



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Oscilador Amortecido e Forçado: Uma proposta de montagem e Aplicação no Ensino de Ciências

Acadêmico: Daniel Freire Copele

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Maringá, 12 de janeiro de 2020



Universidade Estadual de Maringá

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Oscilador Amortecido e Forçado: Uma proposta de montagem e Aplicação no Ensino de Ciências

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Fernando Carlos Messias Freire, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Física

Acadêmico: Daniel Freire Copele

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Maringá, 12 de janeiro de 2020

Sumário

Agradecimentos	ii
1 Resumo	1
2 Abstract	2
3 Introdução	3
3.1 Objetivos	5
3.1.1 Objetivos Gerais	5
3.1.2 Objetivos Específicos	5
3.2 Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias	6
4 Osciladores:	7
4.1 Oscilador Harmônico Simples (MHS) e o Circuito LC	7
4.2 Pêndulo Simples	10
4.3 Oscilador Harmônico Amortecido e o Circuito RLC	11
4.3.1 Caso Subamortecido	13
4.3.2 Caso Superamortecido	13
4.3.3 Caso Criticamente Amortecido	14
4.4 Oscilador Harmônico Amortecido Forçado e o Circuito RLC+Fem	17
5 Maquete e aplicação no Ensino de Física	24
5.1 Maquete	24
5.1.1 Materiais Utilizados	24
5.1.2 Montagem	24
5.2 Proposta de Aulas	31
6 Conclusões	33
Referências Bibliográficas	34

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que me deu forças para concluir mais essa etapa, e sempre esteve comigo.

Aos meus pais, minha irmã e meu cunhado que sempre me incentivaram a prosseguir, porque isso tudo um dia acabaria. Esse momento chegou. AMO VOCÊS ♡

Aos demais familiares que sempre se preocuparam com a minha graduação e junto comigo torceram por esse momento de conclusão.

Aos meus amigos que de uma forma ou de outra me auxiliaram durante a trajetória acadêmica.

A todos os professores do Departamento de Física, em especial aos Prof. Breno Ferraz de Oliveira e Prof Jurandir Hillmann Rohling pelo incentivo, disponibilidade e diálogo sempre presentes.

Meu sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire pela orientação, e paciência.

Gratidão.

1 Resumo

Osciladores harmônicos são amplamente estudados na Física em diversas aplicações, bem como o estudo detalhado da matemática que envolve a obtenção das soluções das equações diferenciais que representam o comportamento dos osciladores. Neste trabalho, considerou-se estudar e apresentar os osciladores mecânicos e elétricos como exemplos. Apresentamos os casos mais comuns de osciladores seguidos de exemplos e sua solução matemática, desde o oscilador harmônico simples até o oscilador harmônico amortecido e forçado para o caso do sistema massa-mola. Em comparação, construímos as soluções dos osciladores elétricos e comparamos suas semelhanças matemáticas. Por fim, apresentamos um passo-a-passo para a construção de uma maquete de um oscilador massa-mola amortecido e forçado. Tal maquete serviu para demonstrar, na prática, a diferença entre as soluções matemáticas da parte homogênea e particular. Complementamos o trabalho com uma simulação computacional da solução geral e ainda apresentamos um roteiro de aulas para a construção do conhecimento dos osciladores a partir do caso mais simples até o caso mais complexo, o amortecido e forçado.

2 Abstract

Harmonic oscillators are widely studied in physics in several applications, as well as the detailed study of mathematics that involves obtaining solutions of the differential equations that represent the behavior of the oscillators. In this work, it was considered to study and present the mechanical and electrical oscillators as examples. We present the most common oscillator cases followed by examples and their mathematical solution, from the simple harmonic oscillator to the damped and forced harmonic oscillator for the mass-spring system case. In comparison, we build the solutions of the electric oscillators and compare their mathematical similarities. Finally, we present a step-by-step for the construction of a model of a damped and forced spring-mass oscillator. Such a model served to demonstrate, in practice, the difference between the mathematical solutions of the homogeneous and particular part. We complement the work with a computational simulation of the general solution and also present a lesson script for the construction of knowledge of oscillators from the simplest to the most complex case, the damped and forced.

3 Introdução

Um sistema é caracterizado como oscilatório se, em sua ação, o movimento gerar periodicidade. E, o que é periodicidade? É um comportamento oscilante e nada mais é que o valor da posição variando em torno de um valor fixo, indo e retornando a um ponto comum. Este comportamento assume matematicamente valores, tanto positivos quanto negativos, centrado na origem de um sistema de coordenadas, onde acontecem essas oscilações. Essa é denominada como ponto de equilíbrio. O "tamanho" dessa oscilação é chamada amplitude de oscilação. Um exemplo clássico desse efeito é o de uma criança que brinca em um balanço (Veja figura 1).

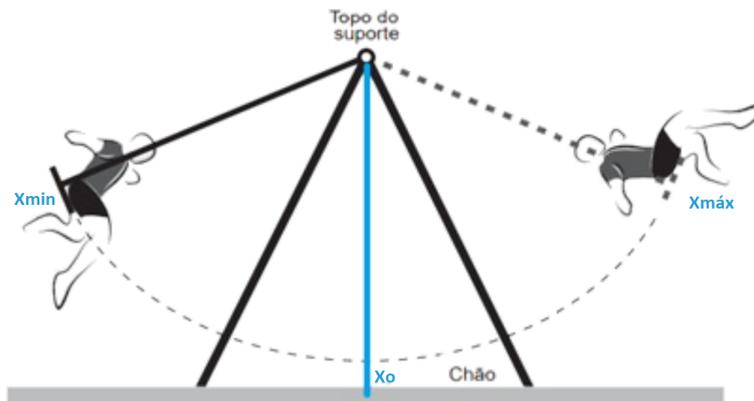


Figura 1: Exemplo de Oscilação

Um dos movimentos mais simples, conhecidos e estudados, é o do sistema massa mola (SMM). O conjunto dos movimentos já bem caracterizado é denominado como Movimento Harmônico Simples (MHS), devido sua "simplicidade", onde atuam apenas a Lei de Hooke, desprezando-se o atrito com o ar e (ou) com a superfície. Mas, fisicamente, adotamos uma condição para esse sistema, onde a perda de "energia" é apenas na transformação da energia, fazendo deste um o caso ideal. [1–3].

Mas o que seria essa tal lei de Hooke, e ainda mais o que seriam essas forças atrito com o ar e com a superfície? A lei de Hooke para a Física é uma força que está relacionada com a elasticidade de um material. O caso de mais fácil visualização é o de uma mola conectada a um corpo de massa m . Com apenas uma perturbação, pode tanto comprimir quanto expandir a mola e conseqüentemente devolver, na forma de uma força (restauradora), para a posição de equilíbrio.

Este fato de restauração da posição de um corpo faz com que este permaneça oscilante. E este comportamento, quando comparado com um eixo graduado, verifica-se que existe um padrão. Porém este padrão pode ser quebrado, quando a mola que faz a restauração está num fluido, na presença de uma mola concorrente, ou sobre a ação de outros tipos de forças, porque em cada um dos possíveis casos há um tipo de amortecimento.

Cada um desses casos vai se dificultando gradativamente com o estudos destes movimentos, todos estes geram movimentos e comportamentos diferentes. Os principais são: Oscilador

Harmônico Amortecido (OHA), Oscilador Harmônico Amortecido Forçado (OHAF). Temos ainda outros sistemas de osciladores, como o Oscilador Quântico, Oscilador de Lorentz, Osciladores Elétricos e muito outros.

Agora, sobre as forças que de certa forma "dissipam" energia, seja ela por atrito com o ar, com o fluido, com as superfícies, são conhecidas como forças resistivas ao sistema, ou seja, que dificultam o movimento fazendo com que haja transferência de calor da energia fornecida ao sistema massa mola para outros meios e modos.

Esses comportamentos também são encontrados nos circuitos elétricos dissipando a energia em efeito joule devido à resistência do circuito, carregamento e/ou descarregamento dos componentes do circuito, etc. Vamos também comparar qual a relação do sistema massa mola e o comportamento dos circuitos elétricos.

Será que o comportamento e as soluções das equações encontradas, tanto nos Osciladores como nos Circuitos Elétricos, podem ser vistos, em uma possível maquete didática, para facilitar o entendimento deste fenômeno no Ensino Médio?

O trabalho consta em seu Capítulo 1, com a exposição dos métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO), que podem ser usadas para resolver as EDO's que também são expostas neste trabalho. Vindo ao Capítulo 2 o estudo dos Osciladores que terá uma linha gradual de dificuldade, que será iniciada com o MHS que leva em sua estrutura a ação apenas da força restaurativa da Lei de Hooke, vindo após isso o OHA que conta com a adição do termo da força resistiva, que será abordada usando o fator de amortecimento dos fluidos, que nos levam aos seus três casos de amortecimento, e seguindo a linha termos o estudo do OHAF que conta com a adição de um termo periódico forçado ao sistema. Em cada caso abordado dos osciladores, vem consigo o seus pares elétricos cumprindo a relação mecânico-elétrico que é também uma das propostas desse TCC, juntamente com a proposta de uma maquete educacional para o ensino de ciências na escola fundamental. O Capítulo tem sua estrutura e concentração apenas da maquete educacional, contando com o modo, e matérias usados para sua confecção, sua aplicação será descrita como propostas de aulas.

3.1 Objetivos

3.1.1 Objetivos Gerais

Neste trabalho, temos o propósito de iniciarmos um estudo sobre os osciladores mecânicos, e relacionar um par característico no caso elétrico. Durante a abordagem do trabalho, vamos comparar os comportamentos da parte mecânica com as da parte elétrica. Construiremos uma aplicação voltada ao ensino de ciências. Está será uma proposta de maquete que poderá ser usada como meio de proporcionar uma transposição didática entre o livro, o entendimento e a visualização para o aluno.

3.1.2 Objetivos Específicos

Nossos objetivos obedeceram a seguinte estrutura: vamos passar por um momento de estudo, reconhecimento e descrição dos osciladores na forma diferencial; relacionarmos com um seu par no sistema elétrico; e expor os principais resultados matemáticos. Ou seja, trabalharemos a semelhança mecânica-elétrica.

Todos os procedimentos serão abordados da forma mais simples possíveis, para um melhor entendimento e adaptação. Graças à literatura atual não foi difícil expor os métodos para obtenção das equações, e suas soluções. Visto que resolver as EDO's não é o intuito do nosso trabalho, e sim a proposta de uma maquete educacional para o ensino de ciências, que tem uma função da contextualização do teórico, para o cotidiano do estudante, e também o estudo da relação mecânico-elétrico, visto que a parte mecânica tem uma visualização mais clara do seu par elétrico.

Temos a proposta da confecção da maquete, que será usada para o ensino aprendizagem dos alunos, juntamente com a maquete que será aplicada, foi sugerido um plano de aula que seguirá uma linha evolutiva dos tipos de osciladores mecânicos que podem ser usados na maquete, um adendo ao plano de aula sugerido neste trabalho é a evolução da dificuldade matemática que tínhamos na teoria, agora ser “palpável” na maquete.

3.2 Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

As equações diferenciais ordinárias, particularmente as de segunda ordem, são amplamente abordadas e usadas na mecânica nos problemas de osciladores, como estes que serão abordados neste trabalho. Elas são usadas também nos problemas de forças centrais, pode-se dizer até que nasceram juntas [4].

Os conceitos matemáticos usados neste trabalho não são apenas resultados, mas, sim apresentam um significado material para o mundo físico, o que nos intriga e encanta.

Gostaríamos de expor aqui alguns dos métodos que são utilizados para obtenção dos resultados das soluções das EDO's que são abordadas neste trabalho [4, 5]:

Método de variação de parâmetros; Equações Lineares com coeficientes constantes homogêneas; Método de redução da ordem da equação; Método dos coeficientes a determinar; A equação de Euler-Cauchy; Método das séries de potências; Método de Frobenius; Séries de Fourier; Método de Separação de Variáveis; Transformada de Fourier; Método de Lagrange; Transformada de Laplace; Método de Green e Método de Stokes.

Esses métodos auxiliam na obtenção dos resultados para interpretação dos casos físicos e até mesmo teóricos, como em nosso trabalho, que se baseia nos movimentos oscilatórios. Exemplo da utilização desses métodos, da qual podemos comentar, é que para o caso dos amortecimentos não forçados utilizamos o método das equações lineares com coeficientes constantes, e os casos de amortecimento forçado usamos do método dos coeficientes a determinar [1, 4, 5].

4 Osciladores:

4.1 Oscilador Harmônico Simples (MHS) e o Circuito LC

Este primeiro Oscilador é o mais simples porque trata de um sistema de movimento unidimensional, e é composto de uma força restaurativa somente, como podemos ver na figura 2.

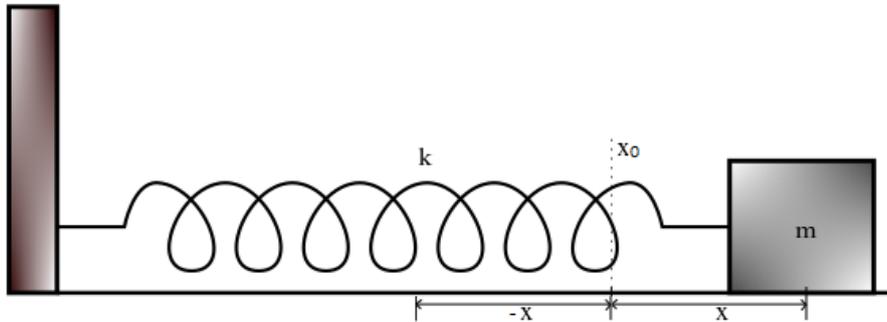


Figura 2: Representação esquemática do sistema Massa Mola

O funcionamento físico do sistema massa mola está ligado à transformação dos tipos de energias que o sistema realiza; quando temos o sistema sem ser perturbado, ou seja, quando a nossa massa está na sua posição de equilíbrio (X_o), não temos transformação de energia. A partir do momento que perturbamos o sistema, a mola ao ser comprimida e/ou expandida transforma energia potencial elástica, em energia de cinética. A energia potencial elástica está relacionada ao potencial de deformação que houve no sistema devido a constante elástica da mola envolvida, por sua vez a energia cinética está intrínseca ao movimento do sistema dando movimento/velocidade.

Como estamos lidando do caso mais básico, o colocaremos como um caso ideal, onde a única força atuante no sistema obedece à lei de Hooke.

$$F = -kx . \quad (1)$$

E segundo a 2ª lei de Newton

$$F = ma . \quad (2)$$

Combinando as duas equações anteriores e colocando elas na forma diferencial temos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx . \quad (3)$$

Homogenizando a equação, temos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 . \quad (4)$$

Equações do mesmo tipo, descrevem movimentos diferentes, tal como o pêndulo simples e o circuito LC, relacionando a variação temporal da corrente [1].

Sabemos que a frequência natural de oscilação é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, e substituindo na equação anterior, podemos através de um pouco de álgebra chegar na equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5)$$

equação esta que rege o sistema massa mola, e descreve o movimento harmônico simples.

Resolvendo a EDO, encontramos a sua solução $x(t)$ na forma

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (6)$$

Escrevemos a solução $x(t)$ em termos da função cosseno, porém podíamos ter usado também o seno, pois ambas descrever graficamente um movimento oscilatório, a menos de um termo de fase θ . A representa a amplitude de oscilação do sistema e θ , como já dito, é o termo de fase, que tem seu valor definido de acordo com o posicionamento da descrição gráfica, no sistema de coordenadas.

O seu correspondente mais simples no sistema elétrico é o circuito LC (carregado) - (Ver figura 3)

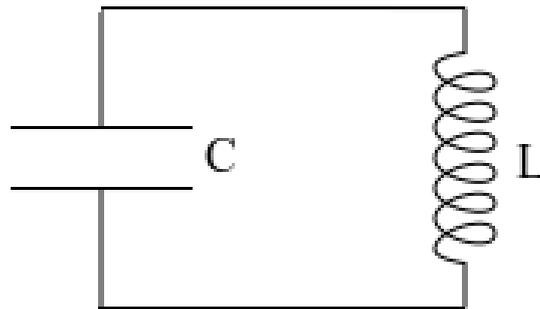


Figura 3: Modelo do Circuito LC (carregado).

No funcionamento do circuito LC (ideal), o capacitor C carregado e por sua vez começa a descarregar, o descarregamento do capacitor no indutor L a gerar campo magnético, quando há a presença desse campo ele produz uma ddp nas placas do que capacitor que por sua vez começa a carregar o outro lado do capacitor inversamente, que com um período de tempo, faz com que o capacitor esteja inversamente carregado. Quando isso ocorre temos novamente um ddp, porém agora a corrente começa a percorre no sentido oposto, e novamente o ciclo acontece, o que conseqüentemente faz com que o carregamento do capacitor seja de forma a deixá-lo igual o caso inicial. Graficamente o comportamento oscilatório é o mesmo do MHS, sendo ele cossenoidal, ou senoidal a menos por uma constante de fase.

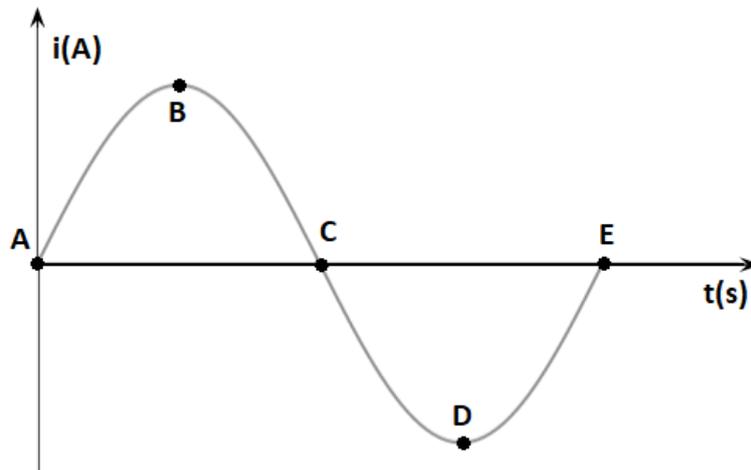


Figura 4: Funcionamento do Circuito LC.

Corrente Fluindo(Horário)

(A) $E_{max}; B_{min}$ a corrente está aumentando, gerando Campo Magnético. No instante (B) $E_{min}; B_{max}$ corrente vai diminuindo, começando a re-carregar o capacitor e gerando Campo Elétrico só que inversamente.

Corrente Fluindo(Anti Horário)

Em (C) $E_{max}; B_{min}$ capacitor está totalmente carregado inversamente, a corrente volta a aumentar. Já em (D) $E_{min}; B_{max}$ novamente corrente está diminuindo, e começando a re-carregar o capacitor “originalmente”. Finalmente em (E) o Capacitor e o Indutor, voltam à mesma condição inicial de A, reiniciando outro ciclo (A-E)

Com auxilio da literatura, temos:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad (7)$$

Equação diferencial está que rege o comportamento do Circuito LC, e de modo semelhante à resolução do MHS em função do tempo, esperamos uma solução em termos de $\cos(\omega t)$.

Cuja solução da EDO do Circuito LC, usando que a frequência angular é $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, pode se obter-se a solução dessa forma

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

Como exemplificado anteriormente a corrente em função do tempo também tem um comportamento oscilatório, semelhante ao MHS

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (9)$$

onde $I_0 = \omega Q$ corresponde a amplitude da corrente no circuito.

4.2 Pêndulo Simples

Quando vemos uma criança brincando no balanço, implicitamente sabemos que o movimento é oscilatório e amortecido, já que a mesma para de oscilar após um período de tempo. O que nos leva até um modelo idealizado de um pêndulo simples, é um fio de comprimento L ligado a uma massa m , oscilando no ar (Ver figura 5).

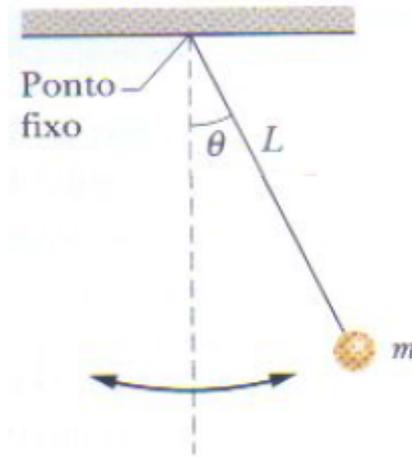


Figura 5: Modelo de um Pêndulo Simples [2] pg.96

A EDO homogênea que rege o movimento do Pêndulo Simples é [6]

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + mg \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (10)$$

onde $s = L\theta$ é o deslocamento circular. Com um pouco de álgebra, e sabendo que para valores pequenos de θ podemos usar a relação $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$. Chegamos a uma EDO dependente apenas de θ , que é a nossa variável para o movimento do pêndulo simples, na forma

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (11)$$

e usando ainda que

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

podemos chegar na forma final da EDO do pêndulo simples

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_p^2 \theta = 0 \quad (12)$$

cuja solução é

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \delta) \quad (13)$$

onde θ_m é o deslocamento angular máximo [3] e δ é termo de fase.

O quadro a seguir foi construída para que possamos reunir as EDO's e informações das resoluções dos casos de Oscilação Simples, e para que vejamos suas semelhanças.

Tabela 1: Quadro das semelhanças do Sistema Massa-Mola, Circuito LC e Pêndulo Simples.

Sistema Massa-Mola	Circuito LC	Pêndulo Simples
$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$	$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_p^2 \theta = 0$
Solução	Solução	Solução
$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$	$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$	$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \delta)$ [7]

As semelhanças apresentadas, nesse quadro, já eram esperadas visto que as EDO's são semelhantes e representam comportamento gráfico iguais, logo podemos ver que as soluções obedecem o mesmo padrão de solução.

4.3 Oscilador Harmônico Amortecido e o Circuito RLC

Continuando no modelo do sistema massa-mola, vamos agora tirá-lo do caso ideal e coloca-lo em uma configuração mais realista onde consideraremos as forças externas do sistema. A força que agora deve ser levada em conta e a força de arraste dos fluidos (como o Ar, Água, O óleo, etc) envolvidas no sistema. (Ver figura 6)

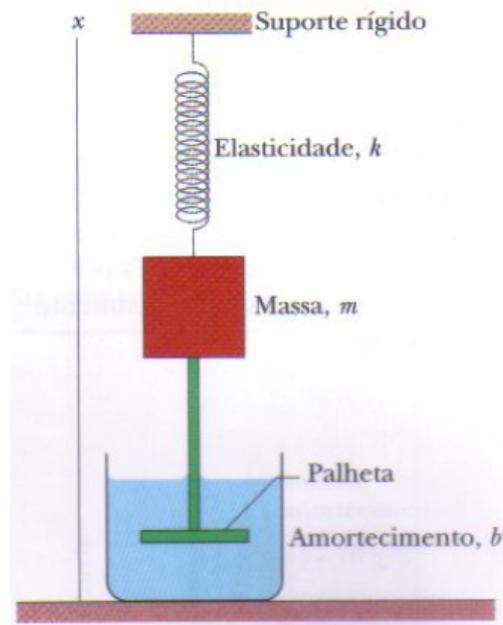


Figura 6: Modelo Oscilador Harmônico Amortecido [2] p.101

Para uma visualização diversificada do oscilador, usamos um oscilador vertical na imagem acima, já que temos o mesmo fenômeno e também que fica mais claro, quando falamos das forças resistivas agora, como já comentado anteriormente a partir de agora temos a ação das forças externas levadas em conta. O funcionamento do OHA é semelhante ao do SMM, porém as transformações das energias que antes eram apenas entre elas sem nenhuma perda, o que

caracterizava um sistema de movimento perpetuo, o que fisicamente é impossível. Agora serão transformadas em outras, e dissipadas fazendo com que tanto a energia, quando o movimento, sejam amortecidos e conseqüentemente finalizados.

Essa força de arraste citada, que agora será levada em conta, é proporcional a velocidade de oscilação que age no corpo, o que implica num decréscimo da amplitude do movimento [8] e pode ser escrita de maneira geral [8]

$$F_v = \pm bv^n \quad (14)$$

onde b é uma constante que depende do fluido envolto no sistema.

Mas por simplicidade usaremos a forma de F_v , como:

$$F_v = -bv \quad (15)$$

onde consideramos $n = 1$, e que ainda descreve bem o movimento.

Analisando o novo sistema, temos que através da segunda lei de Newton podemos, obter a seguinte EDO para o novo sistema

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx \quad (16)$$

Homogenizando a equação temos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (17)$$

que é a Equação do Movimento Harmônico Amortecido

Veremos que o Comportamento dessa EDO, assemelhasse com o seu “par elétrico” o circuito RLC [1].

Para se resolver a EDO do OHA, teremos que supor algumas substituições do tipo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $2\gamma = b/m$.

Agora nossa equação toma uma outra forma, através das considerações acima

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (18)$$

Vamos propor como solução para o deslocamento

$$x(t) = e^{pt}$$

Com isso, conseguimos obter da EDO do oscilador harmônico amortecido, uma equação de segundo grau [1] do tipo

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (19)$$

que nos leva a 3 soluções possíveis e diferentes para mesma equação:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \omega_0^2 > \gamma^2 \text{ caso } \mathbf{Subamortecido} \text{ nos fornecem duas raízes complexas,} \\ (ii) \quad \omega_0^2 < \gamma^2 \text{ caso } \mathbf{Superamortecido} \text{ nos fornecem duas raízes reais e distintas, e} \\ (iii) \quad \omega_0^2 = \gamma^2 \text{ caso } \mathbf{Criticamente Amortecido} \text{ nos fornecem raízes reais e iguais [8].} \end{array} \right.$$

4.3.1 Caso Subamortecido

Como já antecipado, o amortecimento subamortecido trata-se do caso “mais” fraco dos amortecimentos. Ele terá raízes complexas porque o radicando de

$$\gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \quad (20)$$

é negativo, e p pode ser escrito como

$$p = -\gamma \pm i\omega_1 \quad (21)$$

com

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (22)$$

A solução da EDO do caso subamortecido é então da forma

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (23)$$

onde essa equação tem um termo de frenagem de $e^{-\gamma t}$, o que faz com que o comportamento gráfico fique

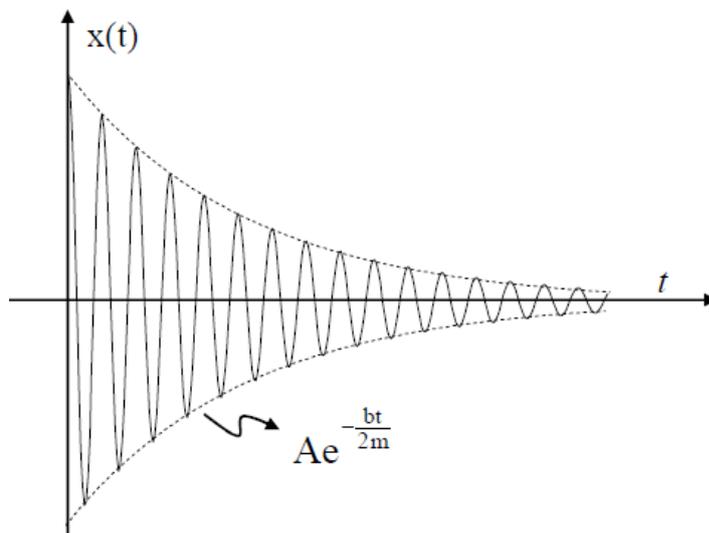


Figura 7: Comportamento do Oscilador Subamortecido graficamente [8] p.70

Observando o comportamento do gráfico (Figura 7), ele é fortemente definido pelo termo de $1/e^{-\gamma t}$, pois a amplitude (A) é constante.

4.3.2 Caso Superamortecido

No superamortecido, o amortecimento é o mais forte que temos, já que o amortecimento que ocorre no sistema é maior do que o termo ω_0 que faz o sistema oscilar, e temos a relação entre $\omega_0 < \gamma$, que fornece duas raízes reais e distintas. O comportamento graficamente, por

terem dois fatores de amortecimento, pode não passar pela origem em tempo finitos[1].

Fazendo com que

$$p = -\gamma \pm (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (24)$$

nos leve agora à uma solução do tipo

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma + \omega_2 t} + C_2 e^{-\gamma - \omega_2 t} \quad (25)$$

para simplificar a notação, usou-se $\omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. As constantes (C_1, C_2) que aparecem nas soluções, são determinadas pelas condições iniciais do problema.

4.3.3 Caso Criticamente Amortecido

O criticamente amortecido, é um caso específico de amortecimento, pois seu termo de amortecimento acontece com a mesma frequência com que o sistema oscila, devido sua especificidade ele é teórico, já que até mesmo no caso mais próximo da relação $\omega_0^2 = \gamma^2$ são estudados como casos pontuais de subamortecido e superamortecido, e devido sua relação as suas raízes são igual e reais. Temos que

$$p = -\gamma \quad (26)$$

e cuja solução para o caso do criticamente amortecido, se torne

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} \quad (27)$$

Podemos observar, no gráfico a diferença entre o caso superamortecido e o caso criticamente Amortecido, que reforça a ideia de frenação maior de um caso para o outro (Ver figura 8)

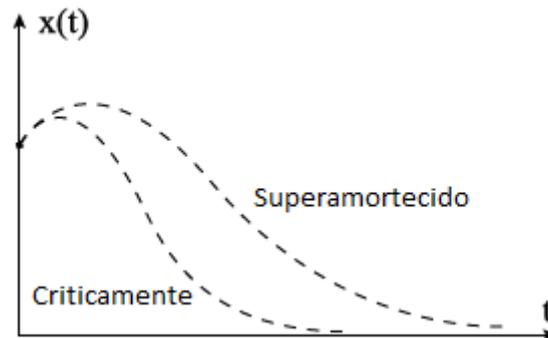


Figura 8: Comparativo entre os amortecimentos [1] p.64

O gráfico a seguir, mostra a união dos diferentes comportamentos dos osciladores harmônicos amortecidos em cada um dos seus casos (Ver figura 9).

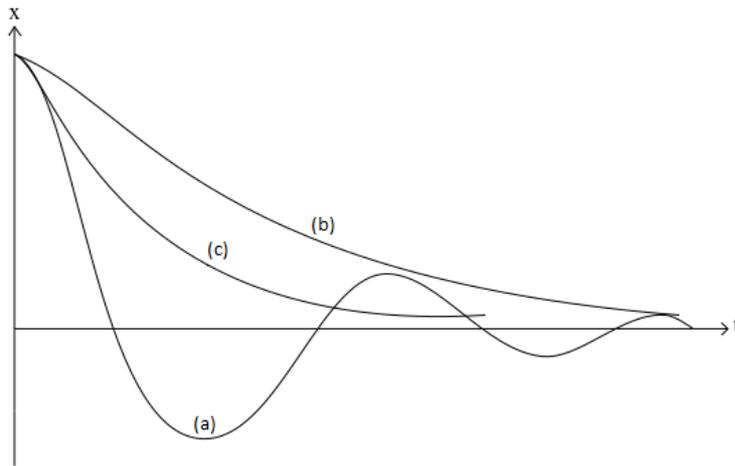


Figura 9: Comportamento de um Oscilador para o estado de equilíbrio.
 (a) *Subamortecido*, (b) *Superamortecido* e (c) *Criticamente Amortecido*. [8] p.70.

De igual modo, vamos encontrar o correspondente elétrico do OHA, cujo par correspondente é o circuito RLC (Ver figura 10). O amortecimento, no OHA provem da força de atrito, e o do RLC vem da força dissipativa por efeito joule.

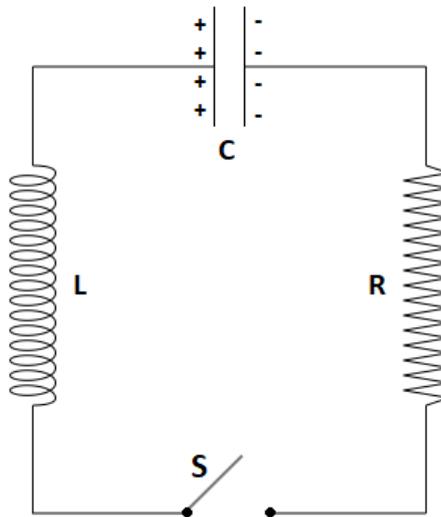


Figura 10: Modelo do Circuito RLC

O funcionamento do Circuito RLC é muito semelhante ao do LC. O capacitor inicialmente carregado vai começar a descarregar, mas agora a corrente passa inicialmente pelo Resistor, o que faz uma dissipação por efeito joule da corrente fornecida ao circuito, e cria o campo magnético quando passa no indutor. A cada momento que a corrente passa pelo resistor, ela vai sendo dissipada, o que faz com que a cada "ciclo" completo o capacitor se carregue menos, e com o passar do tempo faz com que o circuito descarregue por completo, não havendo mais a passagem da corrente.

Caso o circuito seja alimentado externamente por uma fonte, como é o caso do RLC+Fem, essa tensão compensa o ciclo carregando o capacitor, que veremos mais pra frente.

A figura que referência esse comportamento pode ser vista tanto no modelo do oscilador subamortecido, quanto no caso subamortecido, dependendo do valor de R. As vezes a corrente nem consegue completar um ciclo completo, como é o caso do Superamortecido e Criticamente Amortecido.

Como já é conhecido, podemos escrever a EDO deste circuito na forma [9]

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (28)$$

Cuja solução é [7]

$$q(t) = Qe^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (29)$$

O comportamento oscilatório da solução já era esperado, dada à semelhança com o seu equivalente mecânico.

Observe o quadro, que tem o intuito de trazer todas as equações e soluções, para a comparação das relações entre o sistema mecânico com o elétrico.

Tabela 2: Quadro da semelhança do comportamento OHA e Circuito RLC [7]

EDO do SMM	EDO do Circuito RLC
$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$
Solução do SMM	Solução do Circuito RLC
$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$ (Sub.)	$q(t) = Qe^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$
$x(t) = C_1 e^{-\gamma + \omega_2 t} + C_2 e^{-\gamma - \omega_2 t}$ (Sup.)	$q(t) = C_1 e^{-\gamma + \omega_2 t} + C_2 e^{-\gamma - \omega_2 t}$
$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$ (Crit.)	$q(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

O comportamento semelhante das soluções, já era esperado. Como vimos no caso do sistema massa-mola, do circuito LC, e do pêndulo simples, todos tem comportamento gráfico parecido, com EDO parecidas e logo teríamos soluções de mesma aparência matemática e gráfica.

Por similaridade, e com apoio da literatura, construímos a relação entre o caso mecânico para o elétrico, substituindo os valores de γ , ω_0 , ω_1 , e ω_2 por:

Tabela 3: Quadro que correlaciona as constantes mecânicas com as constantes elétricas

Mecânico	\mapsto	Elétrico
$\gamma = \frac{b}{2m}$	\mapsto	$\gamma = \frac{R}{2L}$
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	\mapsto	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$	\mapsto	$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$	\mapsto	$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

4.4 Oscilador Harmônico Amortecido Forçado e o Circuito RLC+Fem

Se um oscilador amortecido em movimento for abandonado temos conhecimento que ele tende a diminuir suas oscilações, graças às forças externas agindo nele, e com o passar do tempo essas forças tendem a neutralizar por completo a nossa oscilação [1].



Figura 11: Modelo de um oscilador amortecido e forçado

Sabemos também que fisicamente não conseguimos construir instrumentos (ciclos) eternos seja eles motores, circuitos, movimentos, etc [2,3,9].

Mas para podemos lidar com o nosso mundo não ideal e termos movimentos oscilatórios amortecidos constantes, teremos que utilizar de auxílios externos, sejam eles forças, baterias, transformadores, motores, propulsores, etc (Ver figura 11).

No caso dos osciladores amortecidos mecânicos podemos adicionar uma força externa para que mantenha o nosso oscilador harmônico amortecido sempre em movimento.

A força mais simples encontrada na literatura a ser adicionada a um oscilador harmônico amortecido é uma força dependente do tempo $F(t)$. Assim, a EDO do oscilador harmônico amortecido forçado dependente do tempo se torna [10].

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (30)$$

Até aqui encontramos EDO homogêneas para os Osciladores, porém no caso do MHAF temos EDO não homogêneas e a solução completa do nosso caso forçado será agora a soma das soluções das partes homogênea e a particular.

Onde a x_h (*homogênea*) é a solução do MHA, e a x_p (*particular*) é a solução do MHAF.[11]

Um exemplo importante de força externa atuante em um Oscilador Harmônico Amortecido é a da força ser periódica, ou seja variante no tempo, através de uma frequência angular ω . [1] Neste caso substituiremos nossa $F(t)$ por uma $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, tendo assim

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (31)$$

EDO do oscilador harmônico amortecido forçado dependente de uma força periódica em t .

Uma EDO semelhante já foi vista anteriormente no caso amortecido, contudo temos agora a adição da força externa periódica.

OHA	OHAF
$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t)$

Uma saída inicial para que possamos obter a solução particular $x_p(t)$ do MHAF, teremos que supor uma solução do tipo

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

Após, varias passagens algébricas e de cálculos, chegamos a solução particular final para x_p [1].

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (32)$$

Sabemos que a x_h , é a solução dos casos Amortecidos, logo temos [1, 7]

$$x_h(t) = \begin{cases} x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) & \text{Subamortecido} \\ x(t) = C_1 e^{-\gamma + \omega_2 t} + C_2 e^{-\gamma - \omega_2 t} & \text{Superamortecido} \\ x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} & \text{Criticamente Amortecido} \end{cases}$$

Lembrando que agora a solução final $x(t)$ da EDO não homogênea do MHAF [1] é

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad (33)$$

Agora que já temos todas as soluções, podemos juntar elas e obter:

$$x(t) = x_h(t) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (34)$$

Tivemos agora na EDO do MHAF mais uma adição de um ω diferente, e vale a pena reunir todos eles aqui e lembrarmos suas respectivas características implícitas, antes que tudo se confunda e complique.[1]

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} && \mapsto \text{Frequência do Oscilador } \mathbf{n\tilde{a}o} \text{ Amortecido} \\ \omega_1 &= \sqrt{(\omega_0)^2 - \gamma^2} && \mapsto \text{Frequência do Oscilador Subamortecido} \\ \omega_2 &= \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} && \mapsto \text{Frequência do Oscilador Superamortecido} \\ \omega &&& \mapsto \text{Frequência de Oscilação da Força Externa} \end{aligned}$$

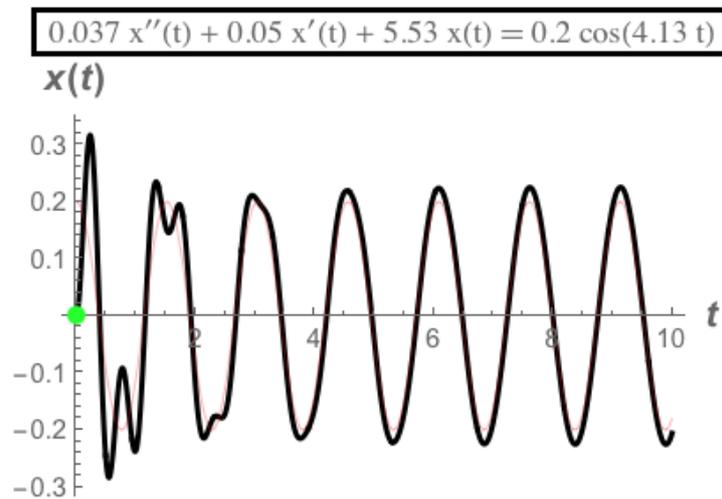


Figura 12: EDO do comportamento de homogenização de um Oscilador Forçado.

No gráfico (Figura 12) pode se ver a parte particular da Oscilação, no primeiro momento, e após um período de tempo, viu-se a harmonização da parte homogênea do termo forçado.

O gráfico que foi apresentado é justamente o gráfico que descreve a maquete, e para que fosse possível este recurso gráfico, configurou-se computacionalmente dados reais (obtido em laboratório) da nossa maquete (Ver tabela 4 e figura 14). O layout do programa computacional usado para obter o gráfico da figura 12, pode ser visto na figura 13.

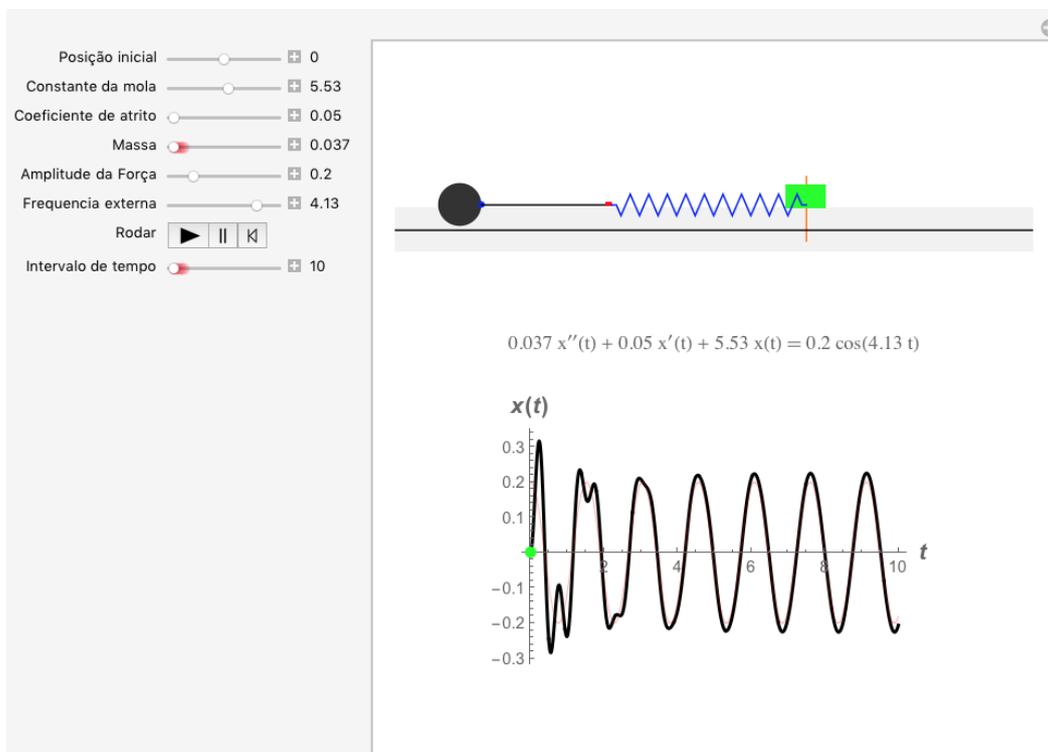


Figura 13: Imagem da Computação Gráfica do Oscilador Forçado

N. Voltas	Δt	rps
05	07,57	0,660
10	15,23	0,656
10	15,13	0,660
15	22,98	0,652
15	22,85	0,656
20	30,50	0,656

Tabela 4: Tabela dos dados experimentais da maquete

Diante dos dados foi possível obter tanto o valor médio de RPS(revoluções por segundo), quanto do RPM(revoluções por minuto)

$$\langle rps \rangle = 0,657 \left[\frac{rev}{s} \right] \quad \& \quad \langle rpm \rangle = 39,46 \left[\frac{rev}{min} \right]$$

Com o valor médio de rps, podemos definir o valor da frequência angular, através de $\omega = 2\pi f$, onde f é o valor da frequência. Temos então que:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi(0,657) \Rightarrow \omega = 4,13 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

O conjunto da massa da maquete, foi medido usando o peso da moto + mola, devido fato de ela estar fixada na moto para diminuir perdas mecânicas, durante o funcionamento da maquete (Ver figura 14).



Figura 14: Massa(moto+mola) = 37.45[g].

Agora, que já resolvemos o MHAF, e vimos que os demais Osciladores continuam correspondentes elétricos, vamos ver agora o seu correspondente elétrico. Cujo seu respectivo par é

o Circuito RLC+Fem (Ver figura 15).

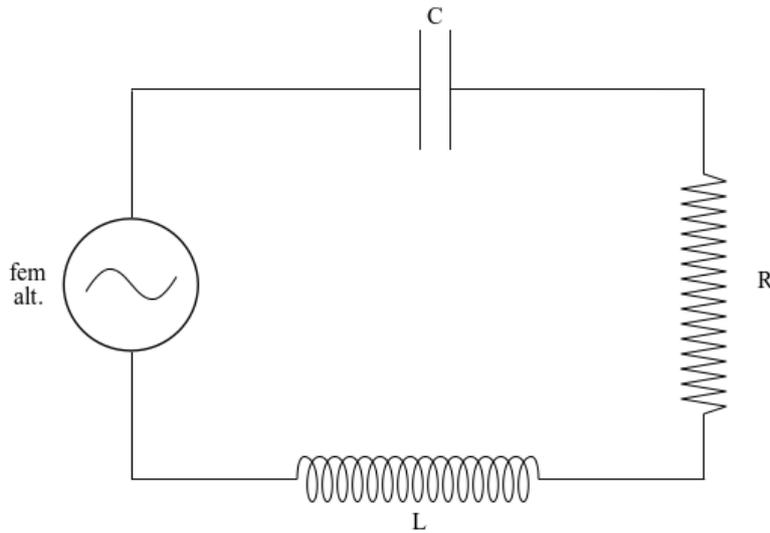


Figura 15: Modelo do Circuito RLC-Fem [7]

De modo, semelhante já que o Circuito RLC+Fem corresponde a um MHAF, ou seja, um caso forçado. Ele é um MHA a mais de um termo periódico forçado. Onde no caso Mecânico tínhamos uma força externa $F(t)$, no caso Elétrico será a $V_{ddp} \cos(\omega t)$ da fonte ou o Campo Elétrico. Como foi visto anteriormente no RLC, a EDO do circuito agora recebe o termo forçado e fica na forma [9]

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_{ddp} \cos(\omega t) \quad (35)$$

De modo semelhante ao que vimos no MHA \mapsto MHAF, essa EDO do RLC+Fem já foi vista anteriormente no caso do circuito RLC, só como dito anteriormente, temos a adição de uma fonte externa no circuito. Veja o comparativo. Abaixo

RLC	RLC+Fem
$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$	$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_{ddp} \cos(\omega t)$

De igual forma, essa nossa EDO é não homogênea, o que nos faz lembrar do Oscilador Harmônico Amortecido Forçado que e a solução geral deve se dividir na soma das soluções parciais. Teremos aqui também uma

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \quad (36)$$

onde q_h é a solução homogênea do circuito RLC, e a q_p a solução particular do RLC+Fem.

Seguindo a mesma ideia para resolver o MHAF, vamos supor uma solução do tipo

$$q_p(t) = D \cos(\omega t - \delta)$$

que nos leva após passagens de cálculos e algébricas, a uma solução particular final $q_p(t)$

$$q_p(t) = \frac{V_{ddp}/L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R\omega}{L})^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (37)$$

A solução de $q_h(t)$, já obtemos pois resolvemos o caso homogêneo (subamortecido) do Circuito RLC, que nos forneceu

$$q_h(t) = Qe^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_1 t + \theta)$$

Todavia, temos aqui a solução dos demais casos:

$$q_h(t) = \begin{cases} q(t) = Qe^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} t + \theta) & \text{Subamortecido} \\ q(t) = C_1 e^{-\frac{R}{2L}t + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} t} + C_2 e^{-\frac{R}{2L}t - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} t} & \text{Superamortecido} \\ q(t) = C_1 e^{-\frac{R}{2L}t} + C_2 t e^{-\frac{R}{2L}t} & \text{Criticamente Amortecido .} \end{cases}$$

o caso subamortecido foi usado para que houvesse uma similaridade na compreensão do texto, já que o OHAF foi assimilado ao caso Subamortecido ao apresentar a solução homogênea.

Agora, sabemos que $q(t)$ é a soma das soluções

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$$

que finalmente, nos leva a [12, 13]

$$q(t) = q_h(t) + \frac{V_{ddp}/L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + (\frac{R\omega}{L})^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (38)$$

O comportamento, tanto de OHAF quanto do RLC+Fem, já eram esperados. Já que são o OHA e circuito RLC, a mais de uma condição particular que os mantém forçado.

De maneira semelhante do que fizemos na recapitulação dos valores de ω para o MHAF, vamos agora tabelar os valores ω do RLC+Fem. Em comparação com o equivalente mecânico.

Tabela 5: Quadro das constantes relacionadas com o OHAF e o RLC+Fem, um quadro semelhante foi encontrada no caso do OHA, porém temos as adições das contantes que dependem do efeito forçado do nosso sistema.

OHAF	\mapsto	RLC+Fem
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	\mapsto	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
$\gamma = \frac{b}{2m}$	\mapsto	$\gamma = \frac{R}{2L}$
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}$	\mapsto	$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$
$\omega_2 = \sqrt{(\frac{b}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$	\mapsto	$\omega_2 = \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$
ω	\mapsto	ω

Por fim, mostraremos um quadro da equivalência dos comportamentos tanto de OHAF e RLC+Fem, assim, como já foi feito no caso da comparação dos casos amortecidos.

Tabela 6: Quadro das semelhanças entre o OHAF e o Circuito RLC+Fem

EDO do OHAF	EDO do Circuito RLC+Fem
$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_{ddp} \cos(\omega t)$
Solução do OHAF	Solução do Circuito RLC+Fem
$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$	$q(t) = q_h(t) + q_p(t)$
$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta)$	$q_p(t) = \frac{V_{ddp}/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta)$
$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$ (Sub.) $x_h(t) = C_1 e^{-\gamma + \omega_2 t} + C_2 e^{-\gamma - \omega_2 t}$ (Sup.) $x_h(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$ (Crit.)	$q_h(t) = Qe^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta)$ $q_h(t) = C_1 e^{-\gamma + \omega_2 t} + C_2 e^{-\gamma - \omega_2 t}$ $q_h(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

5 Maquete e aplicação no Ensino de Física

Neste capítulo, dedicaremos a nossa atenção totalmente a parte prática. Onde desenvolveremos, e descreveremos de maneira mais clara possível o que, e como foi feito os procedimentos para a confecção da maquete educacional. Carinhosamente a maquete foi nomeada por mim Daniel, como *Camouflaged Ghost*, cujo significado é *Fantasma Camuflado*. A escolha desse nome remete a todas as tentativas que não tiveram sucesso, tanto por problemas técnicos, como mecânicos, e em especial onde não conseguimos achar numa maquete que havia ficado como definitiva o seu problema. Até uma sugestão conjunta minha com o Prof. Fernando para uma nova confecção mudando o tamanho, e a dinâmica do aparato.

5.1 Maquete

A maquete que usamos neste trabalho tem um objetivo de ser de baixo custo para que se possa ser construída e reproduzida livremente. Em vista disto todos os materiais usados na construção dela foram de reciclagem (Ver figura 16).



Figura 16: Visão Real da montagem experimental

e as dimensões aproximadas da maquete, usaram o padrão altura x comprimento x profundidade, a maquete tem:

$$(15 \times 100 \times 10) \text{ cm}$$

5.1.1 Materiais Utilizados

Para a reprodução da maquete educacional foi usado madeira sintética (MDF), motor de circulador de ar vertical, duas Seringas de 20mL, raia de moto, três CD's, um Par de Borboleta-Parafuso, um carro e uma moto do tipo *HotWheels*.

5.1.2 Montagem

A maquete educacional foi construída em 2 partes, a do Oscilador e a da Pista de Oscilação.

Parte do Oscilador

Foi fixado o motor do Circulador de Ar (AC 110v - 120v - 50/60Hz 4W - 33/39 R.P.M - CCW/CW), este fixado numa madeira que servira de calço para o motor (Ver figuras 17 e 18).



Figura 17: Esquema de Fixação do Motor

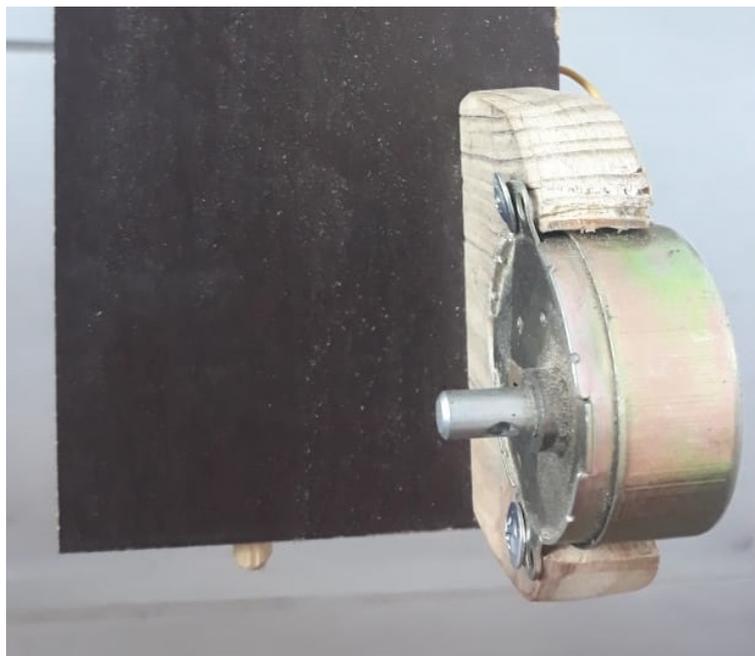


Figura 18: Visão Superior da Fixação do Motor

Foi preciso confeccionar um CD triplo, visto que teríamos que furar o CD para que o conjunto Borboleta-Parafuso conseguissem fixar de maneira firme no CD. O tamanho do friso a ser cortado no CD Triplo (Ver figura 19) foi de $(52,0 \pm 0,5) [mm]$ ou $0,052 [m]$ no *SI*

A escolha de furar o CD para a adição desse sistema, foi para que o friso que ficasse dentro do nosso CD servisse para que pudéssemos aumentar e diminuir o raio de ação do nosso oscilador, fazendo com isso oscilações de frequências diferentes, o que nos ajudaria a verificar a integridade do efeito físico-matemático (Ver figuras 19 e 20).

A função do conjunto Borboleta-Parafuso era que ele servisse de haste de transmissão no giro

do motor, transformando assim um movimento circular em um unidimensional.

Feito isso, fixamos o sistema CD + Haste de transmissão ao nosso motor através de cola “Durepox”.



Figura 19: Esquema do CD Triplo com a engrenagem do motor



Figura 20: Esquema do CD Triplo com a Haste de transmissão

Depois de descrito o procedimento, segue a figura da parte do Oscilador, da maquete educacional (Ver figura 21)



Figura 21: Parte do Oscilador da maquete

Pista de Oscilação

Para que houvesse uma oscilação otimizada colocamos a nossa “pista” na altura do centro do oscilador. Como pode ser verificado na figura 17, mas para que isso fosse realizado com qualidade, cortou-se pedaços de madeira a fim de usar como calço para alcançar essa altura.

Para a ligação entre a parte “Oscilador” e a parte “Pista”, usou-se a raia de moto, como a haste de transmissão.

Essa ligação pode ser tanto visualizada na Visão Geral da maquete, quanto na parte do Oscilador (Ver figuras 12 e 17).

A parte que unidimensiona o movimento, usamos uma adaptação das duas seringas, usando uma e fazendo da outra uma luva, isso foi realizado para que o nosso êmbolo tivesse um espaço linear maior para ficar confinado, fazendo com que diminuísse as oscilações verticais no movimento (Ver figura 22).



Figura 22: Esquema do Embolo

O próximo passo dado foi a parte onde o nosso carrinho iria ficar confinado. Tomou-se essa posição de confinamento para que o movimento de “ricochete” do sistema não o lançasse de maneira aleatória, ao confinar delimitou-se apenas o movimento unidimensional para ele (Ver figura 23).

Esta pista de oscilação tem dimensão de $(3 \times 35 \times 1,5) \text{ cm}$.



Figura 23: Visão da Pista de Confinamento

Agora, para as molas testamos alguns tipos dentre elas, molas plásticas de caderno (retalhos das molas), molas de Chuveiro, e outros tipos molas de aço. Para que, com tamanhos e molas diferentes, fosse possível obter uma maior quantidade de possibilidades para o aparato educacional. De mesma forma usamos e tentamos usar o máximo de terrenos (superfícies) possíveis para que a o “atrito” fosse também diferente, usamos como superfície couro, a madeira, e uma especie de couro aveludado. (Ver figura 24).

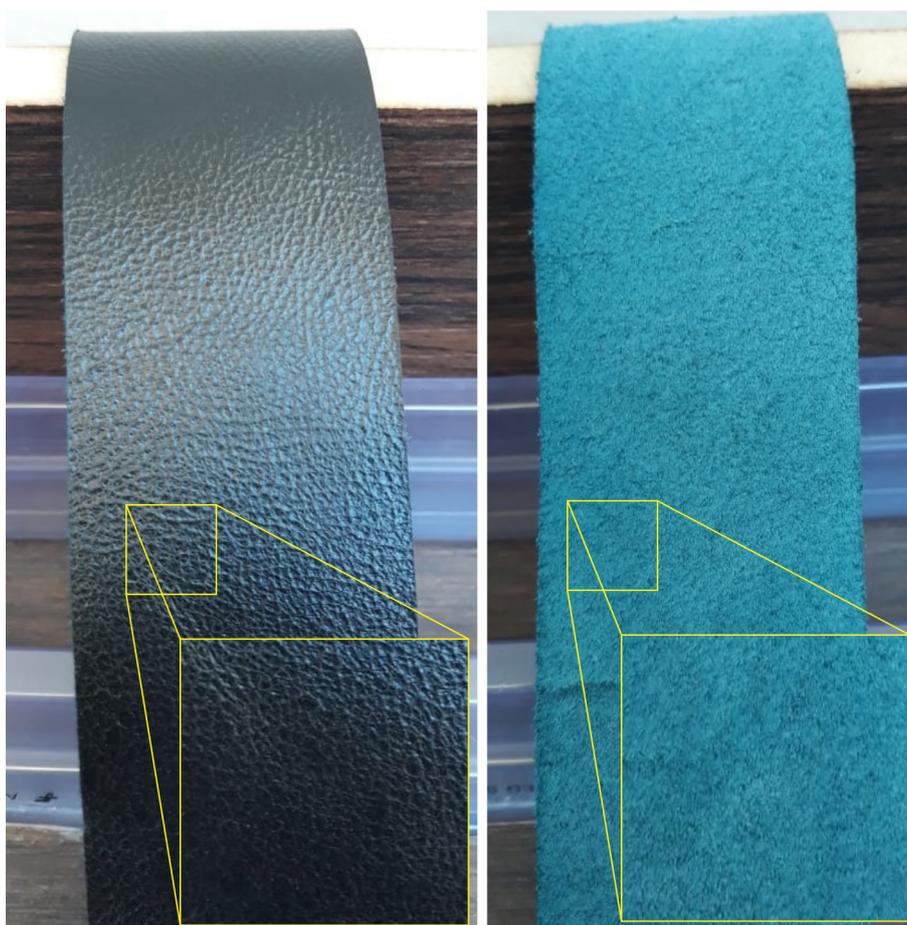


Figura 24: Superfícies de Atrito

Como já descrito na confecção, segue a figura da Pista de Oscilação, da maquete educacional (Ver figura 25)



Figura 25: Pista de Oscilação da maquete.

Pontos Positivos e Negativos na construção da maquete

Obviamente que um trabalho manual é difícil, ainda mais na confecção de uma maquete. Nela estragamos diversas peças e construímos vários outros pré-modelos que não nos deram resultados “aceitáveis”.

Mas dos protótipos que passaram do papel a maquete que hoje temos é o segundo modelo de maquete educacional para o ensino de osciladores amortecidos construídos.

É extremamente gratificante ver o processo ser concluído, ainda mais numa construção de uma maquete, a conclusão nos deixa realizados. Claro que não podemos esquecer que como é uma maquete feita de material de baixo custo, e também por ser confeccionada manualmente sem todas as ferramentas e materiais específicos otimizados, que podem a grosso modo apresentar problemas mecânicos.

Tive maior dificuldade e, ainda encontro, nas parte das molas, visto que como é feito de material de baixo custo, é difícil encontrar molas que sirvam para o nosso sistema. Em grande parte as molas eram muito rígidas o que dificultou em muito encontrar molas que nos fossem uteis. E mesmo as que encontrei elas não são otimizadas assim, o que pode ser feito, mas que acaba envolvendo um custo alto e mandar fabricar molas, com coeficientes proporcionais a força de tração do motor, mas devido o custo é inviável.

A outra parte foi encontrar um motor que fosse possível, através dele, construir uma maquete, e com a sugestão do meu Orientador, construímos ela com um motor de um Circulador de Ar Vertical. Mas não era apenas isso, precisávamos também de um modo de alterar a Amplitude de Oscilação. Uma saída foi alterar o raio o tamanho do braço de oscilação o que também foi algo complicado nos protótipos anteriores, pois podiam não ficar fixos com o passar do tempo, mas ao usar a borboleta e o parafuso, houve uma fixação através de rosca e pressão o que nos possibilitou durabilidade diante dos movimentos. Mas para que isso fosse possível, tivemos que achatar o parafuso para que ele não escorregasse girando pelo friso criado, e então a saída foi lixar o parafuso para que ele se prendesse ao friso e não corresse ao girar tracionando.

E claramente não podemos esquecer das dificuldades (impossibilidades para encontrar equipamentos) e/ou ferramentas para que a construção fosse possível de se realizar.

5.2 Proposta de Aulas

A proposta de aula que será sugerida terá a forma Construtivista para aplicação no Ensino Médio, e planejada para 2 aulas semanais (50min) num total de 8 aulas.

E acontecerá no 1º trimestre do 1º Ano do EM, com uma média de ± 40 alunos em cada sala, logo após trabalhar com as Leis de Newton, e resolver os “tipos” de planos inclinados. O porquê da escolha nesse período é simples, o aluno já vai ter visto a questão das forças concorrentes (decomposta) nos eixos, já teria trabalhado com funções seno, cosseno e ângulos. Reconhecerá também que existe a força de atrito (objeto - superfície). Isso tudo já que ele é capaz de identificar e até talvez resolver sozinho exercícios de plano inclinado. Porém não de maneira diferencial!

Uma outra curiosidade da nossa maquete educacional é que o professor pode reapresentá-la no 3º Ano do EM, para de forma simples terem o contato e entenderem sobre elementos de circuitos elétricos, e obviamente aproveitar e revisar sobre os Osciladores que eles viram com a maquete no 1º Ano do EM.

Aula 1

Na primeira aula, serão revisadas as funções: seno e cosseno, juntamente com apresentação dos seus comportamentos gráficos. Com esses gráficos poderemos trabalhar os conceitos de Ondas, falar de Crista e Vale da onda, frequência, mostrar período, amplitude e ainda os tipos de onda, etc.

Aula 2

Será mostrada a maquete e inicializaremos indagando sobre.: *O que aconteceria com um corpo se pressionado a uma mola?*

Após iremos tomar rumos falando e acrescentando ao conhecimento do aluno sobre a existência agora de uma força restaurativa. Seria colocada no quadro a lei de Hooke, e demonstrando matematicamente o sinal (–) da força e mostrar a sua ação no corpo ligado a mola. Neste momento a maquete sairia de simplesmente um experimento e começaria a tomar ação, iria puxar o sistema e abandoná-lo e ver o movimento.

Aula 3

Com os alunos já indagados e com lembranças do movimento, inicializaríamos a aula fazendo o experimento funcionar, ou seja, puxando e abandonando o corpo da máxima amplitude possível. Durante o progredir do experimento e com mãos da lei de Hooke, iremos fazer um exercício para fixação e aplicação do novo conceito visto, a lei de Hooke. E falaríamos do caso ideal onde não foram levados nenhum outro tipo de força além da de Hooke, o que caracterizaria o Movimento Harmônico Simples (MHS). Enquanto a aula prossegue o aparato terá diminuído a sua amplitude ou até mesmo parado, neste momento entraríamos mais uma vez criando, “pulga atrás da orelha”(termo do autor), questionando sobre.: *O porquê parou?*

Aula 4

De semelhante modo, a aula será iniciada com o aparato sendo colocado em pratica, mas, dessa vez com uma amplitude menor, para que pudesse parar mais rápido. Neste momento pediremos para tentarem sugerir o porquê do movimento parar, já que ele era oscilatório e constante comparado com o seno e cosseno? [R.: Atrito Professor].

Teremos então a chave lógica necessária para começar a ideia de Movimento Harmônico Amortecido(MHA), introduzindo agora na equação a lei de hooke e a força de arraste de $F = -bv$.

Aula 5 - 6

Resolveremos o exercício do MHS com as adições de forças de atrito e até mesmo dependendo do desenvolvimento da turma, comentaremos ou até mesmo resolveremos o famoso exercício do barco num rio com o motor recém-desligado, o que deixa as ideias um pouco mais concretas do mundo não idealizado.

Resolveremos a equação do segundo grau que dispõe os tipos de amortecimento. Mostraremos o gráfico comparativo dos tipos de amortecimento que foram apresentados neste trabalho.

Aula 7

De maneira análoga iniciaremos a aula com o aparato funcionando, falaremos sobre:

E se tivesse uma maneira de manter esse movimento amortecido constante? Para que ele não cessasse

E então ligar-se-a o motor externo, esperaremos com que ele harmonizasse com a ajuda do gráfico do MHAF Harmonizado mostraremos a parte particular e homogênea da equação, e explicaremos que após um tempo ela teria a frequência de oscilação, a mesma do motor. Neste momento se torna muito difícil resolver a equação deste movimento sem o uso de Calculo Avançado. Então falaria que existem métodos matemáticos que resolvem os mesmo já citados neste trabalho e mostraria uma solução do MHAF e o seus casos.

Aula 8

Nesta aula será utilizada e finalizada, para cumprir uma atividade de verificação dada no inicio da aula a ser cumprida em dupla, será pedido para descreverem teoricamente e na sua maneira os tipos de osciladores abordados.

Durante a produção da atividade o aparato estará hora ligado, e após um tempo desligado, para o fim de ajudar lembrar as etapas do avanço do conhecimento dos Osciladores, que foram abordados.

6 Conclusões

Após estudarmos os modelos de Osciladores, e seus correspondentes elétricos, que ao compararmos tínhamos a total intenção de comprovar o fenômeno idêntico que ocorre com o sistema elétrico, que é menos visível em análise comparativa com o Mecânico. Ao passarmos pelos modelos Simples, Amortecido e Forçado, foi possível comprovar que o modelo amortecido e forçado na natureza é algo em especial muito difícil, podendo se dizer que é impossível observar a parte que particulariza e também a que homogeniza o movimento.

Uma saída de êxito deste trabalho foi a criação da maquete educacional que contribuiu para o alunos, sejam eles da educação básica, ou da graduação ver em ação a parte que particularizava o movimento e conseqüentemente por ter modo forçado o que homogenizou o movimento. E que pode e tem sua função demonstrar e esclarecer de maneira visível essa contexto de forma contextualizada aos alunos estudantes do movimentos oscilatórios da graduação, quantos do ensino médio.

Os gráficos que foram abordados neste trabalho nos remetem aos comportamento da nossa maquete, os amortecimentos que foram verificados no gráfico da figura 9. Levam consigo o comportamento das constantes elásticas do oscilador mecânico, o amortecimento supercrítico que vemos é o mesmo que é usado na suspensão dos veículos, pois ao passar por uma lombada precisávamos que retornassem ao seu ponto de equilíbrio, e com a maquete conseguimos ver que o comportamento supercrítico é modo bem particular e peculiar, onde precisávamos que o termo de amortecimento e o de frequência de oscilação fossem coincidentes. E também de semelhante modo as transformações da corrente no sistema elétrico em outros modos de frenagem na parte elétrica, também tivessem os fatores iguais.

E finalmente conseguimos com a maquete montar um sequência de aula que fossem contextualizadamente claras, que possibilitassem para usa-la em sala de aula.

Referências

- [1] C. C. Colucci, *Mecânica Clássica*. EDUEM, 2012.
- [2] Halliday, Resnick, and J. Walker, *Fundamentos de Física, Vol.2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*. LTC, 2009.
- [3] T. P. A. and M. Gene, *Física para Cientistas e Engenheiros, Vol.1: Mecânica, Oscilações e Ondas*. LTC, 2012.
- [4] F. D. Guedes and N. A. Freiria, *Equações Diferenciais Aplicadas, 3.ed.* IMPA, 2008.
- [5] “Métodos de resolução de equações diferenciais e análise de fourier com aplicações.” Disponível em: <<https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~lmagal/TEED.htm>> Acesso em 03 mai. 2019.
- [6] “O pêndulo simples.” Disponível em: <http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/universitario/cap13/cap13_35.htm> Acesso em 10 mai. 2019.
- [7] R. L. de Souza, *Estudo comparativo dos principais Osciladores Físicos*. Universidade Estadual de Maringá, 2018.
- [8] S. R. Keith, *Mecânica*. Campus, 1996.
- [9] T. P. A. and M. Gene, *Física para Cientistas e Engenheiros, Vol.2: Eletrecidade e Magnetismo, Óptica*. LTC, 2011.
- [10] A. Bertuola, M. Hussein1, and M. Pato, *O oscilador harmônico amortecido forçado revisitado*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 327 - 332, 2005.
- [11] V. P. de Barros, *Osciladores forçados: harmônico e paramétrico*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 4, p. 549-554, 2007.
- [12] “Circuito rlc com fonte alternada.” Disponível em: <<http://www.ufjf.br/fisica/files/2013/10/FIII-09-03-Circuitos-RLC-com-fonte-alternada.pdf>> Acesso em 08 mai. 2019.
- [13] “Circuito rlc série.” Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod_resource/content/1/RLC_caos.pdf> Acesso em 08 mai. 2019.