desses dados Kepler elaborou as Leis do Movimento Planetário. A colaboração entre Tycho Brahe foi de extrema importância para o desenvolvimento das Leis de Kepler, visto que sem esses dados talvez Kepler não teria chegado as Leis do Movimento Planetário. Após apresentar a figura de Tycho Brahe e a importância dos seus estudos para a pesquisa de Kepler, a discussão dará enfoque na construção das duas primeiras Leis do Movimento Planetário presentes na obra *Astronomia Nova* de 1609 de Kepler.

Por fim, a Lei dos Períodos presente na obra *Harmonice Mundi* de 1619 será abordada, no qual retornara-se a ideia de Pitágoras que influenciou Kepler ao pensamento de que o movimento dos planetas provocava uma música no céu, focando na importância dessa ideia metafísica para que então Kepler chegasse na 3<sup>o</sup> Lei do Movimento Planetário.

## 2. CAPÍTULO 1 – AS INFLUÊNCIAS MILENARES

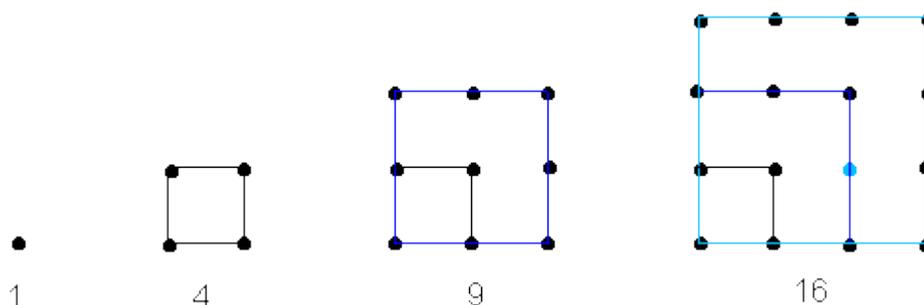
### 2.1. PITÁGORAS DE SAMOS

Pitágoras de Samos (c.570 – c.495 A.E.C) foi um filósofo e matemático grego fundador da Irmandade Pitagórica. Envolvida por restrições, sendo a mais conhecida a proibição da divulgação dos números irracionais, fez com que a Irmandade fosse cercada de mistérios. A base ideológica da Irmandade Pitagórica era a matemática, pois o Universo todo era estruturado matematicamente.

Pitágoras e seus discípulos afirmavam que os números eram como se fossem um código no qual quando combinados de alguma forma representavam a harmonia e as belezas do mundo. Portanto, os números para os pitagóricos formavam todas as coisas, “...Todas as coisas têm forma, todas as coisas são formas, e todas as formas se definem por números.” (Koestler, 1989).

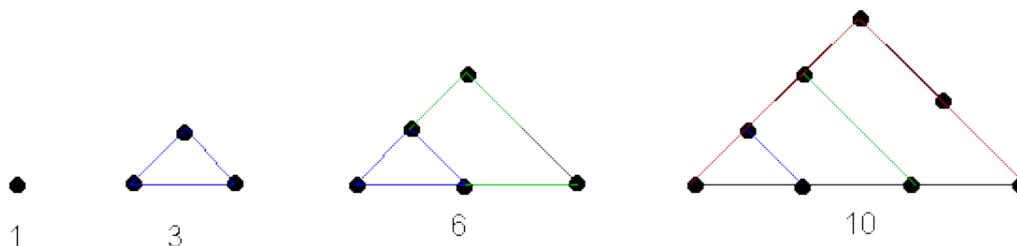
Entre combinações numéricas, os pitagóricos foram percebendo a existências de algumas relações, por exemplo, os números quadrados (1, 4, 9, 16, 25, ...) podem ser formados pela adição de números ímpares, ou seja, se somarmos 3 ao número quadrado 1, obteremos o número quadrado 4. Já ao somarmos 5 ao número quadrado 4, obtemos o número quadrado 9 e assim por diante.

Como os números formavam as coisas, então os números 1, 4, 9, 16, ..., que são números quadrados, formam o quadrado, os números retangulares formam os retângulos e os números triangulares formam os triângulos.



**Figura 01** - Representação dos números quadrados em quadrados

Fonte: <http://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>

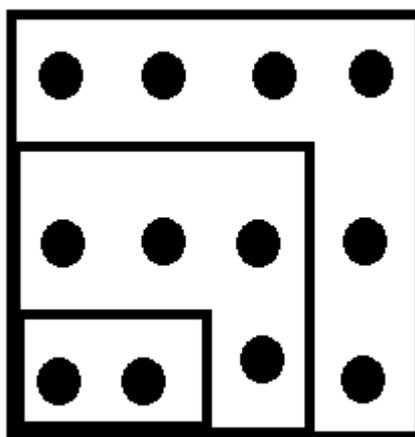


**Figura 02** - Representação dos números triangulares em triângulos

Fonte: <http://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>

Dessas relações e combinações há uma que se relaciona com os intervalos da oitava musical. Ao somar-se os números pares obtêm-se como resultado os números retangulares:  $2 + 4 = 6 + 6 = 12 + \dots$

Ao elaborar a figura geométrica que formam esses números e fazer-se a razão dos lados dessas figuras o valor encontrado é exatamente os intervalos da oitava musical.

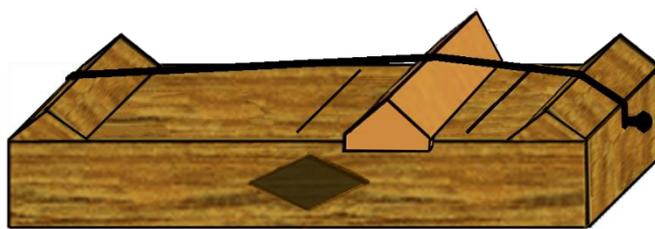


**Figura 03** – Representação da figura que se forma ao somar de forma sequencial os números pares.

Fonte própria.

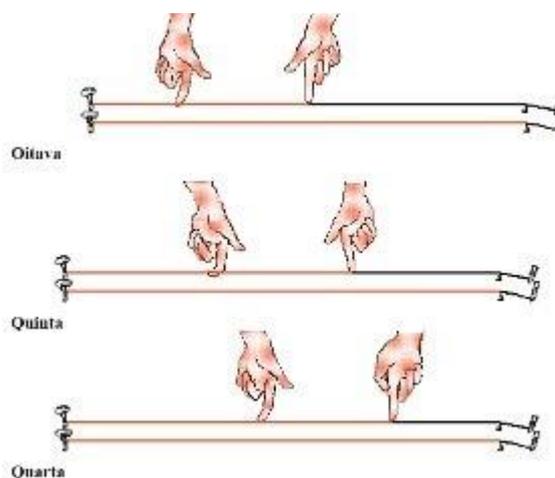
Note que o retângulo menor tem a base formada por duas bolinhas e a lateral por uma bolinha, logo a razão é  $2/1$  que representa a oitava (Dó) na escala musical. Já ao somarmos 4 obtemos o segundo maior retângulo, no qual um lado tem 3 bolinhas e o outro 2 bolinhas, portanto a razão é  $3/2$  cuja na escala é a quinta (Sol). E por fim, o retângulo maior é resultado da soma do número 6 ao último resultado obtido e ele é constituído por 4 bolinhas de um lado e 3 bolinhas do outro lado, logo a razão entre os lados é  $4/3$  que representa a quarta (Fá).

Com isso Pitágoras utilizou-se dessas proporções simples ( $2/1, 3/2, 4/3, \dots$ ) para dividir o comprimento de uma corda fixa em um instrumento construído por ele: o monocórdio. Ao vibrar cada uma dessas posições ( $2/1, 3/2, 4/3, \dots$ ) da corda emitia-se um som agradável. Ao combinar esses sons agradáveis formou-se o que hoje conhecemos como as notas consoantes.



**Figura 04** – Monocórdio de Pitágoras

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>



**Figura 05** – Representação dos intervalos da oitava musical em uma corda

Fonte: <https://escutecomigo.wordpress.com/2013/03/31/musica-pitagoras-e-a-matematica/>

## 2.2. A MÚSICA DOS ASTROS

Com a descoberta dos intervalos musicais representados por proporções simples, Pitágoras imaginou que esse método poderia ser empregado em outros meios fora a corda do monocórdio a fim de se proporcionar música, inclusive no movimento dos planetas.

Nos vários modelos de representações de mundo e Universo que haviam na época, o modelo pitagórico apresentava uma Terra esférica em que, o Sol, a Lua e os planetas a rodeavam em círculos cujo os centros eram a Terra e cada um destes estavam fixos a uma esfera.

Neste Universo pitagórico o rápido movimento dos astros pelo espaço provocava um som. Por exemplo, se você colocar a cabeça para fora do carro em movimento, o vento passará rapidamente próximo as orelhas e um barulho será perceptível. O tom deste som seria diferente para cada astro. E em analogia a descoberta de que o tom do som emitido por uma corda

depende do seu comprimento, o tom do som de cada astro depende da razão da sua trajetória no espaço como se as órbitas dos astros se comportassem como a corda do monocórdio.

A ideia de Pitágoras era de que:

... o intervalo musical formado pela Terra e pela Lua era de um tom; da Lua a Mercúrio, havia um semitom; de Mercúrio a Vênus, um semitom; de Vênus ao Sol, uma terça menor; de Sol a Marte, um tom; de Marte a Júpiter, um semitom; de Júpiter a Saturno, um semitom; de Saturno à esfera das estrelas fixas, uma terça menor. A Escala Pitagórica resultante é *dó, ré, mib, sol, lá, sib, si, ré...* (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 12).

Mas segundo os pitagóricos o som provocado pelo movimento dos planetas não era possível de ser ouvido por mortais comuns, pois estes nasceram mergulhados à harmonia dos astros. Portanto nunca iriam perceber esse som.

Essa ideia de que o movimento dos planetas provocava um som foi ignorada pelos astrônomos nos séculos seguintes. Aristóteles, por exemplo, não foi favorável a ideia. Porém, Johannes Kepler ressuscitará essa ideia mais de mil anos depois, o que mostra a influência das ideias de Pitágoras sobre o astrônomo.

Arthur Koestler descreve que a influência pitagórica no desenvolvimento do pensamento humano é incomparável a qualquer outro filósofo:

De súbito, faz-se impressionante silêncio, o maestro entra, dá três batidas com a vareta, e do caos nasce a harmonia. O maestro é Pitágoras de Samos, cuja influência nas ideias, e, com isso, no destino da raça humana, foi provavelmente maior que a de qualquer outro indivíduo anterior a ele ou posterior. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 7).

### **2.3. OS DOGMAS DE PLATÃO E ARISTÓTELES**

As ideias de Platão (c.427 – c.347 A.E.C), presente no livro *A República*, sobre o Mundo Sensível e o Mundo Inteligível, fizeram com que o mesmo concluísse uma ideia sem ao menos precisar prová-la e que se tornaria um dogma na astronomia.

O Mundo Sensível, para Platão, seria o mundo onde estão presentes as ideias enquanto o Mundo Inteligível, seria a cópia do primeiro, ou seja, as ideias presentes no primeiro mundo ganham formas no segundo. Por exemplo, no mundo inteligível há a ideia do que é um lápis, a sua forma concreta se dará apenas no mundo sensível.

Para Platão, quando o ser humano nasce a sua alma passa pelo mundo das ideias (inteligível) adquirindo o máximo de conhecimentos possíveis. Somente quando a alma chega

no mundo sensível os conhecimentos adquiridos no mundo das ideias vão sendo lembrados pela alma do ser humano e assim colocadas em práticas através dos sentidos, ou seja, a ideia ganha forma, mas com imperfeições. Portanto o nosso mundo é apenas uma cópia imperfeita do mundo das ideias.

Ao estar presente no Mundo Sensível as ideias não poderiam ser melhores do que já eram no mundo inteligível, pois elas já eram perfeitas pelo simples fato de estarem presente no mundo inteligível.

Por causa dessa linha de raciocínio, Platão tem aversão à ideia de mudança, caso houvesse mudanças seriam de formas degenerativas, e, portanto, o mundo das ideias seria imutável e eternamente perfeito, ou seja, as ideias seriam eternas e não mudariam com o tempo.

O Criador do mundo sensível, para Platão, pertencia ao mundo inteligível. Como ao criar as coisas no mundo sensível elas se tornavam apenas cópias imperfeitas, o Criador, chamado por Platão de Demiurgo, no momento da criação do mundo aproximou ao máximo a sua criação ao mundo das ideias.

Nesse caso, criou o mundo em forma esférica, pois das formas existentes, a esfera era a que mais se aproxima da perfeição, ou seja, se aproxima do mundo inteligível como afirma Platão.

Por isso, ele torneou o mundo em forma de esfera, por estarem todas as suas extremidades a igual distância do centro, a mais perfeita das formas e mais semelhante a si mesma, por acreditar que o semelhante é mil vezes mais belo do que o dessemelhante. (Platão, Timeu, 33 b-c).

Por este motivo, em suas obras sobre Astronomia, Platão concluiu a priori que como o mundo devia ter a forma esférica, os movimentos dos astros, para se aproximarem do perfeito, deveriam realizar movimentos em círculos perfeitos cuja as velocidades deveriam ser uniforme. Desta maneira o mundo se aproximaria do mundo das ideias.

Portanto, para Platão, era responsabilidade dos astrônomos explicar os movimentos irregulares dos astros através de explicações e construções matemáticas que resultariam por fim em um movimento circular uniforme perfeito. Essa ideia foi apoiada por Aristóteles (c.384 – c.322 A.E.C), que foi aluno de Platão, o que fez ganhar mais força ainda a ideia e como consequência o *dogma da circularidade*, como ficou conhecido, perdurou por dois mil anos.

O sexto século Antes da Era Comum é considerado por muitos estudiosos como o século do despertar pela grande quantidade de obras sobre explicações da origem do homem e a origem do Universo. Por exemplo, o filósofo Filolao de Crotona (c.470 – c.385 A.E.C), discípulo de Pitágoras, foi o primeiro filósofo a atribuir movimento ao planeta Terra de que se

tem registro. Aristarco de Samos (c.310 – c.230 A.E.C), outro pitagórico, havia desenvolvido um modelo planetário onde no centro encontrava-se o Sol e os outros planetas, inclusive a Terra, girando em torno do mesmo, ou seja, um modelo Heliocêntrico antes mesmo de Copérnico. Porém, Aristóteles, no desenvolvimento da sua composição de Universo, ignora as ideias já apresentadas.

No modelo aristotélico de Universo a Terra ocupa o centro do Universo e está totalmente estática, mas em sua volta, encontram-se nove esferas, invisíveis aos olhos humanos que vão da esfera da Lua até a esfera das estrelas fixas, e, além desta, encontra-se a esfera do Primeiro Motor (Deus), que é responsável pelo movimento de todos os astros que cercam a Terra.

Com essa visão, Aristóteles, dividiu o mundo em duas regiões, a região sublunar e a região supralunar. A região sublunar era a região abaixo da esfera da Lua, nesta região, e apenas nesta, havia as imperfeições, a mutabilidade, a corrupção e os movimentos caóticos. Enquanto a região supralunar era a região acima da esfera da Lua, nesta região o mundo era eterno, imutável, sem imperfeições e os movimentos eram simples e uniformes (dogma da circularidade).

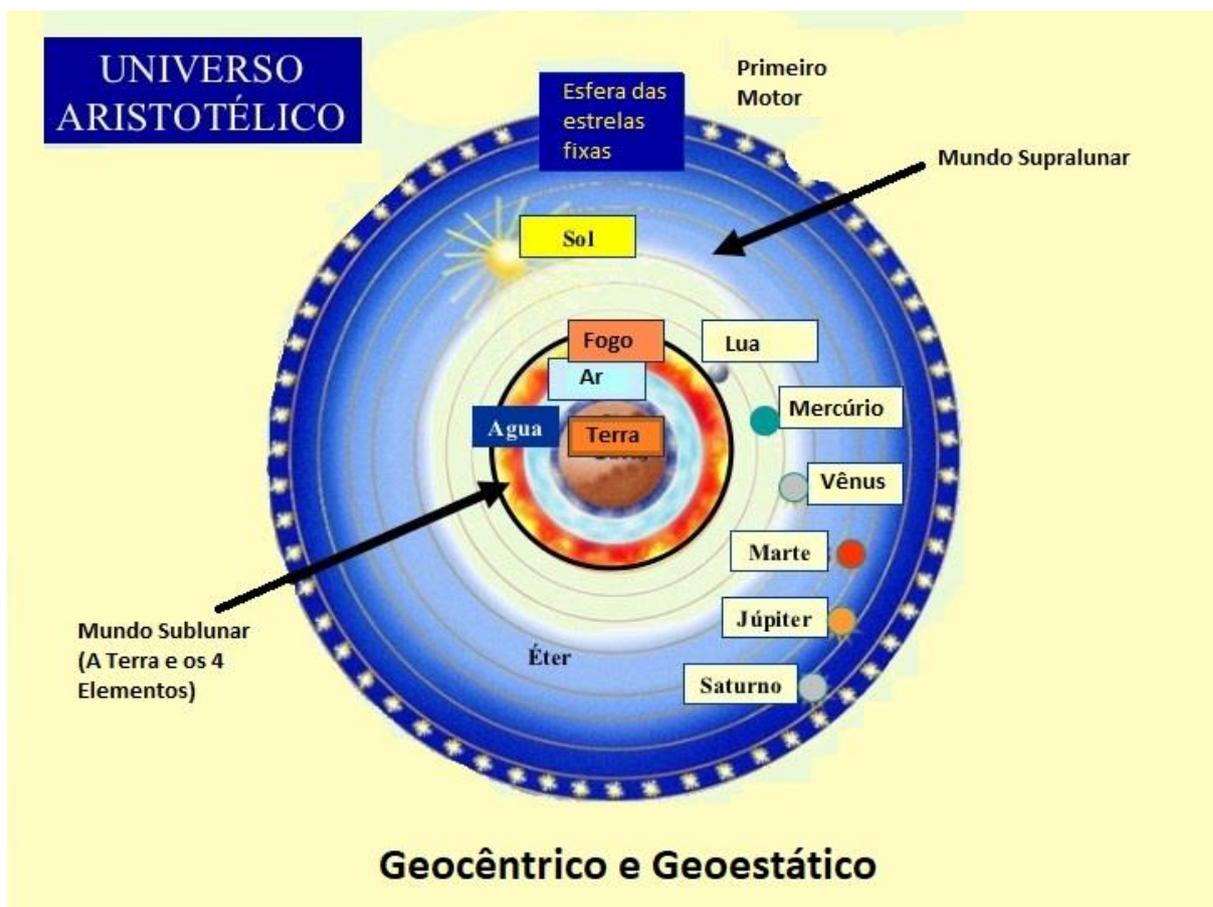
Na região sublunar todas as coisas eram formadas pelas combinações dos quatro elementos: ar, água, terra e fogo. No pensamento aristotélico estes elementos obedecem a movimentos apenas em linha reta. O ar e água na horizontal e a terra e o fogo na vertical, sendo o fogo para cima e a terra para baixo.

Entretanto na região supralunar os quatro elementos não eram encontrados e o que formava os astros vistos era um quinto elemento, presente apenas nesta região. Esse elemento era puro e imutável e o seu movimento só poderia ser o movimento circular, em oposição ao movimento dos outros quatro, e por ser o mais perfeito de todos.

Esse pensamento sobre o movimento dos quatro elementos foi usado para explicar a queda dos corpos. Como a Terra era o centro do Universo e a mesma era composta pelo elemento terra, todas as coisas formadas por este elemento caíam em linha reta para baixo, em direção ao centro, pois o lugar natural do elemento terra era o centro do Universo. Em seguida, vinha o elemento água, pois os mares e rios ficavam sobre a terra, logo esse era o lugar natural do elemento água, por seguinte, o elemento ar que preenchia a atmosfera e, por fim, o elemento fogo.

Por fim, outra característica marcante deste modelo era de que as leis físicas presentes no mundo sublunar, serviam apenas para explicar os fenômenos desta região do Universo. Para

explicar os fenômenos da região supralunar seriam outras leis, distintas das leis da região terrestre. Essa ideia de mundo aristotélica se tornaria outro dogma perdurando por mais de mil anos.



**Figura 06** – Representação do mundo aristotélico

Fonte: <http://classedefilosofia.blogspot.com/2007/11/aristtil-amb-imatges.html>

## 2.4. O SISTEMA GEOSTÁTICO DE PTOLOMEU

Antes de discutir o modelo de Ptolomeu de Alexandria (100 – 170 E.C.) é preciso saber que havia outros modelos de sistema solar propostos por outros estudiosos. Dentre eles estão o modelo de Eudoxo de Cnido (c.390 – c.337 A.E.C), Calipo de Cízico (c.370 – c.300 A.E.C) e Aristóteles.

Este modelo dos três filósofos apresenta a Terra no centro do Universo. O modelo continha as suas limitações, pois alguns fenômenos não eram explicados. Dentre eles tinha o porquê da variação de velocidade dos planetas em suas órbitas, por que ocorre uma mudança

de brilho dos planetas em seus movimentos retrógrados e por que Mercúrio e Vênus têm afastamentos limitados em relação ao Sol.

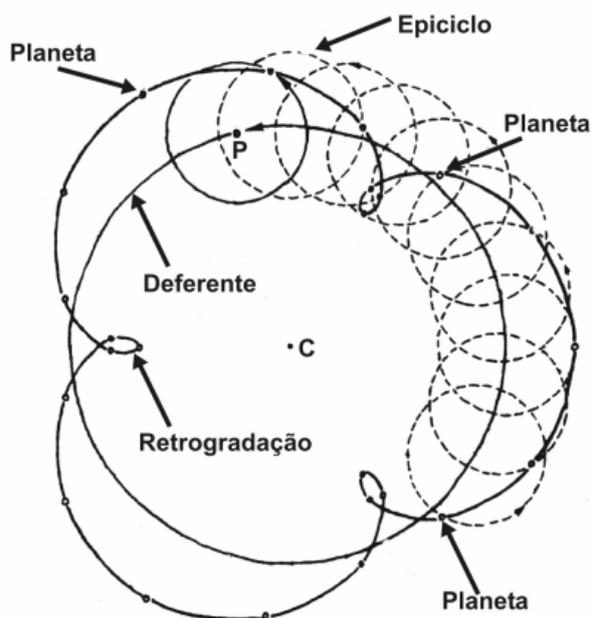
Os problemas encontrados se devem ao fato de que tal modelo era puramente geométrico e matemático e não representava de fato a realidade. Resumidamente o modelo descrevia que cada planeta estava associado a várias esferas, cuja a combinação dos movimentos destas esferas gerava as irregularidades observadas e mantinha o movimento circular, porém, não com velocidade constante. O sistema era muito complexo e engenhoso chegando a ter em sua composição um total de cinquenta e cinco esferas para explicar os movimentos dos astros.

A fim de simplificar o modelo, Claudius Ptolomeu, no século II da era comum, continuou a desenvolver um modelo para o Universo que havia sido iniciado por Apolônio de Perga (c.262 – c.190 A.E.C) e por Hiparco de Niceia (c.190 – c.120 A.E.C) que apresentava mais simplicidade.

Este modelo finalizado por Ptolomeu era constituído para respeitar o dogma da circularidade, por círculos, ao invés de esferas no caso do modelo anteriormente citado. Havia um círculo maior que carregava por si só outro círculo menor. Imagina um carrossel, em que os cavalos possam girar em torno do eixo que os prende no carrossel, sendo assim, teria-se o carrossel girando e junto dele os cavalos girando em torno do eixo que os suspende. Então o carrossel nessa situação seria o círculo maior, chamado de deferente, e o círculo menor, chamado de epiciclo, seriam os cavalos presos ao carrossel que rotacionam no eixo que os prendem.

Com essa analogia pode-se dizer que a Terra estaria no centro do carrossel, ou seja, no centro do círculo maior, e os astros seriam os cavalos do carrossel. Observando do ponto de vista da Terra (centro do carrossel), os planetas (cavalos pendurados) executam um movimento que depende do raio da órbita dos planetas (raio do carrossel) e da velocidade de duas rotações: a do carrossel e a dos cavalos em torno do eixo que os prende.

Esse movimento ao ser observado da Terra descreve no céu uma curva que não é um círculo. Com essa ideia, o dogma da circularidade era respeitado, já que os planetas estariam sobre um movimento circular, e o movimento retrógrado, nesse caso, era de fato observado.



**Figura 07** - Esquema de deferentes e epiciclos para explicar os movimentos irregulares dos planetas

Fonte: <http://www.ccvalg.pt/astrologia/historia/antiguidade.htm>

A Figura – 07 representa o funcionamento do modelo de epiciclos e deferentes. O planeta viaja ao redor do ponto P, formando a trajetória do círculo menor (epiciclo), que por sua vez, move-se ao redor de C, formando a trajetória do círculo maior (deferente). O caminho do planeta formado pela combinação desses movimentos, vistos da Terra, formava a trajetória de “laçadas” observadas.



**Figura 08** - Laçada do planeta Marte ao longo de seu trajeto visto da Terra

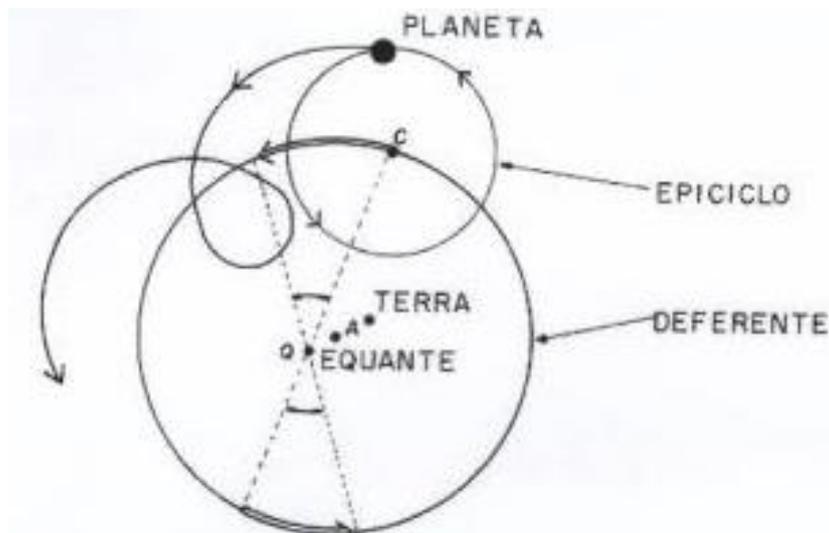
Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/movimento-retrogrado-um-planeta.htm>

Este esquema de deferentes e epiciclos era útil para explicar, por exemplo, o movimento retrógrado dos planetas. Quando Ptolomeu terminou de aperfeiçoar o modelo começado por Apolônio, cada um dos cinco planetas conhecidos na época (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno), o Sol e a Lua possuíam uma combinação de trinta e nove círculos para que o movimento visto no céu fosse explicado.

Porém, havia um problema na explicação das laçadas com esse modelo. Com ele o resultado obtido era de que todas as laçadas ocorriam periodicamente e a distância entre duas laçadas eram sempre iguais, o que na realidade não era verdade, pois as laçadas variavam de tamanho.

Comparado com o modelo de Eudoxo-Calipo-Aristóteles, formado por cinquenta e cinco esferas, o modelo ptolomaico era “mais simples”, pois era formado até então por trinta e nove círculos. Ptolomeu poderia ter complicado ainda mais o seu modelo para explicar o problema das laçadas. Poderia ter empregado epiciclos menores que se movessem sobre os epiciclos ou que o centro do deferente se deslocasse (Koestler, 1989), porém, para conseguir reduzir ao mínimo essas combinações, Ptolomeu introduziu uma hipótese que ajudaria a manter a teoria dos epiciclos e deferente e ajustaria o modelo para se aproximar dos dados observados. O artifício matemático utilizado por Ptolomeu foi a introdução do equante.

O equante é um ponto matemático, ou seja, não material, que deveria ser introduzido para explicar a trajetória dos planetas vistos da Terra. Ptolomeu introduziu no modelo um deferente excêntrico (que se desvia do centro) com equante associado a um epiciclo. O equante se localiza simetricamente à posição da Terra em relação ao centro do círculo maior, ou seja, o centro do círculo está exatamente entre o equante e a posição da Terra. Portanto, o modelo de Ptolomeu é um modelo geostático e não geocêntrico, pois a Terra (imóvel) não é o centro dos movimentos dos planetas.



**Figura 09** – Novo modelo proposto por Ptolomeu com a introdução do equante

Fonte: <https://www.todoestudo.com.br/fisica/geocentrismo>

No século do despertar haviam os mais diversos modelos planetários. Nesse processo haviam esquemas no qual os planetas se moviam em torno da Terra enquanto outros representavam que os planetas se moviam em torno do Sol como o modelo de Aristarco. Mas no início da era comum, devido ao dogmatismo aristotélico-platônico, a única aceitação é os planetas se moverem em torno da Terra.

Porém, com o modelo de Ptolomeu a situação se torna ainda mais afastada da realidade ao colocar os planetas para se moverem em torno de um ponto imaterial, um mero artifício matemático, que se manterá desta maneira até o século XVII quando Kepler em suas obras coloca os planetas para girarem em torno de um ponto físico.

A obra de Ptolomeu, intitulada *Almagesto*, apresentou essas ideias com uma teoria matemática completa e que trazia as melhores previsões para os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas conhecidas na época. Com isso a obra foi utilizada para preparação de calendários e tábulas, o que contribuiu para a duração do sistema.

A estrutura completa do sistema ptolomaico foi bastante complexa. Cada planeta possuía um movimento principal, que era acompanhado do movimento da esfera das estrelas fixas, e muitos outros movimentos secundários. A própria esfera das estrelas fixas teria dois movimentos o que fez aumentar o número de círculos empregados. No total o sistema de Ptolomeu era constituído por 43 esferas, como apresentado pelo mesmo na obra *As Hipóteses dos Planetas*, porém, não era igual o modelo de Eudoxo que utilizava esferas. As esferas de Ptolomeu eram excêntricas, ou seja, não coincidiam com o centro da Terra, ao contrário do modelo de Eudoxo.

A tabela a seguir apresenta a quantidade de esferas que cada astro possuía, resultando no total 43 esferas.

<b>Astro</b>	<b>Número de esferas</b>
Estrelas fixas	2
Saturno	6
Júpiter	6
Marte	6
Sol	4
Vênus	6
Mercúrio	8
Lua	5
<b>Total</b>	<b>43</b>

**Tabela 01** – Astros e os respectivos números de esferas

## **2.5. PLANO PARA A PRIMEIRA AULA**

Para a contextualização dos alunos, acredita-se que a primeira aula deve ser uma aula de introdução às ideias que influenciaram Kepler no desenvolvimento das três leis do movimento planetário.

O tema da aula deve abordar os pensamentos de concepção de mundo/Universo desenvolvidos por alguns dos grandes estudiosos antigos. O objetivo principal desta primeira aula é construir com os alunos as ideias e concepções que predominaram antes de Kepler para contextualizar o aluno, deixando claro a ideia da harmonia dos céus de Pitágoras, o dogma da circularidade de Platão, a divisão de mundo de Aristóteles e a essência do modelo geostático de Ptolomeu.

A abordagem do tema do capítulo 1, permitirá que o professor(a) se utilize desse material, como forma de metodologia. Os assuntos essenciais abordados permitem que os objetivos da aula sejam alcançados de forma clara e contextualizada aos alunos. A linguagem utilizada pelo professor deve ser adequada ao nível de ensino, respeitando os diferentes tipos de salas de aula presentes nas escolas de todo o Brasil.

O professor(a) poderá utilizar como critério de avaliação, a forma diagnóstica, pois como a aula tende a uma abordagem mais epistemológica, os alunos podem saber algo sobre os

filósofos que serão citados durante a aula e até conhecer algumas de suas ideias com base em outras disciplinas que abordam os mesmos, como a Filosofia.

### **3. CAPÍTULO 2 – O COMEÇO DA MUDANÇA**

#### **3.1. A REAPARIÇÃO DO MODELO DE ARISTARCO POR COPÉRNICO**

Depois de 14 séculos em que Ptolomeu publicou suas obras, em 1543 na cidade de Nuremberg, em seu leito de morte, o polonês Nicolau Copérnico (1473 – 1543 E.C.) decidiu publicar o seu livro intitulado *Revoluções das Esferas Celestes (De Revolutionibus Orbium Coelestium)*.

A decisão de publicar a obra veio pela pressão feita pelos amigos próximos de Copérnico que acreditavam no potencial da obra, ao contrário de Copérnico que tinha medo de ser ridicularizado pela Academia da época pelo fato da obra trazer a ideia de um sistema heliocêntrico para representar o Universo, indo contra as ideias estabelecidas por Aristóteles, Ptolomeu e São Tomás de Aquino de que o modelo de mundo era o geostático.

A ideia copernicana presente no livro aborda o Universo como finito, limitado pela esfera das estrelas fixas, próximo ao centro desse Universo encontra-se o Sol imóvel, tal fato mostra que o sistema copernicano era heliostático. Em torno do Sol rotacionam os planetas na seguinte ordem partindo do Sol: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, enquanto a Lua rotaciona em torno da Terra.

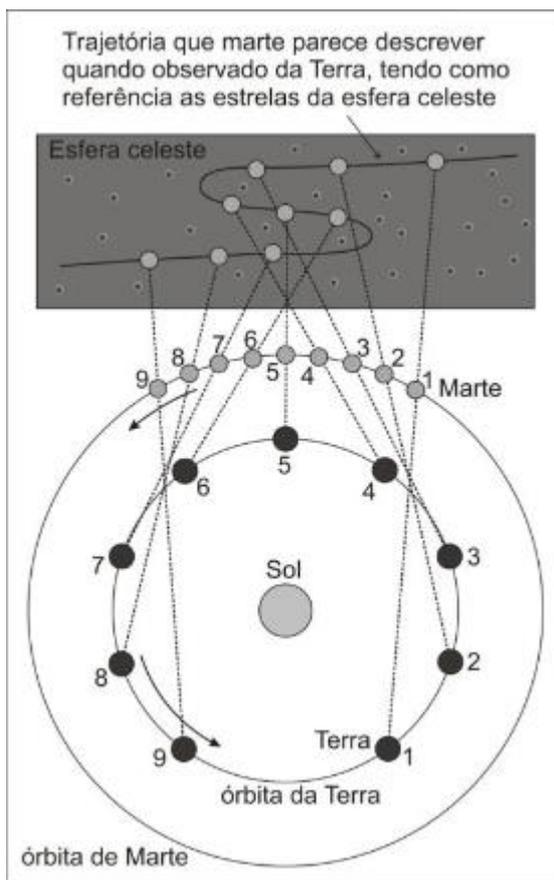
Para o aparente movimento de revolução diária das estrelas fixas e o aparente movimento anual do Sol na elíptica, Copérnico explicava que o primeiro era devido à rotação da Terra em torno do seu próprio eixo e o segundo causado pela revolução anual da Terra na sua órbita.

A obra de fato não convenceu a comunidade da época por ir contra os dogmas da Igreja e contra os princípios físicos da época. O geostatismo de Ptolomeu tinha boas precisões em seus dados o que dificultava ainda mais a aceitação do modelo copernicano. Porém, o intuito de Copérnico era demonstrar a vantagem que trazia o modelo heliostático, pois a descrição matemática de alguns fenômenos era facilitada nesse modelo.

Os movimentos irregulares, como por exemplo, as laçadas, poderiam ser explicados com uma melhor facilidade por não ser necessário a utilização do equante e era nesse quesito que o modelo ptolomaico apresentava vulnerabilidade. Apesar de Copérnico se opor ao modelo

ptolomaico e aos dogmas, um em questão ele o manteve, o dogma da circularidade de Platão, pois em seu modelo os planetas se movimentavam em círculos em torno do Sol.

A primeira vantagem a ser destacada de posicionar o Sol como sendo o centro do sistema é a explicação do movimento retrógado dos planetas (as “lançadas”). Com os planetas e a Terra girando em torno do Sol em órbitas circulares e cada planeta possuir uma velocidade circular diferente um do outro, o fenômeno é simplesmente explicado pelo fato da Terra ultrapassar o planeta fazendo com que o mesmo descreva uma trajetória retrógada no céu.



**Figura 10** – Explicação da “lançada” de Marte pelo modelo Heliostático

Fonte: <http://www.conteudoseducar.com.br/conteudos/arquivos/3172.pdf>

Comparando a Figura – 10 com a Figura – 09 é possível notar que a obra de Copérnico apresenta uma reinterpretação do fenômeno da lançada. Na Figura – 10 o deferente é substituído pela órbita de Marte ao redor do Sol e o epiciclo pela órbita da Terra também em torno do Sol. Vale destacar que para o caso dos planetas internos (Mercúrio e Vênus) o papel é invertido, a órbita da Terra é o deferente e o epiciclo é a órbita do planeta interno.

Outra vantagem trazida com o modelo heliostático era a determinação da distância em que os planetas estariam da Terra, pois, por exemplo, no modelo geostático não era possível saber se Vênus estava mais próximo da Terra do que o Sol ou ao contrário. Mas com o modelo

de Copérnico era possível adotar um padrão de medida a partir do raio da órbita da Terra em torno do Sol, hoje em dia conhecido como Unidade Astronômica (U.A.). Através dessa unidade era possível determinar o raio da órbita dos demais planetas em torno do Sol. Copérnico conseguiu ordenar corretamente os planetas de acordo com o valor da distância do planeta ao Sol construindo assim o seu modelo de sistema solar.

Planetas	Raio médio da órbita em U.A.	
	Valor obtido por Copérnico	Valor aceito atualmente
Mercúrio	0,3763	0,3871
Vênus	0,7193	0,7233
Marte	1,5198	1,5237
Júpiter	5,2192	5,2028
Saturno	9,1743	9,5388

**Tabela 02** – Comparação entre os raios médios das órbitas planetárias obtidos por Copérnico, em unidades astronômicas (U.A.), com os valores aceitos atualmente

Desde o início do Capítulo o modelo de Copérnico foi chamado de heliostático e não heliocêntrico, como geralmente é chamado, pelo fato de que o Sol não se encontrava exatamente no centro do sistema. O centro do Universo era na verdade um ponto imaginário na vizinhança do Sol, no qual esse ponto imaginário era definido a partir da órbita da Terra. Portanto, como os astros giravam em torno desse ponto próximo ao Sol, conseqüentemente os movimentos dos planetas dependiam ainda do movimento da Terra (Koestler, 1989).

Ambos os modelos, o ptolomaico e o copernicano, pecam ao desconsiderar um corpo físico como causa do movimento dos planetas e consideram um ponto matemático ou imaginário. Mas apesar disso a obra de Copérnico influenciou as ideias de Kepler e, 66 anos depois das *Revoluções das Esferas Celestes*, finalmente o Sol será reconhecido como o Rei que governa o movimento dos planetas do sistema, assim como o próprio Copérnico havia descrito em sua obra.

No meio de todos os planetas encontra-se o Sol. Ora, quem haveria de colocar neste templo, belo entre os mais belos, um tal luzeiro em qualquer outro lugar melhor do que aquele de onde ele pode iluminar todas as coisas ao mesmo tempo? Realmente, o Sol está como que sentado em um trono real, governando a sua família de astros, que giram à sua volta. (COPÉRNICO, *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*, capítulo X, livro I, 1543).

O que levou o modelo copernicano a ser rejeitado de início pela comunidade da época, fora os aspectos religiosos, foram algumas discordâncias que havia com as leis física da época.

O primeiro conflito que o modelo trazia era em relação com a explicação aristotélica sobre a queda dos corpos. A explicação de Aristóteles sobre a queda dos corpos diz que o lugar natural do elemento terra é o centro do Universo, logo, todas as coisas formadas por esse elemento caem em linha reta para baixo, em direção ao centro.

Porém, ao desconsiderar a posição do planeta Terra no centro do Universo e posicionar o Sol, a explicação aristotélica é questionada. Ao considerar essa explicação quando uma pedra fosse solta de nossas mãos a pedra deveria ir em direção ao Sol, pois é lá que se encontra o centro do Universo no modelo copernicano. Copérnico ao tentar refutar esse pensamento aristotélico e explicar a queda dos corpos no modelo heliostático diz:

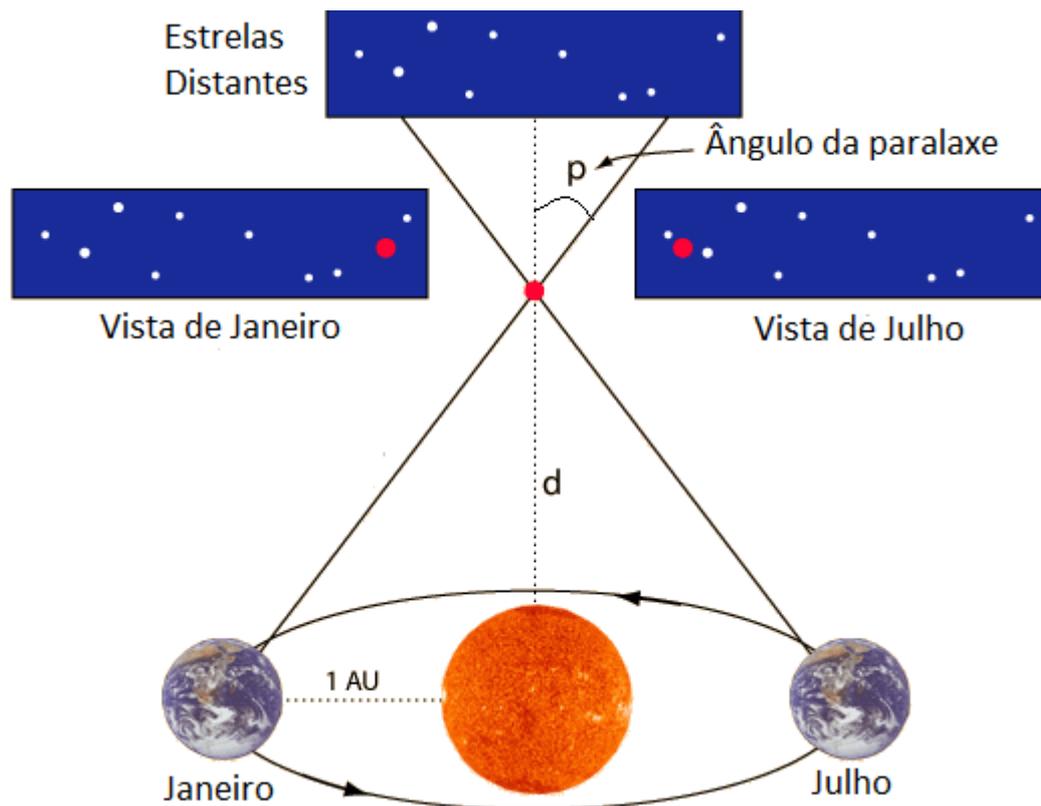
Parece-me que a gravidade não passa de uma inclinação natural, concedida às partes dos corpos pelo Criador a fim de combinar as partes no formato de uma esfera e contribuir, dessa forma, para a sua unidade e integridade. E podemos crer que tal propriedade está presente também no Sol, na Lua e nos planetas, de modo que com isso retenham o seu formato esférico. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 131).

Sendo assim, para Copérnico, os corpos tinham o desejo natural de permanecer no corpo o qual foi criado para saciar o desejo de manter a esfericidade do corpo, que de acordo com o pensamento platônico levava à perfeição. Por exemplo, uma pedra da Lua cairia sempre em linha reta em direção ao centro da Lua para manter a esfericidade da Lua, assim como um objeto da Terra sempre cairia na própria Terra para manter o seu formato esférico.

Os gregos que se dedicaram a Astronomia desaprovaram um possível modelo heliostático pela ausência de qualquer observação da paralaxe estelar e tal fato foi usado contra Copérnico para refutar o seu modelo.

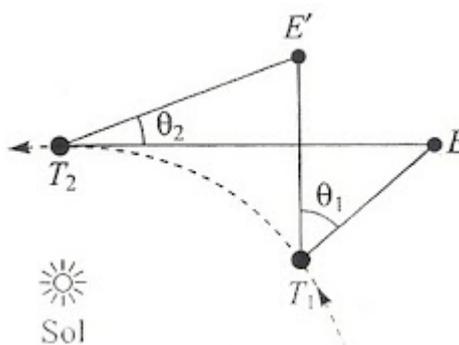
A Figura – 11 representa o que seria a paralaxe estelar, o ponto vermelho seria uma estrela próxima da Terra, usando a esfera das estrelas fixas como plano de fundo, em Janeiro essa estrela vista da Terra teria um determinado plano de fundo formado pela esfera das estrelas fixas, passando-se seis meses, em Julho, a mesma estrela vista da Terra apresentaria um outro plano de fundo diferente daquele de Janeiro.

Esse fenômeno seria causado pelo movimento de translação da Terra, ou seja, o movimento da Terra em torno do Sol deveria produzir um movimento aparente das estrelas mais próximas em relação as mais distantes (Esfera das estrelas fixas).



**Figura 11** – Paralaxe estelar. Fonte: <http://www.conteudoseducar.com.br/conteudos/arquivos/3172.pdf>

Quantitativamente se duas estrelas fixas  $E$  e  $E'$  que são visíveis da Terra, em um certo período do ano ( $T_1$ ) o ângulo aparente entre as distâncias das duas estrelas é  $\theta_1$ , considerando agora um período  $T_2$  o ângulo aparente entre as distâncias das duas estrelas é  $\theta_2$ , onde que  $\theta_1$  é diferente de  $\theta_2$ , ou seja, em diferentes épocas do ano haveria um determinado ângulo. Mas esse efeito da paralaxe nunca tinha sido observado.



**Figura 12** – As diferenças entre os ângulos em relação as posições de duas estrelas fixas

Fonte: <http://fisicofisica.blogspot.com/2010/01/copernico.html>

Copérnico para refutar essa inobservação da paralaxe trouxe uma nova visão para cosmologia da época ao argumentar que a paralaxe estelar não era observável, pois as estrelas fixas estariam muito mais longe do que se acreditava fazendo com que fosse difícil de se

observar a paralaxe. Mas, para o pensamento aristotélico, Deus não cria espaços vazios ou espaços inutilizáveis. Por exemplo, as esferas dos planetas estariam encaixadas umas dentro das outras, não permitindo assim espaços vazios. Mas, nesse caso, o que haveria então entre a esfera de Saturno e a esfera das estrelas fixas que estariam muito distantes? Copérnico não foi capaz de dizer o que havia nesse espaço inutilizável, o que contribuiu para as críticas ao seu modelo.

A paralaxe estelar só seria detectada 295 anos depois da publicação do livro de Copérnico em 1838 quando o astrônomo alemão Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846 E.C.) observou-a.

O modelo copernicano apresenta também a ideia de que a Terra estaria em movimento em torno do seu eixo, gerando assim o movimento de rotação que descreveria o dia e a noite, visto que agora a Terra girava em torno do Sol. Essa ideia copernicana havia sido questionada antes por Ptolomeu ao afirmar que se a Terra girasse em torno do seu eixo, tudo que estivesse em sua superfície seria arremessado para longe do planeta devido à alta velocidade de rotação.

Outro ponto contra o movimento de rotação da Terra que já havia sido trazido por Aristóteles era o de que, se a Terra girasse, ao lançarmos um objeto verticalmente para cima ele não cairia no mesmo lugar, pois enquanto estivesse no ar, o objeto estaria desconectado da Terra e como o solo se movimentaria para a direita, por exemplo, o objeto cairia à esquerda do ponto em que foi lançado.

Para o primeiro argumento Copérnico o refuta dizendo que o movimento natural não pode causar movimentos violentos, e a Terra executa um movimento natural que é girar, pois como a Terra é esférica uma consequência natural de sua esfericidade é girar naturalmente não gerando assim forças centrífugas que seria um movimento violento.

Mas se sustentarmos que a terra se move, diremos também que tal movimento é natural, não violento. As coisas que sucedem segundo a natureza produzem efeitos opostos aos devidos às forças. As coisas sujeitas à violência ou força desintegram-se e não podem subsistir por longo tempo. Mas tudo quanto sucede por natureza é feito convenientemente e preserva as coisas nas suas melhores condições. É inútil, portanto, o medo de Ptolomeu de que a terra e tudo sobre ela se desintegraria pela rotação, que é um ato da natureza, inteiramente diverso do ato artificial ou de qualquer coisa imaginada pela inteligência humana... (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 132).

Para o segundo argumento aristotélico, Copérnico atribuiu uma propriedade metafísica aos corpos chamada de terranidade. Essa propriedade seria responsável por fazer com que os objetos acompanhassem a Terra em seu movimento por afinidade, pois os objetos presentes na Terra formavam ela como um todo.

Os corpos que caem em virtude do peso devem, por causa do seu máximo de terranalidade, participar indiscutivelmente da natureza do todo ao qual pertencem. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 132).

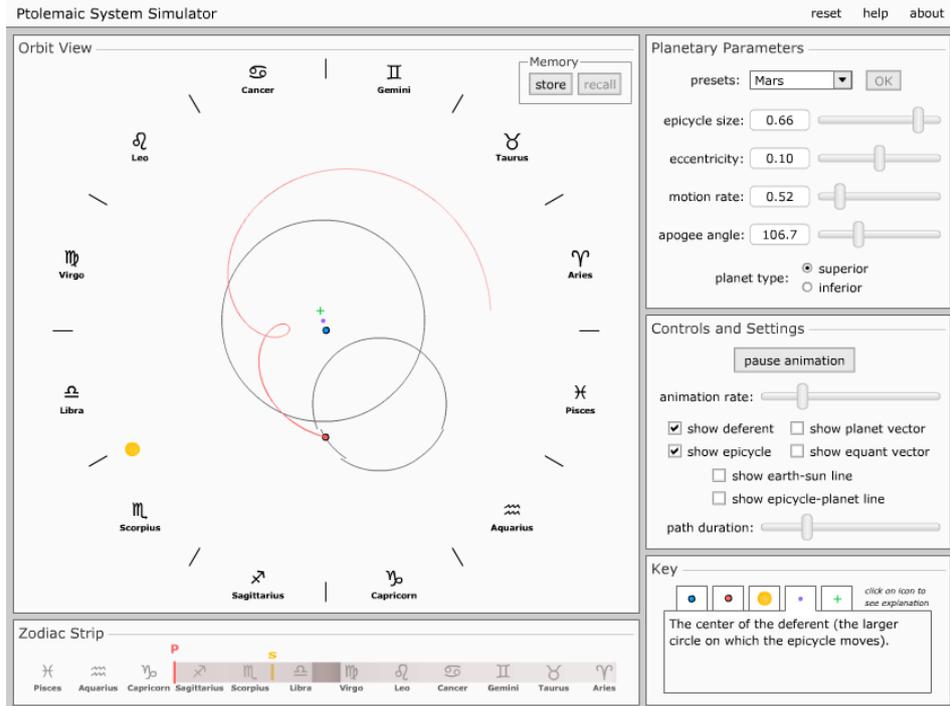
Devido aos argumentos fisicamente fracos, a comunidade astronômica da época concordava que em relação à alguns fenômenos o sistema copernicano era o ideal por trazer uma facilidade matemática, mas fisicamente era absurdo, por não resolver as questões acima apresentadas. Somente com conceitos físicos desenvolvidos por Giordano Bruno (1548 – 1600 E.C.), Johannes Kepler (1571 – 1630 E.C.), Galileu Galilei (1564 – 1642 E.C.) e Isaac Newton (1642– 1727 E.C.), que estas indagações foram sendo resolvidas e uma Terra em movimento começou a ser aceita.

### **3.2. A AULA COPERNICANA**

Para ministrar a aula com o conteúdo do capítulo 2, o professor(a) pode utilizar duas metodologias. A primeira de forma expositiva, debatendo com os alunos o conteúdo para atingir o objetivo da aula que é apresentar o modelo heliostático de Copérnico e deixar evidente a rejeição por parte da comunidade da época. É interessante mostrar aos alunos como funciona o processo científico que, muitas vezes, é apresentado de forma linear.

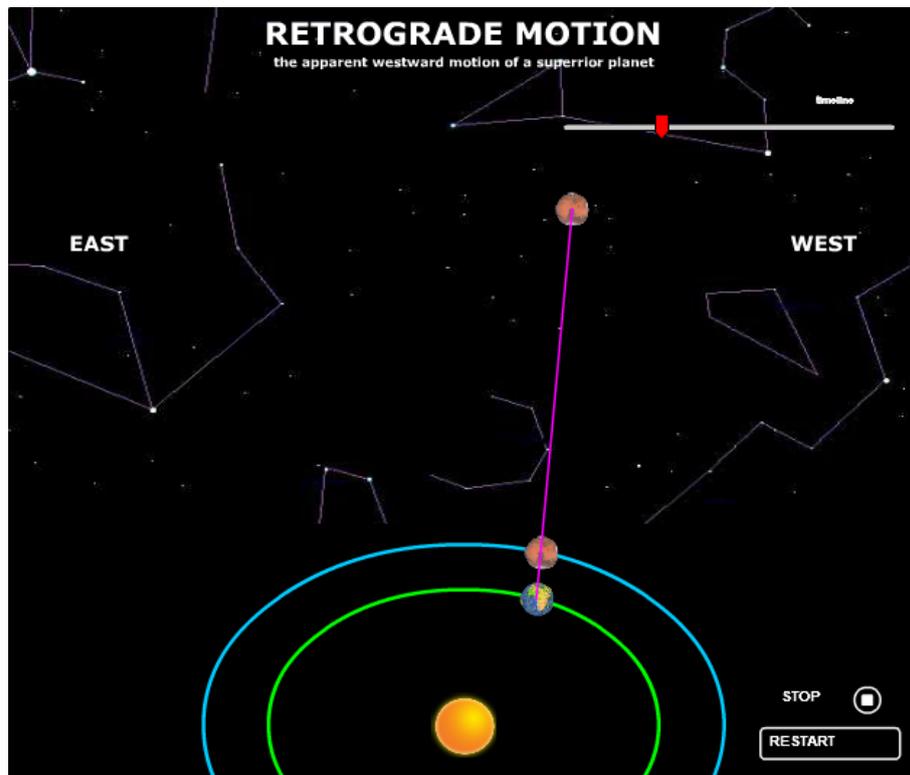
Para o auxílio dessas discussões sobre os fenômenos questionáveis do modelo copernicano, o professor(a) pode utilizar simuladores do modelo geostático e heliostático que mostram, por exemplo, a explicação do movimento retrógrado dos planetas. Os simuladores que poderão ser usados são: o Ptolemaic System Simulator, Retrograde Motion e Planetary Configurations Simulator desenvolvidos pela Universidade de Nebraska.

Para a discussão sobre a Paralaxe Estelar o simulador Stellar parallax interactive, desenvolvido pela McGraw-Hill Education, poderá também ser utilizado para uma melhor compreensão por partes dos alunos.



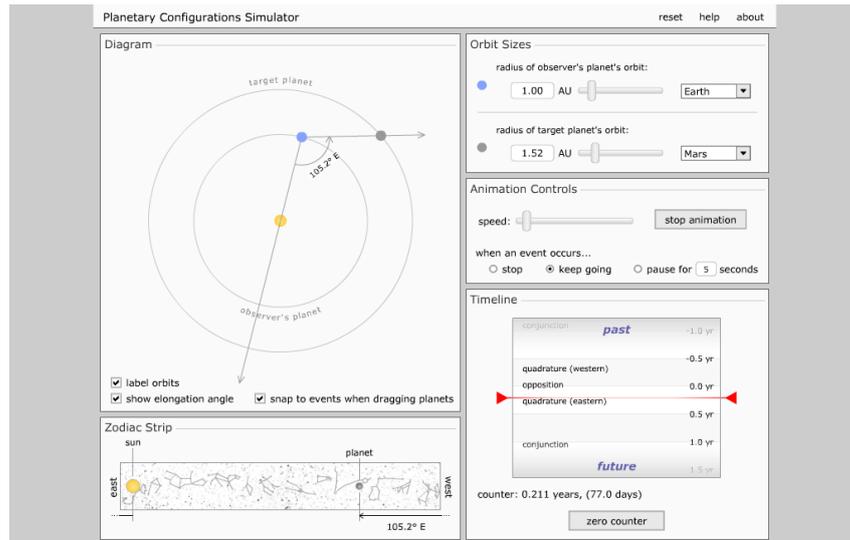
**Figura 13** – Tela do simulador Ptolemaic System Simulator. Fonte própria

<http://astro.unl.edu/naap/ssm/animations/ptolemaic.html>

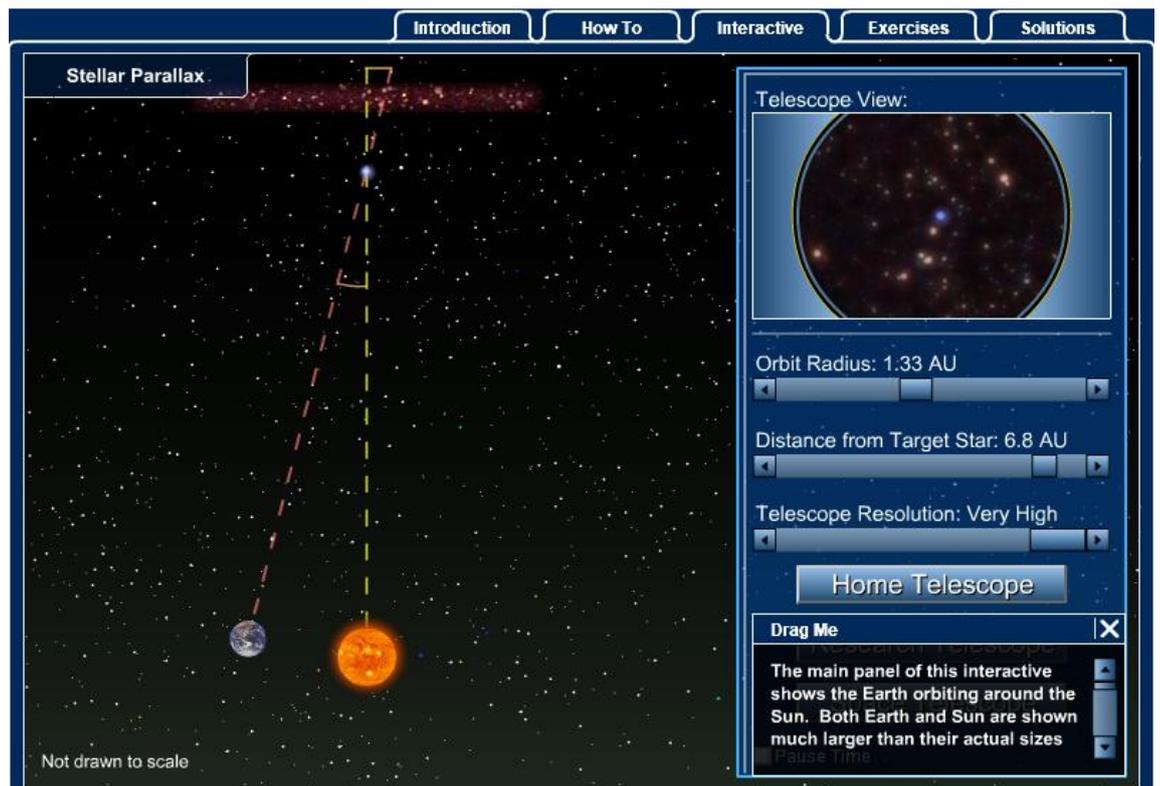


**Figura 14** – Tela do simulador Retrograde Motion. Fonte própria

<https://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/retrograde.html>



**Figura 15** – Tela do simulador Planetary Configurations Simulator. Fonte própria  
<http://astro.unl.edu/classaction/animations/renaissance/configurationssimulator.swf>



**Figura 16** – Tela do simulador Stellar parallax interactive. Fonte própria  
[https://highered.mheducation.com/olcweb/cgi/pluginpop.cgi?it=swf::800::600::sites/dl/free/0072482621/78778/Parallax\\_Nav.swf::Stellar%20Parallax%20Interactive](https://highered.mheducation.com/olcweb/cgi/pluginpop.cgi?it=swf::800::600::sites/dl/free/0072482621/78778/Parallax_Nav.swf::Stellar%20Parallax%20Interactive)

A segunda opção seria o professor(a) organizar uma espécie de tribunal para julgar o modelo heliostático e geostático. A turma de alunos deverá ser dividida em três grupos, no qual um grupo criticaria o modelo heliostático, outro criticaria o modelo geostático e o último grupo seria composto pelo júri, que ao final da atividade julgaria qual dos grupos melhor refutou o modelo apresentado e conseqüentemente o outro modelo seria o “julgado certo”.

Para atingir os objetivos da aula, já citados acima, o professor(a) poderia entregar para os referentes grupos materiais didáticos que abordem sobre as controvérsias de cada modelo, como cada modelo funciona e as diferenças e semelhanças entre eles e seria permitido outras pesquisas sobre o assunto. O grupo do júri não deverá receber nenhum tipo de material sobre o tema para que a decisão final não seja influenciada.

O papel do professor(a), nesta segunda opção, seria o de orientar e organizar todos os grupos de forma que a atividade não desvirtue do seu objetivo principal, ou seja, para que discussões não cabíveis ao tema apareça nos debates fazendo com que o objetivo da aula seja perdido. A avaliação por parte do educador(a) pode ser feita pela observação na desenvoltura dos grupos na hora de expressar e debater os argumentos.

Para uma aula desse tipo, o professor(a) deverá avisar os alunos e dividi-los em aula anterior para que haja no mínimo umas duas semanas para ler e preparar os argumentos e discursos a serem utilizados. O professor deverá prever quantas aulas serão disponibilizadas para executar a atividade com os alunos, para que haja tempo de fala, réplica e tréplica. Cabe ao professor intermediar quando houver fuga do tema e o tempo que cada equipe tem para apresentar seus argumentos e responder as falas do outro grupo. Na última aula de discussão dos grupos deverá ser reservado um tempo de no mínimo uns 15 minutos para que o júri possa tomar a decisão.

#### **4. CAPÍTULO 3 - O PAI DA ASTRONOMIA MODERNA: JOHANNES KEPLER**

##### **4.1. OS SÓLIDOS PLATÔNICOS ENTRE AS ESFERAS TRANSPORTADOS DOS PLANETAS**

Em 27 de Dezembro de 1571, nascia o astrônomo alemão Johannes Kepler que afrontaria, após mais de dois mil anos, dogmas de Platão e Aristóteles e uma nova astronomia nasceria a partir dali uma astronomia ligada à física, fenômenos astronômicos sendo explicados por fenômenos físicos que antes se restringiam apenas à Terra.

A humanidade poderia ter perdido essa mente brilhante, visto que Kepler era uma criança que adoecia frequentemente e para a época qualquer doença era fatal. Felizmente tal destino não ocorreu a Kepler e aos seis anos de idade observou, junto de sua mãe Katherine Guldemann (1547 – 1622 E.C.), um cometa, aos nove anos de idade o jovem Kepler e seu pai Heinrich Kepler (1547 – 1590 E.C.) observaram um eclipse lunar (Mourão, 2003). Tais observações, desde pequeno, provavelmente, influenciaram Kepler a querer entender como funcionava o Universo e vindo de uma família protestante, descreve em suas obras um Universo construído por um Deus relojoeiro que construiu o Universo em engrenagem por engrenagem a fim de que a sua criação (os humanos) poderia desvendar a sua obra secreta, o que deixa claro as influências pitagóricas em Kepler.

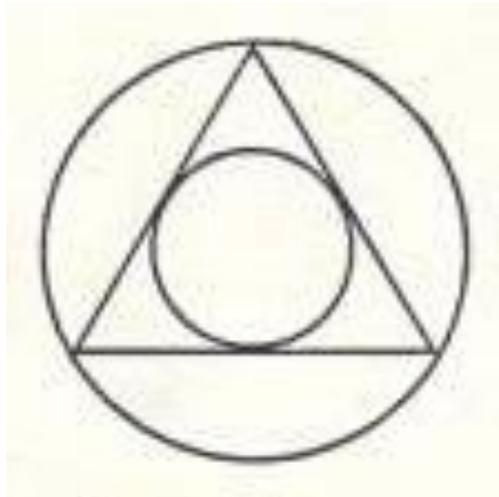
Devido a sua crença, dos treze aos dezessete anos de idade Kepler seguiu os estudos teológicos, frequentou o seminário de Adelberg, posteriormente ingressou no seminário de Maulbronn, onde estudou geometria e aritmética e em 1588 Kepler passou no exame da Universidade de Tübingen. Os estudos de Johannes Kepler na Universidade eram voltados à Teologia, mas na Idade Média todas as Universidades faziam seus alunos iniciarem seus estudos pela Faculdade de Artes que abrigava as sete artes liberais (Lógica, Retórica, Gramática, Aritmética, Música, Geometria e Astronomia), a base da educação medieval, pois assim, independentemente da formação profissional, o indivíduo teria uma formação plena. Nesse cenário, a Matemática foi a disciplina que mais encantou Kepler.

Durante sua passagem em Tübingen, o educador com quem Kepler mais se identificou foi o matemático-astrônomo Michael Maestlin (1550 – 1630 E.C.), que serviria de mentor para Kepler, ajudando-o nas publicações e divulgações de suas obras. Maestlin foi uma das peças-chaves na vida de Kepler, pois foi durante as aulas de Astronomia e Matemática ministrada por Maestlin que Kepler foi apresentado ao modelo heliostático de Copérnico. Embora em sua obra mais famosa, *Epitome Astronomie* (Epítome de Astronomia), Maestlin descreve o mundo de acordo com o sistema geostático de Ptolomeu, em suas aulas, Maestlin ensinava a visão de mundo copernicana, pelo fato de o modelo trazer vantagens matemáticas para alguns fenômenos em relação ao modelo ptolomaico.

Essa apresentação ao modelo, fez com que Kepler ficasse a favor do modelo heliostático, tal fato se comprova no modelo kepleriano de Universo, presente na obra *Mysterium Cosmographicum* (Mistério Cosmográfico) de 1596, que apresenta o Sol no centro do sistema.

Em 1593 a cidade austríaca de Graz solicitou à Universidade de Tübingen um substituto para o cargo de professor de Matemática, visto que o último havia morrido. Rapidamente a Universidade de Tübingen escolheu Kepler para ocupar o cargo. Além de ser professor de Matemática, Kepler, seria também matemático provincial em Graz, tal função era responsável por preparar as previsões astrológicas anuais para a nobreza da região.

Durante uma aula sobre as Grandes Conjunções (posições no céu em que Júpiter se alinha com Saturno) na Universidade de Graz, Kepler desenhou a seguinte figura no quadro: um triângulo que era envolvido por um círculo exterior e um círculo interior era envolvido por um triângulo. A figura em questão havia se formado devido a três conjunções seguidas de Júpiter e Saturno.



**Figura 17** – Um triângulo com um círculo inscrito e outro circunscrito. Fonte própria

Júpiter por ano, em média, avança cerca de  $30^\circ$  e Saturno  $12^\circ$  no céu. Sendo assim, em relação a Saturno, Júpiter se adianta cerca de  $18^\circ$  por ano levando então cerca de 20 anos para alcançar Saturno e ocorrer uma conjunção. Considerando o movimento como circular uniforme pode-se escrever que:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

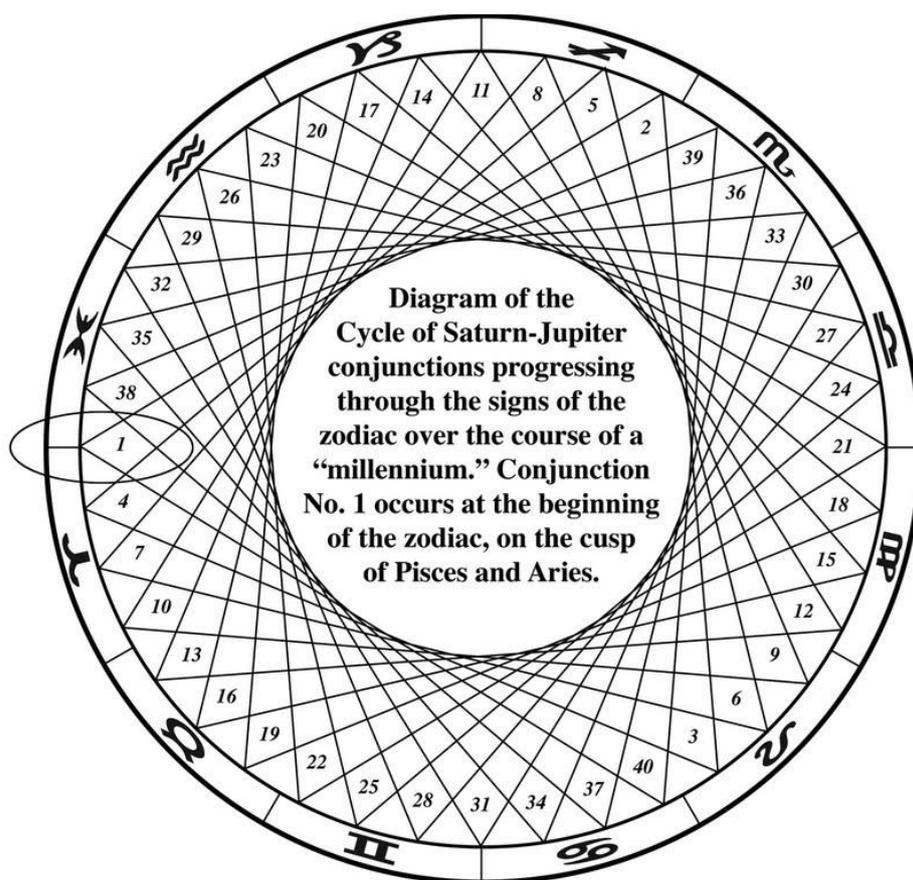
Sendo que a velocidade angular de Júpiter é,  $\omega = 18^\circ/\text{ano}$ , e  $\Delta\theta = 360^\circ$ , pois, como trata-se de uma órbita circular, o descolamento angular total é  $360^\circ$ . Sendo assim, isolando  $\Delta t$  na equação, obtêm-se que o tempo para que Júpiter alcance Saturno é de 20 anos.

Saturno durante esse tempo move-se em sua órbita cerca de  $240^\circ$ , pois ao multiplicarmos 20 anos por  $12^\circ$  obtemos tal valor, o equivalente a  $2/3$  da órbita. Enquanto Júpiter nesse mesmo tempo percorre uma volta completa em sua órbita ( $360^\circ$ ), mais  $2/3$  ( $240^\circ$ ),

ou seja, Júpiter percorre  $600^\circ$  até alcançar Saturno. Portanto, as conjunções de Júpiter e Saturno ocorrem cerca de  $2/3$  de uma circunferência a cada 20 anos.

Desta forma, a cada três conjunções seguidas, é possível formar um triângulo equilátero ao interligar esses pontos. Considerando Júpiter na posição angular de  $30^\circ$ , ao se passar 20 anos, ele estará na posição de  $600^\circ$ , que equivale  $240^\circ$  no círculo trigonométrico. Já Saturno estando em  $12^\circ$ , após 20 anos o mesmo se encontrará em  $240^\circ$ , ocorrendo assim uma conjunção. Agora partindo da última posição de Júpiter,  $600^\circ$ , conclui-se que ao se passar 20 anos acrescentam-se  $240^\circ$ , portanto, Júpiter estará na posição de  $840^\circ$ , o equivalente a  $120^\circ$ , enquanto Saturno estará em  $480^\circ$ , que equivale a  $120^\circ$ , gerando assim a segunda conjunção. Por fim, ao acrescentarmos  $240^\circ$  após 20 anos, temos Júpiter em  $1080^\circ$ , equivalendo a  $360^\circ$  e Saturno estando em  $720^\circ$ , ou seja, a  $360^\circ$ .

Em relação ao seu desenho, Kepler identificou que, o círculo que engloba o triângulo é a órbita de Saturno e o círculo interno ao triângulo a órbita de Júpiter, assim podemos fazer sucessivos triângulos equiláteros a cada três conjunções seguidas.



**Figura 18** – Triângulos formados sucessivamente após três conjunções seguidas

Fonte: <https://megastrologia.com/2010/05/as-grandes-conjuncoes-entre-jupiter-e/>

Kepler ao observar a figura no quadro diz que, o deleite que experimentou com o descobrimento jamais poderia descrever em palavras (Koestler, 1989), a euforia vinha de uma

ideia que acabou tendo ao olhar a figura. Desde seus estudos em Tübingen, Kepler, questionava a si mesmo sobre o porquê algumas coisas no Universo eram como eram. Dentre essas questões havia uma que questionava a quantidade de planetas existentes. Na época conhecia-se seis planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. Kepler então questionava o porquê da existência de precisamente seis planetas, em vez de vinte ou cem (Mourão, 2003). Durante a aula ao se deparar com a figura, Kepler acreditou ter descoberto o motivo e consequentemente desvendado a obra de seu criador.

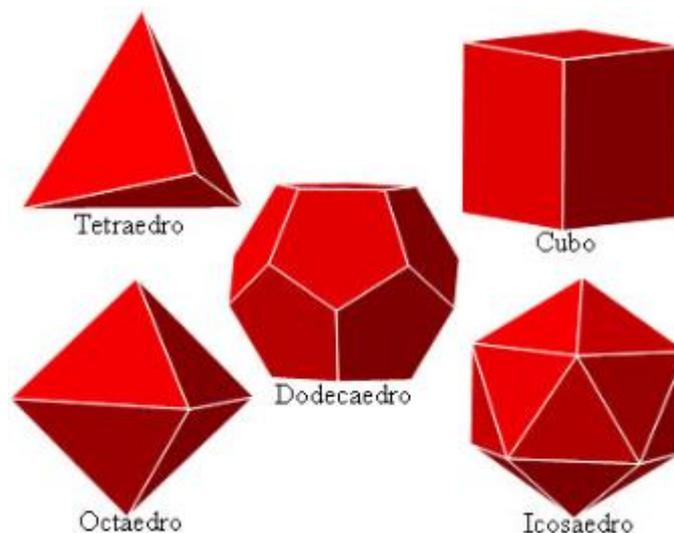
Kepler observando os círculos da figura notou que a razão entre o raio do círculo maior com o raio do círculo menor era a mesma razão entre o raio das órbitas de Saturno e Júpiter, considerando a distância de Saturno e Júpiter ao Sol, de acordo com o modelo copernicano. Ao notar essa coincidência, Kepler foi além, pois sabia-se que o triângulo é a primeira figura da geometria e no caso dos planetas Saturno e Júpiter sabia-se que ambos eram os primeiros planetas exteriores, sendo assim, havia uma lógica feita pelo criador ao colocar a primeira figura da geometria associada aos primeiros planetas exteriores.

Em seguida, Kepler, contaminado pela ideia, inseriu entre as órbitas de Júpiter e Marte um quadrado e tentou determinar uma proporção igual a anterior, entre a órbita de Marte e a Terra foi inserido um pentágono em busca novamente de uma relação, e assim por diante. Mas para os casos testados, o resultado obtido não foi o desejado, não havia determinado uma relação entre as figuras e as distâncias dos planetas ao Sol, como havia acontecido no caso de Júpiter e Saturno.

Porém, o entusiasmo de Kepler era tanto, devido ao fato de acreditar que estava próximo de desvendar a obra, que notou um equívoco, estava ele a considerar figuras planas no espaço ao invés de considerar figuras espaciais. Ao fazer essa mudança, Kepler achou a explicação que então procurava para a existência de apenas seis planetas.

...Avancei mais uma vez. Por que procurar formas bidimensionais para adaptar órbitas no espaço? É preciso procurar formas tridimensionais, e, olha, caro leitor, tens agora em mãos o meu descobrimento. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 169).

Desde da Grécia antiga conhecia-se os sólidos perfeitos (sólidos platônicos), figuras espaciais que apresentam todas as faces iguais. O cubo, o tetraedro, o dodecaedro, o octaedro e o icosaedro formam a classe dessas figuras.



**Figura 19** – Os cinco sólidos platônicos. Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/os-solidos-platao.htm>

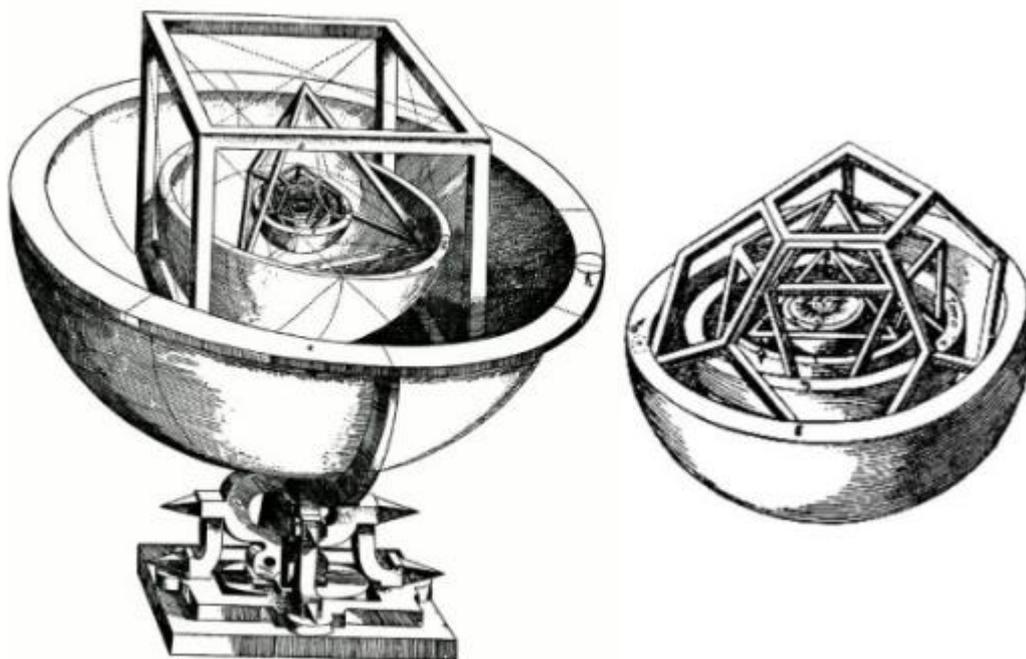
Dentre as figuras espaciais existentes Kepler decidiu usar os sólidos platônicos por serem perfeitamente simétricos ao colocá-los circunscritos ou inscritos por uma esfera. Ao fazer essa combinação a esfera tocará cada uma das faces da figura no caso circunscrito, e, no caso inscrito, todos os vértices da figura ficarão na superfície da esfera, gerando assim uma harmonização.

Com essa estrutura de raciocínio, o modelo de Universo kepleriano era constituído da seguinte forma: na esfera transportadora de Saturno havia inscrito um cubo, circunscrito pelo cubo havia a esfera transportadora de Júpiter que inscrevia o tetraedro que por sua vez circunscrescia a esfera transportadora de Marte, em seguida entre a esfera transportadora de Marte e da Terra encontrava-se o dodecaedro que vinha seguido, entre a esfera transportadora da Terra e de Vênus, pelo icosaedro e, por fim, o octaedro entre as esferas transportadoras de Vênus e Mercúrio e no centro de todo o sistema encontra-se o Sol.

Logo, Kepler acreditava ter achado a explicação do porquê existia apenas seis planetas, pois se há apenas cinco sólidos perfeitos que são capazes de se harmonizar simetricamente com as esferas transportadoras e há apenas cinco intervalos entre os planetas, o criador do Universo encaixaria entre esses intervalos os cinco sólidos, formando um esqueleto invisível que estruturava o sistema solar.

... A Terra está no círculo que serve de medida para tudo. Construir um dodecaedro ao redor dela. O círculo envolvendo-o deve ser o de Marte. Ao redor de Marte construir um tetraedro. O círculo envolvendo-o deve ser o de Júpiter. Ao redor de Júpiter construir um cubo. O círculo envolvendo-o deve ser o de Saturno. Depois, construir um icosaedro dentro da esfera da Terra. O círculo inscrito nele deve ser o de Vênus. Dentro da esfera de Vênus construir um octaedro. O círculo inscrito nele deve ser o de Mercúrio. Assim, pode-se ter a explicação da razão do número de planetas existentes. (Tossato, Claudemir Roque

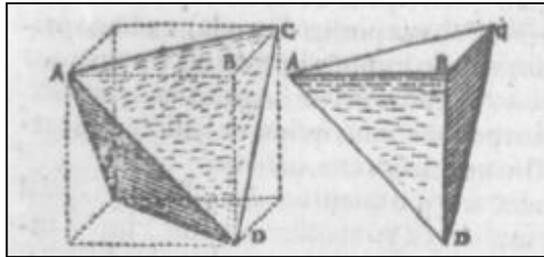
Além de explicar a quantidade de planetas existentes (na época), o modelo de Kepler explicava também o motivo das distâncias entre as órbitas serem diferentes umas das outras, pois o espaço entre as órbitas tinha de ter um determinado valor para que o sólido platônico a ser encaixado adaptasse perfeitamente a aquele espaço.



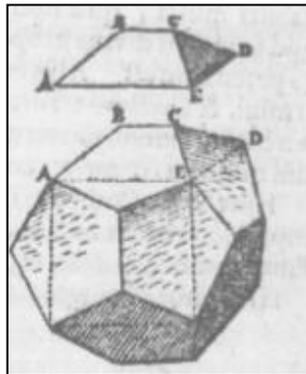
**Figura 20** – Representação do modelo kepleriano de Universo. A imagem da esquerda mostra o modelo completo e a imagem da direita detalha as esferas de Marte, Terra, Vênus e Mercúrio com o Sol ocupando o centro do sistema. Fonte: <https://thatsmaths.com/2016/10/13/keplers-magnificent-mysterium-cosmographicum/>

A ordem com que os sólidos perfeitos foram encaixados no modelo de Kepler seguiu uma classificação feita por ele próprio: figuras primárias e secundárias. A primeira seriam figuras com ângulos sólidos formadas por três linhas e a segunda seriam figuras com ângulos sólidos formadas por mais de três linhas. Sendo o cubo, tetraedro e o dodecaedro figuras primárias e como secundárias o octaedro e icosaedro. Enquanto a ordem utilizada entre as figuras de cada classificação seguia uma ideia de nobreza.

Dentre as figuras primárias o cubo era o mais nobre de todos, pois tal figura pode ser formada a partir de si mesma, ou seja, a partir de um de seus lados e um ângulo reto um cubo pode ser formado. Posteriormente o tetraedro é o segundo mais nobre, visto que pode ser gerado através de um recorte do cubo. Por fim, dentre os três, o dodecaedro é o último em nobreza, pois tal figura pode ser formada a partir de vários pedaços de um cubo. Justificando assim a ordem, de fora para dentro, de encaixe entre essas figuras.



**Figura 21** – Tetraedro sendo gerado a partir do recorte de um cubo. Fonte: (Stepheson, 1994)



**Figura 22** – Dodecaedro sendo gerado a partir de pedaços de um cubo. Fonte: (Stepheson, 1994)

Entre as figuras secundárias (octaedro e icosaedro), o octaedro era o mais nobre que o icosaedro pelo fato de o octaedro ser mais relacionado com o cubo, por isso tal figura fora encaixada primeiro, sendo essa a justificativa de ordem, de dentro para fora, entre as duas figuras.

No próprio livro, Kepler diz que não se deve levar a existência física dos sólidos platônicos, pois anos antes, em observação a um cometa visto de 13 de novembro de 1577 e 26 de janeiro de 1578, Tycho Brahe (1546 – 1601 E.C.) havia considerado a inexistência dos orbes sólidos. As observações feitas mostravam que o cometa se encontrava na região supralunar, ou seja, além da esfera da Lua contrariando o pensamento aristotélico no qual dizia que apenas no mundo sublunar tais fenômenos deveriam ocorrer.

Além disso, Tycho Brahe descreveu ainda em sua obra intitulada *Dos fenômenos recentes do mundo etéreo* que o cometa apresentava uma órbita elíptica alongadíssima, tal fato faria com que o cometa, ao percorrer sua trajetória no espaço, destruiria os orbes sólidos ao atravessá-los. Portanto, ao já saber deste fato Kepler rejeita a ideia material dos sólidos platônicos no próprio *Mysterium Cosmographicum*:

“Pois é absurdo e monstruoso situar estes corpos no céu providos de alguma materialidade de modo que impeçam a passagem de outros corpos...” (Itokazu, A. G. *Astronomia Nova: a história da guerra contra Marte como exposição do método astronômico de Kepler*, São Paulo: [s. n.], 2006, P. 39).

Mas mesmo deixando claro desde o início a rejeição, Kepler não escapou das severas

críticas feitas por Tycho Brahe, que viria a ser posteriormente colega de trabalho. Em uma carta datada de 1º de abril de 1598 (Itokazu, 2006), Brahe, crítica a ideia de haver estruturas sólidas entre as esferas transportadoras dos planetas, mas apesar dessa crítica mal interpretada, Tycho Brahe elogia a obra apresentada por Kepler.

Além de rejeitar a materialidade dos sólidos perfeitos, Kepler também rejeita a existência dos orbes sólidos, e, não só isso, como desenvolve uma explicação para o movimento dos planetas. Sem a ideia dos orbes, o que movimentaria os planetas pelo espaço seria o Sol, pois com o Sol sendo o centro do movimento, o mesmo deveria ser responsável pelo movimento dos planetas. Essa ação do Sol era devido a ideia, elaborada por Kepler, de alma motriz solar.

Pois assim como a fonte da luz está no Sol, e a origem do círculo está no lugar do Sol, isto é, no centro, assim aqui a vida, o movimento e a alma do mundo são recolhidos nesse mesmo Sol, de modo que caiba às [estrelas] fixas o repouso, aos planetas os atos segundos dos movimentos e ao Sol o próprio ato primeiro, que é incomparavelmente mais nobre do que os atos segundos em todas as coisas. E não é de maneira distinta que o mesmo Sol sobressai amplamente em relação a todos os demais [astros] pela beleza de seu aspecto, pela eficácia de sua força e pelo esplendor de sua luz. (Itokazu, A. G. *Astronomia Nova: a história da guerra contra Marte como exposição do método astronômico de Kepler*, São Paulo: [s. n.], 2006, P. 39).

Esta passagem de Kepler reflete a semelhança com a passagem no livro *Revoluções das Esferas Celestes* de Copérnico em que o mesmo exalta o Sol como um rei em seu trono governando os planetas, tal fato evidencia as influências e a aceitação pública do modelo copernicano por Kepler.

No livro, Kepler apresenta uma relação entre a distância dos planetas ao Sol e suas respectivas velocidades. Ao analisar a tabela copernicana que relaciona a distância dos planetas ao Sol com o seu período, Kepler observou que não havia uma proporção entre as órbitas dos planetas com os seus respectivos períodos. Portanto, os planetas não estão sobre a mesma ação do Sol, sendo assim, Kepler construiu a seguinte tabela:

	Saturno	Júpiter	Marte	Terra	Vênus	Mercúrio
Saturno	<b>10759.12</b>					
Júpiter	6159	<b>4332.37</b>				
Marte	1785	1282	<b>686.59</b>			
Terra	1174	843	452	<b>365.15</b>		
Vênus	844	606	325	262.30	<b>224.42</b>	
Mercúrio	434	312	167	135	115	<b>87.58</b>

**Tabela – 3** Período dos planetas em dias terrestre

Os valores em destaque na tabela correspondem o período de translação dos planetas em dias terrestres, já os números presentes abaixo de cada período representam o valor do

período do planeta subsequente ao qual está sendo considerado, caso ambos tivessem a mesma velocidade de translação. Por exemplo, considerando a Terra, o planeta subsequente é Vênus, considerando a velocidade de translação da Terra e de Vênus a mesma o período de translação de Vênus deveria ser 262.30 dias, já o de Mercúrio 135 dias. O que de fato não correspondia ao observado.

Kepler interpreta perante isso que o aumento do período e da distância dos planetas ao Sol faz com que ocorra uma diminuição na velocidade de translação, sendo assim, a distância do planeta ao Sol causa o aumento da órbita e uma atenuação na alma motriz solar, a qual é responsável pelo movimento dos planetas, justificando assim, por exemplo, a diferente ação do Sol sobre Vênus e Júpiter.

A obra de Kepler não só apresenta apenas o seu modelo de Universo, como dá início a ideia de dar responsabilidade ao Sol sendo o centro geométrico e físico do sistema, responsável pelo movimento dos planetas e fonte de calor e luz. Essa ideia se desenvolverá mais em sua obra *Astronomia Nova* de 1609, em que a tal alma motriz solar passa a ser uma força emanada do Sol que causa o movimento dos planetas.

#### **4.2. AULA INTRODUTÓRIA: AS IDEIAS KEPLERIANA**

O objetivo geral dessa aula é introduzir aos alunos o modelo dos sólidos platônicos apresentado por Kepler na obra *Mysterium Cosmographicum*. Como objetivos específicos mostrar a ideia de que o Universo é estruturado devido a certas causas, deixar claro a aceitação de Kepler ao modelo copernicano e mostrar as primeiras ideias de dar responsabilidade ao movimento planetário ao Sol.

Para que os alunos não fiquem passivos na aula, propomos que para iniciá-la o professor(a) faça uma pergunta aos alunos na qual a mesma servirá como um tema gerador da aula. Assim como Kepler se perguntou o porquê o Universo era formado por precisamente seis planetas, a pergunta a ser feita aos alunos seria o porquê nosso sistema solar é formado por oito planetas e não mais ou menos do que isso. Conforme as respostas dos alunos é papel do professor(a) construir a dinâmica da aula com base nas respostas afim de direcionar o caminho da aula aos objetivos.

Para que não haja respostas muito diversificadas e faça com que seja difícil alinhar as respostas ao assunto da aula, a pergunta pode ser feita da seguinte forma: primeiramente dizer aos alunos uma frase do tipo “ No passado alguns cientistas acreditavam que Deus não fez nada

por acaso ao criar o Universo, tudo era do jeito que era por haver uma explicação lógica e científica por de trás”, posteriormente a esse direcionamento no pensamento dos alunos a seguinte pergunta pode ser feita “ Você (aluno) acredita que haja algum motivo para existir precisamente apenas oito planetas girando em torno do Sol?”, dessa forma as respostas dos alunos podem ser direcionada ao assunto da aula.

Conforme as respostas dos alunos, o professor(a) deve destacar aquelas que de alguma forma dá para construir a aula em cima delas, mas nunca considerando “erradas” outras respostas, visto que não há uma resposta certa a essa questão. Por meio desse método acredita-se que a aula possa ser construída com os alunos fazendo com que haja uma participação efetiva que leva à aprendizagem.

## **5. CAPÍTULO 4 - A PRECISÃO DOS DADOS DE TYCHO BRAHE: CAMINHO ÀS LEIS DO MOVIMENTO PLANETÁRIO**

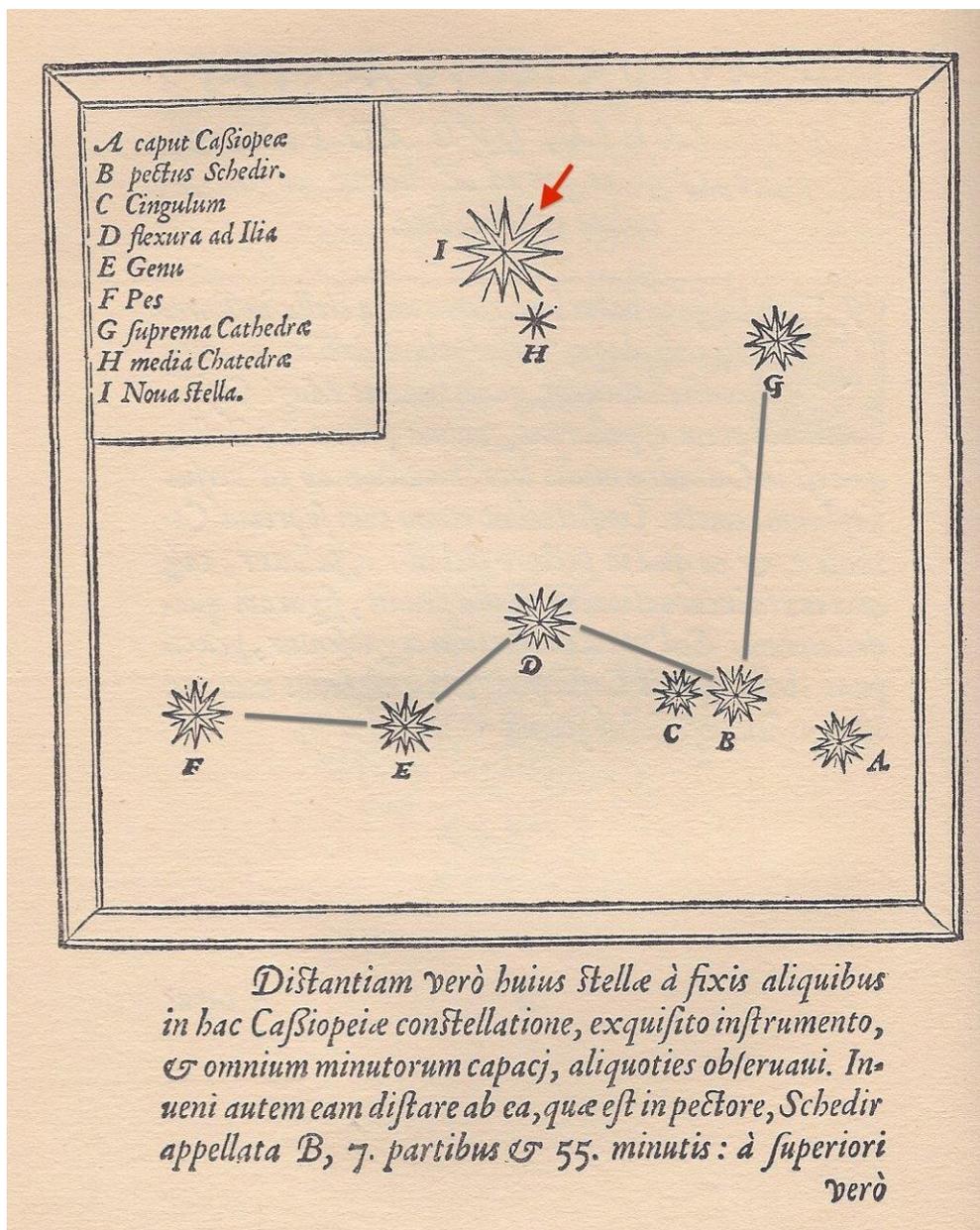
### **5.1. O MAIOR ASTRÔNOMO DA ERA PRÉ-TELESCÓPIA**

O dinamarquês Tycho Brahe é considerado um dos maiores astrônomos da era que antecedeu o telescópio pelo fato de ter coletado dados astronômicos em sua época que apresentavam erros menores do que dois minutos de arco. A dedicação de Brahe na astronomia provavelmente se deve a quatro grandes eventos astronômicos que o mesmo presenciou.

O primeiro estímulo, para entrar na carreira de astrônomo, ocorreu na adolescência quando presenciou um eclipse solar parcial. Anos mais tarde, presenciou uma falha nas tabelas astronômicas da época, que utilizavam o modelo ptolomaico, a ocorrência de uma conjunção de Júpiter e Saturno prevista erroneamente, o que o fez pensar sobre a importância em se fazer observações astronômicas sistematicamente. O terceiro fenômeno ocorreu aos 26 anos quando percebeu que, ao contrário das ideias aristotélicas, o universo era mutável ao observar o surgimento de uma “nova estrela” na constelação de Cassiopéia, na qual tratava-se na verdade de uma supernova. Por fim, o último evento foi a observação do cometa de 1577, que permitiu demonstrar que o corpo se encontrava além da esfera lunar, refutando a ideia dos orbes sólidos e o sistema aristotélico.

A precisão nos dados de Tycho Brahe ajudou Kepler a chegar em suas leis do movimento planetário. O que impressiona nesse fato é que Kepler confiou absolutamente nos dados de Tycho Brahe, que, ao se deparar com erros teóricos jamais contestou os dados e sim

buscou então outras teorias que se aplicassem aos dados observacionais.



**Figura 23** – Representação da supernova de 1572 (seta vermelha) na constelação de Cassiopeia presente na obra *De Stella Nova* de Tycho Brahe. Fonte: <http://www.astropt.org/2014/11/26/a-estrela-nova-de-1572/>

Porém o destino da história quase foi outro, Kepler e Tycho poderiam ter se tornados inimigos devido a uma frase dita por Kepler em uma carta (Tossato, 2004) ao astrônomo Nicolau Reimers Ursus (1551 – 1600 E.C.). Kepler ao escrever para Ursus perguntando sobre a sua obra *Mistério Cosmográfico* diz, em uma série de elogios, “*eu admiro a sua hipótese*” (Itokazu, 2006), e Ursus em uma de suas obras replicou a frase. Tycho Brahe ao saber do elogio feito começou a se corresponder com Kepler e a fazer duras críticas a obra kepleriana.

A causa da inimizade entre Ursus e Tycho Brahe era pela acusação feita por Brahe de que Ursus ao visitá-lo em Uraniburgo havia roubado dados observacionais e a ideia de um modelo de Universo. O castelo de Uraniburgo, localizado na ilha de Hven na Dinamarca, foi dado a Tycho como presente do rei Frederico II. O castelo foi a moradia de Tycho Brahe por um bom período, as grandes observações e os excelentes dados observacionais foram coletados enquanto Brahe morou na ilha. O castelo em si era composto por torres de observações, um observatório subterrâneo e oficinas para construção de instrumentos para observação astronômica.



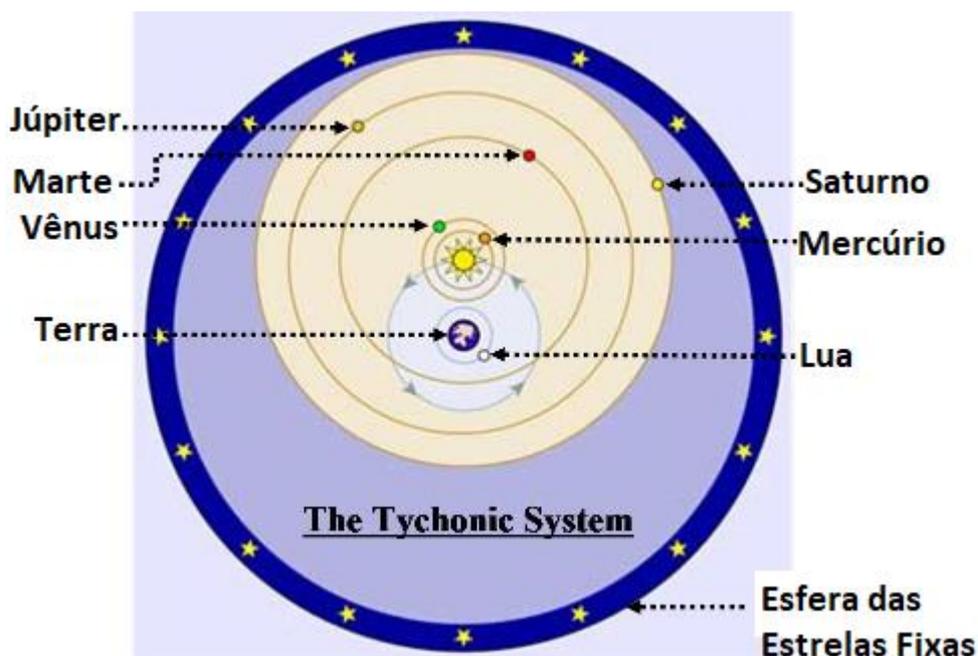
**Figura 24** – Castelo de Uraniburgo. Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/395683517260577302/>

Em 1584, Ursus, que acompanhava um nobre dinamarquês, visitou o castelo e, durante a visita feita, Tycho mostrou a ideia do seu modelo de Universo a Ursus. Como não havia observado a paralaxe estelar e por motivos religiosos, Brahe não aceitava o modelo de Copérnico, mas sabia que o mesmo trazia vantagens. Tycho Brahe então desenvolveu um modelo misto no qual respeitava a sua crença, explicava a ausência de paralaxe e aproveitava as vantagens do modelo heliocêntrico. O modelo tychonico trazia a Terra imóvel, com a Lua e o Sol orbitando em torno da Terra, assim como o modelo ptolomaico, e, em contrapartida, os outros planetas giravam em torno do Sol da mesma forma proposta por Copérnico.

Por esse motivo, de ter visto o modelo antes de ser publicado, Brahe acusa Ursus de ter roubado a ideia do modelo geo-heliocêntrico, pois em 1588 Ursus publicou a obra *Nicolai*

*Raimari Ursi Dithmarsii Fundamentum Astronomicum* (Astronomia Fundamental de Nicolau Reymars Ursus de Ditmar) na qual apresentava um modelo que misturava o sistema ptolomaico e copernicano, assim como o que havia observado em Uraniburgo.

No mesmo ano, Brahe publicou a obra *De Mundi aetheri recentioribus phaenomenis liber secundus* (Sobre o mais recente fenômeno do Mundo etéreo, livro dois) que, além de comentar sobre as observações da “nova estrela” e do cometa observado acima da esfera da Lua, apresenta o modelo misto.



**Figura 25** – O modelo geo-heliocêntrico de Tycho Brahe

Fonte: <https://o.quizlet.com/ulgKA.sTSmS3is2rbsaU5Q.png>

Porém, somente em 1596 Tycho publicamente acusa Ursus de plagiar sua obra. Após a acusação Ursus publica em 1597 *Tractatus* em resposta a Tycho, cujo o escrito apresenta, além de ataques a Tycho Brahe, a frase dita por Kepler anos antes em uma carta destinada a Ursus. Kepler quando publicou o *Mistério Cosmográfico* enviou cartas e cópias do livro a diversos astrônomos e matemáticos de sua época para saber a opinião de seus contemporâneos quanto ao seu modelo, entre eles estavam Ursus e Tycho. Ursus não respondeu a carta de Kepler, apenas usou a parte na qual era elogiado por Kepler no *Tractatus*, enquanto Tycho, respondeu a carta de Kepler sobre sua obra, fazendo algumas críticas ao modelo e queixando-se sobre Kepler apoiar Ursus.

Depois de ter escrito a carta a Kepler, Tycho Brahe escreveu uma carta para Maestlin. Além de comentar sobre o sistema kepleriano, Brahe queixava-se novamente sobre a carta de Kepler a Ursus, porém mais severamente. Ao escrever para Maestlin, Brahe esperava que o mesmo transmitisse as reclamações a Kepler. Tycho Brahe, apesar de ter feito críticas ao

Mistério Cosmográfico, notou a excelente capacidade de Kepler em interpretar e desenvolver teorias para os dados observacionais e pretendia trazer Kepler para trabalhar contigo. A carta então surtiu o efeito desejado e Kepler escreveu-se redimindo a Tycho Brahe.

E então? Por que dá (Ursus) tamanho valor aos meus elogios?...Se fosse homem desprezá-los-ia, se fosse sábio não os exibiria em público. A nulidade que eu era naquele tempo procurava um varão famoso que elogiasse o meu novo descobrimento. Pedi-lhe uma dádiva e foi ele que extorqui do pedinte uma dádiva...O meu espírito pairava no ar e desfazia-se de júbilo pelo descobrimento: Se, no desejo egoísta de lisonjeá-lo, derramei palavras que superaram a minha opinião a respeito dele, a explicação está na impulsividade da juventude. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 205).

Após esse episódio de equívocas interpretações, Brahe escreveu uma carta a Kepler em 1599 (Tossato, 2004). Nessa época, Tycho Brahe encontrava-se como matemático imperial de Praga, pois em 1597 viu-se obrigado a deixar Uraniburgo pelo fato do rei dinamarquês Cristiano IV, herdeiro de Frederico II, ter cortado os financiamentos para os trabalhos de Tycho Brahe. Sendo assim, o Imperador da Boêmia, Rodolfo II, acolheu Brahe disponibilizando o castelo de Benatky em Praga e atribuindo-o como matemático imperial.

Na carta, Brahe convidava Kepler para trabalharem juntos em Praga, mas quando a carta chegou em dezembro de 1599 em Graz, Kepler já estava a caminho de Praga para encontrar-se com Tycho Brahe, visto que a sua situação em Graz estava comprometida, pois devido a reforma protestante que chegara a cidade, todos os protestantes estavam sendo expulso e Kepler esperava conseguir com Brahe um novo lugar para morar e que pudesse trabalhar como astrônomo. Ele já sabia, desde junho de 1599, que Rodolfo II havia acolhido Brahe.

Desse modo, em 4 de fevereiro de 1600, Kepler e Tycho Brahe encontraram-se pessoalmente pela primeira vez e, assim, por meio de acordos Kepler começa a trabalhar para Brahe em Praga. A relação de trabalho entre os dois grandes astrônomos na maioria das vezes não era amigável, ambos discutiam muito, Kepler a certos momentos ameaçava abandonar o emprego.

Mas Brahe sabia que precisava de Kepler para arquitetar o modelo de Universo de acordo com os seus dados e Kepler precisava dos excelentes dados de Tycho para conseguir descrever o Universo o mais próximo do real.

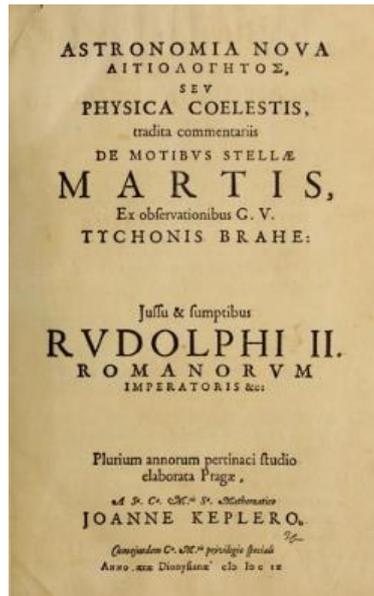
Após a chegada de Kepler no castelo como novo empregado, a primeira tarefa ao qual havia sido designado, era escrever a obra intitulada *Defesa de Tycho*, que no início traz a visão kepleriana sobre hipótese astronômica e o restante se resume basicamente em defesa de Tycho Brahe sobre a história de plágio com Ursus; a obra em si nunca foi completada por Kepler.

Em 1601 Tycho reorganizou o trabalho entre os funcionários de Benatky. Na época a órbita do planeta mais difícil de ser estudado era a de Marte, Tycho havia designado essa tarefa ao astrônomo Christen Longomontanus (1562 – 1647 E.C.), o mais velho assistente que o acompanhava desde 1589 em Uraniburgo, mas durante as mudanças Tycho designou Longomontanus para estudar a órbita da Lua e Kepler ficou responsável em estudar e explicar a órbita de Marte.

Desde a antiguidade a órbita de Marte intrigava os astrônomos. O planeta apresenta uma das órbitas mais excêntricas conhecidas entre os planetas exteriores, ou seja, a órbita que mais se desvia do centro do movimento, independentemente do modelo considerado (ptolomaico, copernicano ou thyconico).

Kepler sabia que a órbita de Marte era a mais difícil de ser explicada em relação aos demais e isso o fez de se orgulhar e se empenhar ao máximo para resolver esse problema, garantindo a Brahe que solucionaria o problema da órbita de Marte em oito dias. Mas ao se deparar com a incrível precisão dos dados de excentricidade e distâncias médias de Marte coletados por Tycho Brahe, Kepler encontrou um enorme problema em relacionar os dados com um modelo que os respeitasse, dessa forma, um trabalho que Kepler havia garantido em oito dias levaram-se oito anos para serem concluídos, muito tempo depois da morte daquele que confiou a tarefa a Kepler, pois Tycho Brahe morreu inesperadamente em 24 de outubro de 1601.

O empenhoso trabalho de oito anos resultou na obra *Astronomia Nova seu Physica Coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis* (Astronomia Nova, fundada sobre as causas, ou Física Celeste, exposta em comentários sobre os movimentos da estrela Marte) ou como é mais conhecida *Astronomia Nova* publicada em 1609, tal obra apresentou ao mundo o que conhecemos hoje como Primeira e Segunda Lei de Kepler.



**Figura 26** – Capa da obra de 1609 titulada Nova Astronomia baseada nas causas ou Física Celeste derivada das investigações dos movimentos da estrela Marte fundamentada nas observações do nobre Tycho Brahe. Fonte: <https://www.bamboolik.cz/sk/astronomia-nova-slnko-sa-otaca-okolo-svojej-osi/>

## 5.2. ASSIM NA TERRA COMO NO CÉU: A FÍSICA TERRESTRE SENDO APLICADA NO SISTEMA SOLAR

Tycho Brahe, poucos dias antes de falecer, havia sofrido uma crise renal, temendo pelo seu estado de saúde, deixou claro que o seu sucessor deveria ser Kepler. Dessa forma, em 6 de novembro de 1601, treze dias depois do falecimento de Tycho, o Imperador Rodolfo II nomeou Kepler como o novo matemático imperial de Praga atendendo o desejo de Brahe.

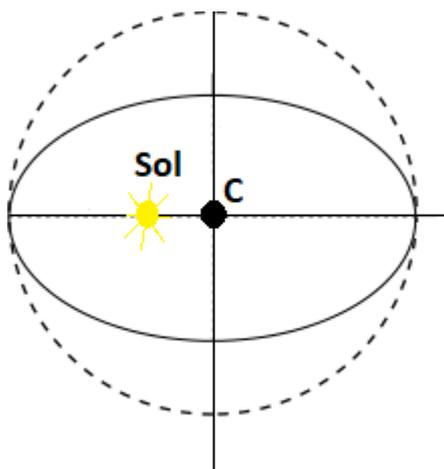
Com isso, Kepler passou a ter acesso a todo material de Tycho e recursos financeiros para se dedicar exclusivamente ao estudo da órbita de Marte e desenvolver Astronomia Nova. O mérito à obra não se deve restringir apenas na obtenção exata das duas primeiras leis do movimento planetário, o trabalho de Kepler vai além, trazendo uma nova concepção aos estudos astronômicos: explicar os fenômenos observados através de uma causa. O que justifica parte do título da obra conter Física do céu, pois o pensamento aristotélico descrevia que as explicações e causas físicas não poderiam ser aplicadas ao céu, restringiam-se apenas à Terra, mas Kepler rompe com esse dogma e desenvolve uma nova astronomia.

Kepler, na *Defesa de Tycho*, apresenta a ideia de hipóteses astronômicas em contrapartida as hipóteses geométricas. Segundo Kepler, as hipóteses astronômicas devem corresponder aos movimentos reais dos astros no Universo enquanto as hipóteses geométricas servem para representar as hipóteses astronômicas, sendo assim, as hipóteses geométricas não

devem ser consideradas verdadeiras ou falsas, pois a sua formulação não tem a necessidade de explicar a realidade do Universo, mas sim de ser capaz de manipular as hipóteses astronômicas fazendo com que se deduzam os movimentos dos astros no céu. Kepler utilizou desse pensamento para desenvolver suas ideias presente na *Astronomia Nova*.

De início, Kepler introduziu três hipóteses astronômicas, que inovaram os estudos astronômicos da época para conseguir solucionar o problema de Marte. Os modelos de Universo vistos até aqui não apresentavam o centro sendo um corpo físico, mas sim um ponto geométrico, sendo assim, a primeira mudança feita por Kepler, apresentada já no Mistério Cosmográfico, foi considerar o Sol como centro, visto que a força que movia os planetas provia do Sol.

Mas, apesar disso, para obter resultados satisfatórios, o centro da órbita, que até então era um círculo, não tinha seu centro no Sol, e sim próximo ao mesmo. O ponto onde encontra-se o Sol será chamado posteriormente de foco, pois até então não se sabia que a órbita era elíptica.



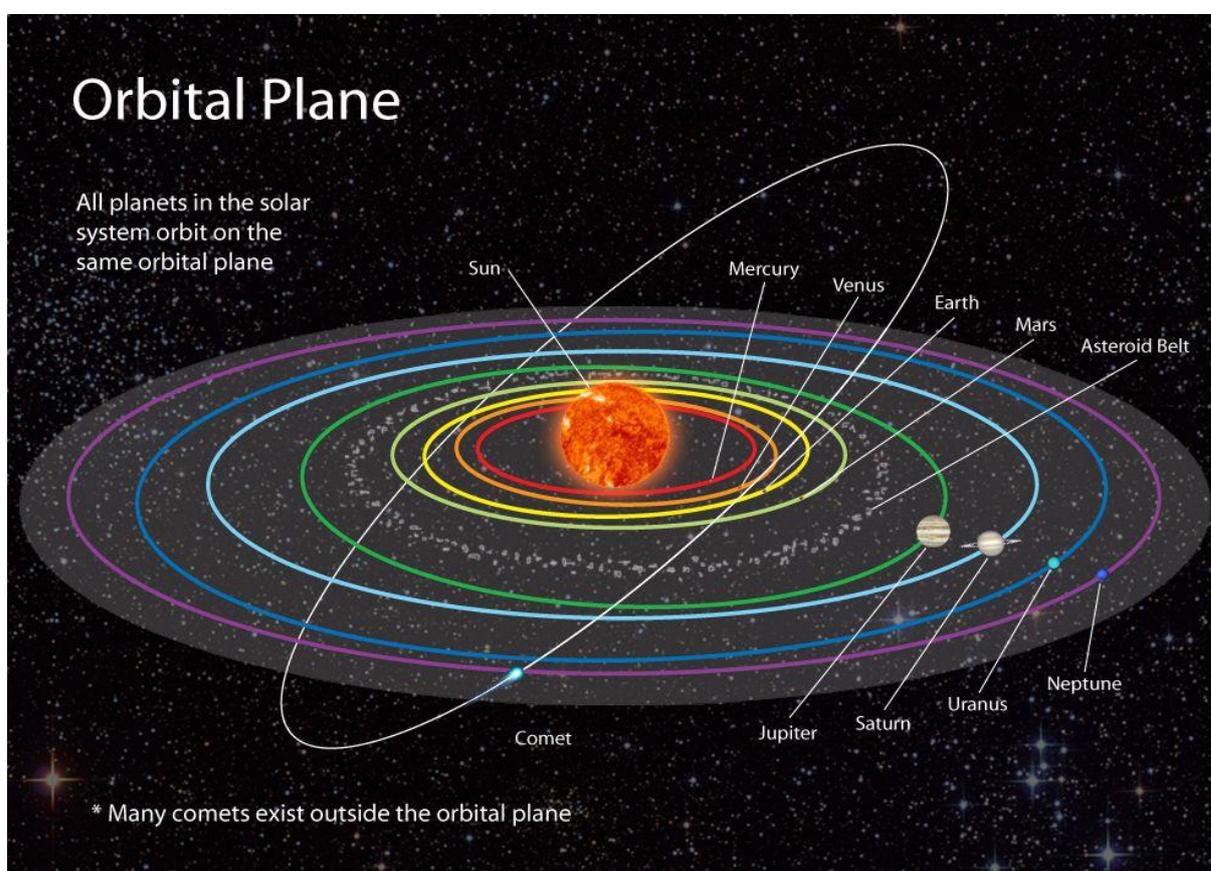
**Figura 27** – As linhas tracejadas representam o círculo que acreditava-se ser a órbita dos planetas. O ponto C é o centro desta órbita circular com o Sol próximo a este ponto. Enquanto o aparente círculo dentro do círculo maior é uma órbita elíptica que viria ser adotado posteriormente. Fonte própria.

Porém, uma pergunta ainda persistia, se o Sol era responsável por movimentar os planetas, por que permaneciam girando em torno de C? (Koestler, 1989). A resposta de Kepler para esse problema era de que cada planeta estaria sujeito a influência de duas forças em conflito: uma força emanada do Sol e outra no próprio planeta. Esse fenômeno fazia com que em certos momentos o planeta se aproximava do Sol e em outros se afastava.

As duas forças em questão são a gravidade e a inércia, mas só tiveram esses conceitos impressos, como conhecemos hoje, quando foram postuladas por Newton ao explicar as excentricidades das órbitas dos planetas. Para Kepler a natureza dessas forças era outra.

Portanto, essa mudança feita por Kepler introduziu forças reais ao problema que até então apenas atribuía instrumentos fictícios. Assim, era empregado uma causa física a excentricidades das órbitas serem como são. Poderia ter feito ao contrário e empregado algo fictício para solucionar o problema, mas, dessa forma, não haveria causa física e Kepler insistia em ter explicações causais. Outro ponto a se destacar é que Kepler considerava em seus cálculos as distâncias e as posições dos astros em relação sempre ao Sol e não em relação ao centro C

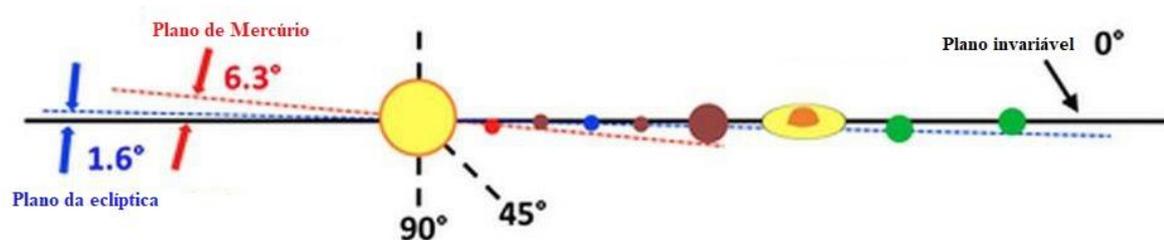
A segunda ideia inovadora de Kepler é de que as órbitas dos planetas estão, aproximadamente, no mesmo plano e esse plano contém o Sol e é conhecido como eclíptica, tal nome deve-se ao fato de que para ocorrer um eclipse a Lua deve encontrar-se neste plano.



**Figura 28** – Esquema representando as órbitas dos planetas em um mesmo plano que contém o Sol. Fonte: <https://www.nationalgeographic.org/media/orbital-plane/>

A ideia de Kepler era de que se considerar um plano que passe pelo meio do Sol, as órbitas de todos os planetas estariam nesse plano tendo pequenos ângulos formados entre elas, mais ou menos seria como imaginar uma mesa plana, que nesse caso seria nossa eclíptica, onde se coloquem várias toalhas de mesa, simulando as órbitas, umas sobre as outras, apesar das toalhas serem bem finas, elas tem um espessura, assim a cada toalha colocada sobre outra elas formam pequenos ângulos entre elas em relação ao plano da mesa.

## Plano orbital dos planetas



<b>Mercúrio</b>	<b>7° 0'</b>	<b>Urano</b>	<b>0° 46'</b>
<b>Vênus</b>	<b>3° 24'</b>	<b>Saturno</b>	<b>2° 29'</b>
<b>Marte</b>	<b>1° 51'</b>	<b>Netuno</b>	<b>1° 46'</b>
<b>Terra</b>	<b>1,6°</b>	<b>Júpiter</b>	<b>1° 18'</b>

**Figura 29** – Ângulos das órbitas dos planetas em relação a eclíptica.

Fonte: <https://www.forbes.com/sites/startswithabang/2018/03/01/why-do-all-the-planets-orbit-in-the-same-plane/#64a4f6af56c6>

Antes desse pensamento kepleriano, utilizava-se o plano da órbita da Terra como parâmetro. E, nesse caso, o planeta Marte, por exemplo, apresentava uma órbita oscilante no espaço e dependia da posição da Terra. Ao fazer essa mudança para o plano da órbita do Sol, a órbita marciana não precisaria mais oscilar pelo espaço e formaria um ângulo fixo de 1°50' com o plano da eclíptica, tal valor fora determinado utilizando-se as observações de Tycho.

A terceira inovação kepleriana rompeu em partes com o dogma da circularidade de Platão, um axioma fundamental da astronomia da época. Kepler removeu a ideia de os planetas terem que transladarem com velocidades uniformes em suas órbitas. Apesar dessa mudança, Kepler, provisoriamente, ainda manteve a ideia de o movimento ser em uma órbita circular.

Essa mudança radical novamente vinha por utilizar considerações físicas, Kepler interpretou que: se o Sol controla o movimento dos planetas com sua força, então quando os planetas estivessem mais próximos do Sol está força deveria agir mais poderosamente, fazendo com que o planeta se movesse mais rapidamente e quando afastado ao máximo do Sol deveria agir menos poderosamente, fazendo com que o planeta se movesse mais lentamente, ou seja, as diferenças de velocidades na órbita está relacionada à distância que o planeta se encontra do Sol.

Kepler já havia relacionado a diminuição de velocidades de translação dos planetas com a distância ao Sol no *Mistério Cosmográfico*, na *Astronomia Nova*, Kepler estende essa ideia para a velocidade dos planetas em suas órbitas. Essa mudança fez com que Marte, que

pelo modelo copernicano necessitava de cinco círculos para ter o movimento explicado, se movimentasse apenas em um círculo excêntrico.

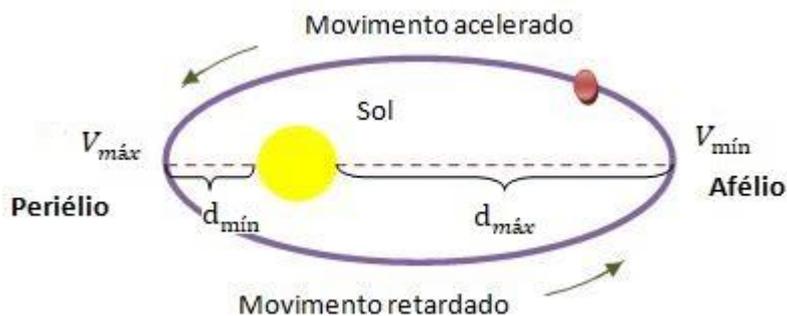
Com essas três hipóteses astronômicas Kepler caminhava para a segunda lei do movimento planetário, que foi estabelecida antes mesmo da primeira lei. Ao estabelecer que a força que emanava do Sol era a causa do movimento e que quando longe do Sol (afélio) o planeta tinha uma velocidade mais lenta e mais rápida quando próximo ao Sol (periélio), Kepler mostra que a velocidade é inversamente proporcional à distância do planeta ao Sol. Na linguagem matemática atual podemos escrever a relação encontrada por Kepler da seguinte forma:

$$v \propto \frac{1}{r}.$$

Sendo  $v$  é a velocidade orbital do planeta e  $r$  a distância do planeta ao Sol.

Para chegar nessa relação, entre a velocidade e a distância, Kepler novamente inovou os métodos da época. Na sua busca pela verdadeira órbita de Marte pensou em primeiro lugar estudar novamente o movimento da Terra, pois ela era o observatório, então consequentemente se os seus movimentos foram descritos errados, o movimento de outros astros também ficaria errados. Para isso Kepler pensou no seguinte método: transferir o referencial para Marte, ou seja, imaginar um astrônomo em Marte estudando os movimentos da Terra.

Ao realizar essa mudança o resultado obtido por Kepler foi de que a Terra não se movia com velocidade uniforme como acreditava-se, tal resultado não surpreendeu, pois com os dados obtidos por Tycho, Kepler já sabia que os demais planetas não se moviam com velocidade constante, então não teria motivo para a Terra se mover de tal maneira. E assim como os outros astros a Terra apresentava uma velocidade maior no periélio e menor no afélio, formulando assim a relação inversamente proporcional entre a velocidade e distância do planeta ao Sol.



**Figura 30** – Esquema representando os dois pontos de extremos da órbita

Fonte: <https://www.colegioweb.com.br/gravitacao/as-leis-de-kepler-1571-1630.html>

Durante o caminho à segunda lei, Kepler novamente descreveu ideias sobre a força que emanava do Sol, desde o Mistério Cosmográfico essa ideia surgia e ressurgia em suas obras, como se uma voz ecoasse na mente de Kepler dizendo: há uma força que emana do Sol (Koestler, 1989).

Sendo assim, pela existência dessa força, Kepler dizia que, deveria existir uma relação simples entre a velocidade e a distância dos planetas ao Sol, tal relação era a já descrita acima. A relação entre a velocidade e a distância derivava da ação da força solar, segundo Kepler, a força se propagava no espaço como se fosse um redemoinho, o poder desse redemoinho diminuía com a distância fazendo com que quanto mais distante o planeta estivesse do Sol o poder do redemoinho era menor fazendo com que a velocidade do planeta fosse menor como consequência. A causa desse fenômeno, pensou Kepler, era a “preguiça” dos planetas em se movimentar (Koestler, 1989), ou em uma linguagem newtoniana, a inércia dos planetas.

Enquanto ao motivo da força solar agir como um redemoinho, Kepler especulou que era pelo fato de o Sol girar em torno do seu próprio eixo. Especulação confirmada posteriormente em 1611 por Galileu Galilei (1564 – 1642 E.C.) que com o auxílio da luneta, observou manchas solares na superfície do Sol e notou que as mesmas se movimentavam, cujo o único motivo para elas estarem se movimentando era porque o Sol estava girando em torno de si mesmo.

Com essas duas ideias, Kepler concluiu que a causa do fenômeno era de que, como o Sol estava girando, a força emitida girava junto com seu provedor e se propagava por todo o espaço, dessa forma, e ao chegar nos planetas, pela “preguiça” que os mesmos tinham, os planetas tentavam resistir a esse movimento e tentavam ficar parados no mesmo lugar. Mas como essa força diminuía com a distância, quando o redemoinho chegava até o planeta distante a “preguiça” do planeta era maior do que a força, fazendo com que a velocidade para se movimentar fosse menor, visto que a vontade de ficar no mesmo lugar era maior.

Sendo assim, essa ideia justificaria a causa física tanto para o motivo dos planetas mais distantes terem um período de translação maior quanto para a questão da lentidão no afélio e rapidez no periélio.

Após esses argumentos da causa física para o fenômeno e com a relação entre a velocidade e a distância ao Sol, Kepler chegou a Segunda Lei do movimento planetário.

Visto que Kepler acreditava ter interpretado que a velocidade era inversamente proporcional à distância ao Sol, então o tempo necessário para o planeta varrer uma parte pequena da órbita era proporcional à distância do planeta ao Sol. Com a linguagem matemática

atual pode-se escrever que, como velocidade é a variação do espaço pela variação do tempo, então:

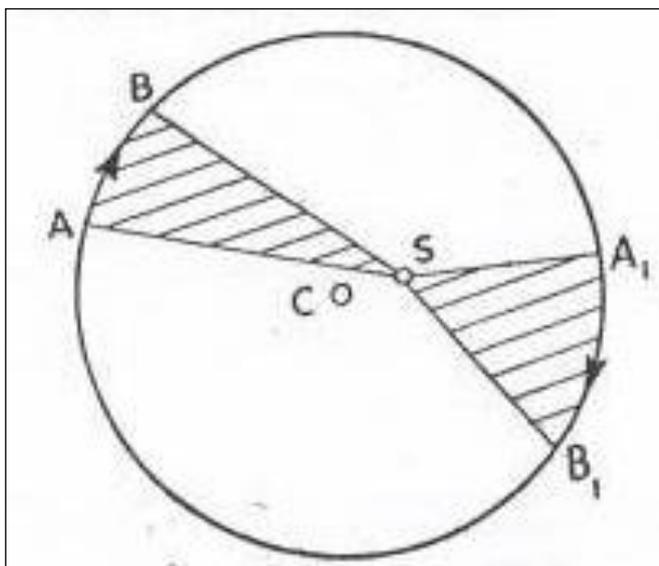
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \propto \frac{1}{r}$$

$$\Delta t \propto \Delta s r$$

Sendo assim, Kepler dividiu a órbita, até então circular, em 360 graus calculando assim a distância de cada parte do arco formado entre os ângulos, mas Kepler notou que o processo era longo e cansativo, pois existiam infinitos pontos na órbita a serem calculados, procurando assim outro método mais simples:

Sabendo que há um número infinito de pontos na órbita e, por conseguinte um número infinito de distâncias [ao Sol], ocorreu-me a ideia de estar a soma de tais distâncias contida na área da órbita, pois me lembrei de que, da mesma maneira também Arquimedes dividira a área do círculo num infinito número de triângulos. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 224).

Portanto, Kepler interpreta que a área varrida pela linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Matematizando para os dias de hoje temos que utilizando o método de dividir a área do círculo em triângulos obtemos algo semelhante a figura abaixo.



**Figura 31** – Círculo representando área do setor circular em hachurado. Fonte: (Koestler, 1989)

Da relação entre a velocidade e distância ao Sol, ao introduzir-se uma constante  $k$ , pode-se escrever matematicamente que:

$$v = \frac{k}{r}$$

Mas sabe-se que a velocidade é a variação de espaço  $\Delta s$  pela variação do tempo  $\Delta t$ , então:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{k}{r}.$$

Ao multiplicar-se ambos os lados da equação acima por  $\frac{1}{2}r$  temos que:

$$\frac{1}{2}r \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}k.$$

Lembrando-se que a equação da área do setor circular é dada por:

$$\Delta A = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$

Sendo  $\Delta\theta$  é a variação angular e que o comprimento de arco, no caso da Figura – 31 de  $A$  à  $B$ , pode ser escrito como:

$$\Delta s = r \Delta\theta.$$

Em que  $\Delta s$  é o arco de  $A$  à  $B$ , sendo assim, isolando a variação angular na equação acima e substituindo na equação da área do setor circular obtêm-se que:

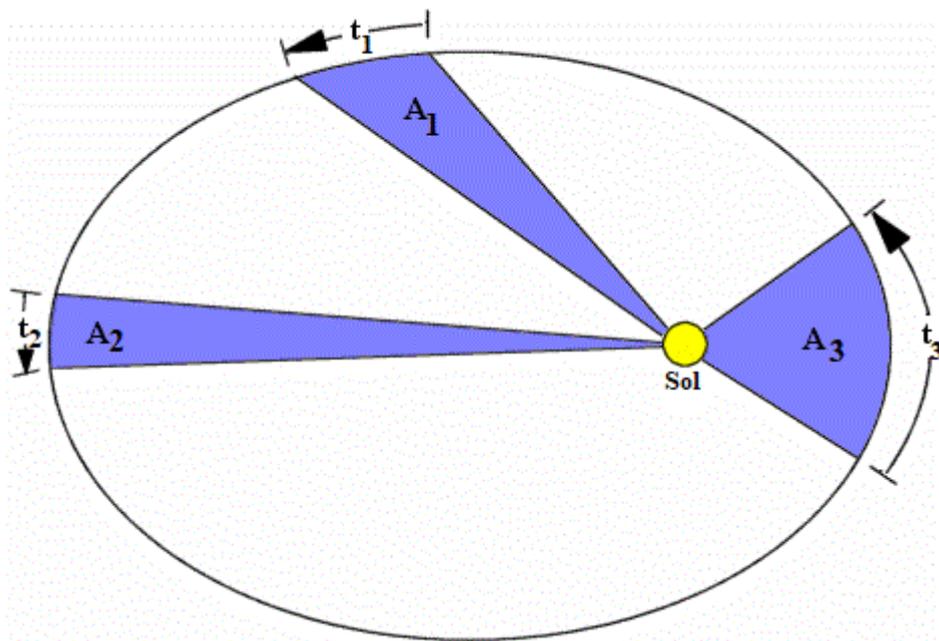
$$\Delta A = \frac{1}{2}r \Delta s.$$

Agora comparando a equação acima com  $\frac{1}{2}r \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}k$ , pode-se escrever que:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}k.$$

Sendo que  $\frac{1}{2}k$  trata-se de uma constante conhecida como velocidade areolar, cada planeta apresenta um valor de velocidade areolar. Portanto, a área percorrida e o tempo gasto é sempre constante para toda órbita. Em relação a Figura – 31, a área formada pelo arco  $\widehat{AB}$  e pelo arco  $\widehat{A_1B_1}$  são iguais e o tempo para o planeta varrer essas áreas também são iguais.

Portanto, temos a formulação da Segunda Lei em 1602, três anos antes da Primeira Lei, conforme consta nos registros da *Astronomia Nova*.



**Figura 32** – As áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  são iguais e os tempos  $t_1$ ,  $t_2$ , e  $t_3$  também são, segundo a 2ª Lei de Kepler. Fonte: <https://slideplayer.com.br/slide/369841/>

### 5.3. AULA SOBRE TYCHO BRAHE E O CAMINHO PARA A SEGUNDA LEI DE KEPLER

O capítulo 4 poderá ser desenvolvido em diferentes aulas. O tema das aulas seria a história de Tycho Brahe e a sua relação com Kepler que foi o caminho para o desenvolvimento da Segunda Lei de Kepler. Os objetivos a serem alcançados com as aulas seriam: apresentar aos alunos a história de Tycho Brahe a fim de justificar a sua devoção à astronomia e de como obteve dados observacionais excelentes antes mesmo da invenção do telescópio, descrever a relação entre Kepler e Tycho Brahe que levará Kepler a ter acesso aos dados de Brahe e assim desenvolver as leis do movimento planetário e mostrar as ideias keplerianas que levaram até a lei das áreas que resultaram na Segunda Lei de Kepler.

Para a aula sobre a história de Brahe e a sua relação com Kepler, o professor(a) poderá ministrá-la de forma expositiva, apresentando os fatos mostrados na seção 5.1 que acreditamos serem os mais importantes para o desenvolvimento do conteúdo a ser ministrado. O professor(a) poderá levar imagens em *PowerPoint* de mapas com a localização das cidades e Universidades citadas na seção para ajudar na contextualização pelos alunos.

A aula seguinte seria sobre o caminho e as ideias que levaram Kepler a determinar a primeira lei, dentre as três leis do movimento planetário, que no caso é a Segunda Lei. Optou-se por apresentar a Segunda Lei de Kepler antes da Primeira Lei para respeitar a ordem

cronológica de desenvolvimento e mostrar aos alunos que o desenvolvimento científico não acontece de forma linear como é mostrado geralmente.

Nesta aula, o professor(a) pode optar novamente por uma aula expositiva, apresentando as ideias kepleriana que precederam à Segunda Lei mostradas na seção 5.2. Após esse estabelecimento, o professor(a) poderá enunciar a conclusão da lei das áreas e optar por demonstrar matematicamente, com a linguagem atual, a Segunda Lei de Kepler, para isso os requisitos seriam noção de velocidade escalar, comprimento de arco e área do setor circular, assim como demonstrado na seção 5.2.

Tendo enunciado a Segunda Lei de Kepler aos alunos, o professor(a) poderá utilizar o simulador Planetary Orbit Simulator, da Universidade do Nebraska, para desenvolver os conceitos da lei com os alunos e avaliá-los de forma formativa.

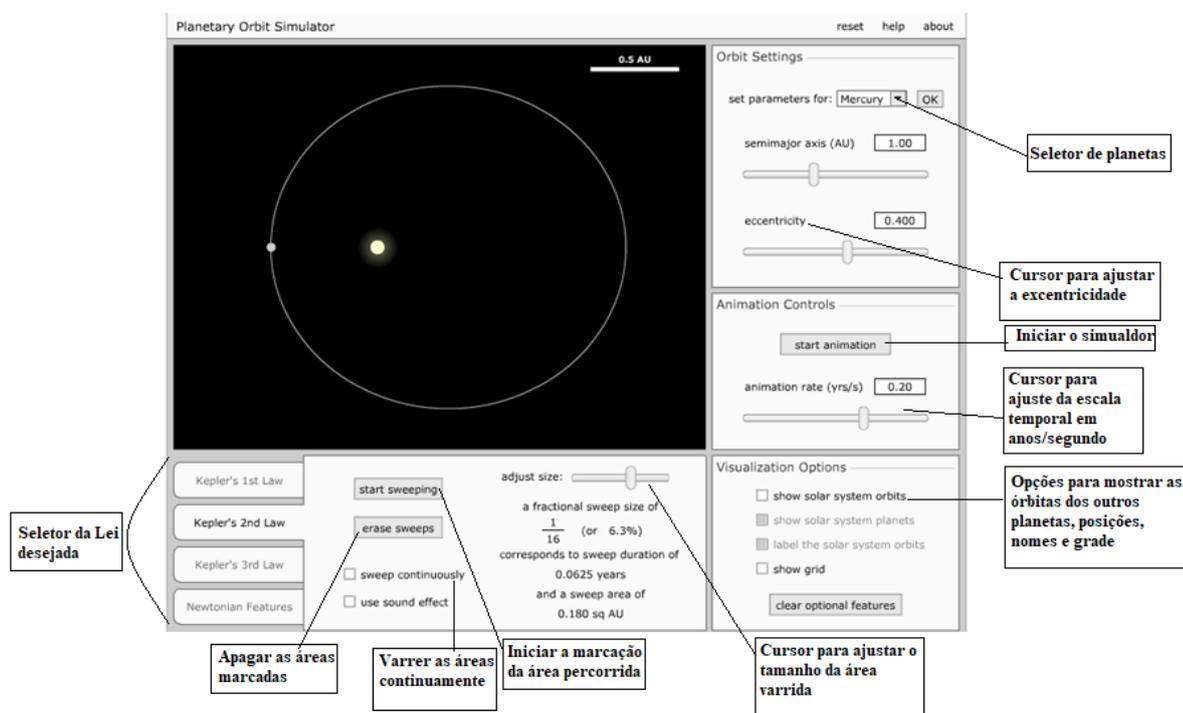
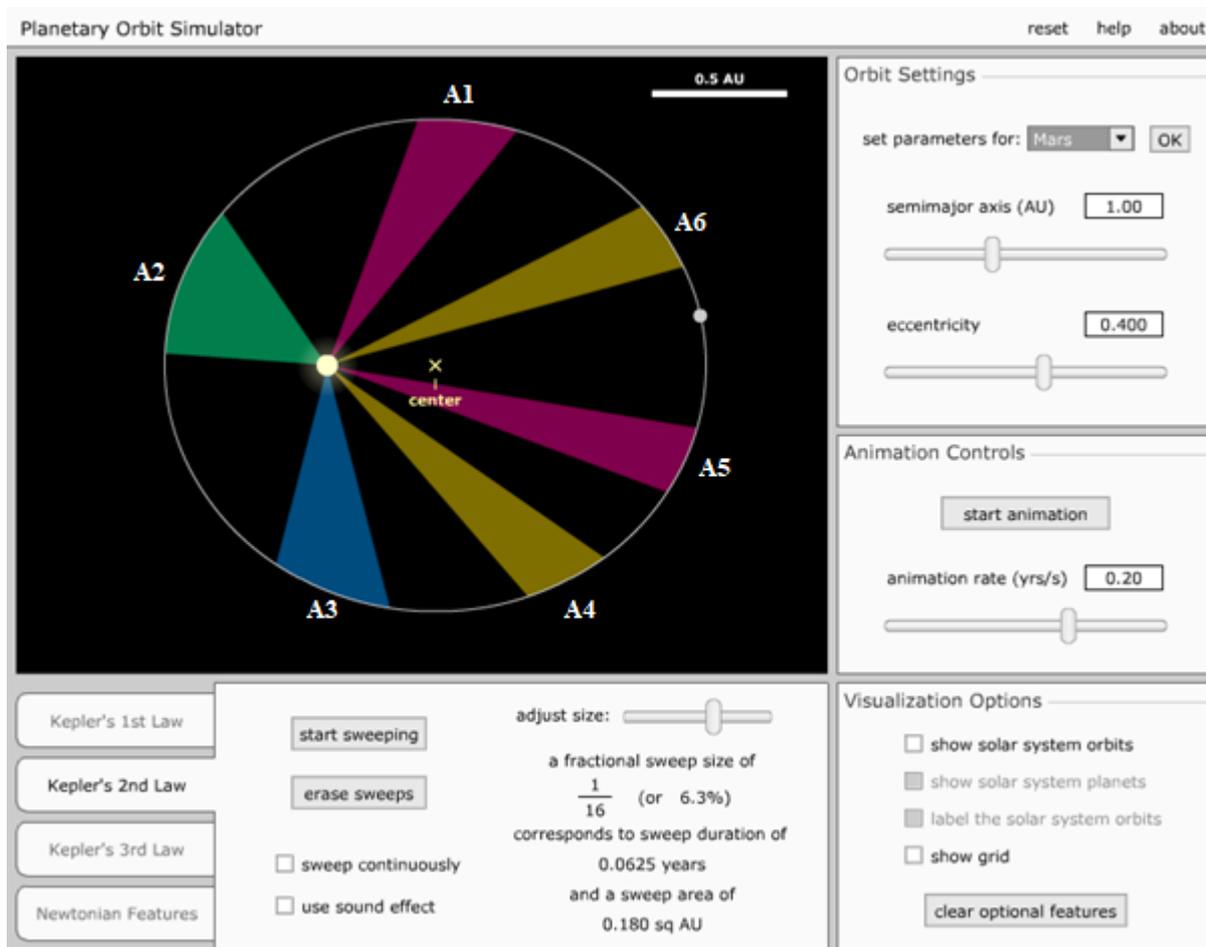


Figura 33 – Tela inicial do simulador Planetary Orbit Simulator. Fonte própria

<https://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html>

Ao utilizar o simulador, vale ressaltar aos alunos que Kepler não sabia ainda que as órbitas tinham a forma de uma elipse, mas que considerava uma órbita circular, porém o Sol estava próximo do centro desta órbita. O professor(a) poderá utilizar um computador e projetar a imagem para todos os alunos acompanharem juntos o funcionamento do simulador. Para preparar o simulador, selecione a opção *Kepler's 1st Law* e marque a opção *Show Center* (Mostrar Centro), em seguida, selecione *Kepler's 2nd Law* e na opção *Set parameters for* (Definir parâmetros para) selecione *Mars* (Marte), após isso inicie a simulação no botão *Start*

*animation* (Iniciar animação). Em seguida no botão *Start sweeping* (Inicie a varredura) faça algumas áreas em diferentes partes da órbita, de modo similar da figura a seguir.



**Figura 34** – Tela do simulador Planetary Orbit Simulator com as áreas. Fonte própria

Feito isso, discutir com os alunos que cada setor colorido apresenta a mesma área e esse espaço foi percorrido no mesmo intervalo de tempo. Para ajudar na visualização que as áreas são iguais, o professor(a) pode ajustar o tamanho das áreas em *adjust size* (Ajustar o tamanho) ao deslizar o cursor é possível notar que todas as áreas mudam de tamanho juntas. Já para mostrar que o tempo para cada setor é igual ao outro, na opção *animation rate* (taxa de animação), diminua o tempo para que a simulação ocorra mais devagar e, em seguida, peça para os alunos com celulares cronometrarem o tempo que cada setor leva para ser preenchido, a média dos tempos obtidos será aproximadamente igual devido a erros pequenos, como o tempo de apertar o disparado do cronômetro e pará-lo.

Após essa apresentação, propõe-se que os alunos façam a seguinte atividade utilizando o simulador, caso o colégio tenha laboratório de informática e computadores para os alunos, levá-los até o ambiente para que possam utilizar o simulador ou caso contrário o professor(a)

poderá executar a atividade a partir de um único computador projetando a imagem para os alunos. As perguntas para os alunos seguem abaixo:

- Selecione na opção *Set parameters for* (Definir parâmetros para) qualquer planeta e execute a simulação. De acordo com o que é observado podemos dizer que a velocidade orbital do planeta em questão é constante para qualquer ponto de sua órbita?

**R: Não.**

- Por meio da execução da simulação acima é possível notar que o planeta apresenta velocidades diferentes quando passa pelo afélio (ponto mais longe do Sol) e pelo periélio (ponto mais próximo do Sol), sendo assim, nesses pontos as velocidades se comportam de que maneira?

**R: A velocidade no afélio é menor e a velocidade no periélio é maior.**

- Agora com a simulação em execução, tente marcar uma área no periélio e outra área no afélio no botão *Start sweeping* (Inicie a varredura), analisando o comprimento de arco desses setores marcados, podemos afirmar que o comprimento de arco no periélio é \_\_\_\_\_, portanto a área nesse caso é mais \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_ já o comprimento de arco no afélio é \_\_\_\_\_, portanto a área nesse caso é \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_.

**R: Maior – Larga – Achatada – Menor – Fina – Comprida.**

- Você consegue justificar a resposta da questão 3 de acordo com as respostas da questão 4, utilizando a equação da velocidade escalar média que é:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

**R: Como a velocidade média é proporcional ao deslocamento, e nesse caso o deslocamento é o comprimento de arco, então como no afélio o comprimento de arco é menor a velocidade é menor e no periélio o comprimento de arco é maior, portanto, a velocidade é maior.**

- No botão *erase sweeps* (apagar varreduras) apague as áreas marcadas e com o simulador em execução troque todos os planetas (exceto Plutão) e observe a velocidade orbital de cada um. Qual planeta apresenta velocidade orbital maior? E o menor?

**R: Mercúrio apresenta velocidade orbital maior e Netuno a menor.**

- Qual planeta apresenta uma variação maior de velocidade em sua órbita?

**R: Mercúrio.**

- Agora no botão *adjust size* (Ajustar o tamanho) deslize o curso para 1/10, ou seja, a área varrida equivalerá a uma fração de 1/10. Note que ao fazer isso o valor de *Corresponds to sweep duration of* (em um intervalo de tempo decorrido de) e o valor de *and a sweep área of* (e uma área varrida de) mudam conforme a fração escolhida, esses valores são referentes ao tempo gasto para percorrer um setor em anos e a área do setor em unidade astronômica ao quadrado (U.A.<sup>2</sup>) respectivamente. Sendo assim, fixe o curso em 1/10 e para cada planeta (exceto Plutão) anote os valores mostrados para o tempo e para a área (lembrando que o tempo já está em anos e a área em (U.A.)<sup>2</sup>). Feito assim, vimos que a Segunda Lei de Kepler nos diz que a razão entre a área do setor e o tempo gasto é uma constante conhecida como velocidade areolar, com os dados obtidos, calcule a velocidade areolar de cada planeta (Sua velocidade areolar terá a unidade em (U.A.)<sup>2</sup>/anos).
- Com as velocidades areolares calculadas, qual planeta apresenta maior velocidade areolar nesse caso? E o menor?

**R: Mercúrio apresenta o maior valor e Netuno o menor.**

- O que significa esses valores da velocidade areolar?

**R: Significa que esse valor será constante para toda órbita e que como a razão entre a área varrida e o tempo gasto para percorre essa área determina esse valor constante, então as áreas e os tempos gastos serão iguais para toda órbita.**

- De acordo com a resposta da questão 6 e da questão 9, é possível notar algum padrão nas respostas e justificar fisicamente o motivo?

**R: O padrão é que o planeta que apresenta a maior velocidade orbital e areolar é Mercúrio, já o que apresenta o menor valor para ambas as velocidades é Netuno. Uma justificativa física a este caso é o fato de o Mercúrio ser o planeta mais próximo do Sol e Netuno mais distante, portanto, a distância ao Sol influência implicitamente nesses valores.**

## 6. CAPÍTULO 5 – A REINTERPRETAÇÃO DAS ÓRBITAS DOS PLANETAS

### 6.1. O FIM DA DISPUTA CONTRA MARTE: A PRIMEIRA LEI DE KEPLER

Estabelecida a lei das áreas que explica a variação de velocidades na órbita marciana e generalizá-la para os demais planetas, faltava para Kepler determinar qual era o formato das órbitas dos planetas. Os fracassos em determinar a órbita correta foram tantos que Kepler começou a pôr em dúvida o último grande dogma que faltava a ser derrubado na astronomia da época: as órbitas serem circulares.

Uma das primeiras ideias de Kepler para explicar o porquê dos planetas se moverem em órbitas excêntricas, ao invés de concêntricas, foi supor que os planetas e o Sol eram enormes ímãs. A ideia de Kepler não veio ao acaso, em 1600 William Gilbert (1544 – 1603 E.C.) publicou a sua obra *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* (Sobre os ímãs, os corpos magnéticos e o grande ímã terrestre) na qual dizia que a Terra era um grande ímã.

Provavelmente, Kepler, ao ter conhecimento sobre a obra de Gilbert, generalizou a ideia para os demais astros. Dessa forma, Kepler supunha que a natureza da força solar fosse magnética. Antes disso, Kepler havia suposto que a ação dessa força poderia ter sua natureza explicada assim como a da luz, mas o mesmo percebeu que se a força agisse como a luz, quando a mesma fosse ofuscada por um corpo, como acontece em um eclipse, a força deveria diminuir sua ação sobre o planeta, o que de fato não acontecia. Portanto, com a natureza magnética da força era possível explicar a ação de um corpo sobre outro a distância, ou seja, a ação do Sol sobre o movimento dos planetas.

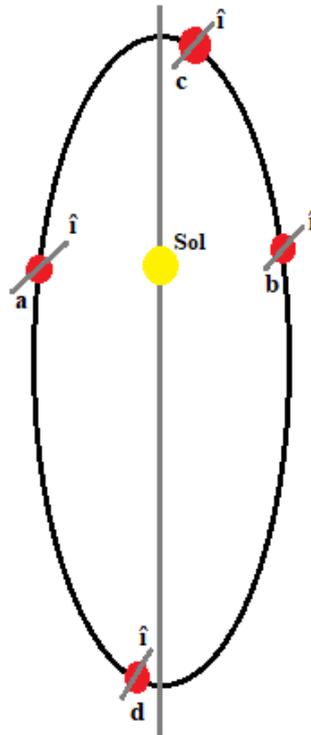
A explicação da excentricidade da órbita seria, portanto, a interação entre a força solar-magnética e o magnetismo dos planetas. Segundo Kepler, o eixo magnético dos planetas tendia naturalmente a se manterem fixos em uma direção, do mesmo modo que um pião. Desta forma, Kepler supunha o eixo magnético dos planetas orientado para uma direção constante, e um polo do planeta seria atraído pelo Sol enquanto o outro polo seria repelido.

Nos pontos **a** e **b** da figura – 35 o polo atraído e o polo repelido estão igualmente distantes do Sol, portanto a distância do planeta ao Sol não é alterada, pois a repulsão e a atração são anuladas. Entretanto, no ponto **c**, o polo atraído pelo Sol encontra-se mais próximo do mesmo, sendo assim, o efeito geral da força solar sobre os dois polos resulta na aproximação do planeta em relação ao Sol, pois como o polo atraído está mais próximo a atração será maior

que a repulsão, representando desta forma o periélio da órbita.

Enquanto que no ponto **d** acontece o oposto, o fato do polo repelido pelo Sol estar mais próximo do mesmo e o polo atraído mais afastado, o efeito geral é a repulsão do planeta, deixando-o mais afastado do Sol, representando assim o afélio da órbita.

Somente em 1687 que a natureza gravitacional, que conhecemos hoje, da força solar será apresentada ao mundo por Newton.



**Figura 35** – Representação de um planeta em torno do Sol com eixo magnético  $\hat{i}$  com orientação fixa.

Fonte própria

Nesse caminho de ideias percorrido por Kepler, a ruptura com o dogma da circularidade foi sendo construída aos poucos, até a conclusão de que uma órbita circular e excêntrica traria uma explicação física problemática, seja qual for o método adotado (Itokazu, 2006). O ceticismo aos dogmas cosmológicos da época veio devido aos três anos de frustradas tentativas em determinar a órbita de Marte, fato que levou Kepler a inventar métodos geométricos próprios. A última fracassada tentativa de atribuir uma órbita circular fez com que Kepler encerre o capítulo 44 da *Astronomia Nova* com a seguinte frase:

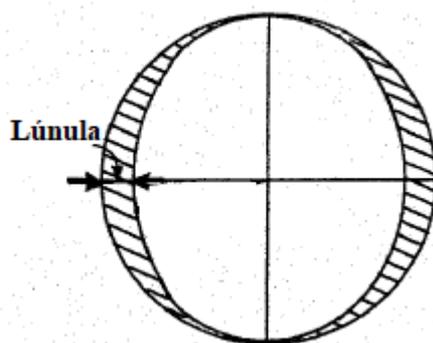
A conclusão é simplesmente a de não ser círculo o caminho do planeta; curva-se para dentro em ambos os lados e para fora mais uma vez nas extremidades opostas. Essa curva chama-se oval. A órbita não é circular, e sim oval. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 225).

Vale ressaltar que a elipse e uma curva oval são curvas distintas, a elipse depende da relação entre o eixo menor e sua projeção sobre o eixo maior que resulta nos dois pontos de foco, enquanto uma curva oval não apresenta essas propriedades, pois a mesma é formada por arcos de círculos.

A decisão de Kepler ao atribuir a curva oval a órbita resultou em mais um ano de fracassos, repetiu cálculos pelo menos por quarenta vezes e por um breve momento pensou em descartar a Lei das Áreas, pois não conseguia determinar a área da tal curva oval. O fascinante é que Kepler durante os exaustivos cálculos com a curva oval, chegou a utilizar constantemente elipses auxiliares para determinar a área.

Segundo os registros, em 1603, Kepler escreveu uma carta ao amigo David Fabricius (1564 – 1617 E.C.) em que diz, se o formato [da órbita] fosse o de uma elipse perfeita, todas as respostas [que procuro] seriam encontradas nas obras de Arquimedes e Apolônio (Mourão, 2003). Até que dezoito meses depois, em 1604, Kepler novamente escreveu a Fabricius dizendo que, a verdade deveria estar em um ponto a meio caminho entre o formato oval e o formato circular, como se a órbita de Marte fosse uma elipse perfeita. Mas que no tocante a isso até agora nada tinha indagado (Koestler, 1989).

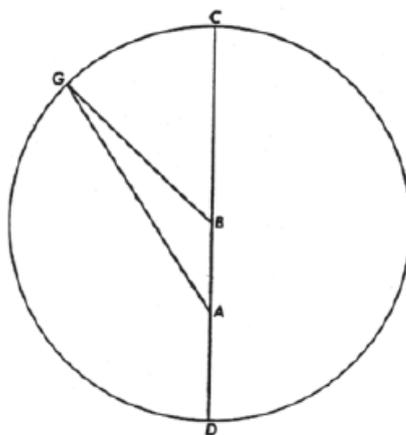
Kepler, que já havia abandonado o dogma da circularidade, teve que partir praticamente do nada, ou seja, sem nenhuma ideia do que realmente estava procurando. Começou a calcular algumas distâncias do planeta Marte ao Sol em diferentes pontos da órbita, formando assim uma curva semelhante ao círculo, mas achatada nos extremos onde se localizavam o afélio e o periélio. Ao comparar a órbita obtida com uma órbita perfeitamente circular formaram-se lúnulas entre as órbitas.



**Figura 36** – Lúnula entre o círculo e a órbita de Marte. Fonte: (Koestler, 1989)

Ao calcular a largura da lúnula, no ponto mais espesso, Kepler obteve o valor de 0,00429 do raio do círculo, ou seja, 0,4% do valor de uma unidade de raio de uma

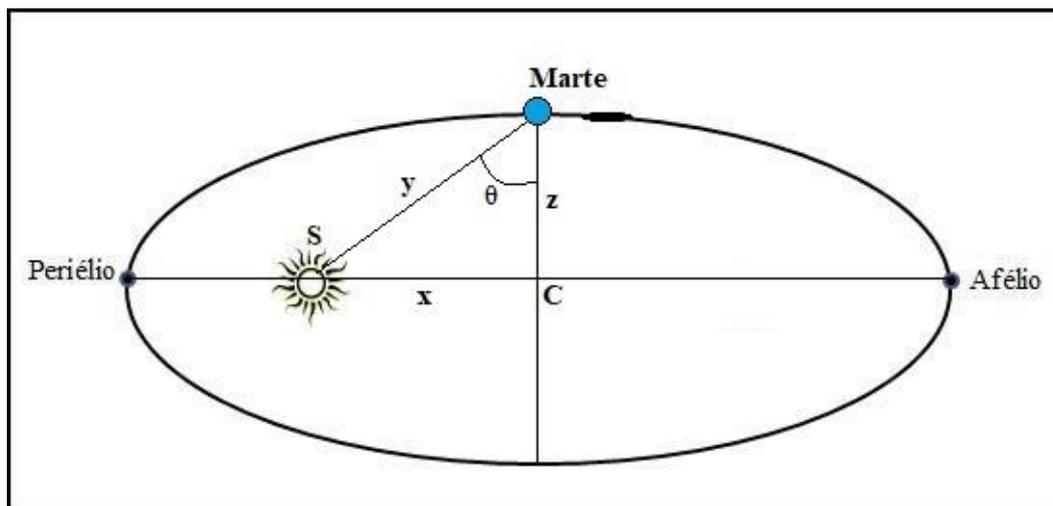
circunferência. Após isso, Kepler interessou-se no ângulo formado entre o Sol e o centro da órbita de Marte.



**Figura 37** – Fonte: (Tossato, 2010)

Seja na figura – 37, *C* e *D* o ponto de afélio e periélio da órbita respectivamente, *A* sendo o Sol, *B* o centro da órbita e *G* o planeta Marte. O ângulo formado entre *CBG* seria o valor caso a órbita fosse excêntrica, o ângulo *CAG* seria o valor real caso um observador em Marte o medisse e a diferença entre esses ângulos resulta no ângulo *BGA* que Kepler o chama de equação óptica (Tossato, 2010). E foi no valor desse ângulo que Kepler se interessou, sem nenhum motivo em particular, e o resultado o levaria para a conclusão da Primeira Lei.

O valor desse ângulo varia naturalmente pela órbita, mas o seu valor máximo é de  $5,3^\circ$ , portanto com esse valor, Kepler calculou a secante desse ângulo e obteve o surpreendente valor de 1,00429. A interpretação do cálculo da secante desse ângulo pode ser dada da seguinte forma: seja na figura – 38,  $\theta$  o ângulo entre o Sol (*S*) e o centro da órbita (*C*), *z* a distância do planeta ao Sol, *x* a distância do Sol ao centro da órbita e *y* a distância do Sol ao planeta, ao calcular a secante em relação a  $\theta$  basta calcular a razão entre *y* e *z*, cuja essa razão era 100429 sobre 100000.



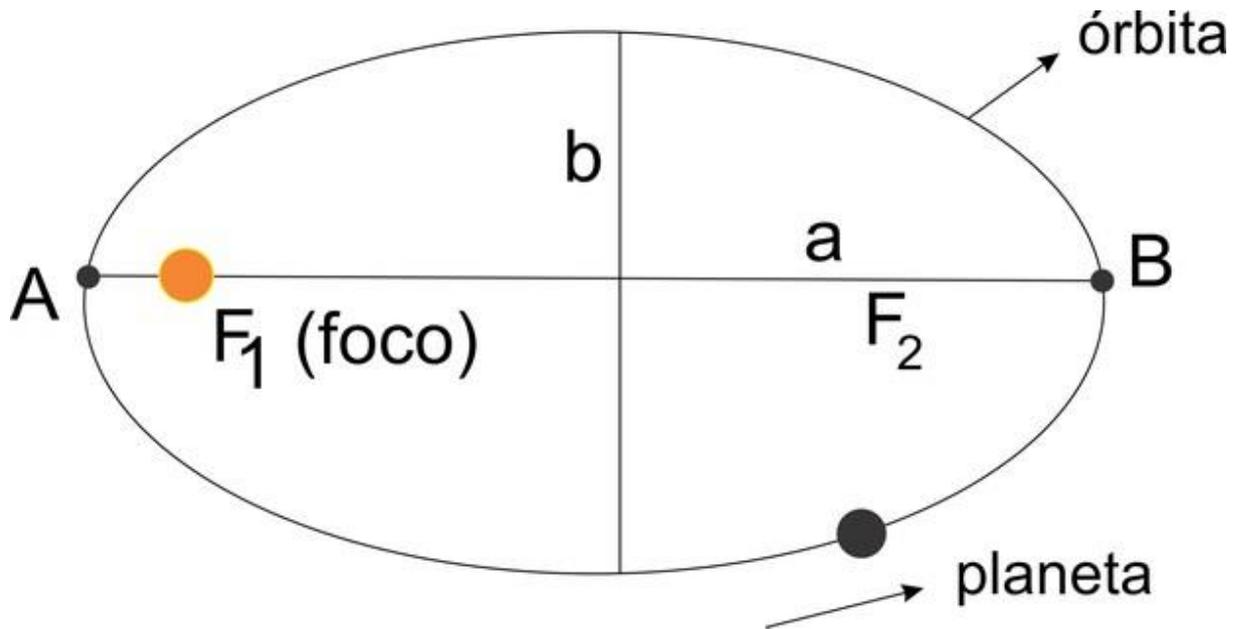
**Figura 38** – Fonte: <https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/resumo-de-fisica-gravitacao-universal/>

Note que na figura – 38 o planeta encontra-se em um dos quadrantes e não é por acaso, visto que nessa posição a diferença entre a órbita circular e a órbita elíptica, ou seja, a lúnula, é o maior valor possível, determinado por Kepler sendo 0,00429. Vale lembrar que os dados utilizados por Kepler em seus cálculos eram os dados observacionais de Tycho Brahe.

O resultado foi expresso por Kepler da seguinte forma:

...Fiquei a pensar porquê e como aparecia uma foice [lúnula] com precisamente essa espessura (0,00429). Enquanto a ideia me dominava, enquanto eu considerava e tornava a considerar que... o meu aparente triunfo, no caso de Marte, fora inútil, tropecei inteiramente por obra do acaso na secante do ângulo  $5^{\circ}18'$  [ $5,3^{\circ}$ ], que mede a maior equação óptica. Quando percebi que essa secante iguala 1,00429, foi como se tivesse despertado de um sono... (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 228).

Finalmente, após uma longa batalha, Kepler tinha a órbita de Marte definida em suas mãos, a órbita era uma elipse, definindo assim a Lei das Órbitas ou a Primeira Lei de Kepler como conhecemos hoje: os planetas se movem em órbitas elípticas tendo o Sol ocupando um dos focos da elipse.



**Figura 39** – Esquema de uma órbita elíptica como Sol ocupando um dos focos. Fonte: <http://educacao.globo.com/fisica/assunto/mecanica/leis-de-kepler.html>

A excentricidade da elipse marciana pode ser determinada, com linguagem matemática atual, da seguinte forma: considerando o triângulo retângulo da figura – 38 temos que:

$$y^2 = x^2 + z^2.$$

Sendo  $y = 100429$  e  $z = 100000$ , obtemos que  $x$  vale:

$$(100429)^2 = x^2 + (100000)^2$$

$$x = \sqrt{(100429)^2 - (100000)^2}$$

$$x \approx 9272,758.$$

E sabemos que a excentricidade é calculada por:

$$e = \frac{x}{y}.$$

Portanto substituindo os valores:

$$e = \frac{9272,758}{100429}$$

$$e \approx 0,0923.$$

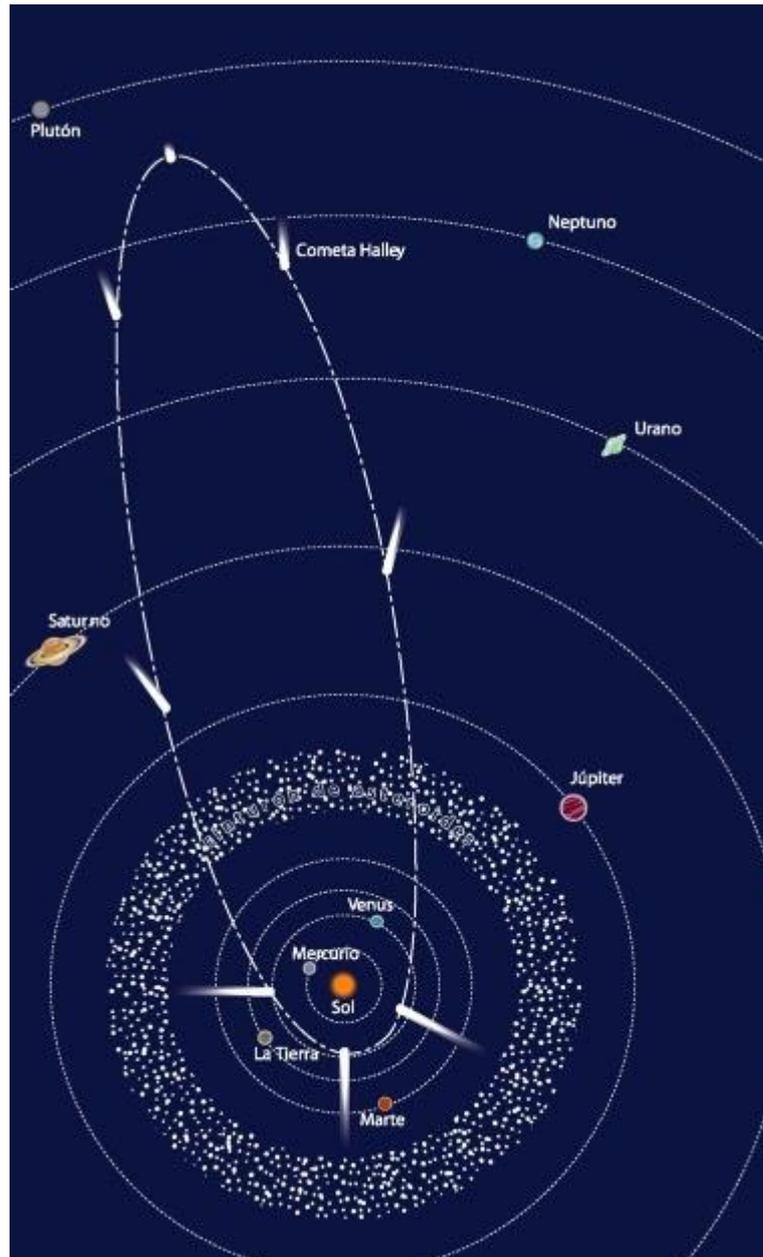
Como a excentricidade de uma circunferência é zero e a da órbita elíptica de Marte é aproximadamente 0,0923, isto mostra a dificuldade que Kepler encontrou para a determinação da órbita, visto que é quase impossível visualmente notar essa diferença.

<b>Planeta</b>	<b>Excentricidade</b>
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,046
Netuno	0,010

**Tabela – 4** Excentricidade dos planetas

Os demais planetas do sistema solar também apresentam valores baixos de excentricidade, sendo Mercúrio o planeta com maior excentricidade do sistema solar. Astros do nosso sistema que realmente apresentam valores de excentricidade altos são geralmente cometas, classificados como cometas periódicos os que apresentam órbitas elípticas, exemplo de cometas desse tipo são o cometa Halley e o cometa Encke que apresentam excentricidade de 0,967 e 0,85 respectivamente.

Porém, os astros não restringem seu movimento apenas às órbitas elípticas, atualmente sabe-se que há corpos que apresentam órbitas parabólicas e hiperbólicas. Exemplo desses corpos são os cometas não-periódico classificados desta forma pelo fato de terem órbitas parabólicas ou hiperbólicas fazendo com que sejam observados geralmente apenas uma vez.



**Figura 40** – Ilustração da órbita do cometa Halley em relação a órbita dos outros planetas. Fonte: <http://ocometa-halley.blogspot.com/2011/11/orbita.html>

## 6.2. PLANO PARA A AULA SOBRE A PRIMEIRA LEI DE KEPLER

O conteúdo da aula é sobre a Primeira Lei de Kepler e como a sua apresentação exige que o professor(a) utilize a sequência de ideias desenvolvidas na seção 6.1. O objetivo é mostrar o desenvolvimento cronológico das ideias keplerianas, respeitando o nível da turma para qual os conceitos sejam compreendidos.

É uma concepção alternativa recorrente aos alunos em pensar que a explicação das estações do ano é devido a Primeira Lei de Kepler, sendo assim, é importante o professor(a)

explicar que as estações do ano não são explicadas por causa da órbita elíptica da Terra, ou seja, o verão não acontece pelo fato da Terra se encontrar no periélio e o inverno quando estiver no afélio, pois, se assim fosse, seria verão ou inverno nos dois hemisférios da Terra. Portanto, a explicação correta é que as estações do ano são causadas pela inclinação do eixo de rotação da Terra.

Após enunciar a Primeira Lei aos alunos, sugere-se ao professor(a) que apresente uma breve explicação sobre as propriedades da elipse como o foco, semieixo maior, eixo maior, semieixo menor, eixo menor e os vértices e as relações fundamentais da elipse, como por exemplo, a equação da excentricidade, pois visto que os alunos trabalham com a elipse apenas no Terceiro Ano do Ensino Médio na disciplina de Matemática, vê-se necessária a introdução das propriedades da elipse aos alunos para o melhor entendimento da Primeira Lei.

Fora a tabela – 4 o professor(a) poderá mostrar para os alunos figuras que representam as baixas excentricidades dos planetas, como, por exemplo, a figura – 41 que mostra um ponto central, no centro da elipse, e o ponto à direita representa um dos focos da elipse.

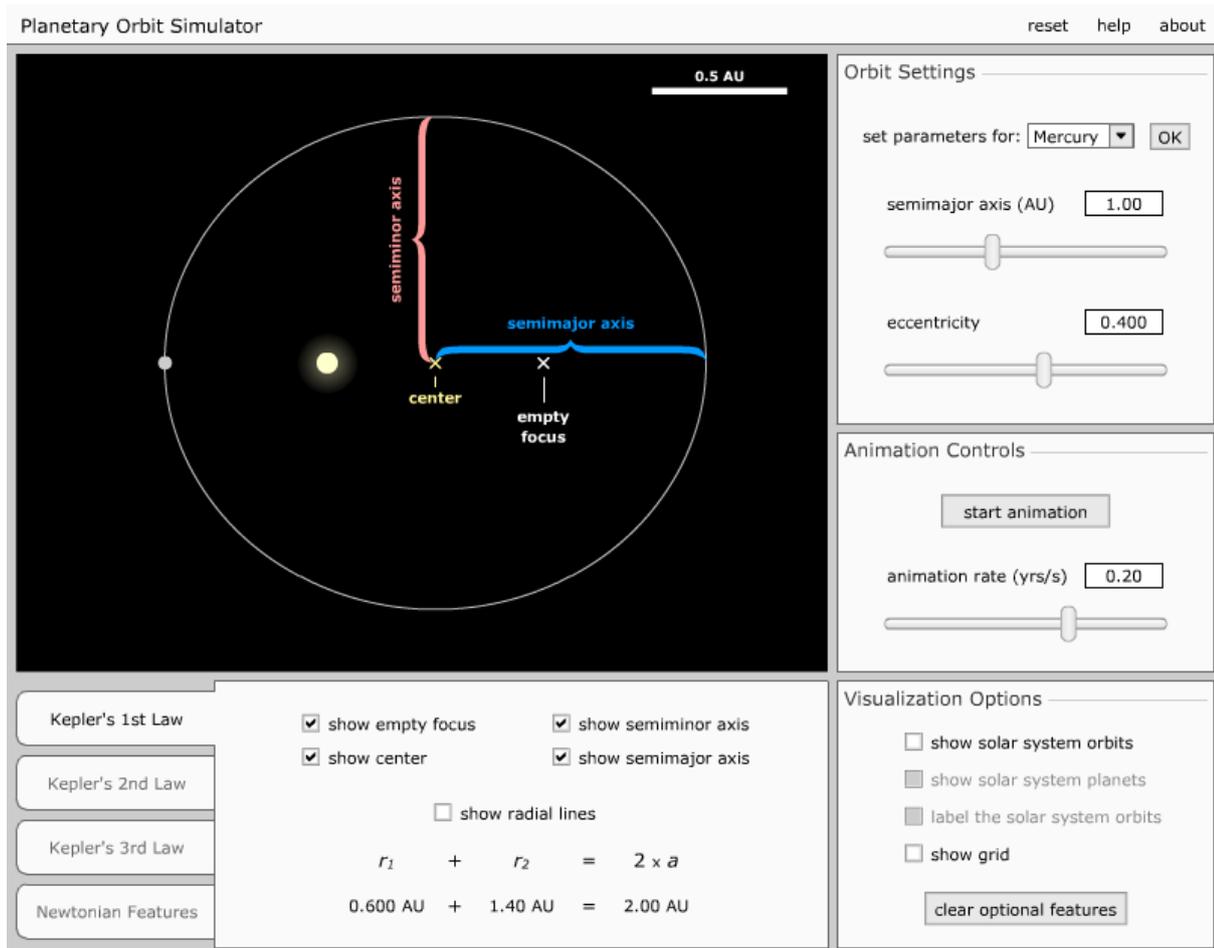
Vale o professor(a) ressaltar que quanto mais próximo do centro os focos da elipse se aproximam mais a figura se assemelha a uma circunferência perfeita, o que ajudaria na compreensão dos alunos sobre a dificuldade de Kepler para determinar a órbita elíptica de Marte.



**Figura 40** – Ilustração da elipse das órbitas dos planetas. Fonte: (Canalle, 2003)

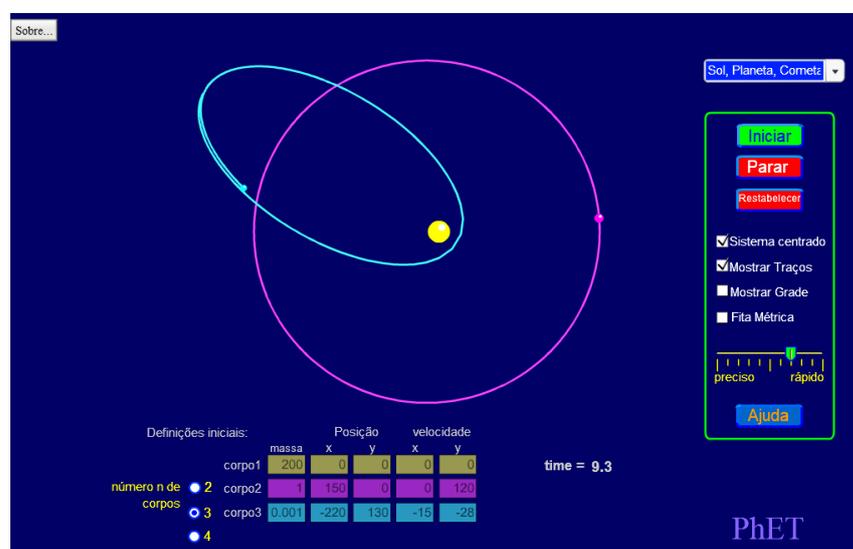
Outro método que o professor(a) poderá utilizar junto com as figuras, seria o simulador *Planetary Orbit Simulator* da Universidade de Nebraska, porém, dessa vez o professor(a) utilizará os recursos referente à Primeira Lei.

Com o simulador aberto, o professor(a) deve selecionar a opção *Kepler's 1st Law* (Primeira Lei de Kepler), em seguida, selecione as opções *Show empty focus* (mostrar foco vazio), *Show center* (Mostrar centro), *Show semiminor axis* (Mostrar semieixo menor) e *Show semimajor axis* (Mostrar semieixo maior), feito isso, na opção *Set parameters for* (Definir parâmetros para) o professor(a) poderá selecionar outros planetas do sistema solar e mostrar as diferenças de tamanho dos semieixos de cada planeta, o formato elíptico de cada órbita e a baixa excentricidade. Por fim, na barra *eccentricity* (excentricidade), o professor(a) poderá colocar o valor máximo de excentricidade disponível (0,700) para similar com as órbitas elípticas mais excêntricas, como a dos cometas.



**Figura 41** – Tela inicial do simulador com as opções ativadas

O professor(a) poderá utilizar o simulador Phet *Meu Sistema Solar* da Universidade do Colorado, para mostrar aos alunos a diferença de excentricidade da órbita de um planeta e a órbita de um cometa. Na aba *pré-definições*, selecione a opção *Sol, planeta e cometa* e ative as opções *sistema centrado* e *mostrar traços* e em seguida execute o simulador.

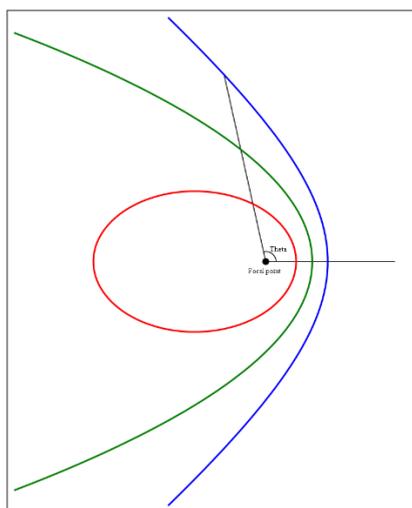


**Figura 43** – Tela do simulador com as opções ativas. Fonte própria

Para a discussão de diferentes órbitas o professor(a) poderá utilizar aos alunos os valores de excentricidade que define uma órbita circular, elíptica, parabólica ou hiperbólica e passar imagens aos alunos de como são essas órbitas.

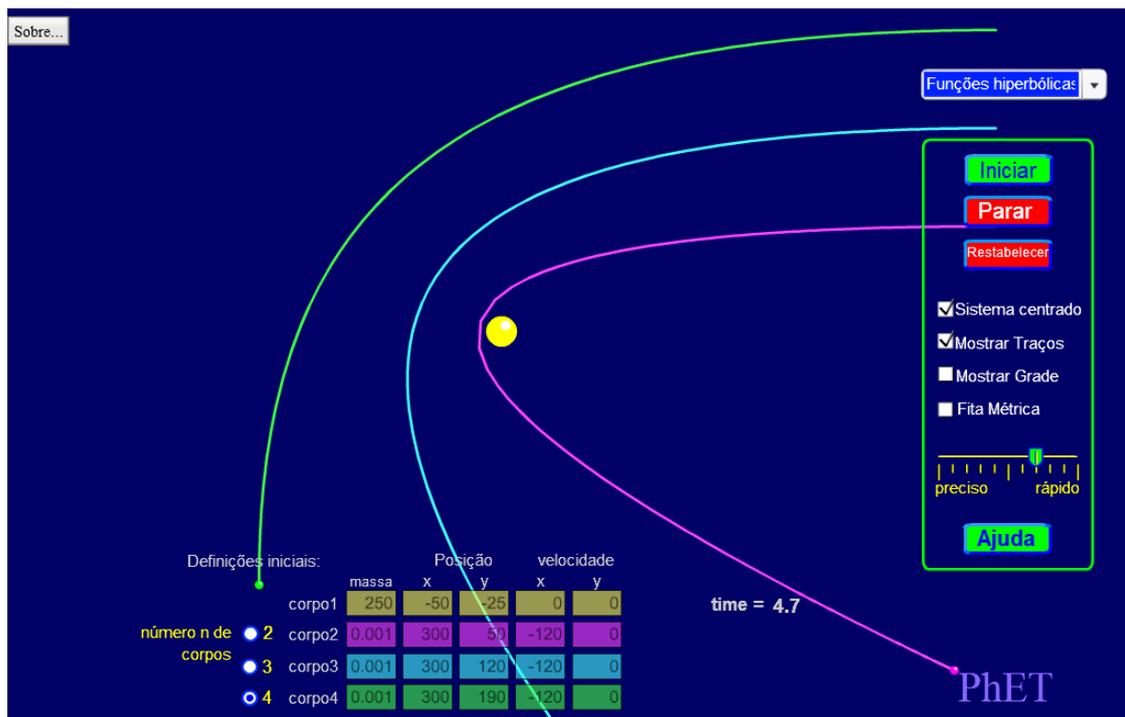
Excentricidade ( $e$ )	Curva
$e = 0$	Circunferência
$0 < e < 1$	Elipse
$e = 1$	Parábola
$e > 1$	Hipérbole

**Tabela – 5** Valores de excentricidades para cada figura geométrica



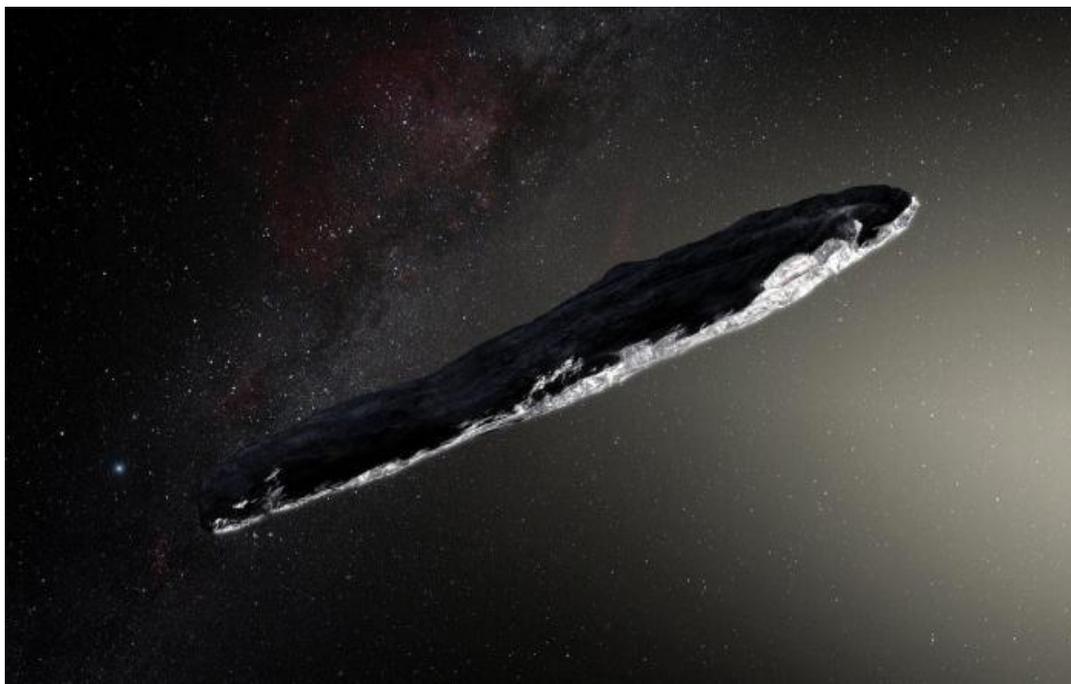
**Figura 42** – Em vermelho órbita elíptica, em verde órbita parabólica e em azul órbita hiperbólica. Fonte: [https://www.wikiwand.com/pt/Excentricidade\\_orbital](https://www.wikiwand.com/pt/Excentricidade_orbital)

Utilizando novamente o simulador *Meu Sistema Solar*, o professor(a) poderá mostrar três corpos com diferentes órbitas hiperbólicas. Na aba *pré-definições* selecione a opção *funções hiperbólicas* e execute a simulação que representará três corpos com órbitas hiperbólicas para a visualização dos alunos.



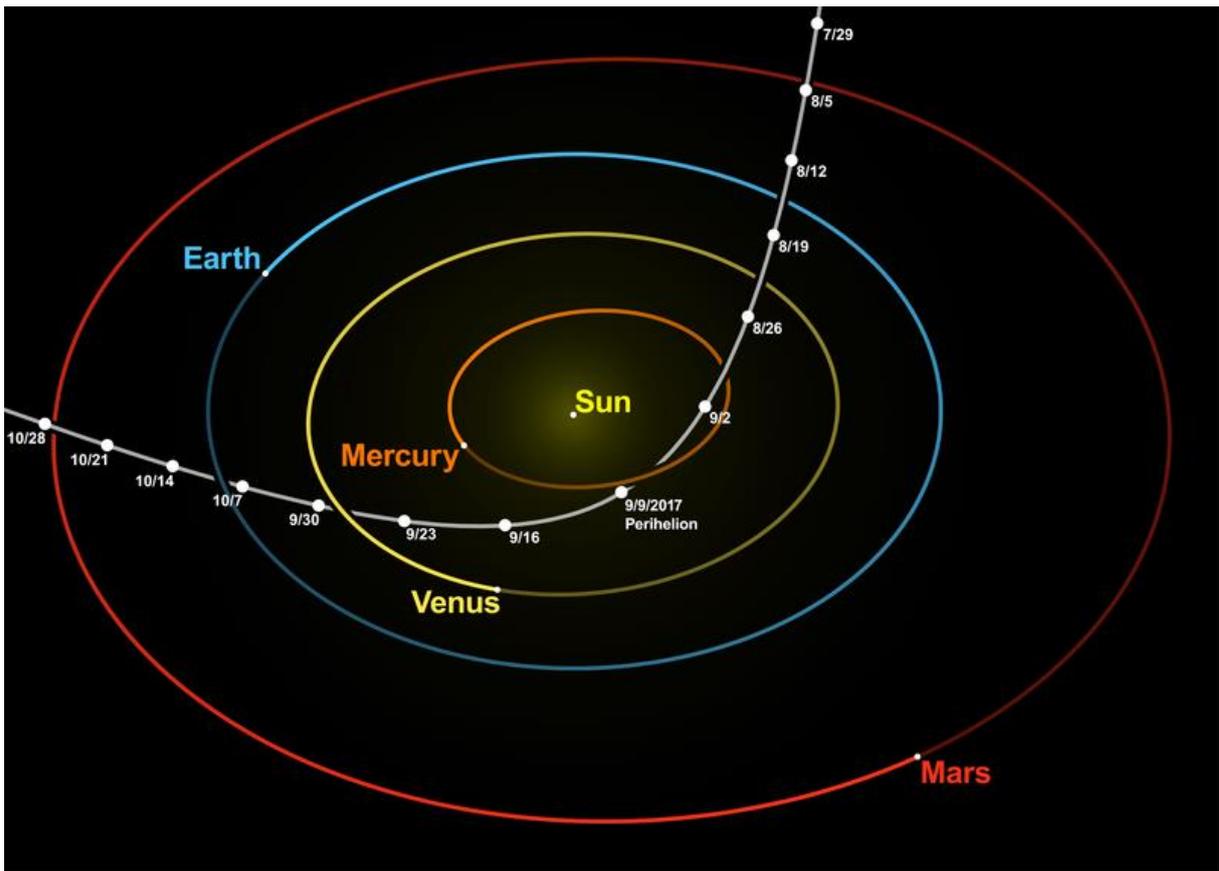
**Figura 44** – Tela do simulador com as opções ativas. Fonte própria

O professor(a) poderá mostrar aos alunos um exemplo de astro com órbita hiperbólica o asteroide Oumuamua que em 2017 foi detectado por astrônomos e ao ter sua trajetória estudada, os astrônomos determinaram uma excentricidade de 1,20, na qual caracteriza uma órbita hiperbólica.



**Figura 45** – Asteroide Oumuamua

Fonte: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Espaco/noticia/2018/11/oumuamua-afinal-o-que-se-sabe-sobre-o-objeto-celeste-misterioso.html>



**Figura 46** – Órbita hiperbólica do asteroide Oumuamua

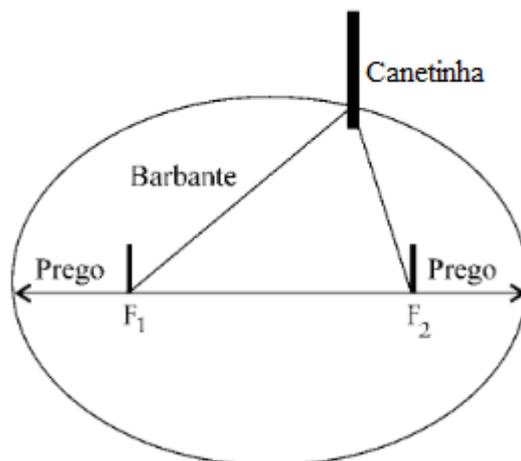
Fonte: <https://www.enigmasdouniverso.com/a-origem-da-oumuamua-revelada-objeto-enigmatico-veio-das-pleiades/>

Outra atividade para o professor(a) estar passando aos alunos é a construção da órbita elíptica dos planetas. O professor(a) poderá dividir a sala em grupos e sortear um corpo celeste para cada grupo e pedir para que os alunos entreguem o projeto em forma de trabalho avaliativo.

Para orientar os alunos na construção do projeto, o professor(a) poderá fazer um molde com a turma. Os materiais necessários seriam um pedaço de tábua de  $1,0m \times 0,6m$ , barbante, pregos, tesoura e canetinha. O astro utilizado de exemplo poderia ser o planeta anão Plutão que apresenta uma excentricidade de 0,25. Sendo assim, para construir a órbita elíptica de Plutão, o método do jardineiro poderá ser utilizado.

Primeiramente, traçar no pedaço de tábua com a canetinha o eixo maior da elipse ( $A$ ) com  $30cm$ , em seguida determinar o valor da distância entre os focos ( $F$ ) com o auxílio da equação da excentricidade,  $e = \frac{F}{A}$ , logo, como a excentricidade é conhecida nesse caso,  $e = 0,25$  e  $A = 30 cm$ , então a distância entre os focos é  $F = 7,5cm$ . Para determinar o comprimento do barbante ( $L$ ), basta somar os valores de  $F$  e  $A$ , portanto  $L = 37,5cm$ , sendo assim, cortar um pedaço de barbante um pouco maior ( $42cm$ ) que a medida de  $L$ , pois o barbante

terá que ser preso nos pregos. Feito isso, pregar dois pregos na tábua sobre o eixo maior traçado, cuja a distância entre os pregos deve ser a distância entre os focos  $F$ . Em seguida amarrar as pontas do barbante cortado nos pregos, formando como se fosse um estilingue, e, por fim, com a canetinha sempre na vertical e o pedaço de barbante sempre esticado, traçar a elipse de Plutão sobre a tábua, assim como ilustra a Figura – 47.



**Figura 47** – Esquema do método do jardineiro para desenhar uma elipse. Fonte: (Canalle, 2003)

Feito o molde, o professor(a) pode sugerir para os alunos que eles detalhem mais o trabalho, como por exemplo, com a elipse desenhada, retirar o barbante e os pregos, mas antes disso, anotar a posição dos focos. Em seguida, contornar a trajetória elíptica desenhada com outro barbante com cola, para que a órbita fique mais grossa, pode ser colocado o Sol em um dos focos da elipse e o planeta em questão na órbita com outros tipos de materiais, a fim de deixar o aluno ter criatividade para detalhar o projeto.

Os corpos celestes sorteados entre os grupos da turma poderiam ser Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e o cometa Encke. Vale ressaltar que as medidas utilizadas podem ser outras escolhidas pelo professor(a) e não necessariamente as mesmas apresentadas acima, desde que elas sejam adequadas para desenhar a órbita elíptica de acordo com a excentricidade dos corpos celestes escolhidos.

Para verificar se a órbita elíptica desenhada apresenta excentricidade o mais próxima possível do astro determinado, o professor(a) poderá ensinar os alunos a calculá-la do mesmo modo feito na seção – 6.1 com o auxílio da Figura – 38, afim de obter resultados satisfatórios.

Vale lembrar que, como os planetas apresentam excentricidade muito baixa, a órbita se parecerá muito com uma circunferência, sendo assim, o cálculo da excentricidade após feito o desenho é necessário para eliminar as dúvidas quanto a elipsidade da órbita desenhada.

## 7. CAPÍTULO 6 – A MÚSICA KEPLERIANA

### 7.1. A LEI QUE POSTERIORMENTE LEVARIA A GRAVITAÇÃO UNIVERSAL NEWTONIANA

No primeiro capítulo, apresentou-se a ideia pitagórica de que o movimento de cada planeta no Universo gerava uma determinada nota musical na qual formava, devido a junção de todas as notas, uma harmonia. Kepler então apropriou-se deste pensamento grego, e, com sua visão de que Deus era um geômetra e ao criar o Universo utilizou-se de meios matemáticos, buscou encontrar uma relação entre os movimentos dos planetas que descrevesse essa harmonia celeste. Por meio desse pensamento metafísico, Kepler chegou na relação constante que havia para todos os planetas do sistema solar entre os seus períodos de translação e a suas distâncias ao Sol.

Em 1617, Kepler começou a dedicar-se exclusivamente em buscar a relação harmônica para o Universo, mas encontraria em seu caminho um trabalho difícil visto que a nova configuração de Universo, descrita pela lei das órbitas e pela lei das áreas, apresentavam um Universo sem simetrias e sem harmonia devido as órbitas elípticas e movimentos não uniformes. Kepler relata em sua obra *A Harmonia do Mundo* (*Harmonice Mundi*) de 1619 as ideias e processos utilizados até finalmente determinar a relação que trazia a harmonia onde não parecia haver uma.

Kepler precisava determinar sete relações harmônicas para a sua escala: oitava, sexta maior ou menor, quinta, quarta, terça maior e menor. De início Kepler tentou atribuir as razões harmônicas aos períodos de revolução dos planetas, mas não obteve as relações. Posteriormente decidiu relacionar o volume dos planetas afim de formar uma harmonia entre os valores, nada obteve desse método. Tentou relacionar a distância do afélio e periélio de cada planeta numa escala harmônica, e, novamente, falhou. Em seguida, pensou em calcular as razões entre as velocidades extremas de cada planeta, e não obteve sucesso. Pensou também em relacionar as variações de tempo necessária para o planeta percorrer a unidade de comprimento de sua órbita, e mais uma vez não obteve nenhuma relação harmônica. Até que então Kepler utilizou dos comprimentos dos arcos percorridos em um dia, medidos ao longo da órbita dos planetas, e, finalmente, dessa ideia obteve resultado.

Ao analisar, por exemplo, Saturno, observou que a velocidade angular de Saturno no afélio é de 106'' por dia e no periélio é de 135'' por dia, fazendo a razão entre os dois valores

temos que:

$$\frac{135}{106} \approx \frac{5}{4}$$

De acordo com a escala pitagórica  $\frac{5}{4}$  é a terça maior. Utilizando-se do mesmo raciocínio para o planeta Júpiter Kepler obteve a terça menor  $\frac{6}{5}$ , para Marte obteve uma quinta  $\frac{3}{2}$ , e assim por diante, obtendo as sete relações harmônicas desejadas.

...se vários planetas estiverem simultaneamente nos pontos extremos das respectivas órbitas (afélio ou periélio), o resultado será um motete onde Saturno e Júpiter representam o baixo, Marte o tenor, a Terra e Vênus o contralto, Mercúrio o soprano. (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 272).

Além disso, ao comparar as velocidades angulares extremas de pares de diferentes planetas do sistema solar, também é possível construir os intervalos da escala harmônica completa. Sendo assim, a música dos céus finalmente podia ser ouvida, mas não ouvida pelo sentido habitual da palavra, a música era percebida pela inteligência e não pelo ouvido (Koestler, 1989).

Dessa forma, Kepler justifica que a excentricidades das órbitas são do jeito que são para que quando um observador do Sol analisasse essa relação entre as velocidades angulares nos extremos da órbita, o mesmo observaria que o sistema solar foi construído de tal maneira à forma de escala musical.

Alguns anos antes, em 1614, o matemático, físico e astrônomo escocês John Napier publicou uma obra intitulada *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição das leis dos admiráveis logaritmos) que apresentava ao mundo o método logarítmico. O termo logaritmos criado por Napier quer dizer números provenientes das razões. Como a escala musical é trabalhada majoritariamente em cima de razões numéricas, os logaritmos são frequentemente utilizados. Sendo assim, como Kepler estava trabalhando com razões e havia entrado em contato com as ideias dos logaritmos de Napier, resolveu aplicar esse novo método aos seus estudos da harmonia celeste.

Após muitas tentativas e relações, Kepler observou que ao fazer a razão entre o logaritmo do período de translação do planeta e a distância do planeta ao Sol, para qualquer planeta que fosse, o resultado obtido era de  $\frac{3}{2}$ . Analisando, como exemplo, Mercúrio, a distância de Mercúrio ao Sol é de 0,39 U.A. e o seu período de translação é de 0,24 anos terrestres, sendo assim, fazendo a razão entre os logaritmos temos que:

$$\frac{\log 0,24}{\log 0,39} \approx 1,5 = \frac{3}{2}.$$

Portanto, seja  $R$  a distância do planeta ao Sol e  $T$  o período de translação, pode-se escrever que:

$$\frac{\log T}{\log R} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2 \log T}{3 \log R} = 1.$$

A Tabela abaixo apresenta a distância do planeta ao Sol em Unidades Astronômicas (U.A.) e o período de translação do planeta em anos terrestres, ao aplicar a relação acima, para qualquer planeta, obtêm-se o valor aproximado de  $\frac{3}{2}$  (1,5).

Planeta	R (U.A.)	T (anos terrestres)
Mercúrio	0,39	0,24
Vênus	0,72	0,62
Marte	1,52	1,88
Júpiter	5,20	11,86
Saturno	9,53	29,49

**Tabela – 6** Valores da distância do planeta ao Sol (R) em (U.A.) e o período de translação do planeta (T) em anos terrestres

Sendo assim, como para qualquer planeta a razão é a mesma, logo seja  $R_1$  a distância do planeta ao Sol e  $T_1$  o período de translação de um certo planeta 1 e  $R_2$  e  $T_2$  para um planeta 2, pode-se escrever que:

$$\frac{2 \log T_1}{3 \log R_1} = \frac{2 \log T_2}{3 \log R_2}.$$

Aplicando a regra do logaritmo de que  $n \log a = \log a^n$ , então:

$$\frac{\log T_1^2}{\log R_1^3} = \frac{\log T_2^2}{\log R_2^3}$$

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}.$$

Ou ainda pode-se estar escrevendo da seguinte forma:

$$\frac{T^2}{R^3} = k.$$

Sendo está, como conhecida hoje em dia, a 3ª Lei de Kepler ou Lei dos Períodos, que diz que “Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas ao redor do Sol são diretamente

*proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas. ”*

A letra  $k$  é uma constante que terá seu valor atribuído dependendo do sistema dinâmico ao qual está sendo aplicado. No caso do sistema solar, ao calcular-se a razão entre o período de translação ao quadrado e o cubo da distância do planeta ao Sol de cada planeta o valor converge para um utilizando as unidades da tabela – 6.

Portanto, o valor da constante  $k$  depende da massa do corpo central em órbita, para o caso dos planetas com o Sol esse valor converge a um, mas, por exemplo, se aplicarmos para Júpiter e suas luas o valor da constante  $k$  será outro valor, pois, nesse caso, a massa do corpo central seria Júpiter e não o Sol.

Assim, as leis do movimento planetário estavam completas e Kepler completara o ciclo iniciado com o *Mysterium Cosmographicum*. Kepler diz em uma passagem de sua obra que os seus estudos refletiram para gerações posteriores a dele.

A coisa que despontou em mim há vinte e cinco anos, antes mesmo de haver descoberto os cinco corpos regulares entre as órbitas celestes...; que, há dezesseis anos, proclamei ser o alvo derradeiro de toda pesquisa; que me levou a dedicar os melhores anos da vida tais estudos astronômicos. A unir-me a Tycho Brahe e escolher Praga como residência. Com a ajuda de Deus, que me entusiasmou e me despertou irreprimível desejo, que me conservou alerta a vida e a inteligência, e também me proporcionou as demais necessidades mediante a generosidade de dois imperadores e dos Estados do meu país, a Áustria Superior, agora após desempenhar-me *ad satietatum* dos deveres astronômicos, finalmente os trouxe à luz...Tendo percebido o primeiro lampejo da aurora há dezoito meses, a luz do dia há três meses, e só há algum duas o sol de maravilhosíssima visão, nada me desterá. Sim, entrego-me ao santo delírio. Zombeteiramente devasos de ouro dos egípcios para deles fazer um tabernáculo para o meu Deus, longe das fronteiras do Egito. Se me perdoardes, rejubilar-me-ei. Se vos zangardes, suportá-lo-ei. Olhai, lancei os dados e estou escrevendo um livro para os meus contemporâneos, ou para a posteridade. É o mesmo para mim. Bem pode esperar cem anos por um leitor, uma vez que Deus também esperou seis mil por uma testemunha... (Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989, p. 273).

Sessenta e oito anos depois da publicação da *Harmonice Mundi*, em 1687, na sua obra *O sistema do Mundo*, livro III do *Principia*, Isaac Newton utilizará da 3ª Lei de Kepler para concluir seu trabalho sobre a Gravitação Universal.

## **7.2. AULA SOBRE A 3ª LEI DE KEPELR**

A última aula abrange o conteúdo sobre a 3ª Lei de Kepler e para isso fazer uma retomada sobre a ideia da música dos astros de Pitágoras, mas agora ressuscitada por Kepler.

O professor(a) poderá iniciar a aula questionando os alunos sobre a possibilidade de

relacionar o movimento dos planetas em torno do Sol com a música. Para ajudar na aprendizagem dos alunos, o professor(a) primeiramente poderá apresentar a escala musical a eles.

<b>Razão</b>	<b>Intervalo</b>	<b>Nota</b>
1:1	uníssono	Dó
135:128	segunda menor	Dó# Réb
9:8	segunda maior	Ré
6:5	terça menor	Ré# Mib
5:4	terça maior	Mi
4:3	quarta perfeita	Fá
45:32	trítono diatônico	Fá# Solb
3:2	quinta justa	Sol
8:5	sexta menor	Sol# Láb
27:16	sexta maior	Lá
9:5	sétima menor	Lá# Sib
15:8	sétima maior	Si
2:1	oitava	Dó

**Tabela – 7** Escala Musical

Após promover um debate com os alunos sobre quais relações entre os movimentos dos planetas pode-se extrair uma relação com as escalas musicais da tabela – 7. Afim de descrever as várias tentativas de Kepler até chegar na relação das velocidades angulares extremas dos planetas.

Ao final dessa discussão, será apresentada a conclusão de Kepler sobre a razão entre a velocidade angular do periélio e a velocidade angular do afélio, e que resultou em um intervalo musical para cada planeta. O vídeo a seguir pode ser apresentado aos alunos para demonstrar a harmonia formada ao unir os intervalos musicais de cada planeta.

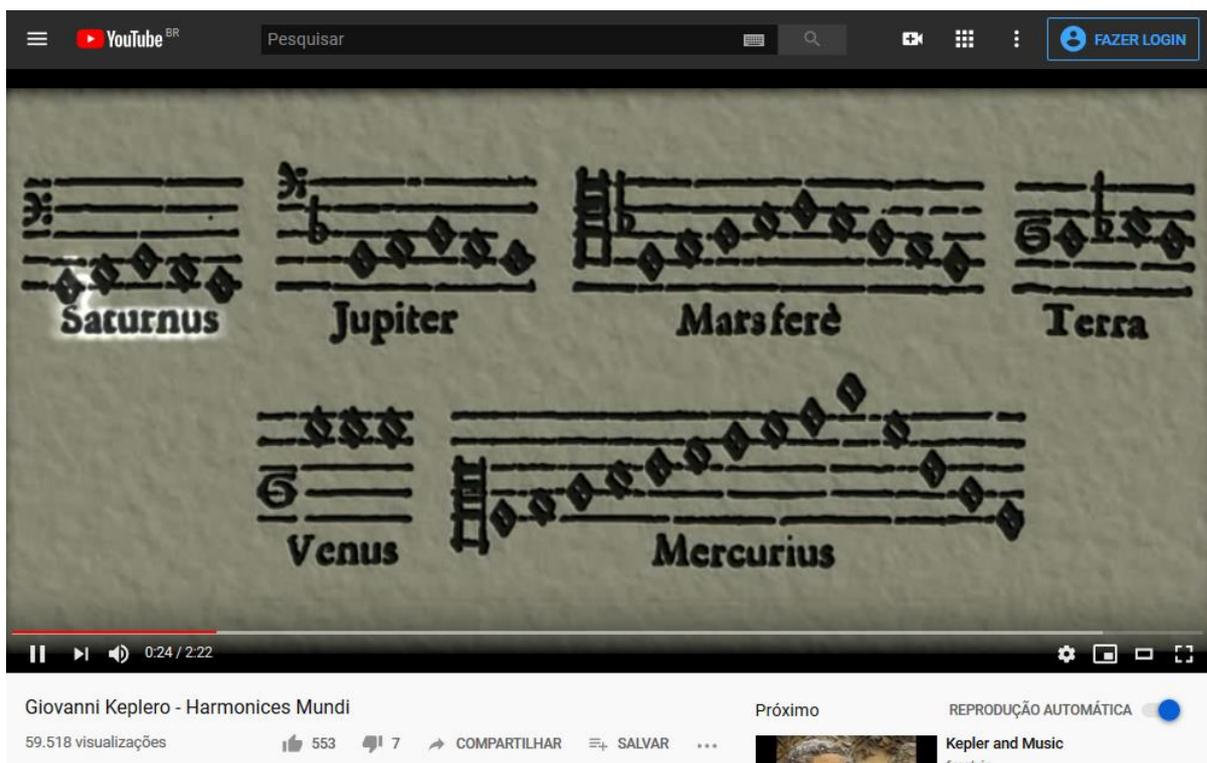


Figura 48 – <https://www.youtube.com/watch?v=WihmsRinpQU>. Fonte própria

Em seguida, é de suma importância o professor(a) frisar aos alunos que Kepler ao chegar na relação entre as velocidades angulares justifica o fato de as órbitas planetárias serem elípticas e não circulares, pelo simples fato de que somente com as órbitas elípticas tal relação com a harmonia musical pode ser interpretada.

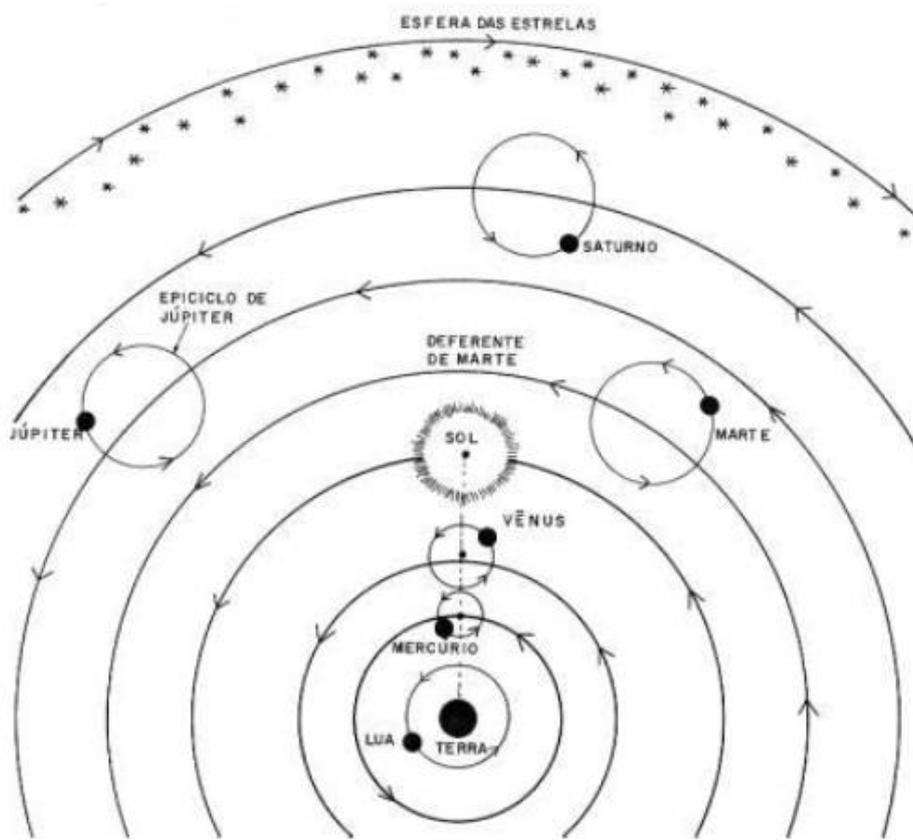
Por fim, o professor(a) deve comentar com os alunos um pouco sobre a função logarítmica e sua relação com as razões e enfim enunciar a 3ª Lei de Kepler para os alunos da forma como foi discutida no texto fazendo a transposição didática necessária.

### 7.3. ANÁLISE DA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

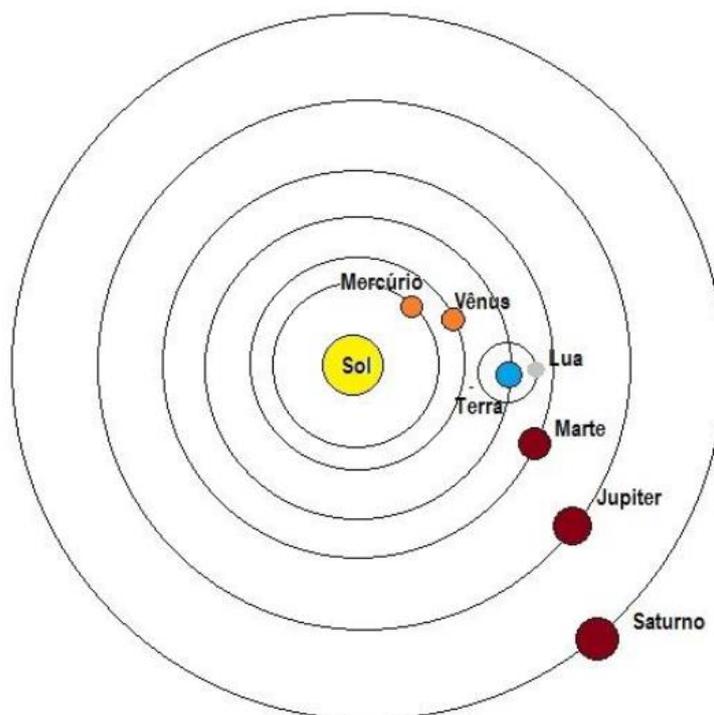
Para que o professor(a) analise qual foi a aprendizagem que os alunos tiveram depois de todo o conteúdo ministrado sugere-se o seguinte questionário.

1. Identifique por meio das imagens abaixo a qual cientista pertence o modelo planetário e descreva as principais características de cada modelo.

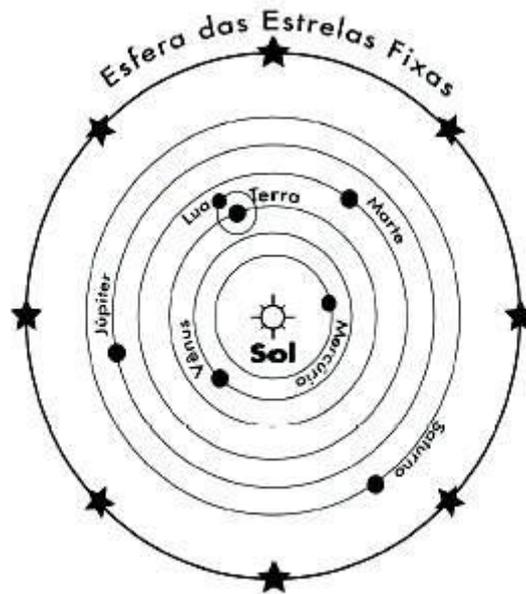
### Modelo – 1



### Modelo – 2



### Modelo – 3



2. As órbitas dos planetas do sistema solar são elipses que se aproximam de uma circunferência, por esse motivo é difícil de identificá-las. Júpiter contém 79 luas que o orbitam, sendo assim, qual deve ser a forma das órbitas das 79 luas que orbita Júpiter?

3. O cometa Halley é um dos objetos do sistema solar que apresenta grande excentricidade orbital de 0,967, sendo assim, qual é a forma da sua órbita? O cometa Halley apresenta alguma alteração de velocidade orbital durante seu trajeto pelo nosso sistema solar? Por quê?

4. O fato de o planeta Terra apresentar uma órbita elíptica em torno do Sol explica as estações do ano, ou seja, quando a Terra se encontra no periélio (ponto mais perto do Sol) é verão e quando se encontra no afélio (ponto mais longe do Sol) é inverno? Por quê?

5. Vênus leva aproximadamente 0,0384 anos para varrer a área que delimita o seu periélio, considerando agora a área que delimita o afélio de Vênus, quanto tempo Vênus levará para varrer essa área?

6. A maior distância de um planeta ao Sol é chamada de afélio, enquanto a menor distância é chamada de periélio. Se considerarmos a Terra como sendo o centro do movimento, como no caso Terra-Lua, a maior distância da Terra ao astro é chamada de apogeu e a menor distância é chamado de perigeu. Sendo assim, supondo que um satélite artificial da Terra demora 3,5h para varrer a área que corresponde ao apogeu, quanto tempo o satélite levaria para varrer a área de sua órbita que passa pelo Brasil?

7. A 3ª Lei de Kepler diz que o período de translação de um planeta em torno de

um corpo central elevado ao quadrado dividido pela distância que separa esses corpos elevado ao cubo é igual uma constante, no caso do nosso sistema solar essa constante vale  $1 \text{ Anos}^2/U.A.^3$ . No caso da Terra e da Lua o valor desta constante é  $322.338,26 \text{ Anos}^2/U.A.^3$ , caso a Terra tivesse mais 4 luas orbitando-a, qual seria o valor desta constante da 3ª Lei de Kepler ? Por quê?

8. Caso adotássemos o modelo ptolomaico, em que a Terra é o centro do Universo, o valor da constante para cada planeta continuaria sendo  $1 \text{ Anos}^2/U.A.^3$ ? Por que?

## 8. CONCLUSÃO

Por meio das propostas de aulas apresentadas acredita-se que o conteúdo de Gravitação, que é deixado em segundo plano e muitas vezes não é trabalhado pelo professor no Ensino Médio, pode ser iniciado com os estudos de Kepler sobre o movimento planetário. Esses estudos foram significativos para Isaac Newton concluir seu trabalho sobre a Gravitação Universal.

Devido ao pouco tempo de hora-atividade que os professores têm nos dias de hoje, é difícil para os professores terem que buscar materiais em diferentes meios para prepararem aulas que envolva um desenvolvimento das ideias a serem estudadas de forma ampla e contextualizada. Por isso apresenta-se no presente trabalho textos históricos para que os professores possam se embasar e assim aplicar as propostas de aulas apresentadas no fim de cada texto histórico a fim de terem como resultado final uma sequência histórica do desenvolvimento das três leis de Kepler.

Enfatizando o processo histórico de desenvolvimento das ideias keplerianas apresenta-se aos alunos que a ciência não é construída de forma linear como na maioria das vezes é passado devido a aulas tradicionais. Por exemplo, o epistemólogo Thomas Kuhn diz que a ciência é formada por descontinuidades que ocorrem devido a revoluções científicas que rompe com algum dogma científico.

Além do mais, ao apresentar visões alternativas de ideias para um mesmo fenômeno científico e como é construído argumentos racionais sobre o mesmo desenvolve-se nos alunos um pensamento crítico que refletirá em todas as áreas do conhecimento.

As três leis do movimento planetário de Kepler tiveram um grande papel no desenvolvimento da ciência. As ideias keplerianas romperam dogmas que perduraram na física e na astronomia por mais de dois mil anos. As visões de mundo aristotélica e platônica se destacam nesse dogmatismo milenar. O próprio Kepler relutou em abrir mão do pensamento platônico de que os planetas deveriam se movimentar em órbitas circulares e com velocidades constantes.

Essa visão ao ser apresentada aos alunos mostra que o pensamento científico é mutável e que a explicação de um fenômeno não é única e dessa forma que funciona a ciência de modo geral, ideias que vão se superando a fim de solucionar problemas que o pensamento anterior não respondia.

É evidente que ideias alternativas ao pensamento vigente da época ao serem

apresentadas à comunidade são na maioria das vezes renegadas e somente depois de um tempo o reconhecimento de determinado pensamento perante a sociedade é de fato compreendido e aceito pela maioria. O modelo heliocêntrico de Copérnico, que foi duramente criticado e refutado pela maioria da comunidade científica da época que defendia o modelo ptolomaico, passou a ser adotado pelos astrônomos após anos mais tarde.

Mas a construção de ideias alternativas em uma sociedade na qual um paradigma já é enraizado é mais complexa. Porém, quando há jovens cientistas que não estão submergidos ao paradigma de sua época é mais simples que esses não tenham uma visão ameaçadora do novo modelo e sim uma visão de um novo modelo mais simples e compreensível para explicar o mesmo fenômeno, e, até mesmo, novos fenômenos.

Kepler ao entrar em contato com o modelo heliocêntrico atentou de que o modelo era mais simples, explicava melhor os fenômenos celestes do que o modelo ptolomaico vigente na época. Por isso, o ensino de ciência não pode ser dogmático, pois, dessa maneira, futuros cientistas estarão sendo inseridos apenas ao paradigma vigente de sua época e assim não serão capazes de construir pensamentos alternativos.

Um importante método que é utilizado para o desenvolvimento de ideias científicas é a metafísica, que infelizmente vem tendo seu papel escondido no ensino de ciência. Essa lacuna contribui na ideia simplista de que os cientistas espontaneamente concebem uma ideia. Mas a história da ciência mostra que o pensamento metafísico esteve fortemente presente no seu desenvolvimento.

Nesse trabalho, foi discutido que no estudo de Kepler a priori de sua terceira lei do movimento planetário havia como pensamento metafísico de que o movimento dos planetas em torno do Sol gerava uma música harmônica e que havia uma lei que relacionaria o movimento planetário com a escala musical. Portanto, Kepler interpretou a relação descrita em sua terceira lei por causa desse pensamento que não é de fato real e sim puramente metafísico. Sem esse gatilho, talvez Kepler não teria chegado na 3ª Lei.

Sendo assim, acredita-se que ao apresentar essa visão aos alunos os mesmos desconstruirão a visão conturbada de ciência que é passado para eles durante a vida escolar e até mesmos inspirara-os a terem ideias, desenvolverem raciocínios, buscar respostas por meio de argumentos, e, não apenas, ter as respostas prontas.

Porém, é claro que há diversas realidades dentro de uma sala de aula em todo o Brasil, portanto, essas propostas de aulas elaboradas podem ser adaptadas conforme a necessidade do professor(a) a fim de atingir o objetivo principal dessa obra que é a construção histórica das três

leis do movimento planetário de Kepler.

## 9. BIBLIOGRAFIA.

- Canalle, João Batista Garcia – O Problema do Ensino da órbita da Terra – Física na escola, v.4, n. 2, 2003.
- Cesar, Benjamin e Gillispie, Charles Coulston – Dicionário de Biografias Científicas - American Council of Learned Societies, ed. 2, 2007.
- Da Silva, Victor Rocha Rodrigues - As Leis de Kepler por meio de simulações computacionais (Caderno do Professor) – Universidade Federal Fluminense, 2017.
- Honorato, Angel - ENSINO DE LEIS DE KEPLER NO CONTEXTO DA ASTRONOMIA: Uma abordagem a partir das TIC – Universidade Federal Tecnológica do Paraná, 2013.
- Itokazu, Anastasia Guidi – Astronomia Nova: a história da guerra contra Marte como exposição do método astronômico de Kepler / Anastasia Guidi Itokazu – Campinas, SP: [s. n.], 2006.
- Itokazu, Anastasia Guidi – A Força que Move os Planetas: Da noção de *Species Immateriata* na Astronomia de Johannes Kepler / Anastasia Guidi Itokazu – Cad. Hist. Fil. Ci., Campinas, Série 3, v. 16, n. 2, p. 211-231, jul-dez. 2006.
- Koestler, A. O homem e o Universo, São Paulo: IBRASA, 1989.
- Medeiros, Alexandre – Entrevista com Kepler - Física na escola, v.4, n. 1, 2003.
- Mourão, Ronaldo Rogério de Freitas Kepler – A descoberta das Leis do Movimento Planetário / Ronaldo Rogério de Freitas Mourão – São Paulo: Odysseus Editora, 2003.
- Platão – Timeu-Crítias - Tradução do grego, introdução, notas e índices: Rodolfo Lopes Editor: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos Ed. 1ª – 2011.
- Stephenson, Bruce – The Music of Heavens: Kepler's Harmonic Astronomy – Princeton University, 1994.
- Tossato, Claudemir Roque; Mariconda, Pablo Rubén – O método da Astronomia segundo Kepler – Scientiae studia, São Paulo, v. 8, n. 3, p. 339-366,2010.
- Tossato, Claudemir Roque – Apenas um lado do jogo: Kepler condicionado por seu tempo? – Scientiae studia, São Paulo, v. 4, n. 4, p. 627-640,2006.
- Tossato, Claudemir Roque – Carta de Tycho Brahe a Johannes Kepler em Graz – Scientiae studia, São Paulo, v. 2, n. 4, p. 567-574,2004.
- Tossato, Claudemir Roque – Copernicanismo e realismo: rumo à unificação entre astronomia e cosmologia – Scientiae studia, São Paulo, v. 1, n. 4, p. 553-564,2003.
- Tossato, Claudemir Roque – Discussão cosmológica e renovação metodológica na carta de 9 de dezembro de 1599 de Brahe a Kepler – Scientiae studia, São Paulo, v. 2, n. 4, p. 537-565,2004.

Tossato, Claudemir Roque – *Mysterium Cosmographicum*: Os Antecedentes das Duas Primeiras Leis Keplerianas dos Movimentos Planetários – Cadernos Espinosanos V, p. 35-63,1999.