UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

ARTHUR ERNANDES TORRES DA SILVA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

MARINGÁ, PR
2019

ARTHUR ERNANDES TORRES DA SILVA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

MARINGÁ, PR
2019

ARTHUR ERNANDES TORRES DA SILVA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gardelli

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. DANIEL GARDELLI – Orientador
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. PEDRO FALCÃO PRICLADNITZKY
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. BRENO FERRAZ DE OLIVEIRA
Universidade Estadual de Maringá - UEM

MARINGÁ, PR
2019

Dedico este trabalho ao meu tio Miguel.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pela minha vida, por me trazer força e coragem nos momentos difíceis, e a Nossa Senhora que iluminou meu caminho.

Aos meus pais, Aluizio e Cidinha, pelo apoio incondicional ao longo da minha jornada.

À minha noiva, Vanessa, pelo infinito amor, carinho e paciência. Por ser a minha maior fonte de inspiração e exemplo.

Ao Prof. Dr. Daniel Gardeli, pelo suporte ao longo do meu trabalho e por tudo o que me ensinou.

Aos meus colegas da graduação: Gabriel, Ariane, Carlos, Paulo, Luan, Andreia, Camila, Elaine, Emanuel, Leandro e Ricardo, por fazerem esses dois anos inesquecíveis.

À professora Roze de Matos, por ser um exemplo de profissionalismo e dedicação à docência.

Aos professores Pedro Falcão e Patrícia Coradim, pelo auxílio nos estudos.

A todos os professores do departamento de física da UEM que contribuíram para a minha formação.

RESUMO

O princípio da mínima ação foi fundamental para que físicos e matemáticos da história desenvolvessem um novo domínio da física, a mecânica analítica, que hoje é considerada como um meio alternativo de calcular as características dinâmicas de um sistema físico. Considerando a importância desse assunto, este trabalho tem como objetivo traçar um panorama histórico dos estudos que propiciaram o desenvolvimento e a aplicação do princípio da ação mínima. Para tal intento, ampara-se nas premissas de Martins e Silva (2007) e Moreira (1999), os quais trazem concomitantemente os aspectos científicos e extra científicos que nortearam a elaboração deste trabalho. Finalizada a revisão histórica, o estudo partiu para uma análise crítica acerca de três livros-texto, com o intuito de evidenciar a relevância de uma abordagem histórica no material para a aprendizagem desse princípio físico.

Palavras-chaves: Maupertuis, Dinâmica, Luz.

ABSTRACT

The principle of least action was fundamental for physicists and mathematicians of history to develop a new domain of physics, analytical mechanics, which today is regarded as an alternative means of calculating the dynamic characteristics of a physical system. Considering the importance of this subject, this paper aims to draw a historical overview of the studies that led to the development and application of the principle of minimum action. For such purpose, it is based on the premises of Martins e Silva (2007) and Moreira (1999), which concomitantly bring the scientific and extra-scientific aspects that guided the elaboration of this work. After the historical review, the study started to critically analyze three textbooks, in order to highlight the relevance of a historical approach in the material to the learning of this physical principle.

Keywords: Principle of least action, Maupertuis, Dynamic, Light.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A natureza da luz sempre foi intrigante para o homem, seja em sua composição ou em sua propagação no espaço. Entender seu funcionamento foi algo que despertou interesse e chamou a atenção dos sábios antigos, babilônios, cientistas da era medieval, até das grandes mentes da era contemporânea. Na busca por explicar o seu comportamento, o homem encontrou não só leis físicas capazes de descrever os fenômenos luminosos, mas também alguns princípios que serviram para explicar, de forma geral, boa parte dos fenômenos naturais na física clássica, em mecânica quântica e relatividade. Tais conceitos ficaram conhecidos como princípios variacionais.

Heron de Alexandria (10 d.C. a aproximadamente 80 d.C.), foi o primeiro a buscar respostas para explicar o comportamento da luz. Através de suas observações, enunciou pela primeira vez um princípio variacional, o qual mais tarde serviria de inspiração para Al Hazem – um cientista do oriente médio que desenvolveu novas teorias e instrumentos baseados no comportamento de feixes luminosos, como por exemplo a câmara escura e os óculos. Séculos depois, o princípio da ação mínima reaparece nas discussões em forma de cartas trocadas entre Descartes, Fermat, d'Arcy, d'Alembert e Maupertuis, sendo este último o primeiro a estabelecer um formalismo matemático e uma interpretação para o princípio da mínima ação.

O resultado de Maupertuis se solidifica com a entrada de Euler no cenário, um brilhante físico e matemático que teve contribuições grandiosas para a ciência. Junto a ele, Lagrange desenvolveu uma teoria nova, fundamentada no cálculo variacional, estabelecendo um método alternativo ao de Newton para calcular a dinâmica de um sistema físico. Pouco tempo depois, Hamilton, baseado na mecânica lagrangeana, vem com uma reformulação, lançando o Princípio de Hamilton e expandindo tais conceitos para outros domínios da física, como a mecânica quântica. Posteriormente, outros cientistas também tiveram um papel determinante na história da ciência com novas teorias envolvendo princípios variacionais, porém um de grande destaque foi Richard Feynman, que enunciou o princípio da mínima ação para sistemas microscópicos e obteve sucesso em explicar diversos sistemas quânticos; essa descoberta ficou conhecida como integrais de Feynman.

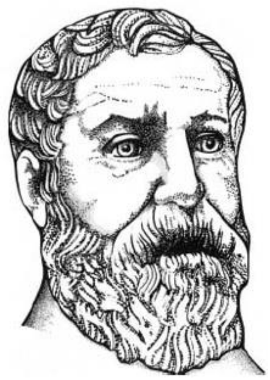
À vista disso, o princípio da mínima ação foi um alicerce fundamental para a construção da mecânica analítica, o que é objeto de estudo para os acadêmicos no curso de graduação em física. Portanto, este trabalho tem como propósito trazer uma abordagem histórica da formação e da aplicação do princípio da mínima ação e de como ela é ensinada nos livros textos aos estudantes. A análise crítica acerca de três referências de livros do curso de mecânica clássica tem o intuito de mostrar que não basta apenas expor conceitos matemáticos para que o assunto seja bem apresentado, pois é indispensável uma explicação história dos conceitos para trazer uma aprendizagem significativa.

2. CAPÍTULO 1 – PRIMEIROS ESTUDOS DA LUZ

2.1. HERON DE ALEXANDRIA

Heron foi um geômetra, inventor e escritor que viveu em Alexandria, no século I da era cristã do período Romano, entre o período de 10 d.C. a 80 d.C. Ele escreveu muitos trabalhos sobre instrumentos mecânicos. Dentre eles, destaca-se a obra intitulada *Pneumatica*, em que Heron descreve o funcionamento de uma máquina a vapor, a Eolípila. No entanto, vale destacar que ele não é o criador da mesma, uma vez que esse dispositivo já era conhecido por Vitruvius no século passado (Martins e Silva, 2013).

Figura 1: Heron (10 d.C a 80d.C.)



Fonte: Disponível em: <clubes_obmep.org.br/blog/b_heron -dealexandria/>. Acesso em: 18.dez.19.

Heron trouxe ainda uma grande contribuição para a matemática a partir de seu outro trabalho denominado *Geométrica*. Nesse estudo, o autor demonstra o cálculo da área de figuras geométricas regulares de 3 a 12 lados, círculos, elipses, superfícies cilíndricas, cones, segmentos parabólicos e esferas. Além disso, Heron de Alexandria é conhecido por uma obra importante no ramo da matemática, nomeada *A Métrica*, em que ele determina a área do triângulo em função dos três lados.

A pesquisa de Heron não era restrita apenas a dispositivos mecânicos e ao cálculo de volume de sólidos, mas também era objeto de estudo o comportamento da luz. Para Heron, a lei da propagação retilínea da luz e da reflexão foram explicadas utilizando o princípio do caminho mínimo. Tal princípio foi publicado em um dos seus trabalhos, conhecido como Katoptrika, o qual foi perdido e existe apenas uma tradução latina medieval. Na época, catóptrica era a parte da óptica que descrevia os fenômenos de reflexão da luz e as imagens formadas nos espelhos e, tais efeitos luminosos, Heron já buscava descrevê-los.

> Por ela [pela catóptrica], realmente, são construídos espelhos que mostram a direita à direita, e a esquerda à esquerda, enquanto os espelhos comuns mostram os lados opostos, contra a natureza. Através deles é também possível ver nossas costas, e também nos

> vermos de cabeça para baixo, com três olhos e dois narizes, e o rosto retorcido, como se sentisse dor. [...] (B.G. Teubner, Stuuugart, 1900, apud MARTINS E SILVA, 2013)

Segundo Heron, os raios de luz executam trajetórias retilíneas e esse movimento é assim pois é o mais curto e o mais rápido:

> Vemos que a visão segue linhas retas a partir dos olhos, o que pode ser assim considerado. Tudo aquilo que se move com velocidade continua, move-se em linha reta, como vemos a flecha lançada pelo arco. Por causa da violência com que é impelida, ela tenta se mover em uma linha com a menor distância possível, não tendo tempo para demoras, ou seja, para percorrer uma linha com maior distância, o que não é permitido pela violência transmitida. Assim, por causa de sua velocidade, o objeto tenta se mover do modo mais curto. E a menor linha entre dois extremos é a reta. (B.G. Teubner, Stuuugart, 1900, apud MARTINS E SILVA, 2013)

Vale frisar ainda que, para Heron, a velocidade da luz é infinita e, como consequência, tem-se que os raios visuais não desviam e percorrem o menor caminho entre dois pontos, que é uma reta. Ademais, segundo o autor, só era possível visualizar objetos porque os raios luminosos são provenientes do observador e não do objeto.

> Os raios emitidos por nós se movem com uma velocidade infinita, como será mostrado. Pois se, depois de fechar os olhos nós olhamos para o céu, [os raios] não demoram nenhum tempo para atingir o céu. Logo que olhamos, vemos os astros, embora a distância seja infinita, por assim dizer. E mesmo se essa distância fosse maior, aconteceria a mesma coisa, e assim é claro que os raios são emitidos com velocidade infinita. Por causa disso, eles não têm interrupção, nem desvio, nem quebra, mas se movem pelo caminho mínimo, ou seja, por uma reta. (B.G. Teubner, Stuuugart, 1900, apud MARTINS E SILVA, 2013)

Todas as três leis da óptica – reflexão, refração e propagação retilínea da luz – podem ser explicadas utilizando o conceito de mínimo. E é justamente isso que concede à Heron de Alexandria o crédito de descrever pela primeira vez um princípio variacional da física.

2.2. IBN AL-HAYTHAM

Figura 2: Al Hazem (965 a 1040)

Fonte: Al-Khwarizmi – The Inventor of Algebra

Conhecido no ocidente como Al Hacen (no latim), e mais tarde como Al Hazem, nasceu em Basra, onde atualmente é o Iraque, por volta de 965 depois de Cristo, e foi considerado um dos maiores pensadores do oriente. Trouxe contribuições na matemática, astronomia, medicina e, principalmente, na óptica. Até o século 13, seus trabalhos já haviam sido traduzidos para o latim e serviam de referência para os fabricantes de lentes europeus.

A história conta um episódio determinante na vida de Al Hazem. Segundo historiadores, ele era um grande sábio da época e foi convocado para ir ao Egito a pedido do governante Al-Hakim bi-Amr Allah, com o propósito de construir uma barragem no rio Nilo e controlar o fluxo de água. Entretanto, Al Hazem percebeu que não era possível fazer o trabalho e, para não sofrer a punição do governante, ele se declarou louco e foi condenado à prisão domiciliar por dez anos, sendo libertado apenas após a morte do soberano Al-Hakim. Durante o período que ficou encarcerado, Al Hazem escreveu diversos trabalhos: *Risalab fi al-Dawa*, o Tratado sobre a Luz; *Mizan al-Hikmah*, Equilíbrio da sabedoria; *Maqalah fi al-Qarastun*, O Tratado sobre Centros de Gravidade; *Al-Shukuk al Batlamynus*, Dúvidas de Ptolomeu.

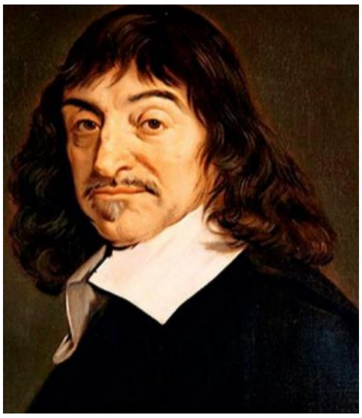
Dentre suas obras, a mais influente foi a *Kitab Al Manazer*, O Livro da Óptica. Nele, Al Hazem analisou o espalhamento da luz em suas cores constitutivas por meio de experimentos, e, como consequência, descobriu as leis da refração, deu uma explicação correta para o aparente aumento do tamanho do Sol e da Lua quando estavam no horizonte, e descreveu como a luz é refletida em espelhos. Nesse livro principal, está contido o ensaio *Risala fi al-Dawa*, em que Al Hazem investiga as propriedades de luminância e a dispersão da luz através de meios transparentes e translúcidos. Ademais, uma de suas descobertas mais conhecidas foi chamada de *Albeit Almuzlim*, hoje conhecida como câmara escura. Estudou ainda a anatomia e os mecanismos de visão, totalizando mais de 90 trabalhos escritos ao longo de sua vida.

As obras de Al Hazem foram decisivas para um enorme avanço no estudo da óptica e, mais tarde, na invenção de instrumentos como telescópios, lentes e óculos. Ele contradiz a teoria da visão de Ptolomeu e Euclides que, até aquela época, pregava que objetos eram vistos por raios de luz provenientes dos olhos do observador, e então, passa a afirmar que os raios são oriundos dos objetos que estão sendo observados. Isso fez com que a teoria da luz de Al Hazem fosse diferenciada de qualquer outra que existiu anteriormente. Seus trabalhos foram até reconhecidos por Newton, como influentes e decisivos para a formulação da óptica física (Tbakhi e Amr, 2014).

Ibn Al-Haytham, ou também conhecido como Al Hazem, foi considerado o pai da ótica moderna, e deixou um legado importante a respeito de sua metodologia de investigação, pois, segundo ele, era necessário o uso de experimentos para certificar se a teoria estava correta. Tal processo ficou conhecido como método científico moderno. Seus trabalhos também foram influentes para outros cientistas de alto calibre que surgiram *a posteriori*, como René Descartes e Christian Huygens.

2.3. A CIÊNCIA DE DESCARTES

Figura 3: Descartes (1595 a 1650)



Fonte: Descartes – Meditações Metafísicas

Nasceu em 1596, na cidade de La Haye, na França. Entre 1604 e 1614, René Descartes estudou no colégio interno jesuíta La Fleche. Por ter se desapontado com o ensino que recebeu e por compreender que a filosofia escolástica não o conduzia a nenhuma verdade indiscutível, René abandona os estudos das letras e se alista voluntariamente no exército militar de Maurício de Nassau. Dessa forma, começa sua jornada de conhecer mundo, que, segundo Pierre Frederix (1976), era uma forma de Descartes mostrar que era um jovem sábio disfarçado de soldado (Vergez e Huisman, 1976).

Na Holanda, por onde morou mais de 20 anos, influenciado pelas ideias de Galileu e seu amigo Isaac Beeckamann, Descartes começa seus estudos em diversas áreas, especialmente na matemática. Em 1628, escreveu um pequeno livro em latim "Regras para a direção do espírito" no qual manifesta sua ideia de que o espírito do homem deve possibilitar a criação de um método universal. No ano seguinte, começa a trabalhar em um novo livro, que defende o heliocentrismo, chamado de "Tratado do Mundo", porém, mesmo morando em um país protestante, ele é intimidado pela condenação de Galileu em 1933 e decide não o publicar (Kontic, 2018).

Em 1637, Descartes escreve três pequenos ensaios científicos, "A Dióptrica", "Os Meteoros" e a "Geometria". Essas obras o ajudaram a criar seu grande livro, chamado "Discurso do Método", o qual apresenta para a comunidade intelectual da Europa suas ideias mediante a busca por uma unificação dos saberes, ou seja, ele analisa e estuda o modo pela qual a ciência é feita através de um método constituído de etapas para um melhor entendimento do conhecimento (Chiarottino e Freire, 2013).

No ano de 1641, ele publica as "Meditações Sobre a Filosofia Primeira", em que problematiza a existência desse mundo, da dúvida, do próprio indivíduo e também desenvolve a chamada dúvida hiperbólica. Esse último método é baseado no conceito de que não se pode confiar em nada, é preciso duvidar de tudo para gerar conhecimento, isto é, a dúvida é o que guia o conhecimento.

A filosofia de Descartes é mecanicista, ou seja, para ele, o mundo é formado apenas por corpo e movimento. Isso fica claro no livro Discurso do Método, em que Descartes apresenta seu método que, posteriormente, servirá de prefácio para a discussão sobre outras três obras: *Os meteoros*[1]; *A dióptrica*, que aborda o papel da luz e a percepção de cores; *A geometria*, que é fundamental para Descartes, uma vez que a geometria trata a natureza dos objetos físicos de maneira puramente matemática. Entretanto, é preciso ressaltar que a luz não entra em sua geometria, porém seus efeitos causados são analisados por ela.

De acordo com Ildeu de Castro, o Discurso do método juntamente com os três ensaios pode ser sintetizado em alguns pontos:

I. A luz atravessa com maior facilidade os corpos mais densos.

[1] Vale lembrar que naquela época, qualquer evento astronômico era chamado de meteoro, também denotados de eventos supralunares.

Isso significa que, para Descartes, a luz se propaga com maior velocidade nos corpos mais densos e com menos velocidade nos corpos menos densos.

II. A velocidade da luz é infinita: a pressão é propagada em um instante.

Naquela época, os efeitos da luz e ela, em sua essência, tinham o comportamento transmutado em consequência das condições climáticas.

III. O universo é pleno e não existe vácuo. A luz é entendida não como matéria em movimento, mas como uma inclinação a se mover.

Na ciência cartesiana, a luz não pode ser entendida como uma coisa, então, ela vai ter um modelo aproximado para ser interpretada. Os feixes de luz são como linhas ao longo das quais tende a pressão no meio.

IV. Descartes não tenta explicar a luz e sua composição, mas sim seus efeitos. Para expor suas ideias, ele faz uso de três analogias: (i) compara a maneira como vemos as coisas à transmissão das sensações através de uma bengala de cego; (ii) emprega uma cuba com uvas preenchida com vinho para explicar a transmissão da luz; (iii) adota a analogia do choque de partículas com uma superfície para explicar as leis de reflexão e refração.

Nesse último ponto, Descartes tenta exemplificar a percepção da luz. Para tanto, investiga como um cego faz para identificar o meio em que se encontra. Se a luz não é um objeto físico, só é possível sentir seus efeitos, assim como um deficiente visual não vê os objetos, mas sente quando sua bengala afunda na areia, ou detecta um buraco, ou é enfincada na água. No segundo exemplo, ele supõe que, na cuba, as uvas fazem o papel da parte rígida da matéria, como o ar, e o vinho é a matéria sutil. Dessa forma, os buracos no fundo da cuba fazem com que o vinho tenda imediatamente para eles, assim se propaga no espaço. Por fim, os fenômenos de reflexão e refração da luz são semelhantes ao choque de partículas em uma superfície. No primeiro caso, essa partícula é rebatida e, no segundo, ela penetra no segundo meio atravessando a superfície. Descartes usa esses exemplos para justificar a propriedade da cor, que pode ser entendida como diferentes sensações da bengala do cego ao tocar em pedras, paus e outros objetos. Ou uma modificação da trajetória da bola oriunda do choque, como graus diferentes de rotação, por exemplo, refere-se a diferentes cores.

Para esclarecer a teoria da luz de Descartes, a qual posteriormente será alvo das críticas de Fermat, vamos examinar com maior profundidade os princípios de reflexão e refração da luz.

Reflexão da luz

Como já citado, Descartes usa como modelo básico para explicar a reflexão da luz o caso de um projétil incidindo sobre uma superfície rígida. Na colisão, a partícula não tem sua velocidade alterada, entretanto, a *determinação* do movimento muda instantaneamente. Descartes usa esse termo para se referir a direção, e não a velocidade ou a quantidade de movimento. Dessa forma, a decomposição da determinação pode ser feita em duas direções perpendiculares entre si. Ademais, a componente paralela à superfície se mantém, assim como a velocidade, alterando apenas a componente vertical do movimento. Posto isso, é possível mostrar que o ângulo de reflexão da luz é igual ao de incidência.

Refração da luz

Nesse caso, Descartes utiliza o mesmo exemplo da bola incidindo em uma superfície, porém, nesse caso, a área de choque será formada por uma tela muito fraca, de modo que o projétil rompe e atravessa a superfície, perdendo somente uma parte de sua velocidade. Descartes (Descartes, 1987) afirma “...ela não perde nada da determinação que tinha de avançar para o lado direito”. Novamente, explicitando que a componente vertical não é alterada.

Seguindo esse raciocínio, duas proposições podem ser feitas:

I. A inclinação deve ser medida pelos senos dos ângulos de incidência e de refração. A “velocidade”[2] do feixe luminoso depende exclusivamente do meio atravessado. Dessa forma, $v_r = nv_i$, em que n é uma constante.

II. A velocidade paralela à superfície de separação não muda, conclui-se então que $v_i sen(\theta_i) = v_r sen(\theta_r)$.

Prosseguindo nessa mesma premissa, é possível chegar no resultado:

$$\frac{v_r}{v_i} = \frac{sen(\theta_i)}{sen(\theta_r)} = n. \tag{2.1}$$

A equação acima ficou conhecida como a lei da refração de Descartes.

2.4. PIERRE DE FERMAT

Figura 4: Fermat (1607 a 1665)

Fonte: Disponível em: <clubes_obmep.org.br/blog/b_pierre-de-fermat/>. Acesso em: 18.dez.19.

Pierre de Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601, em Beaumont de Lomagne, no sudoeste da França. Filho de um rico mercador, desde muito cedo, Fermat foi educado por bons professores da época. Sua história começa no mosteiro de Grandselve e depois, aos 15 anos, ingressou na Universidade de Toulouse para estudar direito. Mesmo atuando na área de funcionário público, Fermat tinha muito interesse por outras áreas, como física, literatura e, principalmente, matemática. No dia 14 de maio de 1631, casou-se com a prima de sua mãe e teve três filhos, duas meninas e um menino, chamado Clement Samuel, o qual teve um papel importante, pois, mesmo após a morte de seu pai, continuou publicando trabalhos dele. O seu posto no parlamento francês o

[2] Descartes coerentemente não usa a palavra “velocidade”, uma vez que ela é infinita. Logo a noção utilizada de “velocidade” refere-se a noção de “força”, ou em termos atuais, o módulo da velocidade.

proporcionou a ter uma posição social de respeito e o concedeu mais tempo para suas investigações científicas.

Por volta de 1636, Fermat escreveu um trabalho que não foi publicado na época, chamado "*Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*", em que apresentava suas ideias de eixos perpendiculares, sua dedução da equação geral da reta, circunferências, elipses e hipérboles. Para muitos estudiosos, este foi um dos trabalhos mais cruciais que Fermat propôs, pois acabara de inventar a geometria analítica. Nesse estudo, Fermat também mostrou sua teoria de máximos e mínimos de uma função, assim como também o cálculo da reta tangente de curvas (Basto, *et al,* 2016).

Como um dos maiores matemáticos do século 17, Fermat ficou conhecido na sociedade científica da época, entretanto, ele não procurava publicar as descobertas de seus resultados. Foi então, através de seu amigo Marin Mersenne, que o trabalho de Fermat sobre máximos e mínimos chegou até Descartes, desencadeando um grande embate entre dois dos maiores pensadores da época. Um episódio conhecido do conflito entre eles foi o desafio que Descartes fez à Fermat, para que ele encontrasse a reta tangente à curva descrita pela equação $x^3 + y^3 = 3axy$. Utilizando o método que havia desenvolvido, Fermat resolveu o problema com facilidade, provocando ainda mais Descartes. Esta curva ficou conhecida como o *folium* de Descartes.

Além de seu trabalho no ramo da geometria, Fermat foi o fundador da teoria dos números na matemática. Os seus mais importantes resultados ficaram conhecidos como pequeno e grande teorema de Fermat. Ademais, a invenção do cálculo infinitesimal é atribuída a Newton e Leibniz, porém, seus trabalhos foram publicados 20 anos após a morte de Fermat. Em outras palavras, se o cálculo for entendido como a área da matemática responsável por estudar máximos e mínimos de uma função, e comportamento de retas tangentes em curvas, então, Fermat fundou essa área já em 1629, contudo, cabe lembrar que ele não tinha muito interesse em publicar seus trabalhos. O próprio Newton, em uma carta que foi só descoberta em 1934 por Louis Moore, afirma que suas primeiras ideias a respeito do cálculo foram influenciadas "da maneira como *monsieur* Fermat traçava tangentes" (MAZZA, 2014).

Dentre todos os seus trabalhos, a matemática de Fermat possibilitou que ele criasse o primeiro princípio variacional da física. Era objeto de estudo a explicação de fenômenos luminosos, em especial a reflexão (que levou ao princípio da mínima distância) e da refração (que concebeu o princípio do tempo mínimo) da luz. Esse ponto na história da ciência será detalhado na próxima seção, na qual será narrado o antagonismo de ideias de Fermat e Descartes a respeito do comportamento da luz (FERREIRA, *et al*, 2016).

2.5. FERMAT E CARTESIANOS

Após a publicação do Discurso do Método e dos três ensaios cartesianos, Fermat, em setembro de 1637, envia uma carta à Descartes com fortes críticas a respeito de seu trabalho, em especial a Dióptrica, questionando principalmente a explicação dos fenômenos de reflexão e de refração.

Primeiramente, Fermat argumenta que a decomposição da *determinação* dos raios luminosos que incidem em uma superfície, e são refratados, não se referem apenas as componentes paralela e normal, mas sim à uma infinidade de outras composições, e que Descartes, por sua vez, escolheu as que mais lhe eram convenientes. Em segundo lugar, a ideia de *determinação* poderia ser interpretada como quantidade de movimento e não de direção. Além disso, Fermat entende que existe uma confusão entre pressão e velocidade de movimento. E, por fim, para Fermat, não estava claro que a componente paralela à superfície era conservada. Sendo assim, mesmo que Descartes tivesse formulado o princípio da refração corretamente do ponto de vista matemático, seus argumentos experimentais ainda não eram convincentes.

Em resposta, Descartes invalida os argumentos de Fermat, dizendo que seus comentários são triviais e redundantes, e ainda reafirma a decomposição dos raios de luz, que é justificada pelo fato da superfície de separação ser real[3]. Esse primeiro embate não perpetua por mais tempo e se encerra com a morte de Descartes, em 1650.

Depois de quatro anos, Fermat volta a indagar a óptica cartesiana, porém agora, ele debate com os seguidores de Descartes, De la Chambre e Clerselier,

[3] Para Descartes não existe vácuo e todos os corpos na natureza podem ser distinguidos pelo movimento. Segundo ele, é possível diferenciar uma superfície da outra devido ao movimento relativo entre elas. Dessa forma, a superfície não é real, mas o modelo faz **como** real.

através de cartas. Essa discussão, que durou por alguns anos, mais especificamente entre 1657 e 1661, foi suficiente para que Fermat amadurecesse suas ideias e começasse a introduzir o conceito da ideia do “caminho mais fácil que a luz deve seguir”. Com isso, ele busca deduzir a trajetória da refração da luz quando esta passa por meios que oferecem diferentes resistências.

Um ano depois, Fermat escreve uma carta a De la Chambre, na qual ele revela sua descoberta após tantas tentativas falhas. Ele chegou de forma inesperada e surpreendente a uma formulação da lei da refração que, segundo ele, estava correta, pois seguia o seu princípio de que a luz percorre o caminho mais fácil.

> Mas o prêmio de meu trabalho foi extraordinário, o mais imprevisto e o mais feliz que já me aconteceu. Porque, depois de ter passado por todas as equações, multiplicações, antíteses e outras operações de meu método, e de haver por fim concluído o problema - que o senhor pode ver em folha separada - encontrei que meu princípio fornecia justa e precisamente a mesma proporção das refrações que Descartes havia estabelecido. Fiquei tão surpreso com um evento tão inesperado, que a custo saí de meu espanto. Repeti minhas operações algébricas diversas vezes e sempre o sucesso foi o mesmo, ainda que minha demonstração suponha que a passagem da luz pelos corpos densos seja mais difícil que nos corpos menos densos, o que eu creio que é muito verdadeiro e indisputável, e embora Descartes suponha o contrário. (TANNERY E HENRY, 1897-1912, apud MOREIRA, 1998)

Para chegar ao resultado esperado, Fermat fez, pela primeira vez, uso de seu princípio de máximos e mínimos. A compreensão do seu teorema pode ser feita se pensarmos que, no topo de uma montanha ou no fundo de um vale, um pequeno desvio na trajetória não afetaria o deslocamento total. Em outras palavras, a condição para a existência de um máximo ou mínimo é que a mudança em torno de um trajeto estacionário deve ser nula.

Através desse raciocínio, Fermat explica que, no caso da refração, a luz, para gastar o mínimo de tempo, “busca percorrer” um caminho maior no meio menos denso, no qual tem maior velocidade, ou também, “busca percorrer” uma distância menor no meio mais denso, onde possui uma velocidade menor.

Note, então, que a proposição de Fermat é diferente da de Descartes, pois para ele, a velocidade é inversamente proporcional a resistência do meio, ou seja, ao contrário do que a óptica cartesiana afirmava, a luz possui maior velocidade nos meios menos densos. Fermat usa essa situação e emprega seu princípio de máximos e mínimos, obtendo um resultado extremamente importante na física, que pode ser dito como a primeira aplicação com fundamentação matemática de um procedimento de minimização.

A solução do problema desenvolvida por Fermat, baseada que a trajetória estacionária, em torno da qual a variação do tempo total gasto no percurso é nula, leva à "proporção de Descartes":

$$\frac{sen(\theta_i)}{sen(\theta_r)} = \frac{v_i}{v_r} = n. \quad (2.2)$$

No entanto, a razão que Fermat encontrou entre os senos depende diretamente das velocidades, e não inversamente, como Descartes havia calculado. Ainda na sua carta, Fermat atribui os créditos da descoberta da lei da refração à Descartes e propõe um compromisso aos cartesianos:

> O que devemos concluir disso tudo? Não seria suficiente, meu senhor, aos amigos de Descartes que eu lhe deixe na livre posse de seu teorema? Não haveria bastante glória em haver conhecido os caminhos da natureza em sua primeira observação e sem a ajuda de nenhuma demonstração? Eu lhe cedo, portanto, a vitória e o campo de batalha, e fico contente que o senhor Clerselier me deixe entrar pelo menos como sócio na prova dessa verdade tão importante, que deve produzir consequência tão admiráveis. (TANNERY E HENRY, 1897-1912, apud MOREIRA, 1998)

A resposta de Clerselier vem alguns meses depois. Ele aceita diplomaticamente o "compromisso" que Fermat sugere, mas não é sutil na sua réplica.

> A diferença é que vós não provais nada, mas fazeis uma suposição por princípio, que a luz passa mais facilmente nos corpos ralos do que nos densos, enquanto Descartes prova, e não simplesmente supõe, que a luz passa mais facilmente nos corpos densos que nos ralos. (TANNERY E HENRY, 1897-1912, apud MOREIRA, 1998)

O cartesiano também aborda outros pontos críticos, como, por exemplo, que o princípio das vias mais curtas e simples se trata de um princípio moral, e não físico. Esse teorema coloca a natureza em uma indecisão, pois qual seria o caminho mais simples? O mais rápido ou mais curto? Como a natureza é capaz de fazer essa escolha? Por que o caminho não é uma reta, já que este é a menor distância entre dois pontos? O raio de luz, estando já no ar, como poderá saber para onde se inclinar se meios diferentes forem colocados à sua frente? Diante desses questionamentos, Clerselier escreve em defesa:

> O tempo não sendo o que se move não pode ser o determinante do movimento. (...) É mais físico dizer, como Descartes, que a velocidade e a determinação do corpo mudam pela variação que surge na força e na disposição que são as verdadeiras causas de seu movimento e não por um desejo da natureza de ir pelos caminhos mais rápidos, desejo que ela não pode ter, porque age sem conhecimento, e que não tem efeito sobre esse corpo. (TANNERY E HENRY, 1897-1912, apud MOREIRA, 1998)

A tréplica de Fermat é escrita com tom irônico ao Clerselier e também marca o fim de uma das controvérsias científicas mais importantes da história.

> ...não pretendo nem jamais pretendi ser o confidente secreto da natureza. Ela tem vias obscuras e ocultas que não tentei jamais penetrar; eu apenas havia lhe ofertado um pequeno auxílio de geometria acerca do assunto refração, se ela tivesse necessidade disso. Mas, porque o senhor me assegura que ela pode cumprir suas tarefas sem a geometria e que se contenta com o caminho que Descartes lhe prescreveu, eu abandono de bom coração, em vossas mãos, minha pretensa conquista de física. É suficiente para mim que o senhor me deixe de posse de meu problema de geometria inteiramente puro e in abstracto, por meio do qual se pode encontrar a rota de um móvel que passa por dois meios diferentes e que busca concluir seu movimento da maneira mais rápida possível. (TANNERY E HENRY, 1897-1912, apud MOREIRA, 1998)

O embate termina aqui. Resta agora analisar a proporção que essa discussão entre dois dos maiores pensadores europeus resultou ao longo dos anos seguintes e como influenciou outros cientistas memoráveis.

3. CAPÍTULO 2 – PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO

3.1. PIERRE LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS

Figura 5: Maupertuis (1698 a 1759)

Fonte: ASIMOV, I. *Gênios da humanidade*. Rio de Janeiro, Bloch, 1976, v. 1, p. 145

Em 28 de setembro de 1698, na cidade de Saint Malo na França, nasce Pierre Louis Moreau de Maupertuis. Aos dezesseis anos, foi enviado à renomada faculdade Collège de la Marche, em Paris, para estudar filosofia. Depois de dois anos, em 1717, ele retorna à cidade natal onde começa estudar música e desenvolver um forte interesse em matemática. No ano seguinte, por indicação de seu pai, Maupertuis entra no regimento de La Roche Guyon, mas não se adapta com sua carreira de oficial de cavalaria e renuncia o posto, em 1722. Posteriormente, em 1723, Maupertuis passa a morar em Paris, e se torna adjunto da Académie des Sciences, a qual foi fundada em 1666 por um grupo de cientistas de alto prestígio, como Huygens, e passa a abrigar encontros de outros grandes nomes, como Descartes, Fermat, Pascal e Galileu.

A partir daí, seu interesse por diversas áreas das ciências floresceu. Em 1724, Maupertuis produziu seu primeiro artigo, *Sur la forme des instruments of music*, o qual discutia como o comportamento das notas musicais era afetado pelos instrumentos que as produziam. Outros trabalhos também surgiram no domínio da geometria, astronomia e filosofia. Além dessas áreas, Maupertuis estudava biologia, buscando entender e explicar como os organismos podem conservar suas espécies ao longo do tempo e como ocorre a formação de novas espécies. Estas ideias apareceram em três obras, conhecidas como a *Vênus física* (1745), o *Sistema da Natureza* (1752) e a Carta XIV (1752).

Com o intuito de aprimorar seus conhecimentos sobre matemática, em 1729, Maupertuis foi a Basileia para estudar com Johann Bernoulli, o qual era um defensor das ideias de Descartes e Leibniz. Porém, mesmo assim, Maupertuis não deixou de aprender a física newtoniana. De volta a Paris, em 1730, começa a produzir seus trabalhos matemáticos fundamentados em equações diferenciais e astronomia. Em

1732, ele publicou a obra chamada de *Transações Filosóficas da Sociedade Real de Londres*, em que discutia a natureza dos anéis de Saturno, que, segundo ele, era a cauda capturada de um cometa.

Em 1735, Maupertuis foi enviado à uma expedição no Peru, pela Academia de Paris, e ganha fama por suas medidas sobre o achatamento dos polos terrestres. No ano de 1740, ele foi convidado pelo rei da Alemanha, Frederico, para criar a academia de Berlim, junto com outros filósofos e cientistas renomados da época. E, em 1743, de volta a Paris, foi nomeado diretor assistente da Acadèmie des Sciences, tornando-se diretor no ano seguinte (cf. RAMOS, 2003).

Nesse período, os princípios variacionais que emergiram na tentativa de explicar o comportamento da luz, propostos por Fermat e Descartes, estavam em alta. Com a intenção de conciliar os dois pontos de vista, Maupertuis estabelece um novo princípio, o Princípio da Mínima Ação. Inicialmente, ele aplica seu teorema na explicação dos fenômenos de propagação da luz e, posteriormente, em três sistemas mecânicos. Nessa perspectiva, o próximo capítulo tem como escopo edificar os pensamentos de Maupertuis, que foi o primeiro a apresentar e aplicar um dos princípios mais importantes da física (vide. MARTINS E SILVA, 2007).

3.2. TEORIA DA ÓPTICA DE MAUPERTUIS

A ciência de Newton teve um grande crescimento na comunidade científica, sendo bem aceita por todos. Maupertuis foi o principal defensor e divulgador das teorias da mecânica e da gravitação universal. Ademais, a física newtoniana admitia o fato de a luz ter maior velocidade nos meios mais densos (ao contrário do que Fermat havia proposto). Dessa forma, a teoria da óptica de Newton era conflitante com a de Fermat.

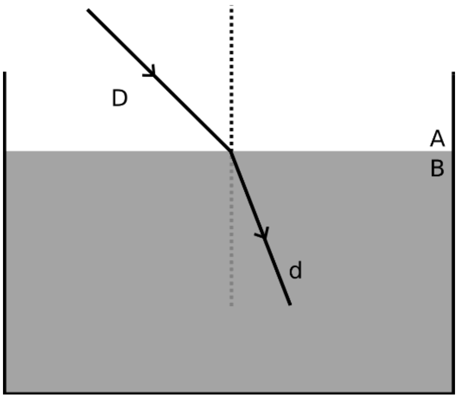
À vista disso, em um artigo de 1744, intitulado *Acordo entre diferentes leis da natureza que até agora pareciam incompatíveis*, Maupertuis procura conciliar o princípio de Fermat (publicado em 1679), o qual estabelece que o tempo que a luz leva para ir de um ponto a outro deve ser aquele de menor tempo, com a óptica newtoniana. Supostamente, Maupertuis partiu sua análise tentando modificar o princípio de Fermat, fazendo uso de críticas similares a dos cartesianos para introduzir seu novo princípio[4]:

> Com feito, que preferência deveria ter aqui o tempo sobre o espaço? A luz não podendo mais seguir ao mesmo tempo pelo trajeto mais curto e pelo mais rápido, por que iria por um deles e não pelo outro? A luz não segue nenhum dos dois trajetos, ela toma um caminho que tem uma vantagem mais real: o caminho que ela toma é aquele no qual a quantidade de ação é mínima. Falta explicar agora o que entendo por quantidade de ação (...). Ela é proporcional à soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre. É essa quantidade de ação que é aqui o verdadeiro dispêndio da Natureza e o que ela economiza o mais possível no movimento da luz. (MAUPERTUIS, 1744)

Para Fermat, a dedução da lei de refração deveria partir do pressuposto de que a luz segue o caminho de menor tempo. Em outras palavras, a soma das distâncias divididas pelas velocidades, nos dois meios, deve ser mínima. Analisando a figura, se a velocidade da luz no meio menos refringente for V e a distância percorrida for D, quando a luz passa para o meio mais denso, sua velocidade diminui para um valor v, e passa percorrer uma distância d. Seguindo o princípio de Fermat:

$$\frac{D}{V} + \frac{d}{v} = mínimo. \tag{3.1}$$

Figura 6: Raio de luz sofrendo refração ao passa do meio A para o meio B.



Fonte: Elaboração própria

[4] Uma observação importante a ser feita é que Maupertuis nessa época já tinha conhecimento do conceito de ação proposto por Leibniz.

Essa hipótese leva a relação entre os senos do ângulo de incidência e refração, com a velocidade da luz nos dois meios, também conhecida como lei da refração de Fermat:

$$\frac{sen(\theta_i)}{sen(\theta_r)} = \frac{v_i}{v_r} \tag{3.1}$$

Por outro lado, segundo Newton, a luz, que é composta por partículas, deve se mover mais rapidamente nos meios mais densos do que nos menos refringentes. Utilizando a mecânica newtoniana é possível encontrar uma relação entre os senos dos ângulos de incidência e refração com a velocidade da luz nos dois meios, chegando em uma relação inversa a de Fermat:

$$\frac{sen(\theta_i)}{sen(\theta_r)} = \frac{v_r}{v_i} \tag{3.2}$$

Maupertuis, adepto à ciência newtoniana, admite que o resultado de Fermat está errado e que, na verdade, bastaria trocar v_r e v_i para que o resultado fique compatível. Entretanto, fazer essa substituição no raciocínio matemático de Fermat implica em fazer $D.V + d.v$, como sendo mínimo. Porém, não há significado físico no produto da distância pela velocidade, uma vez que é desconhecida na ciência uma grandeza que tenha unidade de medida m^2/s.

Partindo dessa premissa de buscar uma interpretação para o produto da distância pela velocidade, Maupertuis deve ter recordado que Leibniz havia proposto que a ação seria o produto da distância percorrida pela velocidade e pela massa do corpo. Sendo assim, não mudaria nada, do ponto de vista de Maupertuis, multiplicar o resultado por uma constante. Dessa forma, ele enuncia o princípio da ação mínima, substituindo a condição de trajeto mais rápido para aquele em que a ação deve ser a menor possível. Reformulando:

$$m(D.V + d.v) = mínimo. \tag{3.3}$$

Entretanto, como é destacado por Yourgrau e Mandelstam, a sua formulação é confusa e limitada. Fermat exibe um ponto fraco em suas tentativas de explicar os fenômenos com seu princípio, nesse caso, ele não começa admitindo que o princípio da mínima ação é geral para obter resultados coerentes, mas começa pelo contrário, partindo da conclusão de dois resultados e averiguando onde deveria alterar o resultado para chegar na conclusão correta.

Logo após a publicação do trabalho de Maupertuis, alguns cientistas da época consideraram que o que ele havia feito era rudimentar e trivial, do ponto de vista matemático.

> Quanto à parte geométrica, creio que essa descoberta custou menos a seu autor [Maupertuis] do que a resolução de outros problemas sobre os quais ele fez menos barulho, mas não me espanto que ele tenha se prendido tanto a ela e creio que alguma outra pessoa também o teria em seu lugar, talvez igualmente, mas não teria feito tanto alarde. (CARTA DE LA CONDAMINE A DANIEL BERNOULLI, 30 de dezembro de 1752, apud MARTINS E SILVA, 2007)

Embora surgiram algumas críticas sobre o trabalho de Maupertuis e a forma como adaptava o problema para ser compatível ao seu princípio da ação mínima, ele possui grande mérito por essa conquista. Sua proposta de elaborar tal teorema, com propósito unificador de toda dinâmica newtoniana, ainda não tinha sido explorada por nenhum outro cientista até o momento (cf. MARTINS E SILVA, 2007).

3.3. COLISÃO DE CORPOS NÃO ELÁSTICO

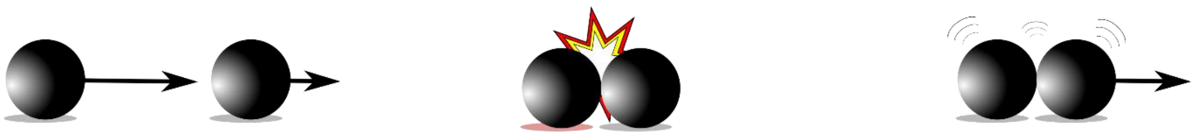
O problema da colisão de corpos é um exemplo muito comum em sistemas mecânicos e estes podem ser considerados, em teoria, como um sistema isolado de forças externas, uma vez que a curta duração da interação e os impulsos das eventuais forças externas sobre o sistema são praticamente desprezíveis. Dessa forma, existe uma grandeza física que se conserva, denominada momento linear, matematicamente expressa pelo produto da massa do corpo e sua velocidade ($Q = m.v$). Assim, para qualquer colisão, podemos aplicar o princípio da conservação da quantidade de movimento:

Em qualquer tipo de colisão mecânica, a quantidade de movimento total do sistema mantém-se constante. A quantidade de movimento imediatamente após a interação é igual à quantidade de movimento imediatamente antes.

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}. \quad (3.4)$$

Um dos problemas de colisões é o do choque perfeitamente inelástico. Suponha dois corpos, A de massa m_A e outro corpo B de massa m_B. Ambos de mesmo tamanho e formato, movendo-se na mesma direção e sentido, com o corpo A atrás de B. No entanto, a velocidade $\vec{v}_A > \vec{v}_B$, ou seja, em algum tempo futuro, os dois corpos se chocarão e, como se trata de uma colisão perfeitamente inelástica, eles permanecerão juntos após a batida com a mesma velocidade e, consequentemente, não haverá a conservação da energia cinética. Em outras palavras, a velocidade relativa entre os dois corpos antes do choque é $\vec{v}_A - \vec{v}_b$ e após o encontro é zero.

Figura 7: Colisão não elástica de partículas



Fonte: Elaboração própria

Dessa forma, utilizando o princípio da conservação do momento linear, pode-se encontrar a velocidade que os dois corpos se movem juntos após a colisão:

$$Q_{A_i} + Q_{B_i} = Q_{A_f} + Q_{B_f}. \quad (3.5)$$

$$m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i} = m_A v_{A_f} + m_B v_{B_f}. \quad (3.6)$$

Como ambos tem a mesma velocidade final: $v_{A_f} = v_{B_f}$

$$m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i} = v_f(m_A + m_B). \tag{3.7}$$

Portanto, a velocidade final dos corpos juntos será:

$$v_f = \frac{m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i}}{(m_A + m_B)} \tag{3.8}$$

Além disso, é possível calcular o coeficiente de restituição desse sistema, uma grandeza adimensional que tem como propósito caracterizar os tipos de colisão que são estudados em problemas de mecânica. Esse parâmetro é definido como:

$$e = \frac{v_{B_f} - v_{A_f}}{v_{A_i} - v_{B_i}} = \frac{0}{v_{A_i} - v_{B_i}} = 0. \tag{3.9}$$

Esse problema foi o primeiro sistema mecânico que Maupertuis aplica o princípio da ação mínima, o qual foi desenvolvido da seguinte forma:

> Sejam dois corpos duros, cujas massas são A e B, que se movem para o mesmo lado, com as velocidades a e b, mas A sendo mais veloz do que B, de modo que o atinge e se choca contra ele. Seja x a velocidade comum desses dois corpos, depois do choque, menor do que a e maior do que b. A mudança que ocorre no universo consiste em que o corpo A, que se movia com a velocidade a, e que em um certo tempo percorria um espaço a, move-se apenas com a velocidade x e só percorre um espaço x. O corpo B, que somente se movia com a velocidade b e apenas percorria um espaço b, move-se com a velocidade x e percorre um espaço x. (MAUPERTUIS, 1746, apud SILVA E MARTINS, 2007)

Note que, nesse caso, o tempo considerado é unitário e, dessa forma, o espaço percorrido é igual à velocidade do corpo. Segundo Maupertuis, a ação pode ser escrita matematicamente como:

$$S = m \,.\, v \,.\, \Delta x, \tag{3.10}$$

em que a ação é S, m a massa, v a velocidade e Δx o deslocamento que o corpo percorre. Se seguirmos o raciocínio de Maupertuis, a ação total, ou seja, a soma da ação antes (S_1) e depois do choque (S_2), devem ser mínimas. Vamos calcular separadamente os dois valores:

$$S_1 = S_{A_1} + S_{B_1} = A \,.\, v_a \,.\, \Delta x_a + B \,.\, v_b \,.\, \Delta x_b, \tag{3.11}$$

$$S_1 = A \,.\, v_a \,.\, v_a \,.\, t + B \,.\, v_b \,.\, v_b \,.\, t. \tag{3.12}$$

Logo, a ação antes da colisão, por unidade de tempo, passa a ser:

$$S_1 = A \,.\, {v_a}^2 + B \,.\, {v_b}^2. \tag{3.13}$$

Seguindo a mesma lógica, porém agora supondo que os dois corpos passam a andar juntos com a mesma velocidade v_x e que percorrem o mesmo espaço Δx_c. Portanto, a ação total depois da colisão será:

$$S_2 = S_{A_2} + S_{B_2} = A \,.\, v_x \,.\, \Delta x_c + B \,.\, v_x \,.\, \Delta x_c. \tag{3.14}$$

$$S_2 = A \,.\, v_x \,.\, v_x \,.\, t + B \,.\, v_x \,.\, v_x \,.\, t. \tag{3.15}$$

Assim, a ação depois da colisão por unidade de tempo é

$$S_2 = (A+B).\,{v_x}^2. \tag{3.16}$$

Logo, a variação da quantidade de ação deve ser

$$\Delta S = S_2 - S_1. \tag{3.17}$$

$$\Delta S = (A+B).\,{v_x}^2 - (A\,.\,{v_a}^2 + B\,.\,{v_b}^2). \tag{3.18}$$

A condição imposta por Maupertuis, de que a ação total deve ser mínima, implica que a derivada da equação (ação total) deve ser nula em relação a x. Dessa forma,

$$2(A+B)\frac{d(v_x)}{dt} = 0. \tag{3.19}$$

Concluindo assim que a velocidade final do conjunto dos dois corpos é zero.

Entretanto, se ao invés de fazermos a ação final menos a inicial, a ação total que deve ser mínima fosse a soma da componente antes e depois do choque?

$$\Delta S = S_2 + S_1. \tag{3.20}$$

$$\Delta S = (A+B).\,{v_x}^2 + (A\,.\,{v_a}^2 + B\,.\,{v_b}^2). \tag{3.21}$$

$$2(A+B)\frac{d(v_x)}{dt} = 0. \tag{3.22}$$

O resultado também é incoerente, pois os corpos deveriam continuar a se mover sozinhos e percorrer um espaço x após o choque. Dessa forma, Maupertuis propõe uma modificação no seu raciocínio:

> Essa mudança á portanto a mesma que ocorreria se enquanto o corpo A se movesse com a velocidade a, e percorresse o espaço a, ele fosse transportado para trás sobre um plano imaterial, que fosse movido com uma velocidade a – x, por um espaço a – x; e que enquanto o corpo B se movesse com a velocidade b, e percorresse o espaço b, ele fosse transportado para a frente sobre um plano imaterial, que se movesse com uma velocidade x – b, por um espaço x – b. (MAUPERTUIS, 1746, apud SILVA E MARTINS, 2007)

O caminho que Maupertuis propõe para a solução do problema é a introdução de um novo referencial que é aquele no qual os dois corpos estão parados após o choque. Esse referencial, conhecido como referencial de centro de massa, possui uma velocidade v_x e se move no mesmo sentido que os corpos A e B do início do sistema. Dessa forma, como o corpo A antes da colisão possuía uma velocidade maior do que a que passa adquirir após o choque ($v_a > v_x$), a velocidade relativa dele passa a ser $v_a' = v_a - v_x$. Por outro lado, o corpo B após o impacto terá uma velocidade maior do que a que possuía antes ($v_b < v_x$), assim $v_b' = v_x - v_b$.

À vista disso, a ação antes do choque, em um tempo unitário, é dada por:

$$S_1 = S_{A_1} + S_{B_1} = A\,.(a-x).\,\Delta x_a + B\,.(x-b).\,\Delta x_b, \tag{3.22}$$

$$S_1 = A\,.(a-x).\,(a-x) + B\,.(x-b).\,(x-b), \tag{3.23}$$

$$\therefore\ S_1 = A\,.(a-x)^2 + B\,.(x-b)^{\,2}. \tag{3.24}$$

Considerando esse referencial de centro de massa, a ação total depois da colisão será nula, pois os corpos estarão em repouso em relação a esse novo referencial. Assim, Maupertuis propõe que a soma da ação antes e depois deve ser mínima. Logo,

$$A\,.\,(a-x)^2 + B\,.\,(x-b)^{\,2} = mínimo. \tag{3.25}$$

Derivando a expressão e igualando a zero:

$$-2A\ + 2A\,x + 2B\,x - 2B\,b = 0. \tag{3.26}$$

Isolando o valor de x, encontramos a equação da velocidade do corpo A e B após o choque:

$$x = \frac{A\,a + B\,b}{A + B} \tag{3.27}$$

Como é possível ver na equação anterior, tem-se o mesmo resultado quando é utilizado o princípio da conservação da quantidade de movimento no caso de choque perfeitamente inelástico.

Entretanto, a consideração de um novo referencial após o choque, no qual as duas partículas estão em repouso, deveria ser o referencial para se calcular a ação total, e não apenas a ação final. Em outras palavras, suponha que exista um referencial de centro de massa, assim como o referencial de velocidade v_x usado por Maupertuis, porém, dessa vez, com velocidade v_ω, a qual será usada para calcular a ação inicial. Nessa situação, as velocidades dos dois corpos antes do choque são $a - \omega$ e $b - \omega$. Portanto, a ação inicial do sistema, por unidade de tempo, será dada por:

$$S_i = A(a-\omega)^2 + B(b-\omega)^2. \tag{3.28}$$

Somando com a ação final em relação ao referencial x:

$$S_{total} = A(a - \omega)^2 + B(b - \omega)^2 + (A + B)(x - \omega)^2. \qquad (3.29)$$

Supondo que essa ação seja mínima, a derivada da expressão anterior será igual a zero. Logo,

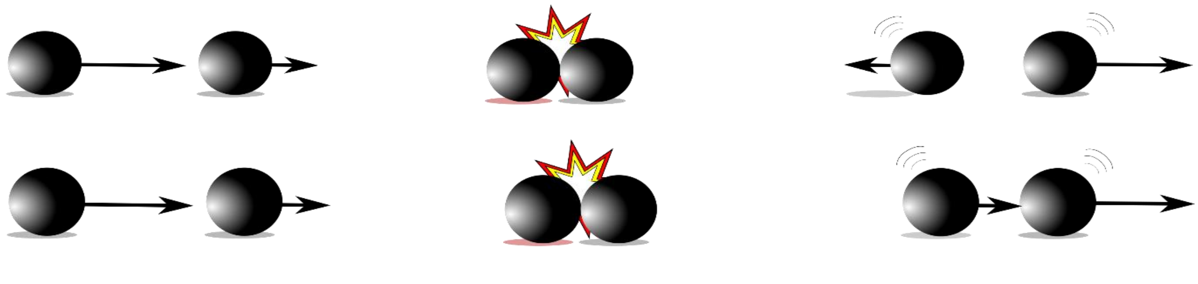
$$2(A + B)(x - \omega) = 0. \qquad (3.30)$$

Esse resultado só é verdadeiro se $x = \omega$, ou seja, a velocidade final dos corpos juntos é a mesma que a do referencial em comum a ambos antes da colisão. É como se as partículas estivessem se movendo juntas antes e depois, o que é uma conclusão ilógica nesse caso.

3.4. COLISÃO DE CORPOS ELÁSTICOS

Considere agora um sistema análogo ao anterior, onde um corpo A colide com um outro B, sendo a velocidade do primeiro maior que a do segundo; porém, diferente do caso anterior, onde as partículas passam a se mover juntas, o corpo A é rebatido para trás e o corpo B é empurrado para frente, mudando o valor de suas velocidades finas para v_α, referente a do corpo A e para v_β para B. Dessa forma, além da conservação da quantidade de movimento, há também a conservação da energia cinética e a velocidade relativa antes e depois do choque é a mesma.

Figura 8: Colisão elástica de partículas



Fonte: Elaboração própria

Aplicando o princípio da conservação do momento, tem-se:

$$Q_{A_i} + Q_{B_i} = Q_{A_f} + Q_{B_f}, \tag{3.31}$$

$$m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i} = m_A v_{A_f} + m_B v_{B_f}. \tag{3.32}$$

Nesse caso, como $v_{B_f} - v_{A_f} = v_{A_i} - v_{B_i}$, o coeficiente de restituição será

$$e = \frac{v_{B_f} - v_{A_f}}{v_{A_i} - v_{B_i}} = \frac{v_{A_i} - v_{B_i}}{v_{A_i} - v_{B_i}} = 1. \tag{3.33}$$

Maupertuis pretendia resolver esse mesmo problema utilizando seu princípio da ação mínima. Assim sendo, ele descreve a questão da seguinte maneira[5]:

> Sejam dois corpos elásticos, cujas massas sejam A e B, que se movem para o mesmo lado, com as velocidades a e b; mas A sendo mais veloz do que B, de modo que o atinge e se choca com ele: e sejam α e β as velocidades dos dois corpos depois do choque: a soma ou a diferença dessas velocidades antes do choque é a mesma que antes. A mudança que ocorre no universo consiste em que o corpo A, que se movia com a velocidade a, e que em um certo tempo percorria um espaço a, move-se apenas com a velocidade α e só percorre um espaço α. O corpo B, que somente se movia com a velocidade b e apenas percorria um espaço b, move-se com a velocidade β e percorre um espaço β. (MAUPERTUIS, 1746, apud SILVA E MARTINS, 2007)

[5] Como se trata de uma colisão elástica, onde o coeficiente de restituição é igual a 1, a velocidade relativa antes deve ser igual a velocidade relativa depois.

Isto posto, utilizando o princípio da mínima ação, proposto por Maupertuis, vamos calcular a ação total do sistema, fazendo $\Delta S = S_f - S_i$. Antes do choque, o resultado é o mesmo do caso inelástico

$$S_1 = A \, . \, a^2 + B \, . \, b^2. \tag{3.34}$$

No entanto, dessa vez, a ação após o contato será dada por

$$S_2 = S_{A_2} + S_{B_2} = A \, . \, \alpha \, . \, \Delta x_c + B \, . \, \beta \, . \, \Delta x_c. \tag{3.35}$$

$$S_2 = A \, . \, \alpha \, . \, \alpha \, . \, t + B \, . \, \beta \, . \, \beta \, . \, t. \tag{3.36}$$

$$S_2 = A \, . \, \alpha^2 \; + B \, . \, \beta^2. \tag{3.37}$$

Portanto, a ação total de depois do choque será dada por:

$$\Delta S = S_2 - S_1. \tag{3.38}$$

$$\Delta S = (A \, . \, \alpha^2 \; + B \, . \, \beta^2 \,) - (A \, . \, a^2 + B \, . \, b^2). \tag{3.39}$$

Tomando a derivada em ambos os lados para que a ação seja mínima

$$2A \; \alpha \; d\alpha + 2 \; B \; \beta \; d\beta = 0. \tag{3.40}$$

Sabendo que a velocidade relativa antes e depois são as mesmas:

$$a - b = \beta - \alpha \quad \rightarrow d\alpha = \ d\beta. \tag{3.41}$$

Assim, a equação fica:

$$A\ \alpha = -B\ \beta. \tag{3.42}$$

Portanto, chegamos em dois resultados:

$$\alpha = -\frac{B}{A}\beta \qquad\qquad \beta = -\frac{A}{B}\alpha \tag{3.43}$$

Maupertuis resolve o problema descrevendo de uma forma diferente o comportamento das partículas após o choque. Veja abaixo.

> Essa mudança é portanto a mesma que ocorreria se enquanto o corpo A se movesse com a velocidade a, e percorresse o espaço a, ele fosse transportado para trás sobre um plano imaterial, que fosse movido com uma velocidade $\mathrm{a} - \alpha$, por um espaço $\mathrm{a} - \alpha$; e que enquanto o corpo B se movesse com a velocidade b, e percorresse o espaço b, ele fosse transportado para a frente sobre um plano imaterial, que se movesse com uma velocidade $\beta - \mathrm{b}$, por um espaço $\beta - \mathrm{b}$. Ora, tanto se os corpos A e B se moverem com as velocidades próprias sobre os planos móveis, ou se eles estiverem aí em repouso, o movimento desses planos carregados de corpos sendo o mesmo, as quantidade de ação, produzidas na natureza, serão $\mathrm{A}(\mathrm{a} - \alpha)^2$, e $\mathrm{B}(\beta - \mathrm{b})^2$; portanto a soma deve ser a menor possível. Temos, portanto

$$Aa^2 - 2Aad\alpha + A\alpha^2 + B\beta^2 - 2Bb\beta + Bb^2 = mínimo.$$

Ou

$$-2Aad\alpha + 2A\alpha d\alpha + 2B\beta d\beta - 2Bbd\beta.$$

> Ora, para os corpos elásticos, como a velocidade respectiva [relativa] depois do choque é a mesma que tinha antes, temos $\beta - \alpha = a - b$ ou $\beta = \alpha + a - b$, e $d\alpha = d\beta$: que sendo substituídos na equação precedente, dão para as velocidades. (MAUPERTUIS, 1746, apud SILVA E MARTINS, 2007)

$$\alpha = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A + B} \qquad \beta = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A + B}$$

Dessa forma, Maupertuis encontra o mesmo resultado quando utilizada a conservação do momento linear. Note que a equação encontrada de β, a menos de um fator 2 e, que $d\alpha = d\beta$ é correspondente a

$$-A\alpha + A\alpha + B\beta - B\beta = 0. \tag{3.44}$$

Ou seja,

$$Aa + Bb = A\alpha + B\beta. \tag{3.45}$$

Diferente do problema da colisão de corpos não elásticos, onde o referencial usado por Maupertuis para solucionar o problema foi o de centro de massa – que era aquele em que após o choque os corpos estavam em repouso; nesse caso, da colisão de corpos elásticos, depois da colisão, ambas as massas possuíram velocidades diferentes. Assim, Maupertuis faz uso de dois referenciais adjuntos, um referencial em repouso para cada um dos corpos após o choque.

Portanto, antes da batida, em relação a esses novos dois referenciais, as ações dos dois corpos, por unidade de tempo, serão dadas por

$$S_{A_i} = A(a - \alpha)^2 \qquad S_{B_i} = B(\beta - b)^2 \tag{3.46}$$

Após o encontro das massas, ambas estarão em repouso em relação a seus respectivos referenciais. Dessa forma, a ação total após a colisão é nula. No entanto, a solução de Maupertuis também é sua falha. A proposta dele para resolver o problema não está certa, uma vez que não é válido somar grandezas medidas em relação a referenciais diferentes. Em outras palavras, como S_{A_i} e S_{B_i} foram calculadas em diferentes referenciais, não é certo somar essas duas grandezas.

3.5. EQUILÍBRIO DE ALAVANCAS

Um dos ramos da mecânica que estuda sistemas sob à ação de forças que se equilibram é a estática. Para investigar o equilíbrio de um corpo, como um ponto material, é necessário que este não adquira um movimento de translação. Por outro lado, em um corpo extenso, como uma alavanca, é necessário que haja um equilíbrio de rotação também. Em outras palavras, a somatória das forças que causam a rotação de um corpo em torno de um ponto de equilíbrio, denominada momento escalar (ou torque) e escrita matematicamente como $\tau = \pm F.d$[6], deve ser nula.

Suponha uma alavanca, como está ilustrada na figura (9), na extremidade esquerda é fixado um corpo de massa m_A e do outro lado, um corpo de massa m_B. Desprezando a massa da barra e supondo que a mesma está em equilíbrio estático, é possível determinar a distância z do corpo A até o eixo de rotação, utilizando a condição de equilíbrio de rotação:

$$\sum \tau = 0. \tag{3.47}$$

Ou seja,

$$\tau_A + \tau_B = 0. \tag{3.48}$$

Assumindo que, se a alavanca sofre um pequeno movimento, o corpo A desce e B sobe, então adotaremos como positivo o movimento no sentido anti-horário.

[6] O sinal $\pm$ indica que a rotação no sentido anti-horário será positiva e a no sentido horário negativa.

Figura 9: Balança em equilíbrio

Fonte: Elaboração própria

Logo, a somatória dos torques fica:

$$F_A.d - F_B.d = 0, \tag{3.49}$$

$$P_A.z - P_B.(c - z) = 0, \tag{3.50}$$

$$m_A.g.z - m_B.g.(c - z) = 0. \tag{3.51}$$

Simplificando a equação

$$m_A.z - m_B.c + m_B.z = 0. \tag{3.52}$$

Isolando a distância z, encontra-se:

$$z = \frac{m_B.c}{(m_A + m_B)} \tag{3.53}$$

Que é o valor exato para que a alavanca, inicialmente em equilíbrio, permaneça nesse estado.

Esse problema também foi analisado e usado por Maupertuis para provar o princípio da mínima ação. O terceiro exemplo publicado por ele, conhecido como lei das alavancas, foi formulado da seguinte forma:

> Considero aqui os corpos presos a uma alavanca: e para encontrar o ponto em torno do qual eles permanecerão em equilíbrio, procuro o ponto em torno do qual, se a alavanca tiver algum pequeno movimento, a quantidade de ação seria a menor possível. Seja c o comprimento da alavanca, que eu considero como imaterial, em cujas extremidades sejam colocados dois corpos, cujas massas são A e B. Seja z a distância do corpo A ao ponto procurado, e $\mathrm{c}-\mathrm{z}$ a distância do corpo B: é evidente que, se a alavanca tiver um pequeno movimento qualquer, os corpos A e B descreverão pequenos arcos semelhantes entre si, e proporcionais µas distâncias desses corpos ao ponto que se procura. Esses arcos serão, portanto, os espaços percorridos pelos corpos e representam ao mesmo tempo suas velocidades. A quantidade de ação será portanto proporcional ao produto de cada corpo pelo quadrado de seu arco; ou (já que os arcos são semelhantes) ao produto de cada corpo pelo quadrado de sua distância ao ponto em torno do qual gira a alavanca: quer dizer, a Az^2 e $\mathrm{B}(\mathrm{c}-\mathrm{z})^2$; cuja soma deve ser a menor possível. Temos, portanto
>
> $$Az^2 + Bc^2 - 2Bcz + Bz^2 = mínimo.$$
>
> *Ou*
>
> $$2Az\,dz - 2Bc\,dz + 2Bz\,dz = 0.$$
>
> De onde se tira
>
> $$z = \frac{Bc}{(A+B)}$$
>
> Que é a proposição fundamental da estática. (MAUPERTUIS, 1746, apud SILVA E MARTINS, 2007)

A proposta de Maupertuis para esse sistema é que a alavanca esteja em uma situação de equilíbrio inicial e, quando é sujeita à uma força externa, o conjunto faz um pequeno movimento e a quantidade de ação seria a mínima possível nesse movimento. Entretanto, como Maupertuis demonstrou, a ação só será mínima se a distância z tiver o valor $z = \frac{Bc}{(A+B)}$. Por outro lado, caso a alavanca não esteja em uma situação de equilíbrio inicial e ela se mover, tal movimento não seguirá ao princípio da ação mínima. Em outras palavras, a lei das alavancas de Maupertuis é válida para um caso particular de uma situação em equilíbrio e, por isso, não pode ser considerada uma lei universal, ao contrário do que ele supôs.

3.6. AS CAUSAS FINAIS

Nos trabalhos em que Maupertuis apresentou o princípio da ação mínima para resolver o problema da refração da luz, sistemas de colisões e equilíbrio de corpos extensos, os resultados encontrados estavam corretos, qualificando o princípio da mínima ação como certo e universal, do ponto de vista de Maupertuis. No entanto, embora tenha chegado no resultado correto, o cientista utilizou critérios errados para comprovar a veracidade de seu teorema. Em todos os casos, é possível notar que Maupertuis parte do resultado final e adapta a ideia do princípio da ação mínima para cada situação, modificando o contexto para que suas ideias fossem compatíveis em cada circunstância.

A consequência da busca por um teorema universal, para explicar os exemplos que Maupertuis cita em seus trabalhos, é que ele se torna alvo de crítica de muitos cientistas da época que não concordavam com seus métodos.

Por outro lado, o trabalho de Maupertuis pode ser compreendido dentro de seu contexto histórico, em que vários cientistas da época buscavam explicar o porquê tudo na natureza respondia a uma única premissa, que as ações da natureza ocorrem da forma mais simples possível. Segundo Maupertuis, o fato da natureza escolher o caminho mais simples possível para seus fins teria um interpretação metafísica, envolvendo a física das causas finais e, com isso, provando a existência divina. Diversos cientistas e filósofos de épocas passadas à Maupertuis buscavam uma relação entre causas finais e a ciência, servindo de inspiração para seu trabalho.

3.6.1. ARISTÓTELES

Figura 10: Aristóteles (384 a.C a 322 a.C)

Fonte: Aristóteles de Francesco Hayez,1811

Um dos mais notáveis pensadores da antiguidade, que buscava responder os "porquês" dos eventos naturais e associá-los à teologia, foi Aristóteles (384-322 a.C.). Segundo ele, existem quatro tipos de causas: (i) a causa material, que refere-se aquilo do qual uma coisa provém; (ii) a causa formal, isto é, aquilo que deve ser, a forma física que um determinado objeto ou ser possui e é definido; (iii) a causa eficiente, que é aquilo que produziu a mudança, e está atrelado àquele que provocou a ação; (iv) a causa final, que diz a respeito ao propósito do objeto ou do ser.

Em especial, nesse atual estudo, as duas últimas causas ganham maior destaque, visto que a causa eficiente está relacionada ao princípio de repouso e movimento, pois é um determinado agente que inicia o movimento ou causa a sua interrupção. Já a causa final, por sua vez, corresponde a um fim, no qual o sistema tende, e não a uma transformação incessante (cf. MARTINS, 2013).

Segundo Aristóteles, os processos naturais são provenientes de causas intrínsecas, e não é possível compreender uma sequência natural se não soubermos qual é sua finalidade. Por exemplo, qual é a causa do João de Barro construir sua casa se não fôssemos capazes de entender sua finalidade? Ou qual seria o propósito de uma fruta já formada gerar sementes?

Seguindo esse raciocínio, Aristóteles não está antropomorfizando os animais ou a natureza, apenas busca justificar a necessidade de se ter o conhecimento do resultado das ações da natureza para melhor entendê-las, já que podem ser considerados como fins. Dessa forma, saber qual é a finalidade de cada coisa torna a compreensão dos fenômenos naturais mais completa. Isso pode ser comprovado com Aristóteles (Physica, II.8,199b27-28), que declara que "é absurdo supor que a finalidade não está presente porque não observamos o agente deliberando".

Além dos objetos da natureza, Aristóteles faz um estudo das causas finais referentes aos seres vivos. Nesse contexto, um exemplo muito interessante é a análise da utilidade das pálpebras dos animais. No seu trabalho *“De Partibus Animalibus II.13”,* ele faz a seguinte descrição:

> Há certas diferenças entre os olhos dos peixes, dos insetos e dos crustáceos de pele dura, mas nenhum deles tem pálpebras. Quanto aos crustáceos de pele dura é impossível que pudessem tê-las; pois, para ser útil, a pálpebra exige a ação rápida da pele. Assim, esses animais possuem olhos duros, na falta dessa proteção, como se a pálpebra fosse presa à superfície do olho e o animal visse através dela. [...] Os peixes, no entanto, têm olhos de uma consistência fluida. Os animais que se movem muito usam sua visão a distâncias consideráveis. Para os animais terrestres, o ar é muito transparente. Mas a água em que os peixes vivem é um obstáculo para uma visão aguçada, embora tenha esta vantagem sobre o ar, que não contém tantos objetos que se choquem contra os olhos. Por esta razão, a natureza, que não faz nada em vão, não deu pálpebras aos peixes; mas para contrabalançar a opacidade da água, fez seus olhos de uma consistência fluida. (ARISTÓTELES, *De Partibus Animalibus* II.13, 657b30-658a10, apud MARTINS, 2013).

Nessa citação, destaca-se o excerto que diz que “a natureza, que não faz nada em vão...”, e não é por acaso que essa fala é utilizada dezesseis vezes nos trabalhos de Aristóteles. Para ele, existe uma distinção entre aquilo que ocorre em vão e finalidade. Isso pode ser ilustrado com a seguinte passagem: *“...a natureza não faz nada em vão, pois tudo o que é natural é para benefício de algo”* (ARISTÓTELES, De Anima III.)

Quando o filósofo grego admite que “a natureza não faz nada em vão”, ele atribui uma personificação à natureza, como se esta agisse de maneira intencional, levando a entender que, de alguma forma, as ações naturais e suas finalidades estejam relacionadas a uma entidade divina.

3.6.2. NICOLAS MALEBRANCHE

Figura 11: Nicolas Malebranche (1638 a 1715)

Fonte: Disponível em: <infoescola.com/biografias/nicolas-malebranche/>. Acesso em: 18.dez.19.

Nicolas Malebranche nasceu em Paris, no ano de 1638. Era filósofo, teólogo e adepto às ideias de Descartes. Seus trabalhos trataram de questões como: o ocasionalismo fundamentado nos princípios cartesianos; e as teorias metafísicas que buscavam descrever como a alma é dividida do corpo, a forma que se relacionam e como a relação com a mente divina é necessária para o perfeito entendimento da natureza.

Em 1664, foi ordenado sacerdote pela Ordem dos Oratorianos de São Felipe Néri e, ao longo de sua vida, todos os seus trabalhos foram condensados em vinte volumes, sendo que os mais conhecidos são: o Tratado da Natureza e da Graça, de 1680; Tratado Moral, de 1684; Meditações metafísicas e cristãs, de 1684; dentre outros. Assim, Malebranche sempre buscava estabelecer um significado teológico para os fenômenos da natureza, aos quais a ciência sempre tentou responder.

Para ele, as leis fundamentais da física eram as leis da inércia e da conservação do movimento absoluto do choque entre os corpos. Além disso, ele entendia que o movimento é determinado e se dá de tal maneira segundo a vontade de Deus; por outro lado, a causa real é definida ao mover um corpo de acordo com as leis do movimento. Assim sendo, o mundo é criado por uma determinada finalidade conforme a vontade divina, porém as leis que governam o mundo operam sem qualquer interferência das causas finais.

Considere dois corpos que se movam no mesmo plano em sentidos contrários. Até o momento do choque, eles se movem uniformemente em linha reta e, de acordo com Malebranche, seria esse o movimento, pois exige o mínimo da ação de Deus. Quando vier a ocorrer a colisão entre esses dois corpos, os mesmos não poderão atravessar um ao outro, por isso, após o choque, seus movimentos mudam. Nessa situação, a ação divina foi necessária para impedir que os corpos penetrassem um no outro. Deus opta pelo modo mais simples e econômico, mudando a trajetória dos corpos pela menor quantidade de ação. Entretanto, essa ação mencionada pelo padre

Malebranche não deve ser confundida com a mesma que, anos depois, Maupertuis utiliza em seus trabalhos. Antes de tudo, é, na verdade, o ato de Deus, que age sempre da forma mais simples possível (Kontic, 2018).

3.6.3. LEIBNIZ

Figura 12: Leibniz (1646 a 1716)

Fonte: SCIENTIA E STUDIA, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 95-107, 2007

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu na Alemanha, na cidade de Leipzig. Aos quinze anos, iniciou seus estudos na faculdade de direito e, depois disso, dedicou-se a diplomacia. No decorrer de sua carreira, viajou por toda a Europa, o que fez com que ele conhecesse cientistas e filósofos renomados da época. Em uma de suas missões à Paris, em 1672, Leibniz conheceu Huygens, que o inspirou nos estudos da matemática. A partir daí, passou seu tempo realizando estudos científicos.

Foi admitido na Academia de Ciências de Paris e tornou-se membro da Real Academia das ciências de Londres, onde possivelmente teve seu primeiro contato com os trabalhos de Isaac Newton. Além disso, desenvolveu, em seus trabalhos, a base da numeração binária e criou uma máquina de calcular, a qual fazia operações aritméticas. Em 1684, publicou a sua versão do cálculo infinitesimal, estabelecendo um conflito intenso com Newton, que desenvolvera de maneira diferente e independente seu estudo em 1671, o qual foi apenas publicado em 1687.

Os filósofos da natureza procuravam entender o mundo em que vivemos e uma ordem nas coisas, cada um fundamentado em uma vertente, seja ela realista ou idealista. Para os adeptos do realismo, o mundo é tal como o ser humano enxerga, porém tudo é uma aparência, uma vez que há uma parte observável e outra não. Descartes separa corpo como observável e mente como não observável. Por outro lado, Leibniz contesta, afirmando que a aparência reflete a essência. Dessa sua filosofia idealista, ele defende que o que pode ser visto no mundo é uma ideia do que nós construímos dele (vide. TEIXEIRA, 2018).

Entre essa série de discussões, um assunto em grande pauta na época era a busca para compreender a composição da matéria. Leibniz entra com a proposta de que tudo que existe na natureza é feito da mesma substância, denominada *Mônada*. Em uma carta para o matemático Dangicourt, Leibniz afirma:

> As verdadeiras substâncias são apenas as substâncias simples, ou aquilo que denomino Mônadas. E creio que só existem mônadas na natureza, o resto sendo apenas os fenômenos que dela resultam. Cada mônada é um espelho do universo segundo seu ponto de vista, acompanhada de uma multiplicidade (multitude) de outras mônadas que compõe seu corpo orgânico da qual ela é a mônada dominante. (LEIBNIZ, 1768, apud SILVA E PIAUÍ, 2012)

Todavia, a pergunta mais óbvia a se fazer é: se tudo tem a mesma composição, é feito da mesma substância, como se diferenciam os corpos? Para Leibniz, existe um princípio que cada substância tem a sua particularidade, além disso, elas juntas, se comportam de tal maneira a ocupar um lugar no espaço e no tempo. Em outras palavras, é preciso que, desde sempre, haja uma determinação interna da própria substância e o comportamento, o desdobramento, a manifestação da substância, no espaço tempo, deve ser particular.

Ademais, era de grande interesse para os cientistas da natureza entender não só a composição, mas também a razão do movimento dos corpos. Um fruto cai de uma árvore, não porque ele *quer* cair, mas sim porque ele *deve* cair. Ou seja, há um determinismo atuando, e tal comportamento leva a seguinte indagação: “o determinismo age sobre todas as coisas e sobre o homem?”

De acordo com Leibniz, os objetos e os seres vivos executam uma série de causas eficientes na natureza (cf. FRAGELLI, 2018). No entanto, é fundamental resgatar um elemento importante proveniente da filosofia de Aristóteles que, até então, na época, havia sido deixado de lado pela ciência mecanicista de Descartes, que é o emprego das causas finais para uma melhor descrição dos fenômenos naturais.

> Apenas pela consideração das causas eficientes ou da matéria não se pode explicar as leis do movimento descobertas em nosso tempo [...]. [Por isso], é necessário decorrer às causas finais [...]. (LEIBNIZ, 1974, apud TEIXEIRA, 2018).

A análise de Leibniz (1974), acerca das ações da natureza, foram apresentadas em seu trabalho Specimen Dynamicum. Lá, ele defende que as afecções dos corpos não podem ser corretamente investigadas se a matéria for considerada meramente como uma “substância extensa”, da forma que Descartes argumentava. De acordo com o autor, se assim fosse definido o conceito de matéria (apenas pelas suas qualidades geométricas), não seria possível afirmar que ela é impenetrável e que se opõe ou resiste ao movimento.

A posteriori, Leibniz (1974) usa a definição de mônada, a qual acredita ser uma substância simples ou uma unidade de força presente por toda parte do universo. Segundo o cientista, se as coisas são compostas por “átomos de substâncias”, os quais são indivisíveis, então, esses átomos não podem ser materiais, e sim “átomos formais”, ou seja, “um ponto metafísico”, que diz a respeito à história futura da matéria. Isso se revela ao notar que, “como todo estado presente de uma substância simples é uma continuação natural de seu estado passado, assim também o presente está prenhe do futuro”. (FRAGELLI, 2018)

Dessa forma, acreditando que os princípios da física têm origem da metafísica e não de uma ciência mecânica, Leibniz resgata a ideia das causas finais e a insere em suas teorias. Ele utiliza o princípio de Fermat para mostrar que, quando faz-se do uso das causas finais, se torna mais fácil e apropriado entender corretamente os fenômenos da reflexão e refração da luz, pois “[...] é possível descobrir, pela consideração das causas finais, verdades da física de grande importância que não teriam sido tão fáceis de conhecer pelas causas eficientes”. (TEIXEIRA, 2018)

Leibniz teve também participação nas discussões travadas por Descartes e Fermat, na busca por um princípio para explicar a propagação da luz. Segundo ele, a luz teria maior velocidade nos meios mais densos, uma vez que as partículas estarão mais próximas umas das outras, fazendo com que a luz, ao passar por esse meio, tenha seu fluxo acelerado. Esse raciocínio pode ser exemplificado supondo que uma certa quantidade de água saia por uma mangueira e, ao apertá-la, o fluxo de água muda, ficando mais rápido conforme é menor a área de passagem de água. A resistência é, então, proporcional a velocidade de propagação da luz.

Ademais, Leibniz foi de grande influência para Maupertuis, não apenas pelo ponto de vista metafísico e teológico, por resgatar e incluir na ciência as causas finais; mas também por ter sugerido algo parecido como o princípio da mínima ação, que

Maupertuis propôs anos mais tarde. Durante um bom tempo, geraram-se polêmicas alarmantes sobre a quem pertencia os créditos da formulação do princípio da mínima ação. Houveram episódios lamentáveis de brigas entre cientistas, sem nem ao menos trazer à tona resultados relevantes ao desenvolvimento da ciência (vide. CASS, 2013).

3.7. CRTÍTICAS DE D'ARCY E D'ALEMBERT

Após as publicações do princípio da ação mínima e suas aplicações na óptica e mecânica, Maupertuis foi duramente criticado por dois cientistas franceses, d'Alembert e d'Arcy. Para uma melhor fundamentação histórica, antes de apresentar os pontos relevantes da discussão, brevemente será introduzido a biografia desses dois renomados pensadores.

Patrick d'Arcy nasceu em 27 de setembro de 1723, em Kitullaggh, na Irlânda. Nesse período, os católicos irlandeses sofriam ataques e eram penalizados, por isso, aos 14 anos de idade, foi enviado pela família para estudar em Paris, com o intuito de ter uma vida livre e sem discriminação. Ficou alojado na casa de Jean Baptiste Clairaut, pai de Alexis Clairaut, que foi o seu grande influenciador nos estudos de matemática. Quando tinha 17 anos, apresentou dois trabalhos à Acadèmpie Royale de Sciences em Paris, concedendo-lhe um retrato pintado pelo artista Hubert Drouais.

Figura 13: Patrick d'Arcy (1723 a 1779)

Fonte: Disponível em: <.historyireland.com/18th-19th-century-history/a-dynamic-irishman-in-paris-patrick-darcy-1725-79/> Acesso em: 18.dez.19.

Anos mais tarde, alistou-se no exército na Condé Infanterie, sob o comando de Maurice Saxe. Mesmo em períodos de guerra, d'Arcy conseguia estudar e desenvolver suas pesquisas na área balística, como, por exemplo, suas teorias da artilharia voltadas à física e à química das misturas de pólvora. Além disso, teve trabalhos relevantes na área da mecânica, astronomia, elétrica e matemática. Após sua volta do exército, tornou-se membro da Academia de Ciências de Paris e publicou trabalhos relevantes, como o seu princípio da conservação do momento angular, que foi desenvolvido independentemente dos resultados obtidos por Euler.

Um pouco antes de d'Arcy, nasceu Jean le Rond d'Alembert, em 17 de novembro de 1717. Segundo relatos, quando era pequeno, foi abandonado na igreja de Santo Jean Baptista le Rond e, por isso, recebeu o mesmo nome do local onde foi encontrado. Aos 22 anos, ele produziu sua grande primeira obra, intitulada "memória sobre o cálculo integral". Durante sua vida, desenvolveu trabalhos fundamentais sobre fluidos e foi o pioneiro no estudo das equações diferenciais parciais aplicadas à física (Martins e Silva, 2007).

Vale frisar ainda que ele ficou conhecido pelo seu princípio da mecânica analítica, a qual trouxe uma nova abordagem de tratar as coordenadas espaciais de partículas em um sistema físico no tempo. Essa descoberta lhe concedeu uma expressão com seu nome, chamada princípio de d'Alembert. Em 1743, publicou o "Traité de Dynamique", fornecendo uma nova interpretação para a terceira lei de Newton e também serviu como base para outras relevantes publicações científicas no primeiro volume da Encyclopédie.

Os trabalhos de Maupertuis foram apresentados à Academia de Ciências de Paris em abril de 1744, e publicados apenas em 1748. Depois da divulgação, surgiram várias críticas da comunidade científica da época. A primeira delas foi apresentada por d'Arcy, em um trabalho de 1752, em que expõe seus comentários sobre o princípio da ação mínima e afirma que a lei da refração pode ser deduzida do seu princípio mecânico. Entretanto, antes de sua publicação, a análise de d'Arcy foi examinada e aprovada por d'Alembert (que era editor da Encyclopédie junto com Diderot). Acompanhando as ideias de d'Arcy, uma nota anônima foi adicionada, criticando o trabalho de Maupertuis:

> Em geral, parece que quaisquer que fossem as leis da natureza, poder-se-ia encontrar uma função das massas e das velocidades que, sendo suposta mínima, as representasse; mas essa propriedade não seria suficiente para dar o nome de *ação* a essa função, nem para elevar ao nível de um princípio metafísico aquilo que seria nesse caso apenas uma hipótese de cálculo. (s.n., 1753, apud MARTINS E SILVA, 2007)

No mesmo ano, Maupertuis responde d'Arcy, porém, seu artigo foi publicado apenas dois anos depois. Em sua resposta, concentra-se na discussão da aplicação do princípio aos problemas mecânicos.

Um tempo depois, no segundo volume da Encyclopédie, d'Alembert apresenta seus comentários sobre o uso das causas finais no princípio variacional, proposto por Maupertuis. Para ele, no caso da reflexão, não existe um princípio de ação mínima ou de tempo mínimo.

> De fato, é verdade que na reflexão em espelhos planos e convexos o caminho do raio é o mais curto possível; mas não ocorre o mesmo nos espelhos côncavos e é fácil de demonstrar que muitas vezes esse caminho, em vez de ser o mais curto, é o mais longo. (D'ALEMBERT, 1751-1782, apud MARTINS E SILVA, 2007)

Para complementar as críticas acerca dos resultados de Maupertuis, em um artigo de 1752 (que foi publicado apenas em 1756), d'Arcy reproduziu a análise apresentada por d'Alembert. Incluindo uma análise matemática, mostrou que, nos espelhos côncavos, o caminho percorrido pela luz não é um mínimo, mas sim um máximo. Revelou ainda uma situação intrigante, em que haveria três pontos nos quais a ação seria a mesma, no entanto, a luz passaria apenas por um deles.

Essa análise crítica foi também feita pelo padre André Tacquet (um renomado matemático e físico da época) que, ao lado de d'Arcy e d'Alembert, apresentou à comunidade científica da época que a teoria elaborada por Maupertuis e Fermat não era válida para a reflexão em espelhos côncavos e, portanto, não se tratava de um princípio geral. À vista disso, Maupertuis continuou a apresentar suas objeções a outras críticas, porém, não respondeu as contestações de d'Arcy e d'Alembert acerca das imprecisões de seu princípio de ação mínima no caso dos espelhos côncavos.

3.8. O DEBATE SOBRE O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO NO SÉCULO XVIII

Após a publicação do teorema proposto por Maupertuis, em meados do século XVIII, ocorreu um episódio que envolveu cientistas como Samuel König, Voltaire, Euler e, até mesmo, o rei Frédéric. Essa polêmica ficou marcada na história por não resultar em nenhum benefício à ciência e atingiu níveis elevados de violência, pois ela não girou em torno de debates científicos; outras causas extra científicas foram a verdadeira razão para este embate, como amizades e inimizades, busca por reputação, poder, necessidades financeiras dos envolvidos, entre outras. Esse capítulo histórico foi abordado em detalhes no texto de Roberto Martins e Ana Paula Bispo (2007), e, de forma sucinta, será apresentado nessa seção, com o objetivo de servir de complementação da história do princípio da mínima ação.

Um dos participantes foi François Marie Arouet, que nasceu em Paris, em 1694, e foi também conhecido por seu pseudônimo Voltarie. Ele era um escritor, filósofo e criador de muitas obras, sendo uma mente muito influente na revolução francesa. Era também muito próximo do rei da Prússia, Frédéric II, na época, um diretor da Academia de Ciências de Berlim que buscava pela Europa os mais prestigiados cientistas para fazerem parte de sua academia. Pelo forte laço afetivo, Voltaire foi um dos primeiros a ser convidado pelo rei a juntar-se à academia para assumir ao posto de Presidente da Academia, entretanto, no início, o convite foi negado e Voltaire indicou um antigo amigo, Maupertuis. Porém, depois de alguns anos de hesitação, ele acabou ingressando na academia também. Enquanto estava na Academia, o braço direito de Maupertuis foi o renomado matemático Euler, que havia mudado para Berlim em 1740, à convite de Frédéric.

O princípio da mínima ação foi publicado por Maupertuis, em 1744, primeiramente voltado a explicar o comportamento da luz, e somente dois anos depois, direcionado a mostrar a aplicação do mesmo teorema em sistemas mecânicos. Ainda assim, em 1750, na obra *Tratado de cosmologia*, Maupertuis republica suas ideias sem muitos acréscimos científicos em relação aos trabalhos anteriores.

No mesmo ano, um antigo amigo de Maupertuis, que havia estudado matemática com ele na Suíça, Samuel König, foi a Berlim para uma visita e discutiu com Maupertuis sobre o princípio da mínima ação, contestando alguns pontos. A consequência desse encontro resultou em um certo mal-estar entre eles, mas sem nenhum rompimento. Em uma visita posterior, König apresentou a Maupertuis o manuscrito de um artigo seu, porém Maupertuis não o leu e permitiu que König publicasse onde quisesse. Então, em 1751, na revista Acta Eruditorum, além de apresentar críticas ao princípio da ação mínima, König cita, no final do trabalho, uma carta de Leibniz dirigida à Jakob Hermann, de 16 de outubro de 1707. Nela, havia indícios que um princípio, semelhante ao da mínima ação, que já fora proposto por Leibniz. Em outras palavras, com esse trabalho, König desmoralizou toda a teoria que Maupertuis havia construído e ainda insinuou que o mesmo não tinha total crédito por suas ideias.

Maupertuis responde a König, pedindo evidências dessa carta, pois não encontrava nas coletâneas de correspondências publicadas. Então, König alega que esse documento era uma carta inédita de Leibniz para Jakob Hermann e que tinha uma cópia fornecida por um certo Henzi, na Suiça. Entretanto, Henzi havia sido morto alguns anos antes e não podia servir de álibi para comprovar a história de König.

Na Suíça, os Bernoulli, que eram amigos de Maupertuis, fizeram buscas sigilosas nos arquivos conservados após a morte de Henzi. Além disso, a Academia de Berlim havia se mobilizado a favor de Maupertuis, até mesmo o próprio rei Frédéric solicitou que investigações fossem feitas, porém nada foi encontrado.

Diante dessa situação, Maupertuis fez uma denúncia contra König à Academia de Ciências de Berlim. O secretário geral, Samuel Formey, solicitou que König apresentasse suas provas referentes às cartas de Leibniz, e, em resposta, ele disse que não podia apresentar o documento original, apenas as cópias feitas com a letra de Henzi. Esse retorno de König não contentou os membros da academia e muito menos Maupertuis.

Para o julgamento, Euler escreveu a acusação que foi lida no dia 13 de abril de 1752, relatando que as cartas usadas por König não eram autênticas. Nesse dia, Maupertuis não compareceu ao julgamento, alegando estar doente, porém, para aparentar ser uma pessoa sensata e boa, enviou uma carta pedindo para que nenhuma medida grave fosse tomada contra o acusado.

Para garantir o sigilo da discussão, Maupertuis enviou uma carta à princesa Orange, de que König era bibliotecário, pedindo para que não permitisse nenhuma publicação a respeito da polêmica. Porém, a solicitação não foi aceita e, um pouco depois, König divulgou um livro, intitulado “Apelo ao público”, no qual ele expôs toda a controvérsia com Maupertuis, incluindo o texto completo das cartas de Leibniz que mencionava. Dessa forma, a condenação pela Academia de Berlim e os fatos levantados no julgamento viraram notícia pública, gerando grande repercussão por meio dos jornais e revistas, que se posicionaram a favor de König, o qual continuou com os ataques ao Maupertuis e à Academia.

Até esse momento, Voltaire não havia se envolvido na história e buscava ficar o mais afastado possível da Academia de Ciências, devido a sua relação com Maupertuis não ser a das melhores, já que eles disputavam a preferência do rei. Enquanto o diretor da Academia queria ser reconhecido por seu trabalho científico, Voltaire queria manter o laço afetivo que desde jovem havia conquistado com Frédéric, e sempre trocava cartas com o rei. Porém, após ler o "Apelo ao público", Voltaire convenceu-se de que as cartas de Leibniz eram autênticas e que König tinha sido incriminado injustamente.

Isso culminou na entrada de Voltaire na discussão e rapidamente escreveu um documento anônimo chamado "Resposta de um acadêmico de Berlim a um acadêmico de Paris", publicado na revista *Bibliothéque Raisonnée*, no qual ele expressava sua opinião dos acontecimentos entre König e Maupertuis.

> Sr. Moreau Maupertuis acreditou que, apresentando esse fragmento, queria-se tirar-lhe a glória de sua pretensa descoberta, embora Leibniz tenha dito precisamente o contrário do que ele propõe. Ele forçou alguns membros pensionistas da academia de Berlim, que dependem dele, de intimar o Sr. König a apresentar o original da carta de Leibniz; e como o original não foi encontrado, fez com que esses mesmos membros emitissem um julgamento que declara o Sr. König culpado de haver atentado contra a glória do senhor Moreau Maupertuis, presumindo uma carta falsa. (VOLTAIRE, 1752, p. 227-228)

Naquela época, Maupertuis era presidente da Academia e tinha poder total sob o salário de cada membro. Dessa forma, alguns integrantes como Euler, que tinha um família grande e dependia exclusivamente do seu trabalho, não podiam deixar de apoiar seu presidente.

Em resposta à manifestação anônima de Voltaire, o rei Frédéric se manifesta, em um folheto também anônimo, chamado "Carta de um acadêmico de Berlim a um acadêmico de Paris", defendendo Maupertuis, o qual estava escrito que o cientista estava sendo atacado por invejosos e que, na Academia de Ciências, não há disputas, mas sim a busca por verdades. Embora o texto de Frédéric insultasse Voltaire de maneira indireta, os dois ainda mantinham um relacionamento cordial, como se nada tivesse acontecido, com direito a encontros pessoais e troca de cartas. Essa relação, ainda afetiva com o rei, trouxe confiança e segurança para que Voltaire promovesse um segundo ataque.

No final de outubro de 1752, algumas histórias satíricas escritas por Voltaire começaram a circular, intituladas “Diatribe do doutor Akakia”. Esses panfletos criticavam diretamente Maupertuis, sem se ater ao princípio da mínima ação ou qualquer outro viés científico, apenas com o intuito de zombar de sua imagem. Essa publicação foi o ápice para destruir a relação entre Voltaire e Frédéric, fazendo com que o rei o proibisse de escrever críticas contra qualquer outra pessoa. Então, Voltaire deixou o palácio do rei e passou a morar com um amigo em Berlim.

Em dezembro, começaram a surgir cópias dos panfletos e, diante dessa situação alarmante, Frédéric fez um ato simbólico. Na véspera de natal de 1752, mandou confiscar todas as cópias que Voltaire havia espalhado e resolveu queimá-las em praça pública à vista do próprio autor. Depois desse episódio, Voltaire decidiu que deveria deixar o quanto antes a Prússia. Junto de seu secretário, Alessandro Collini, Voltaire começou uma extensa viagem, parando sempre em várias cidades para cuidar de diversos assuntos. Foi quando estava em Leipzig que recebeu uma carta em alto tom de agressividade de Maupertuis:

> [...] Se vós continuardes a me atacar de forma pessoal, eu vos declaro que em vez de vos responder por escritos, minha saúde é suficiente boa para encontrar-vos onde quer que vós estiverdes e para tirar de vós a vingança mais completa. Daí graças ao respeito e à obediência que até aqui seguraram meu braço e que vos salvaram da mais infeliz aventura que vos atingiu até hoje. (MAUPERTUIS, *in* Beaumelle, 1856, p. 185)

A reação de Voltaire não veio de forma pacífica, publicando um novo panfleto de oito páginas, no qual o “doutor Akakia” ridicularizava Maupertuis. Essa nova publicação polêmica contra o presidente da Academia de Berlim foi interpretado por Frédéric como uma declaração de guerra, ordenando que Voltaire devolvesse todos os bens que ainda tinha de pose do rei, incluindo seu caderno de poesias. Até que Voltaire devolvesse tudo para Frédéric, ele ficou detido em Frankfurt, onde foi humilhado, sem ter chance de fugir. Depois de algumas semanas preso, tentou retornar a França, mas o rei Frédéric também colocou o rei francês contra Voltaire. Assim, sem um destino certo, Voltaire se estabeleceu na Suíça e permaneceu lá até sua morte, em 1778. Mesmo com todas as desavenças, Frédéric prestou uma homenagem e leu diante da Academia de Ciências de Berlim um longo e detalhado elogio a seu velho amigo.

Do outro lado do campo de batalha, Maupertuis conseguiu, com o apoio de Frédéric, se livrar de Voltaire, porém o final da história produziu um desgaste emocional e físico em todos os que se envolveram. Depois de ter sido desmoralizado pelos panfletos satíricos, Maupertuis perdeu o respeito de muitos colegas, sua saúde não estava boa. E, em meio a tantas discussões, ele passou a beber muito, o que o impediu de realizar novas pesquisas ou mesmo de se dedicar à Academia. Mesmo que o rei apoiasse o seu posto na academia para manter a ordem, Maupertuis se tornou uma figura incômoda na corte, até que, pouco tempo depois, se mudou para Paris para recuperar a saúde.

Um ano depois, recebeu o conselho médico de ir para a Itália. Nesse período, começou uma guerra entre a França e a Prússia, conhecida como Guerra dos Sete Anos. Esse cenário deixou Maupertuis em uma situação difícil, sem saber qual posição tomar. Então, foi morar em Basel (Suíça), na casa de seu filho Johann Bernoulli, onde faleceu, em 1759. Foi homenageado pela Academia de Ciências, porém não por Frédéric.

Outro personagem dessa história também foi prejudicado. Samuel König perdeu seu emprego depois da polêmica sobre a autenticidade dos trabalhos de Maupertuis e morreu em 1757, passando seus últimos anos contaminado pela disputa que destruiu sua vida. Por outro lado, Frédéric perdeu Voltaire e Maupertuis, junto com o respeito da comunidade intelectual europeia. Na Academia, a segunda figura mais importante era Leonhard Euler, que deu continuidade aos trabalhos do princípio variacional, no entanto, nunca teve o total reconhecimento de Frédéric, pois mesmo considerado pelo rei como um ótimo matemático, era dito ter pouca cultura. Por não ser a primeira opção a assumir a presidência da Academia, Euler retornou à Rússia em 1766, onde passou o resto de sua vida, falecendo aos 76 anos de idade, em 1783. Já o rei viveu mais do que todos os participantes dessa novela, e morreu em 1786.

A abordagem desse capítulo histórico nos mostra que o princípio da mínima ação não tratou apenas de discussões científicas, como as de Fermat e Descartes que, mesmo possuindo opiniões divergentes, trouxeram contribuições científicas com suas cartas trocadas. Pelo o contrário, analisando esses acontecimentos extra científicos, foi possível notar que essa discussão eclodiu para conflitos pessoais, nos quais diversos fatores foram abordados, sendo que o menos relevante foi contestar o princípio da mínima ação, já que este serviu apenas como o estopim para uma série de polêmicas as quais não foram benéficas a nenhum dos lados.

3.9. EULER

Figura 14: Euler (1707 a 1783)

Fonte: D'AMBROSIO, 2008, apud Handmann, 1756.

Leonhard Euler nasceu no ano de 1707, em Basileia, na Suíça. Seu pai, que também era admirador da matemática, teve aulas com Jakob I Bernoulli, o que permitiu que o filho iniciasse nesse ramo ainda muito jovem. Antes que completasse quatorze anos, Euler ingressou na Universidade de Basileia. Aos vinte anos, ele se mudou para São Petersburgo, na Rússia, para assumir ao posto de professor titular de física, no lugar de Daniel Bernoulli. Esse foi o início da sua ilustre carreira científica.

Euler teve uma contribuição vasta para ciência, pesquisou e desenvolveu estudos de série infinitas, funções, cálculo diferencial e integral, cálculo variacional, mecânica, geometria, óptica, magnetismo, entre muitos outros campos. Dentre suas obras, as que mais ganharam destaque foram: i) a *Teoria do movimento dos corpos sólidos ou rígidos* de 1765, na qual Euler reuni todas as suas ideias e problemas que descrevem as equações fundamentais de corpos rígidos; ii) o primeiro grande livro de Euler, publicado em 1736, intitulado *Mecânica, ou a ciência do movimento exposta analiticamente*, dedicado à explicar a dinâmica de uma partícula no vácuo depois submetida a um meio resistente e à abordar de maneira geral o movimento sob a ação de uma força central, que serve futuramente para seu estudo no ramo da astronomia.

Em 1741, Euler mudou-se para Berlim, onde trabalhou ao lado de Maupertuis, envolvendo-se nas discussões com Voltaire e König. Após vinte e cinco anos, ele retornou a Rússia, permanecendo lá até sua morte, em 1783. (cf. MARTINS E SILVA, 2007).

Euler foi pioneiro ao formular os problemas fundamentais do cálculo variacional e, como produto desse estudo, o princípio da mínima ação aparece em dois lugares nos trabalhos dele. A primeira menção se dá no livro *Método para encontrar linhas* *curvas*, em que é analisado alguns casos especiais, como o famoso problema da braquistócrona. O segundo encontra-se em uma memória apresentada à Academia de Ciências de Berlim, em 1751, intitulada *Harmonia entre os princípios gerais de repouso e movimento do Sr. De Maupertuis*.

Diferente de Maupertuis, que tinha uma motivação metafísica para explicar no princípio da ação mínima, Euler buscava comparar a derivação das leis do movimento de Newton de outra forma, baseado na conjuntura de que o sistema físico em equilíbrio pode ser expresso como uma condição de máximo ou de mínimo.

Euler defendia uma quantidade derivada da lei da conservação da *vis viva* para uma massa m, que será chamada de ação, e que hoje pode ser escrita como (Moreira, 1999):

$$\delta \int_A^B (v\, ds) = 0. \tag{3.54}$$

A expressão acima é válida para trajetos virtuais com energia constante. Segundo Euler:

> Desde que todos os processos na natureza obedecem a certas leis de máximo ou mínimo, não há dúvida de que as curvas, descritas pelos corpos sob a influência de forças arbitrárias, também possuem alguma propriedade de máximo e mínimo. (EULER, 1751, apud MOREIRA, 1998)

Ademais, fica evidente em sua explicação que essa formulação não se aplica ao sistema que leva em conta forças dissipativas e que as forças envolvidas devem depender apenas da posição.

Embora Maupertuis tenha sido o primeiro a buscar um princípio geral da natureza e aplicá-lo aos diferentes sistemas, foi nos trabalhos de Euler que apareceram as primeiras versões que serviram de ponto de partida para seu desenvolvimento subsequente por Lagrange, Hamilton e outros, já que continha uma formulação matemática bem elaborada do princípio da mínima ação. Além disso, existe uma controversa que diz que Euler apresentou de forma independente e anterior a Maupertuis o princípio variacional em questão. Segundo Martins e Silva

(2007), o primeiro artigo de Maupertuis que fala do assunto foi apresentado à Academia de Paris em abril de 1744 e publicado somente em 1748. Em contrapartida, o primeiro trabalho de Euler, como já mencionado, foi um apêndice de um livro publicado no final de 1744, mas que já estava pronto pelo menos um ano antes.

Contudo, no segundo trabalho de Maupertuis, apresentado na Academia de Berlim, os trabalhos de Euler são referidos como uma aplicação de suas ideias. Além disso, não se sabe se foi por lealdade ou por medo de perder seu posto na Academia, mas nem o próprio Euler reconhece seu trabalho como sendo inédito e independente, atribuindo como inventor do princípio da mínima ação o presidente da Academia de Berlim, Sr. Maupertuis[7].

Dessa forma, concretiza-se o princípio que muitos cientistas na história buscaram formular, entender e utilizar para explicar os fenômenos, sejam de natureza física, sejam de caráter metafísico. Na continuação dos trabalhos de Euler, que são a base para a elaboração da mecânica analítica, estudaremos as obras de Lagrange, e, posteriormente, as formulações de Hamilton.

3.10. LAGRANGE

Em 25 de janeiro de 1736, nasceu em Turim, na Itália, Lagrangia Giuseppe Lodovico[8]. Durante a sua vida, a grafia de seu nome teve algumas alterações, chegando até na forma como é mais conhecido hoje, Joseph Louis Lagrange. Ele era o mais velho de onze irmãos, e foi escolhido pelo pai a estudar direito. Porém, ao longo de seus estudos, mudou seu interesse para as ciências exatas.

Figura 15: Lagrange (1736 a 1813).

Fonte: STRUIK, DJ (1995), apud Robert Hart – Museu Britânico.

Aos dezoito anos, Lagrange enviou uma carta à Euler, manifestando seu interesse pelo trabalho desenvolvido à mecânica e à matemática, além de incluir no manuscrito alguns resultados que tinha obtido.

[7] A colocação *Sr. Maupertuis* foi usada nesse caso para fazer menção a forma como Euler o chamava em seus trabalhos.
[8] Esse nome foi o que recebeu em seu batismo.

Em uma segunda carta à Euler, no ano seguinte, ele comunica que havia encontrado um método geral para derivar os problemas abordados por Euler. Essa nova forma, desenvolvida por ele, permitia resolver problemas variacionais sem fazer qualquer uso de curvas ou qualquer outro recurso geométrico. Dessa forma, Lagrange havia descoberto como resolver os problemas, antes apresentados por Euler, inteiramente no âmbito dos métodos de análise matemática (vide. EVANGELISTA, 2014).

Em 1757, alguns jovens em Turim fundaram uma sociedade científica, que deu origem à Real Academia de Ciências de Turim; e entre os membros principais estava Lagrange. Esse grupo publicava trabalhos em latim e em francês, em uma coletânea chamada *Miscellanea Taurinensia*. No segundo volume, uma publicação feita por Lagrange, intitulada *Ensaio de um método para determinar os máximos e os mínimos de fórmulas integrais indefinidas* de 1759, constava os resultados que ele tinha discutido nas trocas de cartas com Euler. Na publicação posterior, Lagrange apresentou um método que permite obter as equações de movimento de Newton usando um princípio geral enunciado da seguinte forma (cf. MOREIRA, 1999):

$$\delta\left(m_1 \int_A^B v_1\, ds_1 + m_2 \int_A^B v_2\, ds_2 + \dots\right) = 0. \tag{3.55}$$

Em meio a tantas descobertas, no ano de 1766, Lagrange ingressou na Academia de Berlim, e passou a desenvolver seus trabalhos em mecânica, no cálculo diferencial e integral, em equações numéricas e algébricas, permanecendo lá até 1787. No ano seguinte, ele retorna à Paris, onde continua suas pesquisas até sua morte, em abril de 1813. Nos últimos anos de sua vida, Lagrange dedicou-se a escrever dois volumes da obra mais importantes de sua vida, a famosa *Méchanique Analitique*.

A primeira parte é destinada à análise dos problemas de estática, ou à teoria do equilíbrio. Além disso, ele introduz sua técnica de multiplicadores (a qual mais tarde ficou conhecida como Multiplicadores de Lagrange), que permite o tratamento do sistema mecânico com vínculos. Já a segunda, referente à dinâmica, ou à teoria do movimento. Com ela, Lagrange mostra que a conservação das forças vivas é uma consequência das equações fundamentais da dinâmica, assim como estabelecido por

Huygens e Leibniz; além de reformular o princípio da ação mínima a partir desse contexto mais universal.

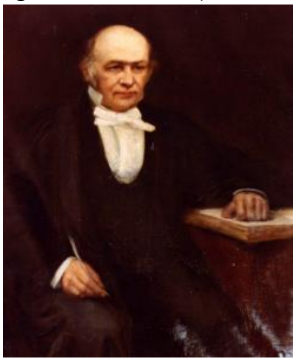
Essa obra é, portanto, uma generalização dos trabalhos de Lagrange, na qual inclui todos os seus estudos em mecânica, estática e hidrostática, além de apresentar resultados a partir de um ponto de vista unificado. Embora o seu método seja alternativo ao de Euler, ele também é mais poderoso e busca expor analiticamente a ciência.

Uma observação interessante a ser feita é que, logo no começo de seu livro, Lagrange ressalta que “não se encontrarão figuras nesta obra”. Para alguns leitores e estudantes é como uma mensagem intimidadora, lhes preparando para um conteúdo científico difícil, de alto padrão matemático. Porém, o significado é outro. Lagrange busca analisar todos os problemas sem essas representações, de forma puramente analítica.

Foi de imensa importância as contribuições de Lagrange para a física, principalmente no contexto da mecânica. Ele resolveu problemas e eliminou contradições que se encontravam em várias obras de seus predecessores. Buscou agregar o formalismo matemático para abordar de forma geral diversos conceitos e postulados que surgiram precedentes a sua época, dentre eles o princípio da mínima ação. Em seus trabalhos, Lagrange desenvolveu sua própria linguagem e buscou por um método analítico geral para resolver problemas. Isso lhe concedeu destaque na ciência, principalmente no estudo da mecânica analítica.

3.11.HAMILTON

Figura 16: Hamilton (1788 1856)



Fonte: Disponível em: <theword.ie/cms/uploads/hamiltonportrait-web.jpg> Acesso em: 18.dez.19.

No ano de 1805, cerca de duas décadas após a morte de Lagrange, em Dublin (Irlanda), nasceu William Rowan Hamilton. Desde cedo, mostrava ser um jovem com aptidão aos estudos. Pode-se comprovar isso ao se ver que, quando ainda tinha cinco anos, Hamilton já era fluente em latim, grego e hebraico. Alguns anos mais tarde, seu conhecimento em línguas tornou-se vasto o suficiente para fazer com que ele lesse obras como os *Principia,* de Newton, e a *Mécanique Celeste,* de Laplace.

A partir daí, seu envolvimento com a ciência se tornou cada vez maior. Aos dezenove anos, ingressou no Trinity College e, em 1827, foi nomeado professor de astronomia da universidade e diretor do Dunsink Observatory, com o título *Royal Astronomer of Ireland*.

Em 1834, ele publicou seu primeiro trabalho, intitulado *Sobre um método geral em dinâmica*, no qual ele estipula uma importante analogia entre a mecânica e a óptica, estabelecendo uma correlação entre o princípio de Fermat e o de Maupertuis. Nessa mesma obra, Hamilton também apresenta outros resultados, um deles é uma nova função que, mais tarde, passou a ser conhecida como hamiltoniana, um parâmetro que caracteriza o sistema do ponto de vista energético (vide. EVANGELISTA, 2014).

Em sua segunda publicação (1835), chamada de *Segundo ensaio sobre um método geral ne dinâmica*, Hamilton obteve as equações canônicas do movimento, que nada mais são do que relações de forma condensada que exprimem um grande valor matemático e físico. Ademais, ele constatou que as equações de Lagrange são uma consequência direta da condição de que a variação da ação em torno do caminho, efetivamente adotado pelo sistema, deve ser nula, desde que essa ação seja estacionária e que os pontos extremos estejam fixos. Matematicamente, esse resulta é escrito como:

$$\delta S = 0. \tag{3.56}$$

Na qual

$$S = \int_{t_i}^{t_f} (T - U)\, dt. \tag{3.57}$$

Sendo T a energia cinética e U a energia potencial do sistema, essa relação hoje é também conhecida como:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}\, dt. \tag{3.58}$$

Na equação (3.58) a função que está sendo integrada é a lagrangeana do sistema. Atualmente, a afirmação de que a variação da integral (3.57) deve ser nula é conhecida como o Princípio de Hamilton, ou também, o princípio da mínima ação. Além disso, Hamilton formalizou um novo procedimento para obter as equações do movimento através da hamiltoniana, que é definida em função das coordenadas generalizadas q_i e dos momentos canonicamente conjugados a elas p_i

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i} \tag{3.59}$$

Essas duas equações são usualmente chamadas de Equações de Hamilton, um novo formalismo que parte mais das equações do movimento do que de um princípio variacional.

3.12. NOVAS PROPOSIÇÕES E APLICAÇÕES

Após a proposta de Hamilton para descrever a dinâmica de um sistema físico, era corriqueiro que estudiosos da área se deparassem com algumas complicações matemáticas, pois não havia uma forma direta de integrar as equações diferenciais e encontrar a função principal de Hamilton. Dessa forma, o matemático alemão Carl Gustav Jacobi, que viveu no século 19, dedicou-se aos estudos de uma nova reformulação. No seu trabalho, nomeado *Sobre a teoria do cálculo das variações e das equações diferenciais*, de 1837, Jacobi busca contornar o problema fazendo uso de uma transformações de coordenadas. Nesse caso, a função principal é proveniente de uma transformação canônica capaz de reduzir a resolução das equações da dinâmica de Hamilton à forma mais elementar possível.

Portanto, essa nova formulação, conhecida como o método de Hamilton-Jacobi, é um novo caminho para encontrar soluções da mecânica hamiltoniana. Como afirma o autor (cf. BERTIN, *et al*, 2007), essa nova técnica é independente da abordagem de Hamilton da mecânica, estabelecendo uma teoria completa, autossuficiente e com resultados muito gerais. Esse formalismo ganhou proporção em diversas áreas, destacando-se na mecânica quântica, e servindo como, por exemplo, ponto de partida para Erwin Schrödinger desenvolver sua teoria ondulatória.

Posteriormente, novos trabalhos e críticas sobre o princípio da mínima ação e sua aplicabilidade foram surgindo. No ano de 1889, em um dos trabalhos do físico e filósofo Ernst Mach, tem-se que os princípios variacionais não exprimem uma economia da natureza, mas uma economia do pensamento humano.

Nessa mesma época, o cientista alemão Hermann von Helmholtz procura estender os princípios variacionais a outros ramos da ciência, como ao eletromagnetismo e à termodinâmica reversível. Segundo ele, o uso desses conceitos poderia ser interpretado como uma lei natural unificadora, que envolve todos os domínios da física.

Mais adiante, com o advento da relatividade especial e geral, as leis do movimento e as equações de campo são calculadas por Albert Einstein e David Hilbert, através do uso de expressões variacionais, as quais são fundamentais para determinar uma ação que torna eficiente o cálculo e para unificar outras teorias de campo clássicas.

A mecânica quântica também teve novas definições com o emprego dos princípios variacionais. Através de uma teoria de Dirac, Richard Feynman formula um princípio variacional *latu sensu*, que abrange diversos fenômenos quânticos. Sua teoria contradiz os fundamentos clássicos, nos quais apenas a única trajetória estacionária é a real. Em seu trabalho de 1948, intitulado *Abordagem espaço-temporal da mecânica quântica não relativística*, Feynman introduz seu método que passou a ser conhecido como integrais de Feynman, e afirma que uma vez fixados dois pontos no sistema físico, todas as trajetórias são possíveis. Segundo ele, essa nova abordagem é, essencialmente, uma terceira formulação da mecânica quântica, vindo depois das de Schrödinger e Heisenberg.

O estudo do cálculo das variações, assim como a mecânica lagrangiana e hamiltoniana, são abordados, na sua maior parte, nos cursos de mecânica clássica para a graduação. Dessa forma, na próxima seção, analisa-se como esse conteúdo é apresentado para os estudantes e, por extensão, examina-se, do ponto de vista histórico, se essas referências oferecem ao leitor um aprendizado significativo.

4. CAPITÚLO 3 – ANÁLISE CRÍTICA DA LITERATURA

4.1. LIVRO I – TAYLOR

O primeiro livro a ser investigado será *Mecânica Clássica*, de John R. Taylor, traduzido por Waldir Leite Roque, 2º edição do ano de 2013. A mecânica newtoniana é apresentada e desenvolvida em detalhes nos cinco primeiros capítulos. Por outro lado, o sexto trata do cálculo variacional e, mesmo antes de entrar no tema, o autor ressalta que, em alguns casos, a mecânica de Newton não é apropriada para a resolução de exercícios; assim, para introduzir uma nova formulação, a de Lagrange no caso, o autor propõe estudar o cálculo variacional. Veja abaixo o que o autor traz:

> Infelizmente, temos visto que as expressões para as componentes da aceleração em coordenadas não Cartesianas são muito complicadas, e a situação torna-se muito pior à medida que passamos para outros sistemas ainda mais complicados. Isso torna a segunda lei de Newton difícil de ser usada em coordenadas não Cartesianas. Precisamos de uma equação de movimento alternativa (embora, em última análise, sejam equivalentes) que funcione igualmente bem em qualquer sistema de coordenadas, e a alternativa requerida é suprida pelas equações de Lagrange. A melhor forma de mostrar – e para entender a grande flexibilidade – das equações de Lagrange é usando o “princípio variacional”. Esse princípio é importante em muitas outras áreas da matemática e física... (TAYLOR, 2013, pág. 215)

Na sequência, são apresentados dois exemplos do cálculo variacional: o menor caminho entre dois pontos e o Princípio de Fermat. Antes de finalizar essa seção e entrar nas equações de Euler-Lagrange, é dada uma “justificativa” para esse tópico:

> A propósito, estamos agora prontos para explicar o título deste capítulo: como nossa preocupação é como variações infinitesimais de um caminho alteram uma integral, o tópico é chamado de cálculo das variações... (TAYLOR, 2013, pág. 218)

A partir desse ponto, o livro texto passa a se ater apenas de forma quantitativa o uso do cálculo variacional, introduzindo a equação de Euler-Lagrange e algumas aplicações do cálculo de máximos e mínimos como o caso da braquistócrona e geodésica.

O capítulo sete, dedicado às equações de Lagrange, começa com uma citação de Hamilton sobre o trabalho de Lagrange, o qual declara:

> O desenvolvimento teórico das leis de movimento dos corpos é um problema de tamanho interesse e importância que envolveu a atenção da maioria dos eminentes matemáticos desde a invenção da dinâmica, como uma ciência matemática, por Galileu e, especialmente, desde a maravilhosa extensão que foi apresentada por Newton. Dentre os sucessores daqueles homens ilustres, Lagrange fez, talvez, mais do que qualquer outro analista para dar amplitude e harmonia a tais deduções científicas, mostrando que as mais variadas consequências, em relação ao movimento de sistemas de corpos, podem ser deduzidas a partir de uma fórmula fundamental... (HAMILTON, 1834, apud TAYLOR, 2013, pág. 238)

Na sequência, o autor expõe a diferença entre a mecânica de Newton e a de Lagrange, comparando a abordagem de cada uma delas em alguns sistemas físicos, ressaltando qual seria de melhor aplicabilidade. Depois dessa apresentação, o capítulo é voltado às equações de Lagrange para movimentos sem vínculo, com vínculo, o princípio de Hamilton, alguns exemplos contendo graus de liberdade, equações de Lagrange para forças magnéticas e multiplicadores de Lagrange.

O propósito desse livro texto, em trazer ao leitor mais de uma formulação para a mecânica e explorá-la do ponto de vista quantitativo, é feito de forma objetiva e esclarecedora. Entretanto, ele deixa de abordar tópicos que são essenciais e que levaram à formação de princípios variacionais, os quais serviram de motivação aos físicos e matemáticos da época a desenvolverem uma nova forma de resolver problemas de dinâmica.

De modo muito rápido, é introduzido o assunto do cálculo das variações, sem nem ao menos citar os grandes cientistas da história que participaram da criação. Além disso, o livro não cita “princípio da mínima ação” ou um princípio de economia da natureza. A única menção à palavra “ação” aparece ao falar sobre o Princípio de Hamilton, onde um parâmetro “S” é escrito em termos de uma integral, chamada de “integral de ação”, e que deve ser estacionária para o caminho percorrido pela partícula.

Nomes importantes que fazem parte da história da física, como Maupertuis, Descartes e Leibniz, não são mencionados. Vale ressaltar que o primeiro a buscar escrever um princípio variacional na forma matemática e aplicá-lo a sistemas físicos (e também uma interpretação teológica para o conceito) foi Maupertuis. Sabe-se ainda que os filósofos Descartes e Leibniz publicaram trabalhos extremamente relevantes para o estudo de um princípio variacional que serviria para analisar o comportamento da luz e sua propagação em diferentes meios. A rivalidade entre Fermat e cartesianos, que gera discussões e resultados relevantes à ciência, não parece em nenhum comentário do livro. No entanto, pelo menos os problemas da reflexão e refração são abordados em dois exercícios no final do capítulo seis.

Em todo contexto histórico, o livro trata apenas o princípio de Fermat, mas de maneira breve, em apenas duas linhas do texto, sem colocar em questão a verdadeira motivação que levou Fermat a buscar por tal princípio geral, focando apenas no formalismo matemático.

4.2. LIVRO II – SYMON

O segundo livro examinado foi a quinta edição do *Mecânica*, de Keith R. Symon, de 1982, traduzido por Addison Wesley. Ao longo de oito capítulos, o exemplar discorre acerca das discussões sobre o movimento de partículas em até três dimensões, rotação de corpos rígidos, gravitação e sistemas de coordenadas em movimento. No capítulo nove, sem mesmo fazer uma breve tomada do cálculo variacional, o livro traz a definição de coordenadas generalizadas e sua principal finalidade, que será para descrever as equações de Lagrange do movimento. Isso pode ser exemplificado com a seguinte passagem:

> A aplicação direta das leis de Newton em sistemas mecânicos resulta num conjunto de equações de movimento, em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas que compõem o sistema. Em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema. (SYMON, 1982, pág. 389)

Após apresentar alguns pontos em que as leis da dinâmica newtoniana tornam-se de difícil uso, o autor apresenta a mudança na formulação:

> Nos problemas em que é necessário usar coordenadas generalizadas, podem-se escrever as equações do movimento, de Newton, em termos de coordenadas cartesianas e, então, transformá-las em coordenadas generalizadas [...]. No entanto, seria desejável e conveniente um método geral que estabelecesse diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas. (SYMON, 1982, pág. 389)

Na sequência, após exibir o cálculo para alguns sistemas de coordenadas, começa sua utilização para determinar a energia cinética de sistemas mecânicos. Depois de algumas passagens matemáticas, é apresentada a definição de momento generalizado, o trabalho de um sistema em função de uma força generalizada, e na seção subsequente, as equações de Lagrange. O capítulo ainda fala sobre outros exemplos, como o formalismo lagrangiano para descrever sistemas sob atuação de forças eletromagnéticas e o problema da corda vibrante. Por fim, o capítulo traz as equações de Hamilton, expondo a função hamiltoniana, e o teorema de Liouville.

Fica evidente para o leitor que as informações que o livro passa são diretas, sem nenhum fundamento histórico ou qualitativo de cada conceito mencionado. Diferentemente do primeiro livro texto, o *Mecânica* de Symon vai direto ao ponto, evidenciando onde a mecânica usual de Newton “falha” e colocando as ferramentas matemáticas relevantes para definir as equações de Lagrange.

O que faz esse livro possuir um caráter puramente matemático é não levar em conta qualquer fundamento conceitual para a construção do formalismo lagrangiano. Nota-se isso pois não foi relatada a importância do cálculo variacional e a sua relevância na mecânica, ou o princípio da mínima ação, que foi a principal instigação para que a ciência fosse desenvolvida até Lagrange e Hamilton.

4.3. LIVRO III - MARION

O terceiro e último livro texto analisado desse trabalho foi *dinâmica clássica de partículas e* sistemas, de Stephen T. Thornton e Jerry B. Marion, quinta edição de 2013, traduzida por Fábio Raia. A apresentação do conteúdo é de forma gradativa, com uma revisão de conceitos matemáticos *a priori*; depois com uma retomada da mecânica newtoniana e dos problemas de oscilações; e, no capítulo seis, uma apresentação de alguns métodos de cálculo de variações. No capítulo seguinte, vem a apresentação da mecânica hamiltoniana e lagrangiana, porém antes, como prelúdio, o livro aborda alguns casos em que são difíceis para serem resolvidos pela dinâmica newtoniana. Abaixo, segue um excerto que traz essa questão:

> De fato, em situações específicas, pode ser difícil ou mesmo impossível obter expressões explícitas para as forças de restrição [...] Para evitar algumas das dificuldades práticas que aparecem nas tentativas de aplicação das equações de Newton para problemas específicos, procedimentos alternativos podem ser desenvolvidos. (MARION, 2013, pág. 229)

O autor ressalta que o formalismo lagrangiano não vem para substituir a forma que Newton aborda a mecânica, mas sim como um método optativo para solucionar problemas físicos. Como forma de exemplificar isso, tem-se o trecho a seguir:

> Portanto, para efetuar uma simplificação, não precisamos formular uma nova teoria da mecânica – a teoria de Newton está bastante correta – mas somente criar um método alternativo de lidar com os problemas complexos de modo geral. Tal método está contido no Princípio de Hamilton, e as equações de movimento que resultam da aplicação deste princípio são chamadas equações de Lagrange. (MARION, 2013, pág. 229)

Além disso, fica claro que o resultado final deve ser o mesmo, não importando o caminho usado, ou seja, as equações de Lagrange que descrevem apropriadamente a dinâmica de partículas devem ser equivalentes às equações de Newton. Antes do autor adentrar no princípio de Hamilton, ele faz uma revisão histórica, tratando de alguns momentos relevantes que marcaram a formulação desse método alternativo de resolver problemas físicos.

A abordagem começa mencionando os princípios de mínimo em física e sua origem com Heron de Alexandria, passando por Fermat, Leibniz, Maupertuis, até Lagrange e Hamilton, relatando ainda alguns outros cientistas que fizeram uso dos princípios variacionais em física. Isso pode ser ilustrado com a seguinte passagem:

> Os primeiros princípios mínimos foram desenvolvidos no campo da ótica. Heron de Alexandria, no século II a.C., descobriu que a lei que governa a reflexão da luz poderia ser obtida ao afirmar que o raio de luz, que viaja de um ponto para outro por uma reflexão de um espelho

> plano, sempre pega o menor caminho possível. (MARION, 2013, pág. 230)

Mesmo sem citar Descartes, é abordado o princípio de Fermat e o resultado conhecido como lei de Snell da refração. Veja abaixo:

> Em 1667, Fermat reformulou o princípio ao postular que um raio de luz sempre viaja de um ponto para outro em um meio por um caminho que requer o menor tempo. O princípio de Fermat do menor tempo leva imediatamente, não somente a lei correta da reflexão, mas também à lei de Snell da refração. (MARION, 2013, pág. 230)

Dentre os três livros examinados, este é o único que faz referência ao princípio da mínima ação de Maupertuis, o que é algo bastante válido. Para tratar disso, o autor declara que:

> A primeira aplicação de um princípio geral mínimo em mecânica foi feita em 1747 por Maupertuis, que afirmou que o movimento dinâmico acontece com ação mínima. O princípio da mínima ação de Maupertuis se baseou em princípios teológicos (a ação é minimizada pela "sabedoria de Deus"), e seu conceito de "ação" era bastante vaga. (MARION, 2013, pág. 230)

Antes de entrar em detalhes matemáticos do princípio de Hamilton, o autor finaliza sua análise histórica com o uso do princípio da mínima ação por outros cientistas. Para tanto, afirma que:

> Em 1828, Gauss desenvolveu um método de tratar a mecânica por seu princípio da restrição mínima; uma modificação feita mais tarde por Hertz e incorporada em seu princípio de curvatura mínima. Estes princípios estão ligados proximamente ao Princípio de Hamilton e não acrescentam nada ao conteúdo da formulação mais geral de Hamilton: sua menção somente enfatiza o interesse contínuo com princípios mínimos na física. (MARION, 2013, pág. 230)

Depois desses comentários, o livro inicia a definição de caráter quantitativo das equações de Lagrange em coordenadas generalizadas; suas aplicações e equivalência com a mecânica de Newton; equações canônicas do movimento; e a formulação de Hamilton.

Para o leitor que está tendo o primeiro contato ou para aquele estudante que procura compreender o assunto em sua essência, o livro de Thornton e Marion não desaponta. A principal vantagem em ressaltar a origem de um teorema e a forma que progrediu em diferentes pontos de vista concede a quem está buscando pelo tema um melhor entendimento, pois traz não só um conteúdo de valor quantitativo baseado em teoremas, axiomas, exemplos e problemas, mas também um texto qualitativo, que esmiúça os aspectos históricos na constituição dos dados físico-matemáticos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na história da ciência, os avanços científicos marcaram a época de suas descobertas. Entretanto, algumas questões foram banhadas por discussões calorosas ao longo de séculos, em constante evolução e transformação, esse foi o caso do princípio da mínima ação. Não se destaca somente por ser um dos princípios variacionais mais importantes na física, com a finalidade de descrever uma ampla classe de problemas em mecânica clássica, eletromagnetismo, termodinâmica, ótica, relatividade e mecânica quântica; mas também porque foi alvo de debates e polêmicas dentre muitos físicos, filósofos e estudiosos da natureza. A motivação pela busca de uma lei geral que poderia descrever as leis da física não tinha raízes somente em fatos científicos observáveis, tinha origem também em uma fundamentação teológica, que despertava interesse em alguns e que gerava críticas por outros.

Embora muitos anteriormente buscassem entender um princípio que descreveria, de forma geral, o comportamento da natureza, foi Maupertuis o primeiro a explicá-lo através de um formalismo matemático e procurar um significado nessa teoria. Apesar de sua conduta parecer imoral para alguns cientistas da época, pois o seu princípio era adaptável em cada classe de problemas e, como foi apresentado, para uns ele nem tinha o mérito por tal descoberta, foi Maupertuis o pioneiro nessa área. Foi ele quem trouxe deu à física um novo campo de pesquisa.

Com as pesquisas de Lagrange, o princípio da mínima ação recebeu um tratamento matemático adequado, o que permitiu que fosse, a partir daí, uma teoria bem desenvolvida e poderosa. Dessa forma, além das equações de Newton, a mecânica lagrangiana passa ser reconhecida como uma forma alternativa de analisar e calcular a dinâmica de sistemas físicos. Essa nova perspectiva em estudar problemas do ponto de vista energético, e não mais vetorial, promoveu grandes avanços na física, vindo à tona nas mãos de Hamilton, Jacobi e Feynman.

Portanto, levando em consideração a extrema importância dos princípios variacionais na ciência e, em especial, o princípio da mínima ação, este trabalho teve como objetivo promover uma análise histórica desse tema, trazendo os principais cientistas que se dedicaram à construção desse conceito, abordando também fatos extra científicos. Buscou-se assim mostrar como esse tópico passou a ser fundamental para a formação de um novo domínio de estudo na física.

Dessa forma, todo esse conteúdo que contém uma bagagem histórico-filosófica e que passou por muitas modificações matemáticas, deve ser apresentado nos livros de forma clara, salientando não somente os resultados matemáticos, mas o significado físico de cada expressão algébrica.

Em geral, um acadêmico que demanda estudar as equações de Lagrange e o Princípio de Hamilton, consegue, nesses três livros apresentados, praticar esse novo método de resolver sistemas dinâmicos com uma vasta coleção de exemplos resolvidos, problemas e dedução de resultados matemáticos. Entretanto, fica evidente na terceira referência, que a inclusão do conceito do ponto de vista histórico, torna a aprendizagem mais significativa do que apenas lançar novos parâmetros matemáticos e construir uma equação sem um caráter significativo. Dessa forma, o conteúdo deixa de ser apenas uma aprendizagem sistêmica, na qual o aluno deve apenas integrar e resolver equações, e então, passa trazer uma interpretação física para o que está calculando, assim como o resultado que está buscando.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASTO, J. J. S.; MELO, A. R. P.; LIMA, J. F.; A, T. J. AS PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DE PIERRE DE FERMAT PARA O ESTUDO DE TEORIA DOS NÚMEROS – VI Semana de Estudos, Teorias e Práticas Educativas (2016)

BERTIN, M. C.; PIMENTEL, B. M.; POMPEIA, P. J. Formalismo de Hamilton-Jacobi *à la Carathéodory.* Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 3, pg 393-403 (2007)

CASS, M. J. A teoria da prova de Leibniz. ScientiaEstudia, São Paulo, v.11, n. 2, p. 267-279 (2013).

CHIAROTTINO, Z. R.; FREIRE, J. J. O Dualismo de Descartes como princípio de sua Filosofia Natural. Estudos avançados 27 (79), 2013.

DESCARTES, R. A Dióptrica – Discurso I, II, III, IV e VIII. ScientiaEstudia, São Paulo, v.8, n. 3, p. 451-86 (2010).

EVANGELISTA, L. R. Perspectivas em História da Física. Ed. Livraia da Física. São Paulo (2014)

FERREIRA, A. O.; FERREIRA, A. C. O.; FERREIRA, B. S. O último teorema de Fermat.

FRAGELLI, I. C. A linguagem e as formas da natureza: breve estudo da noção de *força* na filosofia e nas ciências do século XVIII. Revista dos Departamentos de Filosofia da Universidade Federal do Paraná e da Universidade Federal de São Carlos. doispontos**:**, Curitiba, São Carlos, volume 15, número 1, p. 143-159, abril de 2018

HUISMAN, D.; VERGEZ, A. História dos Filósofos Ilustrada pelos Textos. Ed. Freitas Bastos, Rio de Janeiro, 1976

ILDEU, C. M. Descartes 400 anos – Um Legado Cinetífico e Filosófico, Rio de Janeiro. Ed Relume Dumará. p145 – 169 (1998)

KONTIC, S. Z. Mecanicismo, finalidade e a teoria da preexistência dos germes em Malebranche. Revista dos Departamentos de Filosofia da Universidade Federal do Paraná e da Universidade Federal de São Carlos. doispontos:, Curitiba, São Carlos, volume 15, número 1, p. 79-94, abril de 2018

MARTINS, R. A. A doutrina das causas finais na Antiguidade. 2. A teleologia na natureza, segundo Aristóteles. *Filosofia e História da Biologia*, v. 8, n. 2, p. 167-209, 2013.

MARTINS, R. A.; SILVA, A. P. B. Maupertuis e o princípio de ação mínima: uma análise crítica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 4, p 625-633 (2007)

MARTINS, R. A.; SILVA, A. P. B. Maupertuis, d'Arcy, d'Alembert e o princípio de ação mínima na óptica: uma análise crítica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 3, p 455-463 (2007)

MARTINS, R. A.; SILVA, A. P. B. Princípios da óptica geométrica e suas exceções: Heron e a reflexão em espelhos. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1605 (2013)

MAZZA, J. L. O Último Teorema de Fermat: a trajetória histórica do "enigma". UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) – Monografia de conclusão de curso (2014)

MOREIRA, I. C. MAUPERTUIS (1698-1759) e o Princípio da Mínima Ação. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 21, n. 1, Março (1999)

ORTEGA, D.; MOURA, B. A. Uma abordagem histórica da reflexão e da refração da luz. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 42, (2020).

PIAUÍ, W. S. Matemática e Metafísica em Leibniz: o Cálculo Diferencial e Integral e o processo psíquico-metafísico da percepção. Theoria - Revista Eletrônica de Filosofia.

RAMOS, M. C. Origem da vida e a origem das espécies no século XVIII: as concepções de Maupertuis. ScientiaEstudia, v.1, n. 1, p. 43-62 (2003).

SILVA, A. C.; PEREIRA, J. M.; SARAIVA, L. F. L. OS COMPLEXOS, OS QUATÉRNIOS E OS OCTÔNIOS: OS NÚMEROS IMAGINÁRIOS – Monografia de conclusão de curso - UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA (2012).

SILVA, J. C.; PIAUÍ, W. S. Carta de Leibniz ao matemático Dangicourt Sobre as mônadas e o cálculo infinitesimal. Theoria - Revista Eletrônica de Filosofia Faculdade Católica de Pouso Alegre. Volume 04 - Número 10 - Ano 2012 | ISSN 1984-9052

TBAKHI, A.; AMR, S. S. Ibn Al-Haytham: Father of Modern Optics. Arab and Muslim Physicians and Scholars. Ann Saudi Med; 27(6): 464-467 (2007)

TEXEIRA, W. J. A FILOSOFIA ANTI-CARTESIANA DE LEIBNIZ. Revista de filosofia, Belo Horizonte, n. 8, 1º semestre 2018.

VIANA, J. D. M. Feynman e as Integrais de Trajetória. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, n. 4, (2018)