



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Dinâmica Newtoniana Modificada e o problema da rotação das galáxias

Acadêmico: Pedro Haerter Pinto

Orientador: Prof. Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves

Maringá, 17 de dezembro de 2019



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Dinâmica Newtoniana Modificada e o problema da rotação das galáxias

TCC apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física

Acadêmico: Pedro Haerter Pinto

Orientador: Prof. Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves

Maringá, 17 de dezembro de 2019

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Mecânica Clássica	3
1.1 Mecânica Newtoniana	5
1.1.1 Equações de movimento	7
1.1.2 Equações de Rotação	9
1.2 Mecânica Celeste	9
1.2.1 As Leis de Kepler	11
1.2.2 Lei da Gravitação Universal	16
2 Galaxias	18
2.1 Via Láctea	18
2.1.1 Estrutura	19
2.1.2 Constituição	19
2.2 Galáxias	21
2.2.1 Classificação morfológica	21
2.3 Rotação de Galáxias	25
2.3.1 Movimento Estelar	26
3 Soluções para o problema da rotação das galaxias	30
3.1 Origem do problema	30
3.2 Matéria Escura	33
3.3 MOND	35
4 Comparação e escolha entre as teorias	39
Considerações Finais	42

A Cálculo do campo e do potencial gravitacional dentro de uma camada esférica	43
Referências Bibliográficas	47

*“SONHEM! Sonhos moldam o mundo.
Sonhos recriam o mundo, todas as noites.”
(Gaiman, Neil. Sandman)*

Agradecimentos

Aos meus pais Carlos e Denise que sempre me apoiaram, incentivaram e estiveram presentes em todas as fases da minha formação, estimulando e permitindo um desenvolvimento criativo e plural.

Os amigos que fiz durante a vida, tanto aqueles que estão presentes fisicamente comigo quanto aos “*Virts*” que mesmo a distância sempre se fizeram presentes, todos me escutaram falar sobre os assuntos mais “empolgantes” de física e mesmo assim ainda incentivaram e deram forças para concluir este trabalho. Em especial a minha namorada que esteve junto durante todo o tempo, escutando, comentando e dividindo um “*waffle*” enquanto discorria sobre a física “escondida”;

Meu sinceros agradecimentos ao prof. Dr. Marcos César Danhoni Neves, o eterno Tutor, que aceitou orientar este trabalho, compartilhando a sua visão diferenciada sobre o mundo, expondo que o mundo da ciência é muito maior do que apenas aquilo que é passado em sala. Abrindo os horizontes para novas ideias e perspectivas, mostrando que a física é apenas mais uma forma de arte que merece ser apreciada e como podemos aprender muito com as outras áreas do conhecimento;

Aos professores que me impulsionaram e cativaram aos estudos nas ciências naturais, em especial ao prof. Dr. Breno que desde o primeiro ano tem sido uma fonte de inspiração e incentivo.

E a todos aqueles que ajudaram direta ou indiretamente na realização deste trabalho, muito obrigado.

Resumo

O trabalho tem como objetivo compreender a Dinâmica Newtoniana Modificada (Modified Newtonian Dynamics ou MOND, em inglês), proposta por Mordechai Milgrom, de modo a analisar seus efeitos na velocidade da rotação das galáxias além das funções dadas e que poderiam satisfazer o parâmetro $\mu(x)$ equiparando com os dados existentes e contrastando com a suposição *ad hoc* da matéria escura. Será citado, ainda, outros trabalhos envolvendo teorias alternativas na Física como, p.ex., a “Tired Light Model”.

Palavras chave: física, cosmologia, MOND.

Abstract

This work aims to understand the Modified Newtonian Dynamics(MOND) proposed by M. Milgrom, in order to analyze its effects on the rotation velocity of galaxies and also the given functions that could satisfy the $\mu(x)$ parameter by matching existing data in contrast with the *ad hoc* assumption of dark matter. It will also be cited other studies involving alternative theories in physics as, eg, the “Tired Light Model”.

Keywords: physics, cosmology, MOND.

Introdução

Newton, após o estudo com corpos e movimentos, postulou em seu livro *Principia* que a força experienciada por um corpo é proporcional à mudança temporal da quantidade de movimento, ou seja, ao produto da massa do mesmo com a aceleração sob a qual o corpo está sujeito. Este postulado é um dos pilares da Física Clássica, conhecido como “Segunda Lei de Newton”. Foi e é utilizada exaustivamente para a descrição do movimento de partículas e para a construção de toda a dinâmica clássica conhecida. Entretanto, ao ser utilizada para a descrição de alguns fenômenos físicos onde a aceleração sob o corpo é extremamente pequena ocorrem discrepâncias com o predito pela mecânica newtoniana. Ao se analisar a rotação de galáxias, é observado uma diferença da velocidade radial predita, sendo necessário o uso da suposição *ad hoc* da matéria escura, um ente físico que não pode ser detectado ou medido, mas é necessário para explicar o efeito ocorrido.

Para evitar o uso da matéria escura M. Milgrom em [1] [2] modifica a dinâmica newtoniana clássica com o MOND (do *inglês Modified Newtonian Dynamics*), ou *Dinâmica Newtoniana Modificada*, onde é introduzida um novo fator $\mu(x)$ multiplicando a força original de Newton, que, para acelerações extremamente baixas gera um novo efeito de força, e para acelerações com uma ordem de grandeza habitual faz com que o fator $\mu(x)$ seja igual a 1 (um). Este fato descreve com precisão a rotação das galáxias tornando desnecessário o uso da matéria escura.

Além do MOND, outras teorias alternativas às ortodoxas foram desenvolvidas por diversos físicos ao longo da História, mas por diferentes razões de natureza epistemológica, foram deixadas em segundo plano. Entretanto, quando estudadas, podem apresentar novas interpretações, por vezes mais intuitivas que as teorias vigentes, solucionando problemas conceituais que nem sempre são possíveis responder por meio do uso da ortodoxia. As teorias que mais se destacam na presente análise estão a Mecânica Relacional desenvolvida por André Assis que utiliza da estrutura de equações da Eletrodinâmica de Weber para fazer um paralelo gravitacional, assim como pode ser feito com a Lei de Coulomb e a Lei da Gravitação Universal. Também merece destaque a teoria “Tired Light” proposta por Planck para explicar os desvios espectrais para o vermelho e o azul percebido durante observações astronômicas, sendo apoiado por Halton Arp, que durante seus estudos com quasars, levantou muitas dúvidas e problemas relacionados ao *redshift* proposto por Hubble [3].

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, o primeiro irá tratar sobre uma revisão histórica e conceitual sobre a mecânica clássica e celeste, abordando o desenvolvimento e entendimento das Leis da Mecânica ao longo da história. O segundo capítulo trará uma revisão de conceito de astronomia e cosmologia, principalmente focado na dinâmica e funcionamento das galáxias. Em seguida, no terceiro capítulo, será apresentado o problema de rotações de galáxias, e as soluções possíveis para resolver o mesmo. Por fim no quarto capítulo então será percorrido sobre as implicações epistemológicas da escolha de cada uma das teorias apresentadas e a visão de alguns autores sobre essas ideias.

Capítulo 1

Mecânica Clássica

A mecânica é o ramo da física que, dada a posição e velocidade de um corpo, é possível descrever todo o movimento que esse corpo realiza. Não é possível datar exatamente o início dos estudos sobre o movimento dos corpos, mas um dos primeiros refere-se às descrições de Aristóteles (384-322 a.C) do movimento dos corpos, em seu Physics VIII [4].

O filósofo grego acreditava que os corpos possuíam dois tipos de movimentos intrínsecos, os movimentos naturais retilíneos e os movimentos circulares, e outros movimentos conhecidos à sua natureza, movidos pela violência e corrupção, sendo, pois, não natural. Os movimentos retilíneos eram os de queda e ascensão que os corpos sublunares sofriam tentando voltar ao seu local natural.

O movimento circular, por sua vez, era o mais perfeito e deveria ser realizado pelos corpos no mundo supralunar, reproduzindo, assim, a perfeição do mundo estacionário idealizado por Platão. Aristóteles atribui o movimento dos corpos à sua constituição. As ideias cosmológicas de universo, entretanto, já construía um conceito de que, para existir o movimento, era necessário uma força agindo sob o corpo [4].

Muito posteriormente, Galileo Galilei (1564-1642) revisa os trabalhos de Aristóteles e utiliza o que é conhecido atualmente como *método científico*, procurando a repetibilidade para a realização dos experimentos: formula as primeiras leis de movimento para corpos sob a ação da gravidade, estuda os corpos celestes e seus movimentos com o seu telescópio e formula um Princípio da Relatividade, que quase se aproxima da Lei da Inércia de Newton, onde Galileu erra ao achar que o corpo seguia naturalmente um princípio de inércia circular.

Esta conexão gerada pelo Princípio da Relatividade de Galileo ia de forma contrária à teoria Aristotélica, uma vez que o repouso era um estado natural das coisas e o movimento uniforme requereria, para o pensador grego, uma aplicação constante de forças.

René Descartes(1596-1650) formula as suas Leis da Natureza, onde enuncia

[...] se ela está em repouso, nós não acreditamos que ela começará a se mover, a não ser que seja impelida por outra causa.

Nem existe qualquer razão mais forte pela qual, se ela se move, e se

nada impedir, ela não continue seu movimento espontaneamente.

E daí devemos concluir que tudo o que se move, tanto quanto lhe é possível, move-se para sempre. (DESCARTES, Princípios da Filosofia, 1644, 2ª Parte, § 37, p. 76)

Esta passagem pode ser compreendida como uma versão prévia da Lei da Inércia de Newton. Entretanto, Descartes não utiliza a palavra inércia pois conhecia o seu significado comum: *uma tendência de os corpos pararem ou permanecerem em repouso*. Parecia não querer passar a ideia de que os corpos tinham uma “preguiça natural”.

Descartes criou todos os seus conceitos baseados em sua crença religiosa, onde o movimento dos corpos seria devido a imutabilidade divina e não que era uma propriedade inerente ao corpo. Ainda que o filósofo fosse um dos fundadores da *Filosofia Mecânica* e um grande matemático, suas ideias de universo eram qualitativas. Não possuía, pois nenhuma base matemática, e não sendo, possível realizar previsões espaço-temporais [5].

Em 1687 Isaac Newton (1643-1727) publica aquele que seria o marco fundamental de toda a Mecânica: o *Philosophiae naturalis principia mathematica* ou “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, definindo ali os principais conceitos para os estudos de Mecânica clássica, as Leis (de Newton) e a Lei da Gravitação Universal. Discutia também conceitos básicos para o estudo da mecânica, como espaço, massa, velocidade, quantidade de movimento, inércia, força e aceleração.

A obra de Newton é dividida em três volumes: o primeiro, sobre o movimento dos corpos, o segundo aborda o movimento dos corpos em meios com resistência e o terceiro descreve o sistema de mundo, discorrendo sobre a gravitação e os movimentos planetários.

No primeiro livro existem oito definições importantíssimas para o estudo da Mecânica, como o conceito de massa ser o produto entre a densidade de um corpo o volume que o mesmo ocupa, o momento - tratado como quantidade de movimento por Newton - dado pelo produto da velocidade com a massa de um corpo, define a *vis inertiae*, a *vis impressa* e a *vis centrípeta* [6].

Em seguida, faz um escólio sobre o espaço, tempo e movimento relativo e absoluto, que são extremamente importantes para o desenvolvimento dos conceitos newtonianos, mas possuem problemas filosóficos que foram ressaltados por Leibniz, Berkeley e Mach [7].

Após as definições e os escólios, são formuladas as três leis do movimento, ou popularmente conhecidas como as três Leis de Newton. A primeira discorre sobre a inércia do corpo, ou a capacidade do corpo em conservar seu estado de movimento, ou de repouso. A segunda lei diz que “a mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida”(NEWTON, Principia, Lei II, p. 54). Por fim define a lei da ação e reação formulando, assim, as bases de toda a Mecânica clássica e o estudo do movimento de corpos.

O princípio fundamental de toda a Mecânica clássica é que, dado um conjunto de posições e velocidades de um corpo e as forças que agem sobre o mesmo é possível determinar

o movimento de uma partícula ou sistema de partículas. Para isso são necessários alguns conceitos fundamentais como distância e tempo, que nos permite formular a velocidade e a aceleração de um corpo. O terceiro conceito fundamental é a massa do corpo ou sistema. Esta pode ser definida como a densidade do mesmo pela volume que é ocupado, e que serão melhor tratados na seção 1.1.

As leis da Mecânica são formuladas a partir da experimentação e não partem de alguma definição matemática ou filosófica. Por exemplo, não se pode esperar *a priori* que a atração magnética ou gravitacional entre dois corpos varie com o inverso do quadrado da distância sem nenhum experimento prévio. Porém, quando se observa que o sistema se comporta seguindo uma certa ordem cria-se um postulado. Se este postulado descrever todos os dados experimentais, pode-se dizer que o mesmo é verdadeiro¹ e, portanto, ele assume o *status* de lei. Entretanto, se a lei não explica algum fenômeno, ela deve ser modificada para a forma mais geral possível, o que é proposto em [1] para segunda Lei de Newton, modificando-a e transformando em uma lei geral sem a necessidade de um ente físico fictício.

1.1 Mecânica Newtoniana

Assim como realizado por Newton, é importante definir alguns objetos e conceitos fundamentais para o entendimento e estudo da Mecânica clássica. Faremos a seguir algumas definições, muito próximas das que foram feitas por Newton em [6], todas desconsiderando os efeitos relativísticos:

Espaço: o espaço é algo absoluto, isotrópico e homogêneo, não existindo, assim, qualquer direção ou local privilegiado nele. Todos os corpos estão imersos no espaço e nenhum deles possui vantagem de localização em relação ao outro. A diferença de posição entre dois pontos do espaço é definido como “distância” e sua unidade no Sistema Internacional de medidas (S.I) é o metro [m];

Tempo: o tempo, tal qual o espaço, é algo absoluto e que flui de maneira independente e constante. Sua percepção e medida são efeitos provenientes de repetições de eventos com um certo ordenamento. Pode-se assim, definir as medidas de tempo comparando estas com algum evento que se repete de maneira bem conhecida. Sua unidade no S.I é o segundo [s];

Posição: a posição é dada quando se estabelece um sistema de referencial que não se move. Compara-se, então, a localização de um corpo com este sistema de referência e tem-se, desta forma, a posição do mesmo para este sistema. Pode-se representar o vetor

¹Entretanto para Karl Popper, não é possível nunca se afirmar que algo na ciência é verdade absoluta ou não baseado em observações de fenômenos, somente se é possível dizer que uma teoria científica, no máximo, pode ser considerada válida até quando provada falsa por outras observações, testes e teorias, mais abrangentes ou exatos que a original [8].

posição por $\mathbf{r} = (x, y, z)$, onde x , y e z são valores projetados em cada uma das direções do sistema de referência;

Velocidade: a velocidade é causada quando um corpo varia sua posição com o tempo. Portanto, quanto maior a variação da posição, maior a velocidade do mesmo. Para os estudos de Mecânica, pode-se representar a velocidade como $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt) = (v_x, v_y, v_z)$, e sua unidade no S.I. é dada por metros por segundo $[m/s]$;

Aceleração: a aceleração é a forma com que a velocidade varia no tempo, modificando assim, a posição do corpo de maneira variada, diferente de quando se tem uma velocidade constante. A representação da aceleração é dada por $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = (d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2) = (a_x, a_y, a_z)$, sendo sua unidade no S.I. o metro por segundo ao quadrado $[m/s^2]$;

Força: a força é toda ação realizada com o objetivo de mudar o estado de movimento de um corpo, seja ele de movimento ou de repouso. É igual a variação da quantidade de momento do corpo no tempo, tendo como unidade de medida o quilograma metro por segundo ao quadrado $[kgm/s^2]$;

Massa: a massa é definida como resultado do produto da densidade do corpo pelo volume que o mesmo ocupa. Portanto, é necessário a definição de uma densidade unitária ou densidade padrão, onde a massa e o volume ocupado teriam o mesmo valor. Por ser um elemento universal e de fácil acesso, a água líquida foi escolhida para a definição de densidade. Logo, um quilo de água a temperatura ambiente é o mesmo que um litro de água a temperatura ambiente, desta forma é possível comparar todos os objetos com a quantidade padrão de água e definir suas massas e densidades, sendo o conceito de densidade aprimorado com a compreensão do modelo atômico, mas ainda utilizando um material como referencial para definir a quantidade de massa dos corpos, que hoje é conhecido como o Kilo padrão. Tem como unidade o quilograma $[kg]$;

Quantidade de Movimento: a quantidade de movimento é dado pelo produto da massa de um corpo por sua velocidade, e pode ser compreendido como a dificuldade de mudar o estado de repouso ou de movimento de um corpo. Assim, corpos massivos ou velozes tem uma quantidade de movimento maiores e são mais difíceis de mudarem seu estado de movimento por meio de uma força externa. Sua unidade é dada por quilograma metro por segundo $[kgm/s]$.

Leis de Newton

Utilizando-se dos conceitos acima definidos, pode-se enunciar as três Leis de Newton (que recebem este nome devido a organização e disposição das mesmas, e não pelo fato de terem sido criadas e desenvolvidas unicamente por Newton como mencionado anteriormente):

Primeira Lei de Newton

Chamada “Lei da Inércia”, esta estabelece que todo corpo mantém seu estado de

movimento até que uma força externa seja aplicada no corpo. Para Newton, a inércia como a conhecemos hoje diz respeito à resistência de um corpo de mudar seu estado, era chamada de *vis Insita*, uma propriedade inata da matéria, e não algo que fazia parte de seu movimento somente, como pode ser visto em [6];

Segunda Lei de Newton

A Lei de Força de Newton não foi definida inicialmente como $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ como é popularmente conhecida. O texto original diz que a força que age sobre um corpo é igual à sua mudança da quantidade de movimento, logo, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Porém, a formula clássica só foi produzida por Leonhard Euler em 1750 em seu trabalho '*Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*' onde aparece pela primeira vez expresso $F = ma$ [9];

Terceira Lei de Newton

Conhecida como Lei da Ação e Reação, a terceira lei de newton diz que à toda ação há uma reação de mesma intensidade e direção mas com sentido oposto. Matematicamente, pode-se escrever como $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, ou seja, a força que 1 faz 2 tem uma reação de 2 em 1 com a mesma intensidade e direção, mas sentido diferente.

1.1.1 Equações de movimento

Utilizando de todos os conceitos definidos previamente é possível construir toda a dinâmica de uma ou mais partículas de um sistema e descrever com eles seus movimento, dados uma posição e velocidade inicial e como a força subjulgam o sistema. Para isso, utilizaremos a Lei de Newton (na notação de Euler), ou seja

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt}, \quad (1.2)$$

$$\text{pois } m = \text{cte}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (1.5)$$

onde \mathbf{F} pode ser uma função qualquer que pode depender da posição, do tempo ou da velocidade do corpo. Conhecendo juntamente o valor de x_0 e v_0 é possível descrever a totalidade do movimento de um corpo.

Como exemplo: para uma partícula livre de massa m sob a ação de uma força contante

k que sai da origem com velocidade v_0 e se move somente no eixo x tem-se que

$$k = m\ddot{x}$$

ou

$$\begin{aligned}k &= m \frac{dv}{dt} \\k dt &= m dv \\ \int_0^t k dt &= m \int_{v_0}^{v(t)} dv \\ kt &= m(v(t) - v_0) \\ v(t) &= v_0 + \frac{k}{m}t\end{aligned}$$

lembrando que k é a força sobre o sistema. Logo, $k/m = a$, assim,

$$v(t) = v_0 + at \tag{1.6}$$

utilizando $v = \dot{x}$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_0 + at \\ \frac{dx}{dt} &= v_0 + at \\ dx &= v_0 dt + at dt \\ \int_0^{x(t)} dx &= \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \\ x(t) - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2\end{aligned}$$

Portanto,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.7}$$

Desta forma, as equações (1.6) e (1.7) descrevem todo o movimento de uma partícula sob ação de uma força constante, ou, como é popularmente chamado, “Movimento Retilíneo Uniformemente Variável”. Este é um pequeno exemplo de como, dado um conjunto inicial de dados sobre o sistema, é possível prever todo o movimento e comportamento do mesmo.

Este foi um pequeno exemplo para uma força constante mas, dependendo da forma, da força, há uma diferente interpretação para o movimento e efeito que ocorrem. Alguns exemplos conhecidos de forças recorrentes são as forças elástica, gravitacional, de atrito e viscosidade, sendo cada um descrita de uma maneira diferente.

1.1.2 Equações de Rotação

O segundo tipo de movimento que os corpos podem realizar são os movimento de rotação, os quais, tal qual como o movimento de translação, possuem suas equações de movimento e objetos análogos, a maioria deles definidos por Newton em [6]. Os conceitos são:

Posição angular: para se estudar os corpos em rotação é de grande auxilio utilizar um sistema de coordenadas polares (r, θ) . A posição neste sistema é dado por $\theta = s/r$, sendo r a distância entre o centro e a partícula e s o arco formado pelo ângulo θ ;

Velocidade angular: assim como a velocidade linear, a velocidade angular é a taxa com que a posição angular varia no tempo, logo $\omega = d\theta/dt$, ou ainda $\omega = v/r$ utilizando a velocidade angular para corpos realizando movimentos periódicos $\Delta\theta = 2\pi$, neste caso a velocidade do corpo é dado em termos do seu período T , portanto $\omega = 2\pi/T$;

Aceleração angular: da mesma forma a aceleração angular pode ser dada por, $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$, ou seja a variação da velocidade angular, ou relacionando com a aceleração linear $\alpha = a/r$;

Força centrípeta: é a força pela qual os corpos são impelidos ou atraídos para um ponto ou centro. Desta forma qualquer força de atração ou repulsão que parte de um centro é centrípeta, como a força gravitacional que puxa os corpos para o centro da Terra.

Aceleração centrípeta: um corpo submetido à uma força centrípeta apresenta uma aceleração centrípeta mesmo que a sua velocidade seja constante, pois a direção da mesma está sempre sendo alterada. A relação que descreve a aceleração centrípeta é $a_c = v^2/r$, com direção dado por $-\hat{r}$;

Momento angular: tal como para o movimento de partículas em uma linha reta, os corpos em rotação também apresentam uma quantidade de movimento de rotação, que pode ser definido como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, e que, por definição, é uma grandeza sempre conservada em rotações no espaço, assim como o momento linear sempre é conservado em translações;

Torque: se a Força é definida como a variação do momento linear de um corpo em relação ao tempo, o torque é o análogo para rotações, sendo assim $\tau = d\mathbf{L}/dt = d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})/dt \rightarrow \tau = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$ ou $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Portanto, quanto maior o raio de rotação, menor a força necessária para realizar o movimento.

1.2 Mecânica Celeste

A queda dos corpos é um fenômeno físico que intriga muitos cientistas e filósofos há séculos. Aristóteles foi um dos primeiros a descrever e tentar explicar a física da queda dos corpos. Em [10] Aristóteles discute que os corpos sublunares estão tentando sempre voltar para o seu local natural dependendo da sua composição. Eles podem ser compostos pelos quatros elementos clássicos, água, terra, fogo e ar. Os dois primeiros elementos são

os graves causando, desta forma, a queda dos corpos para baixo. Os dois últimos são elementos leves, cujo local natural está a cima dos outros causando sua ascensão.

Quanto mais próximo do seu local natural, mais rápido o corpo tende a cair. Desta forma Aristóteles explicava o movimento acelerado da queda dos corpos.

Para os corpos supralunares, que seriam todos os corpos celestes, estes eram compostos de um quinto elemento chamado Éter, que seria imutável e incorruptível e que seu movimento natural seria o circular ou a correspondência de movimentos circulares periódicos, uma vez que o círculo era o mais próximo do imutável e que se aproximaria do mundo das ideias de Platão.

Desta maneira todos os corpos no céu realizavam um movimento circular uniforme e perfeito, com a Terra no centro e os outros corpos orbitando-a. Este pensamento foi aperfeiçoado por Ptolomeu com os epiciclos e deferentes e permaneceu sendo utilizado até os estudos de Copérnico e Kepler.

Em 1543 Nicolau Copérnico (1473-1543) publica *Sobre a Revolução das Esferas Celestes*, onde, utilizando de uma premissa metafísica justificava o motivo do Sol ser o corpo central do sistema solar e não a Terra:

No meio de todos os planetas encontra-se o Sol. Ora, quem haveria de colocar neste templo, belo entre os mais belos, um tal luzeiro em qualquer outro lugar melhor do que aquele de onde ele pode iluminar todas as coisas ao mesmo tempo?

Realmente, o Sol está como que sentado em um trono real, governando a sua família de astros, que giram à sua volta. (COPÉRNICO, *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*, capítulo X, livro I, 1543)

Para Copérnico, o Sol teria que habitar o centro do sistema solar por ser a lâmpada que ilumina todos os corpos, tecendo assim seus argumentos baseados ainda nas ideias metafísicas gregas. Com isso manteve as ideias de movimento perfeito e circular propostos por Platão.

Entretanto, ele conseguiu demonstrar que o seu modelo heliocêntrico simplificava muito as descrições de sistemas matemático, e se aproximava muito mais do ideal platônico, sendo possível dispensar os equantes introduzidos por Ptolomeu. Contudo, isto ainda não se encaixava exatamente com todos os dados disponíveis para estudo, que por mais que houvessem séculos de estudos celestes, ainda não haviam dados precisos e em quantidade suficiente para que fossem encontrados incertezas relevantes.

Alguns anos após a publicação de Nicolau Copérnico nasce Tycho Brahe (1546-1601), aquele que seria o maior astrônomo da era pré-telescópica. Motivado principalmente por suas crenças astrológicas, o astrônomo sueco acreditava que quanto mais precisos fossem seus dados, melhor seria a leitura das influências que estes exerciam sobre as pessoas.

Para isto, Tycho utilizava o Castelo de Uraniburgo² que lhe fora dado pelo rei Frederico

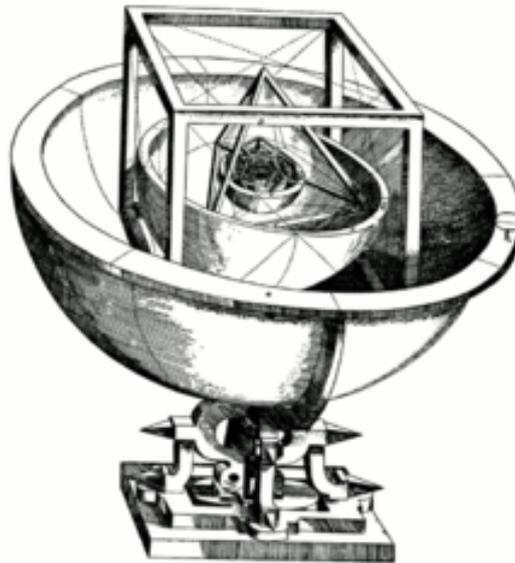
²Uraniburgo, ou Uraniborg em sueco, foi um castelo construído na ilha de Hven, em Oresund, entre a Dinamarca e Suécia. Sua construção se deu entre 1576 e 1580 durante o reinado do Rei Frederico

II da Dinamarca. Ali, ele obteria os dados com a maior precisão e continuidade de sua época, com medidas de até um minuto de arco [11]. Construiu assim uma grande base de dados para astrônomos e astrólogos. Entretanto, muito de seus dados e medições permaneciam em sigilo ou reservado apenas para os seus colegas de maior confiança, um dos quais Johannes Kepler.

1.2.1 As Leis de Kepler

Filho de um mercenário e de uma curandeira, Johannes Kepler (1571-1630) foi um matemático, astrônomo, astrólogo e músico alemão. Kepler foi apresentado à Astronomia desde muito cedo, e permaneceu com interesse na área por toda a sua vida. Estudando Teologia e Filosofia na Universidade de Tubinga o astrônomo alemão desenvolveu muito apreço pelos pensamentos metafísicos e filosóficos de grandes pensadores. Isto teve grande influência em suas obras, como no primeiro manuscrito de seu livro *Mysterium Cosmographicum* - 1596, onde Kepler escreve um extenso capítulo procurando reconciliar o heliocentrismo com passagens bíblicas [12].

Figura 1.1: Modelo do Sistema Solar Kepleriano utilizando os sólidos platônicos presente no *Mysterium Cosmographicum*, para qual cada sólido representa um dos planetas.



wikipedia.org³

Durante uma conversa com seus alunos na Universidade de Graz sobre as posições no céu em que Júpiter se alinha com Saturno, Kepler notou que algumas destas conjunções

II. Sendo considerado o primeiro observatório construído por encomenda, este foi dedicado a musa da Astronomia, Urânia, e assim chamado Uranieborg, “Castelo de Urânia”.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Mysterium_Cosmographicum#/media/File:Kepler-solar-system-1.png. Acessado em 21/11/2019

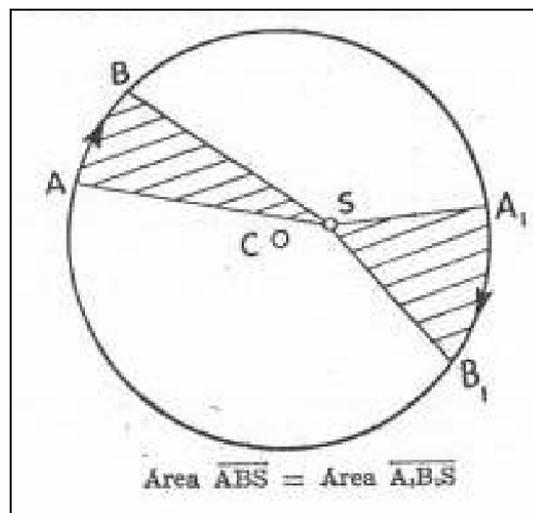
formavam triângulos equiláteros com uma pequena defasagem. Com isto, e sendo fortemente influenciado pelos pensamentos gregos de Platão e Pitágoras, Kepler começou a buscar a geometria no movimento e na conjunção dos planetas, utilizando-se dos sólidos platônicos e de conceitos metafísicos como pode ser visto na figura 1.1. Buscou entender como o universo funcionava e era regido por estas ideias. Associou, assim, cada sólido a uma característica que estaria relacionado a um planeta, justificando a ordem, o tamanho e o funcionamento de cada corpo errante.

Após a publicação de *Mysterium Cosmographicum* Johannes Kepler começou a enviá-lo para diversos astrônomos e patronos de sua época. Um dos que mais se impressionou foi Tycho Brahe, com quem desenvolveu um forte relacionamento e, conseguindo acesso para estudo de seus dados obtidos em Uraniburgo. Após a morte de Tycho Brahe em 1602, Kepler assumiu seu lugar como matemático imperial na corte do rei Rodolfo II e, obtendo, enfim, acesso integral aos dados de Tycho.

Segunda Lei

Utilizando-se dos dados de Tycho Brahe, o modelo heliocêntrico de Copérnico e os equantes de Ptolomeu, Kepler notou que o comprimento dos arcos percorridos no mesmo intervalo de tempo no afélio e no periélio é inversamente proporcional à distância desses arcos até o Sol. Chamando este resultado de “*Lei das distâncias*”, concluiu que a velocidade do planeta é inversamente proporcional à sua distância [13], ver figura 1.2 .

Figura 1.2: Representação de uma órbita circular



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, se a velocidade do planeta é inversamente proporcional à sua distância ao Sol, então:

$$v \propto \frac{1}{r}$$

$$v = \frac{K}{r}$$

sendo x a distância percorrida por um corpo ao longo dos pontos **A** e **B** de uma órbita e r a sua distância até o centro como ilustrado na figura 1.2, logo

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{K}{r}$$

Multiplicando tudo por $r/2$

$$\frac{1}{2} r \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2} K$$

fazendo Δx e Δt tender a zero, pode-se aproximar o comprimento x para uma reta e obter um triângulo com base x e altura r , temos que:

$$\frac{1}{2} \frac{r dx}{dt} = \frac{1}{2} K$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} K = K' \quad (1.8)$$

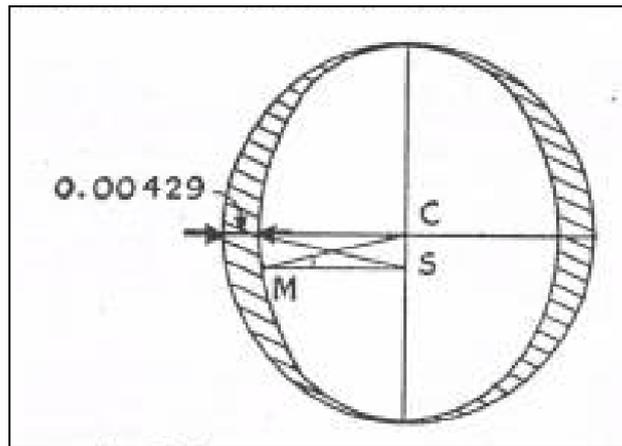
Assim, (1.8) descreve a segunda Lei de Kepler, estabelecendo que “a linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais”. Portanto, os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância que estão do Sol. Variam também a sua velocidade dependendo do formato da órbita, podendo ter maiores ou menores velocidades dependendo da posição em que se encontra do Sol. Esta lei só foi estabelecida em 1602, três anos antes da 1ª, para o caso de órbitas circulares, e somente mais tarde foi adaptada para órbitas elípticas.

Primeira Lei

Utilizando a hipótese de órbitas circulares e a lei das áreas, Kepler notou que Marte movimentava-se de maneira diferente da prevista, com uma velocidade maior do que a prevista perto do afélio e do periélio, e mais lentamente próximo aos quadrantes.

Para solucionar isto, Kepler inicialmente considerou a orbita com um formato oval, com a extremidade mais “pontiaguda” do lado do periélio [13]. Percebendo que ainda não tinha obtida uma boa precisão comparada à seus dados, em 1605, Kepler enviou uma carta para o astrônomo David Fabricius (1564-1617), onde, pela primeira vez, Kepler estabeleceu uma orbita elíptica para Marte. Se isto fosse real, o valor máximo da lúnula

Figura 1.3: Representação de uma lúnula



Fonte: Elaborado pelo autor

teria de ser 0,4% do raio, ou para um raio unitário, 0,00429, como representado na figura 1.3.

Utilizando-se dos dados de Tycho Brahe, Kepler notou que, no quadrante, Marte fazia um ângulo $\Theta = 5^{\circ}18'$, e lhe ocorreu de tomar a razão entre a distância do planeta no quadrante até o Sol à distância do ponto quadrante até o centro da circunferência, ou a secante do ângulo. Esta razão era de 100.429 sobre 100.000 e sendo os quadrantes os pontos onde a diferença entre a órbita circular e elíptica é maior, isto confirmava o que havia previsto na carta para Fabricius. Esta descoberta se deve principalmente à grande precisão que as medidas de Tycho Brahe realizou em Uraniburgo.

Desta forma, Kepler conseguiu mostrar que a órbita de Marte era uma elipse com o Sol em um dos focos. Formulou o que ficou conhecida como sua primeira lei, ou Lei das Órbitas Elípticas, como é conhecida, onde todos os planetas descrevem uma órbita elíptica onde o Sol ocupa sempre um dos focos.

Terceira Lei

Além de astrônomo, Kepler era um estudante de Música, e após a confirmação das suas duas primeiras Leis no livro *Astronomia Nova - 1609*, ele seguiu a antiga tradição de se associar música ao movimento dos astros no céu. Aristóteles já relatava que os pitagóricos relacionavam os corpos celestes à harmonia musical [14].

Ptolomeu também tentou unir a Mecânica Celeste junto à harmonia musical, pois ambos seriam uma ciência de um só sentido: a Astronomia utilizando somente a visão e a Harmonia somente a audição. Assim, ambas estariam relacionadas em seus próprios fundamentos. Em 1618, o médico inglês Robert Fludd concebeu um gigantesco monocórdio celestial que conectava os intervalos musicais ao universo geocêntrico de Ptolomeu, como visto na figura 1.4 .

$$\frac{2\log T_1}{3\log R_1} = 1$$

sendo isto válido para qualquer planeta, logo para dois planetas p_1 e p_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{3\log R_1}{2\log T_1} &= \frac{3\log R_2}{2\log T_2} \\ \frac{\log R_1^3}{\log T_1^2} &= \frac{\log R_2^3}{\log T_2^2} \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} \text{ ou } \frac{R_1^3}{T_1^2} = K. \quad (1.9)$$

A equação (1.9) descreve a Terceira Lei de Kepler, que diz que o quadrado do período de translação dos planetas é proporcional ao cubo das distâncias médias destes até o Sol [15], estabelecendo uma relação de constância entre o movimento do planeta e sua distância em relação ao Sol. Isso seria aproveitado por Newton em seu terceiro livro dos “Principia”.

1.2.2 Lei da Gravitação Universal

Utilizando das descobertas feitas por Kepler, Galileu, Hooke e Huygens, e motivado por seu amigo Edmond Halley, Isaac Newton (1642-1727) escreveu o seu livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, onde elaborou e desenvolveu uma *Filosofia Natural* mecanicista, tratando o Universo como uma grande máquina composta de engrenagens que poderiam ser explicadas por meio de princípios matemáticos, como pode ser visto em [6] e [16]. Presente em seu livro, que foi dividido em três partes, estão as três leis do movimento, ou Leis de Newton, os conceitos de força, massa e seus análogos para rotações como visto na seção 1.1. No final de seu livro, Newton trata da atração gravitacional entre os corpos e formula sua *Lei da Gravitação Universal* [17].

Em [6] Newton mostra que, se uma força for capaz de gerar movimentos circulares, e se essa força obedecesse à 3ª Lei de Kepler, então, a tal força deveria ser radial e proporcional ao inverso do quadrado da distância ao centro da circunferência. Desta forma,

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

ou seja,

$$F = \frac{\kappa}{r^2}$$

Para descobrir a constante κ , utiliza-se a Segunda Lei de Newton para uma aceleração centrípeta. Logo

$$F = ma_c \quad (1.10)$$

Entretanto, de acordo com Huygens [18], ao se girar uma pedra presa a uma funda, a aceleração sofrida pela mesma seria:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (1.11)$$

Assim, aplicando (1.10) em (1.11), tem-se que

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (1.12)$$

onde v é a velocidade linear (para este caso com módulo constante), e r o raio da circunferência. Como $v = \omega r$ e $\omega = 2\pi/T$, onde T é o período de rotação da pedra, ou planeta, logo

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (1.13)$$

Aplicado a (1.12) temos-que

$$F = \frac{m}{r} \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \quad (1.14)$$

implicando em,

$$\begin{aligned} F &= \frac{4\pi^2 r^2 m}{r T^2} \\ F &= \frac{4\pi^2 r^2 m}{r T^2} \times \frac{r}{r} \Rightarrow F = 4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} \frac{m}{r^2} \\ F &= 4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} \frac{m}{r^2} \times \frac{M}{M} \Rightarrow F = \frac{4\pi^2}{M} \frac{r^3}{T^2} \frac{mM}{r^2} \end{aligned}$$

onde M seria a massa de um segundo corpo. Uma vez que (1.9) diz que o cubo da distância sobre o quadrado do período de rotação é uma constante, e como nenhuma massa no sistema tem seu valor alterado, então,

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.15)$$

sendo $G = \frac{4\pi^2}{M} \frac{r^3}{T^2}$. Este resultado é conhecido como a *Lei da Gravitação Universal* de Newton.

Capítulo 2

Galaxias

Em uma noite de céu limpo e longe das luzes da cidade é possível ver um extenso rastro leitoso cruzando a abóboda celeste, formado por um conjunto de pontos difusos: a “Via Láctea”¹, o aglomerado de estrelas e poeira no qual o Sistema Solar e grande parte das estrelas visíveis a olho nu estão inseridos [19]. Entretanto, também é possível observar alguns outros corpos extensos e nebulosos no céu noturno, um próximo à constelação de Andrômeda e outro entre as constelações de Dorado e Mensa. Estes dois corpos brumados foram primeiro catalogados como nebulosas por diversos astrônomos, mas, posteriormente, descobriu-se serem outras Galáxias distantes da Via Láctea.

2.1 Via Láctea

Em [20] Aristóteles diz que Demócrito (460-370 a.C) e Anaxágoras (499-428 a.C) acreditavam que a Via Láctea era um conjunto de estrelas muito distantes e que estas eram ofuscadas pelo brilho do Sol durante o dia. Entretanto, Aristóteles cria que a Galáxia era causada pela ignição de diversas estrelas próximas entre si e localizadas na parte superior da atmosfera, mas ainda dentro do plano sublunar.

No entanto, a constatação de que a Via Láctea era composta por um conjunto de estrelas distantes só veio a ocorrer após Galileu Galilei reinventar o telescópio e o utilizar para observar diversos corpos celestes incluindo a Galáxia. Um século após as investigações de Galileu, William Herschel (1738-1822) mapeou a Via Láctea e descobriu que se tratava de um sistema achatado devido a forma com que as estrelas estavam distribuídas. Ele também supôs que o Sol ocupava uma posição central na Galáxia, o que era errado. Demonstrou-se posteriormente que estamos na periferia da mesma. Mas isto se deu somente em 1917 durante as pesquisas de Harlow Shapley (1855-1972) sobre aglomerados globulares.

Após a década de 1930 com a invenção da radioastronomia por Karl Jansky (1905-

¹Do grego caminho leitoso devido a sua cor esbranquiçada

1950), foi possível investigar de maneira mais fácil as características da Via Láctea, pois esta emite em muito mais frequências que apenas o da luz visível, pois esses comprimentos de ondas mais longos podem penetrar a poeira presente no meio estelar. Utilizando-se de radiotelescópios foi possível estimar com mais precisão o tamanho médio e a forma da Galáxia, confirmando, assim, as predições feitas por Shapley e Herschel.

2.1.1 Estrutura

Segundo [21] a Via Láctea tem aproximadamente 150 kpc de diâmetro, estando o Sistema Solar à aproximadamente 8 kpc do centro da Galáxia, com um bojo central mais largo que o resto da Galáxia [22] [23]. Comparando com a galáxia de Andrômeda foi possível descobrir que a Via Láctea é uma Galáxia espiralada, onde a maior parte da matéria está condensada em estruturas achatadas conhecidas como braços espirais como pode ser visto na figura 2.1, onde a galáxia NGC 2997² possui uma estrutura de braços espiralados muito semelhante ao da Via Láctea.

Os braços e a matéria presente entre eles formam o disco da galáxia, que possui uma forma achatada e circular de 30 kpc de diâmetro e 300 pc de espessura aproximadamente [22]. O disco da galáxia está banhado pelo halo, uma região esférica formada por aglomerados globulares e por uma grande quantidade de matéria escura, que possui uma extensão de, ao menos, 150 kpc, delimitando a fronteira da Galáxia. Na região central ($R_G \leq 1kpc$) se encontra o bojo central ou bojo nuclear, uma região esférica onde estão as estrelas mais velhas e uma grande concentração de metais pesados que bloqueiam a passagem de muitos comprimentos de ondas, dificultando as pesquisas. Na direção de Sagitário está localizado o núcleo galáctico, em uma região central ($R_G \leq 1pc$) e massiva, com cerca de $10^6 M_\odot$ [22] [24] [25].

2.1.2 Constituição

Sendo a Galáxia um conjunto constituído por estrelas, poeira espacial e gases [19], tudo isto está orbitando em torno do núcleo galáctico sendo atraídos pela grande força gravitacional gerada pela excessiva quantidade de estrelas presentes, da mesma forma que ocorre com os planetas no Sistema Solar. Considerando estrelas periféricas da Galáxia e conhecendo a sua velocidade e distância do centro, é possível descobrir a massa da Galáxia (M_G), sendo o Sol uma dessas estrelas, então tem-se que a força centrípeta do Sol é

$$F_c = \frac{M_\odot v_\odot^2}{R_\odot} \quad (2.1)$$

que é atraído pela força gravitacional exercida entre o Sol e a Galáxia. Logo

²A Galáxia NGC 2997 se localiza ao sul da constelação *Máquina Pneumática* e a 16,86 pc de distância da Via Láctea.

Figura 2.1: A galáxia NGC 2997 é uma das mais próximas em formatos da Via Láctea, contendo os braços espiralados, o bojo central e um núcleo massivo.



Fonte: ESO ³

$$F_G = \frac{GM_{\odot}M_G}{R_{\odot}^2} \quad (2.2)$$

Portanto, como as forças são iguais,

$$\begin{aligned} \frac{M_{\odot}v_{\odot}^2}{R_{\odot}} &= \frac{GM_{\odot}M_G}{R_{\odot}^2} \\ M_G &= \frac{v_{\odot}^2 R_{\odot}}{G} \end{aligned}$$

Sabendo que $v_{\odot} = 220 \times 10^3 m/s$ e $R_{\odot} = 8500 pc = 2,6 \times 10^{20} m$, logo $M_G = 1,9 \times 10^{41}$

³disponível em <https://www.eso.org/public/images/eso9921a/>. Acessado em 28/06/2019

Kg que é equivalente a aproximadamente $10^{11}M_{\odot}$. Considerando que todas as estrelas internas ao raio solar possuem uma massa média próxima a M_{\odot} , teriam mais de 100 bilhões de estrelas. Este seria o limite inferior, pois está sendo considerada apenas o raio interno ao Sol e a constituição de estrelas.

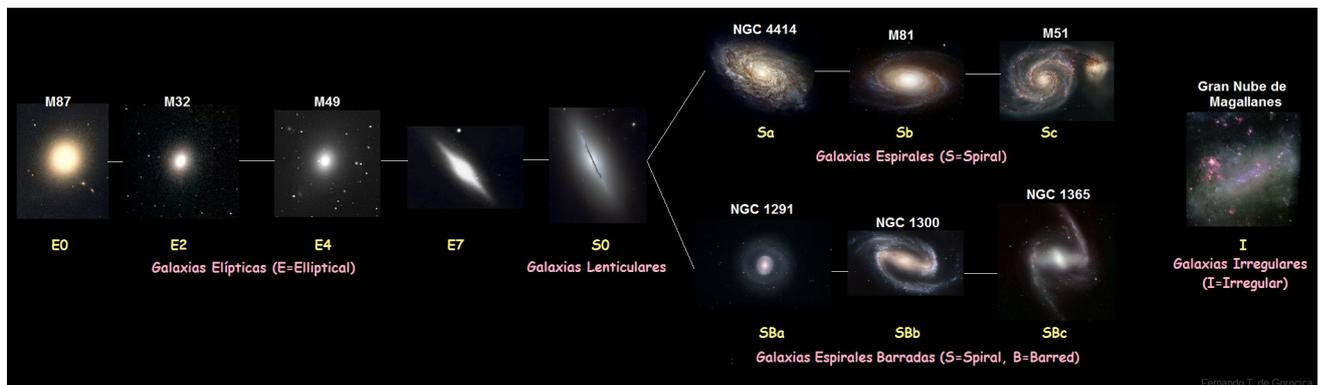
Mesmo que a maior parte da massa galáctica seja composta por estrelas [22], o meio interestelar, diferente do imaginário popular, não é vazio e sim povoado por poeira e gás distribuídos em nuvens, sendo 10% da massa da Via Láctea composta por estes constituintes. A densidade média do meio interestelar é de um átomo de hidrogênio por centímetro cúbico e aproximadamente 100 grãos de poeira por quilômetro cúbico [22].

2.2 Galáxias

Segundo [19] uma galáxia é todo conjunto de gases, poeira e estrelas e que podem ser considerados um sistema dinâmico isolado. O termo galáxia é um homônimo para Via Láctea, pois é originado do termo “galáxias” que significa leitoso, em referência a Via Láctea. Os tamanhos variam de acordo com a quantidade de estrelas presentes na galáxia, sendo as anãs com até 10 milhões de estrelas até gigantes com cem trilhões!

2.2.1 Classificação morfológica

Figura 2.2: Classificação morfológica de Edwin Hubble para galáxias



Fonte: wikipedia.org⁴

Mesmo sendo muito diferente entre si, as galáxias podem ser classificadas em três principais grupos morfológicos, e as galáxias díspares destes três modelos são conhecidas como irregulares e constituem um quarto grupo. Um dos primeiros a perceber e criar esta classificação foi Edwin Hubble (1899-1953) que, inspirado pelo esquema de John Reynolds (1874-1949), inventou o modelo de evolução galáctica utilizado ainda nos dias atuais [22].

⁴disponível em https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Clasificaci%C3%B3n_de_las_Galaxias.jpg. Acessado em 29/08/2019

O modelo de Hubble é composto por três sequencias: as galáxias elípticas, espirais e espirais barradas como visto na figura 2.2.

Espirais (S)

As galáxias do tipo espiral, quando observadas de frente, apresentam uma simetria circular com braços espiralados resultantes da rotação e da evolução galáctica, como, por exemplo, a M31, a Via Láctea e a NGC 5457⁵ vista na figura 2.3, que apresentam formações espiraladas nítidas, além do núcleo e halo. Devido a diferenças entre si, as galáxias espirais podem ser divididas em três grupos a depender do seu grau de desenvolvimento e a realação de tamanho entre o núcleo e os braços. Esta divisão é feita em *Sa*, *Sb* e *Sc*, sendo para *Sa* galáxias com braços menores e enrolados, enquanto as *Sc* possuem braços grandes e mais abertos e um núcleo menor [22].

Figura 2.3: Galáxia NGC5457, um exemplo de galáxia espiral



Fonte: wikipedia.org⁶

Observando as galáxias espiraladas, Hubble notou que algumas delas possuíam estruturas barradas em seu centro que culminavam nos potenciais braços. Galáxias que apresentam estas estruturas foram nomeadas com *SBa*, *SBb*, *SBc*, variando com o estagio de desenvolvimento de cada galáxia e sua forma física [22].

⁵A galáxia NGC 5457, ou Galáxia do Cata-Vento, está localizada a 8,278 Mpc de distância na direção da constelação da *Ursa Maior*

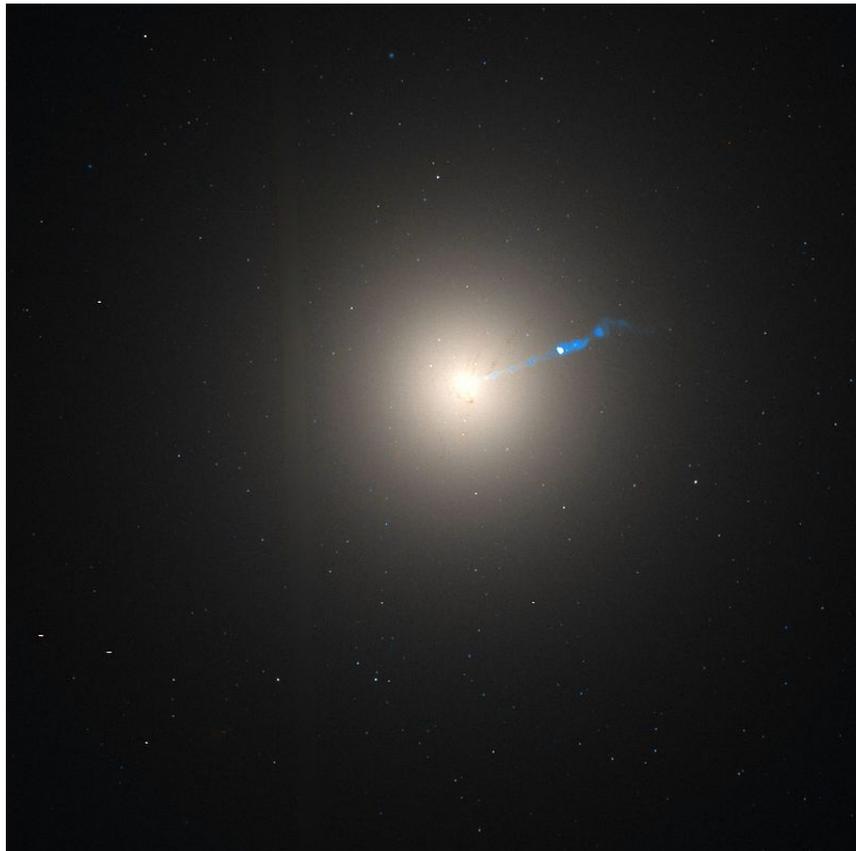
⁶disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Spiral_galaxy#/media/File:M101_hires_STScI-PRC2006-10a.jpg. Acessado em 24/11/2019

Os braços de galáxias espirais possuem a forma aproximada de uma espiral logarítmica, resultado de uma perturbação causada em uma massa de estrelas que rodam com velocidade uniforme. Desta forma, os braços galácticos também possuem uma rotação, mas com velocidade angular constante, implicando em uma alta densidade de massa nestas regiões.

Elípticas(E)

As galáxias elípticas não apresentam os braços espiralados, sendo reduzidas a formas elípticas ou esféricas, como visto na figura 2.4 que representa a galáxia M87⁷. Sua classificação na escala de Hubble se deve à sua aparência e não verdadeira forma, pois uma galáxia achatada pode ser circular observada de outro ângulo. Assim, as galáxias elípticas são classificadas de E0 a E7, onde o número n é dado por $n = 10(1 - \frac{b}{a})$, sendo a o diâmetro aparente maior e b o diâmetro aparente menor da galáxia em questão [22].

Figura 2.4: Galáxia M87, um exemplo de galáxia elíptica



Fonte: wikipedia.org⁸

⁷A galáxia M87, ou NGC 4486, é uma galáxia elíptica supergigante que está localizada na constelação de Virgem. A galáxia M87 ficou conhecida pela primeira imagem obtida de um buraco negro realizado pelo Telescópio Event Horizon que foi publicado em 10/03/2019

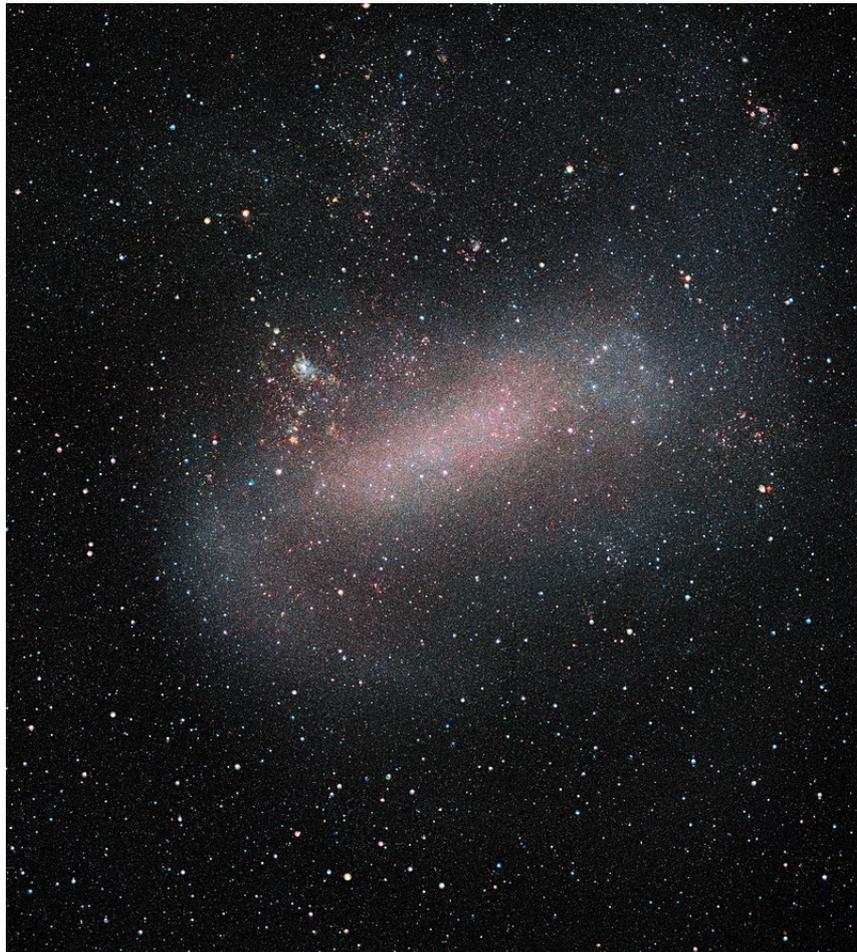
⁸disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Messier_87#/media/Ficheiro:Messier_87_Hubble_WikiSky.jpg. Acessado em 24/11/2019

As galáxias elípticas possuem pouco gás e poeira, além de uma maior quantidade de estrelas velhas, algo que é encontrado mais no núcleo de galáxias espiraladas. [22].

Irregulares(I)

As galáxias irregulares foram classificadas por Hubble como aquelas em que não há forma definida e nem simetria esférica aparente. São galáxias com acentuada atividade de formação estelar, sendo constituídas majoritariamente de estrelas jovens e gás ionizado distribuído de forma irregular [22].

Figura 2.5: A Grande Nuvem de Magalhães, um exemplo de galáxia irregular



Fonte: wikipedia.org⁹

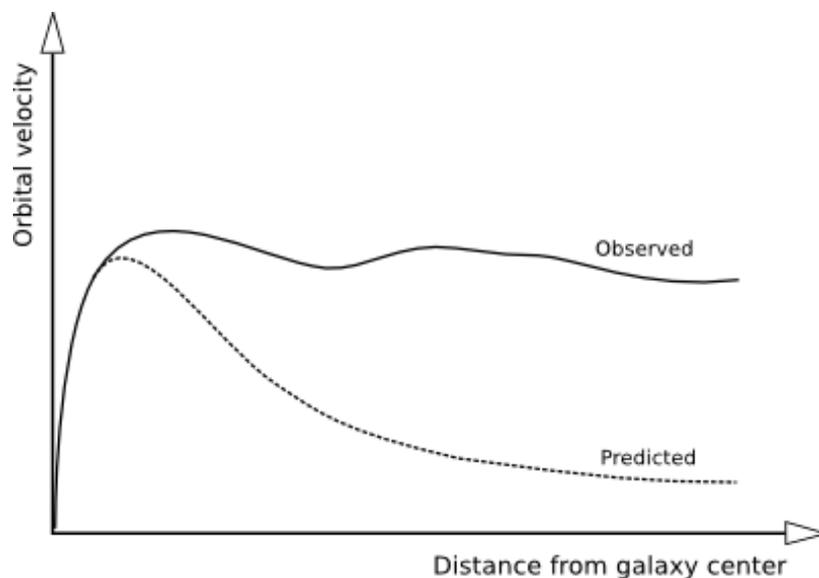
Os principais exemplos de galáxias irregulares são a Grande e Pequena Nuvens de Magalhães, vistas na figura 2.5, sendo uma das mais próximas galáxias da Via Láctea, estando a cerca de 50 Kpc de distância na direção das constelações de *Dourado* e *Mensa*, identificadas por Fernando de Magalhães em 1520 [22].

⁹disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Large_Magellanic_Cloud#/media/File:The_Large_Magellanic_Cloud
Acessado em 24/11/2019

2.3 Rotação de Galáxias

Considerando a Via Láctea como um corpo unido pela força gravitacional exercida pelo núcleo, é de se esperar que haja um movimento de rotação em torno do mesmo; caso contrário, toda a massa colapsaria para o centro galáctico. Jan H. Oort (1900-1992) esperando esse movimento, deduziu que a velocidade linear orbital do Sol e todas as estrelas na sua faixa em torno do centro é de 200 km/s, com um ano galáctico de 250 milhões de anos. Segundo Oort as estrelas mais próximas do núcleo possuem uma velocidade angular maior e quanto mais afastado do centro, menores seriam as velocidades. Estabeleceu, assim, que o disco galáctico não é um corpo rígido e que possui uma rotação diferencial da mesma forma que os planetas em torno do Sistema Solar [19] [22].

Figura 2.6: Gráfico da velocidade de rotação da galáxia pela distância do núcleo, mostrando a curva obtida experimentalmente e a curva predita pela teoria



Fonte: Citizendium.org ¹⁰

Durante estudos com a galáxia M31 (Andrômeda), foi possível notar, entretanto, que as galáxias possuem uma velocidade crescente do núcleo para as laterais do disco galáctico, passando por um máximo e, então, decaindo até uma velocidade constante, como visto na figura 2.6, indo contra a teoria prevista pela mecânica clássica e celeste [22].

O Sistema Solar e as outras estrelas residentes na nossa galáxia apresentam, fazendo uso de uma boa aproximação, um movimento de rotação quase circular entorno do centro galáctico. Por meio de estudo dos gases presentes na composição galáctica, do movimento de estrelas próximas e de outras considerações físicas, é possível descrever a força e componentes presentes no movimento radial, além de características tais como a massa total e a distribuição de massa da galáxia [23] [24].

¹⁰disponível em <http://en.citizendium.org/wiki/File:GalaxyRotationCurve.png>. Acessado em 29/06/2019

2.3.1 Movimento Estelar

Para se iniciar os estudos do movimento galáctico é necessário fazer algumas considerações iniciais, como: a definição de um sistema de referencial espacial, a determinação das velocidades de rotação em torno do centro da galáxia, e uma compreensão melhor sobre os efeitos da rotação diferencial, onde cada parte de um conjunto rotaciona com um velocidade diferente dependendo neste caso, da distância do núcleo galáctico.

Sistema Local de Repouso

O primeiro passo a se tomar na resolução de um problema físico é a definição de um sistema de coordenadas que seja mais proveitoso para o problema. Os mais comuns, em se tratando de problemas astronômicos, é o sistema Geocêntrico e o sistema de coordenadas galácticos. Entretanto, quando se trata de estudos de dinâmica, o sistema heliocêntrico é preferido, pois é descartado o movimento da Terra ao redor do Sol.

Entretanto para o estudo de rotações de galáxias o sistema preferencial é o Sistema Local de Repouso (LSR em inglês) que é baseado na dinâmica de rotação da Via Láctea.

Segundo [22], o LSR é “o sistema de referência instantaneamente centrado no Sol, que se move em órbita circular em torno do centro galáctico, com velocidade igual à média das velocidades estelares nas vizinhanças do Sol, de maneira que as estrelas, nas proximidades do Sol, em média, estão em repouso em relação ao LSR”.

Quando feita a análise de corpos fora do LSR é possível notar a existência de outros grupos locais, onde cada um pode ser definido como um novo LSR.

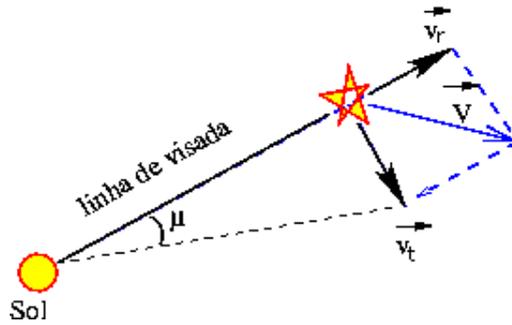
Componentes do movimento estelar

Para determinar a velocidade de rotação da galáxia é necessário estimar as velocidades das estrelas que a constituem. Quando observadas do referencial geocêntrico as estrelas apresentam apenas o movimento na direção tangencial à primeira vista. Porém, adotando a ideia de efeito Doppler, é possível notar que as estrelas apresentam uma velocidade na linha de visada. [22]

A velocidade por aproximação ou afastamento é conhecida como velocidade radial, $v_r[km/s]$, e a velocidade perpendicular a linha de visada é conhecida como movimento próprio, $\mu["/ano]$. A velocidade radial é facilmente obtida utilizando o *redshift* das estrelas em diferentes épocas, enquanto o movimento próprio é notado devido a variação da angulação do astro na abóbada celeste.

Utilizando do movimento próprio e da distância do corpo é possível determinar a velocidade tangencial do movimento estelar, $v_t[km/s]$, por meio da fórmula $v_t = d \text{sen}(\mu)$, sendo d a distância do corpo. Considera-se que, para estrelas próximas $\mu \approx 5 \times 10^{-5} rad/ano$ é possível aproximar $\text{sen}(\mu) \approx \mu$. Fazendo as transformações de unidades, tem-se que

Figura 2.7: Representação do movimento estelar com todas as componentes presentes, a velocidade radial, velocidade tangencial, movimento próprio e velocidade espacial



Fonte: Astronomia e Astrofísica ¹¹

$v_t = 4,74\mu d[km/s]$, com d dado em parsec e μ em arcossegundos por ano. Como exemplo para uma estrela com o movimento próprio de $0.1''/ano$ a uma distância de 10 pc a velocidade tangencial será de $v_t = 4,74km/s$ [22] [24].

Utilizando-se da velocidade tangencial e radial pode-se escrever $V^2 = v_t^2 + v_r^2$, onde V é a velocidade espacial dado em km/s do corpo, a velocidade e direção que o corpo realmente está se movendo. Na figura 2.7 é possível identificar cada componente do movimento estelar.

Rotação Diferencial e Curva de Rotação

A Galáxia é composta por diversos corpos e gases orbitando um mesmo centro, cada constituinte pode ter uma velocidade de rotação em torno do centro galáctico, assim como a atmosfera dos planetas gasosos. Porém, quando se analisa o LSR somente, os corpos da região solar apresentam todos uma velocidade média de rotação próxima, como se fossem um corpo rígido. No entanto, ao se estender a análise para todo o corpo galáctico, o mesmo deve apresentar um movimento kepleriano, implicando, assim, que a velocidade angular dos corpos ao longo de sua extensão deve variar.

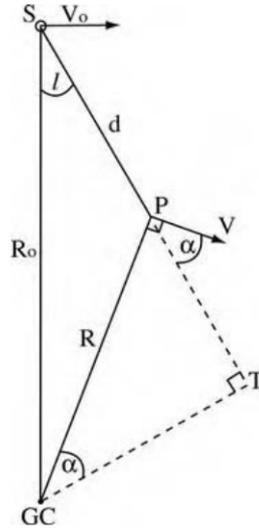
Para determinar a velocidade de rotação em torno do núcleo galáctico, Oort percebeu os efeitos da rotação diferencial na Via Láctea e conseguiu deduzir as velocidades radiais e tangenciais das estrelas da Galáxia quando observadas do referencial solar como sendo,

$$v_r = R_0 \sin(l) \left(\frac{V}{R} - \frac{V_0}{R_0} \right) \quad (2.3)$$

onde R e R_0 são as distâncias em relação ao centro da galáxia de uma estrela e do Sol, respectivamente, assim como V e V_0 , são as velocidades lineares de cada corpo. Para determinar a velocidade do rotação da nossa Galáxia, pode-se considerar que o movimento realizado pelas estrelas medidas é quase tangente ao movimento Solar. Assim,

¹¹Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/vialac/node4.htm>>. Acessado em: 17/09/2019

Figura 2.8: Representação da rotação galáctica: uma estrela ou nuvem de gás P a uma distância d do Sol e R do centro galáctico, com longitude l e se movendo em uma órbita com velocidade $V(R)$. A linha de visada de P é máxima quando este está tangente ao centro galáctico no ponto T



Fonte: Galaxies in the universe: A introduction [23]

$$R = R_0 \sin(l) \quad (2.4)$$

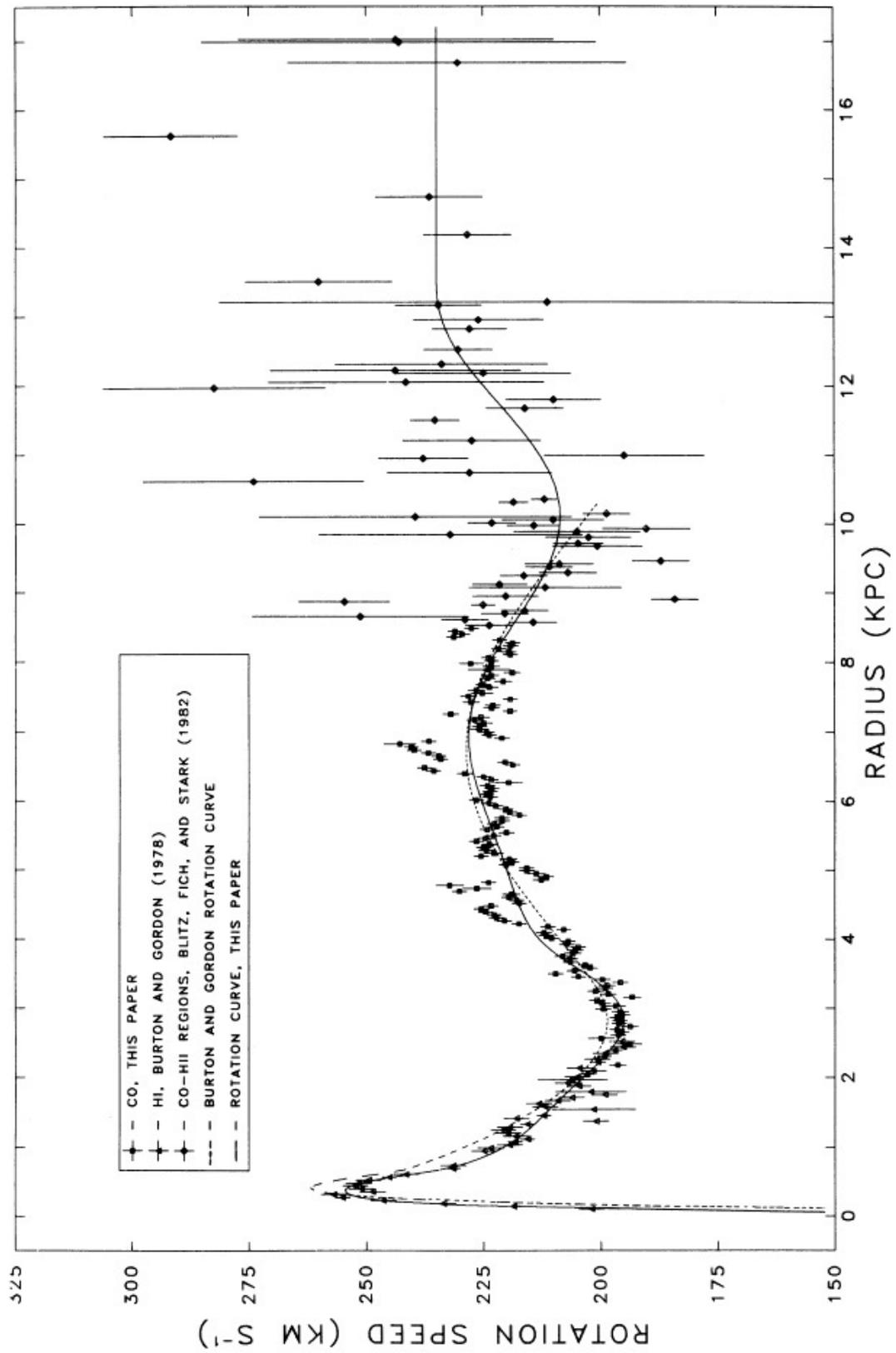
Reorganizando (2.3) e aplicando (2.4), temos:

$$V(R) = v_r + V_0 \sin(l) \quad (2.5)$$

Utilizando das técnicas desenvolvidas por Oort e outros, é possível determinar a velocidade de rotação de diversos pontos da Via Láctea, e com eles montar um gráfico da velocidade de rotação em relação à distância do centro galáctico, como visto na figura 2.9. Nela são utilizados dados de CO e HI para detectar as velocidades de certos pontos da galáxia, além de apresentar uma curva esperada de rotação da Via Láctea.

Quando inferido sobre as medidas de rotação de galáxias surge um efeito inesperado: após um certo raio, a velocidade de rotação permanece, indo contra as previsões clássicas da Mecânica. No capítulo 3 serão apresentados alguns métodos em que é possível resolver este problema teórico e se adequar melhor aos dados experimentais obtidos.

Figura 2.9: Curva de rotação da Via Láctea obtida principalmente por observações em CO e H_I



Fonte: D.P Clemens, Astrophysical Journal (1985) [26]

Capítulo 3

Soluções para o problema da rotação das galáxias

3.1 Origem do problema

Pode-se determinar a massa de uma galáxia por meio de dois métodos: *i*) utilizando os principais comprimentos de onda conhecidos e que são emitidos pelos corpos celestes aplicando a relação entre massa e luminosidade para determinar a chamada massa “luminosa” e *ii*) pode-se utilizar das leis da gravitação newtoniana para determinar a chamada massa “dinâmica” conhecendo as características de movimento do corpo em estudo.

Entretanto, quando comparado os valores calculados e observados, ocorre uma grande divergência, mostrando que a massa luminosa é muito menor comparada com a predita pela teoria dinâmica. Assim, deve haver uma massa não luminosa ou matéria escura.

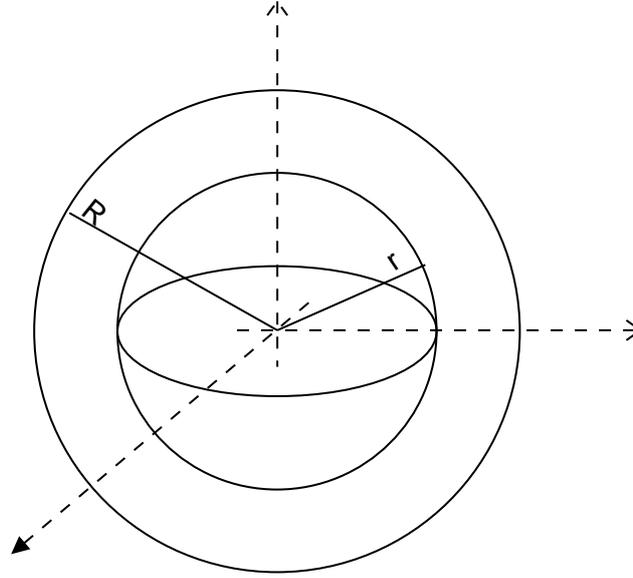
Para a determinação da massa dinâmica vamos modelar uma galáxia com distribuição de massa esfericamente simétrica de raio R e densidade dada por $\rho(r) = \frac{3M}{4\pi r^3}$.

Pode-se dividir as interações gravitacionais para o caso onde a partícula de prova com massa m' em movimento orbital que se situa dentro da galáxia ($r < R$) e o caso onde a partícula orbita fora do raio galáctico ($r > R$). Considerando a simetria da galáxia e utilizando da Mecânica Newtoniana é mostrado no Apêndice A que a força gravitacional sentida sobre o corpo só não é nula entre r e o centro da galáxia, e externamente ao raio r , não haverá contribuição gravitacional, deste modo as únicas forças sentidas pela partícula serão a atração gravitacional interna a r e a força centrípeta devido ao movimento de rotação. Supondo um ponto de equilíbrio entre a força atrativa e de rotação, tem-se que,

$$\frac{Gm(r)m'}{r^2} = k \frac{m'V(r)^2}{r}, \quad (3.1)$$

onde $m(r)$ é a massa da galáxia interior a r e k uma constante ligada à excentricidade da mesma que, para o caso esférico, é $k = 1$. Reorganizando, pode-se chegar a

Figura 3.1: Modelo de uma galáxia esférica de raio total R.



Fonte: Elaborado pelo autor

$$V(r) = \sqrt{\frac{Gm(r)}{r}} \quad (3.2)$$

Esta expressão pode ser utilizada para ambas as regiões da galáxia, tanto interna quanto externamente ao raio limite da galáxia.

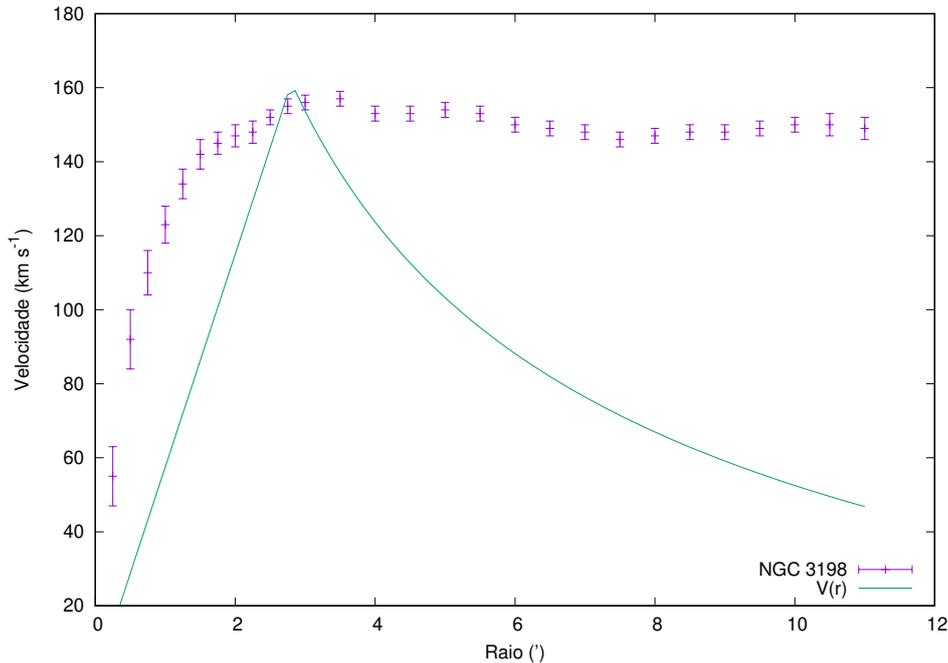
Região Interna ($r < R$)

Considerando a densidade da galáxia constante, $\rho(r) = \rho_0$, e a partícula com movimento de rotação em torno do núcleo e devido à simetria esférica $\rho_0 = \frac{m_3}{4\pi r^3}$, temos que $m/r^3 = M/R^3$, onde M é a massa total da galáxia de raio R. Aplicando isto em (3.2) obtém-se que:

$$V_{int}(r) = \sqrt{\frac{GM r^3}{r R^3}} \Rightarrow V_{int}(r) = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} r \quad (3.3)$$

Assim, a velocidade radial de um corpo dentro de uma galáxia vai crescer linearmente com relação ao raio enquanto estiver dentro da galáxia, segundo a teoria newtoniana clássica.

Figura 3.2: Gráfico de comparação entre os valores de velocidade radial da galáxia NGC 3198 e a curva teórica fornecida pela teoria newtoniana clássica



Fonte: Elaborado pelo autor

Região Externa($r > R$)

Para as regiões externas à galáxia a atração gravitacional da mesma será igual a de um ponto com massa M , como vê-se no Apêndice A, onde r é a distância entre o corpo de prova e a galáxia. Desta maneira a equação (3.2) torna-se:

$$V_{ext}(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (3.4)$$

consequentemente, a velocidade para um corpo externo à galáxia segue a Dinâmica Kepleriana com $V \propto r^{-1/2}$. Como esperado no limite em que $r \rightarrow R$, ambas as expressões resultam o mesmo $V_{int} = V_{ext} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

Utilizando a galáxia NGC 3198 [27] para exemplificar, em 3.2 é possível reparar que o comportamento da galáxia difere para $r > R$, mantendo-se constante ao passo que o previsto pela Mecânica Newtoniana era de que deveria haver um decaimento proporcional a $r^{-1/2}$.

Com a diferença entre os dados observados e aqueles previstos pelas Leis da Mecânica Celeste, é necessário rever algum dos parâmetros envolvidos. Em seguida, será discutido sobre os dois principais métodos atuais que explicam o efeito gerado pela rotação de galáxias. O primeiro surge da alteração da massa total da galáxia postulando um novo ente físico que pode apenas ser detectado por efeitos gravitacionais. O segundo método dá preferência à alteração de uma Lei já postulada, abrindo possibilidades de explicações

de novos efeitos além da rotação das galáxias.

Ambos os métodos dispensam as correções da Relatividade Geral pois, mesmos possuindo uma grande massa, a sua velocidade média e aceleração são extremamente pequenos. Deste modo muitos efeitos relativísticos podem ser desprezados. Por exemplo, tomando a velocidade típica de uma galáxia no aglomerado COMA com velocidade $v \approx 7000 \text{ km/s}$, o fator de correção relativística será $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 0,9997$. Portanto, há apenas 0,03% de correção relativística, podendo, assim, ser desprezada [28].

3.2 Matéria Escura

No final do século XIX, Lord Kelvin e Henri Poincaré já discutiam sobre a existência de corpos escuros que poderiam existir devido às velocidades de dispersão de estrelas em torno do centro galáctico, focados principalmente em explicar a massa da Via Láctea [29] [30].

O primeiro a utilizar a matéria escura devido à velocidade estelar foi Jacobus Kapteyn em 1922, e inspirado por ele, Jan Oort em 1932 também admitiu a hipótese da matéria escura para justificar a rotação de galáxias [31] [32]. Oort estudava sobre o movimento estelar no grupo galáctico local, e encontrou que a massa no plano galáctico teria que ser muito maior do que a observada, idealizando, assim, que haveria ali uma matéria não visível aos telescópios e radiotelescópios.

Na década de 60 e 70 Vera Rubin, Kent Ford e Ken Freemans trouxeram mais evidências que apoiavam fortes evidências da matéria escura ainda utilizando a rotação de galáxias. Foi mostrado que a maioria da galáxias possui aproximadamente seis vezes mais matéria escura que matéria visível [33].

Por meio da figura 3.2 é possível notar que, após um certo raio, a velocidade permanece praticamente constante e isso implica hipoteticamente que há mais massa na galáxia do que está sendo visualizado. Desta forma, a massa total da galáxia deve ser muito maior do que a observada e deve variar de acordo com o raio. Como a galáxia não se expande, a densidade da galáxia deve variar de acordo com a distância do centro. Utilizando a equação (3.2), obtém-se que:

$$V^2(r) = \frac{G\rho\tau}{r} \quad (3.5)$$

sendo τ o volume da galáxia, que, para o caso em estudo, possui simetria esférica $\tau = 4\pi r^3/3$. Portanto,

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (3.6)$$

e

$$m(r) \propto r \quad (3.7)$$

Consequentemente, a massa da galáxia deve crescer linearmente com o raio, o que não é observado quando analisado os gráficos de densidade de massa. Considerando a relação de M/L , há muito menos massa luminosa do que a esperada. Assim, há uma massa não luminosa ou uma matéria escura que interage gravitacionalmente com os corpos mas não emite ou reflete nenhum comprimento de onda.

Admitindo a existência de um halo¹ escuro com a densidade variando da forma descrita por (3.6) que se estende por toda a galáxia, é possível resolver o problema da massa faltante. Um dos modelos mais simples e factíveis de ser utilizado e que melhor descreve teoricamente este halo, de maneira simplificada, é o chamado modelo pseudo-isotermal [34], cuja densidade é da forma

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/r_c)^2} \quad (3.8)$$

onde r_c é o raio do núcleo do halo escuro e ρ_0 a sua densidade. Para este, modelo quando $r \ll r_c$ ocorre $\rho \approx \rho_0$ retomando o caso newtoniano clássico, onde a velocidade cresce linearmente com o raio e as observações luminosas podem explicar o efeito.

Para encontrar o valor da velocidade em relação ao raio utiliza-se $\rho = dm/d\tau \Rightarrow dm = \rho d\tau$, onde $d\tau$ é um volume infinitesimal com massa dm . Para determinar a massa total contida no raio r deve-se integrar a massa por toda o espaço. Partindo de um sistema de coordenadas esféricas, tem-se que:

$$dm = \rho(r) d\tau \quad (3.9)$$

$$\int_0^M dm = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho(r') r'^2 dr' \sin\phi d\phi d\theta \quad (3.10)$$

$$M = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \int_\Omega d\Omega \quad (3.11)$$

$$M = 4\pi \int_0^r \frac{\rho_0 r'^2}{1 + (r'/r_c)^2} dr' \quad (3.12)$$

$$M = r_c^2 \left[r - r_c t g^{-1} \left(\frac{r}{r_c} \right) \right] \quad (3.13)$$

Aplicando a equação (3.13) em (3.2) chega-se a:

$$V^2 = 4\pi G \rho_0 r_c^2 \left[1 - \frac{r_c}{r} t g^{-1} \left(\frac{r}{r_c} \right) \right] \quad (3.14)$$

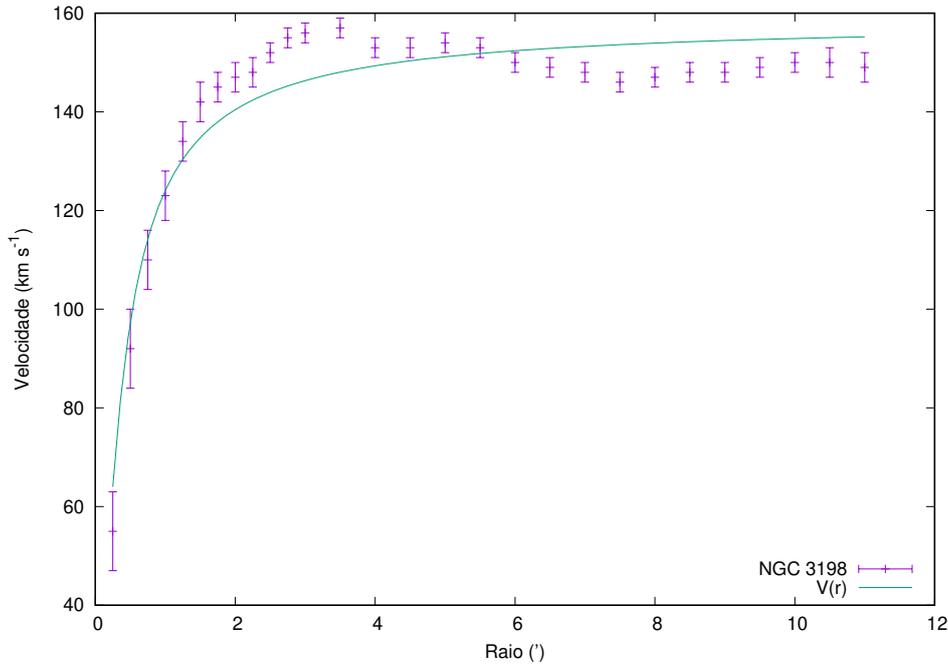
ou

$$V = 2r_c \sqrt{\pi G \rho_0 \left[1 - \frac{r_c}{r} t g^{-1} \left(\frac{r}{r_c} \right) \right]} \quad (3.15)$$

¹O halo pode ser compreendido como uma “nuvem” de matéria que permeia o espaço e existe em conjunto com a matéria bariônica conhecida.

Este resultado apresenta um comportamento que, em primeira aproximação corresponde com os dados experimentais, como visto na figura 3.3. Quando tomado valores assintóticos de $r \gg r_c$, resulta em $V_{max} = 2r_c\sqrt{\pi G\rho_0}$, permanecendo, assim, constante, como o esperado.

Figura 3.3: Gráfico de comparação entre os valores de velocidade radial da galáxia NGC 3198 e a curva teórica fornecida pela teoria da matéria escura



Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma, é possível dizer que as galáxias espirais, em geral, possuem duas componentes de massa: uma visível e determinada pela relação M/L e que prediz todos os efeitos até um raio crítico e a matéria escura representada pela equação (3.8).

3.3 MOND

Para evitar a criação de um novo ente físico que não pode ser medido diretamente, Mordecai Milgrom propôs em 1982 uma série de artigos [1] [2] com uma nova solução para o problema da rotações das galáxias, onde, em oposição à teoria vigente, a massa do sistema deveria variar. Milgrom propôs uma modificação nas leis de Newton, especificamente na segunda lei, dando origem a uma nova teoria física conhecida como *Mecânica Newtoniana Modificada* ou MOND(Modified Newtonian Dynamics).

Utiliza-se de uma hipótese de que as leis de Newton não são válidas para todas as escalas do Universo, e que podem sofrer alterações e correções para caso extremos, um desses sendo o da rotações das galáxias, que apresentam acelerações extremamente baixas. Pôde, assim, ir contra os resultados preditos por Newton em sua teoria clássica.

A teoria do MOND utiliza-se de uma modificação na dinâmica de uma partícula de massa m por meio de um parâmetro $\mu(x)$, fazendo com que a equação (1.5) se torne

$$F = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a, \quad (3.16)$$

onde o fator a_0 é uma aceleração crítica do sistema, com $a_0 \sim 10^{-8} \text{cm s}^{-2}$ sendo da ordem de $10^{-30} \text{Kpc s}^{-2}$ e o parâmetro $\mu(x)$ apresenta as seguintes propriedades:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \gg 1 \\ x & x \ll 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

A função $\mu(x)$ funciona como uma ligação entre os regimes de acelerações maiores que $a_0(x > 1)$ e acelerações menores que $a_0(x < 1)$, não possuindo uma forma específica, *a priori*. Porém, toda função que siga as condições de contorno propostos na equação (3.17) pode ser uma candidata para a formulação matemática.

Milgrom diz que a nova força pode ser entendida como uma modificação na propriedade de inércia de um corpo que, para pequenas acelerações, não seria proporcional à aceleração. Desta forma evita-se o uso da matéria escura [1]. O autor da nova teoria assume em [1] algumas hipóteses que devem ser seguidas: (i) a inércia ainda é proporcional à massa gravitacional do corpo; (ii) a aceleração depende unicamente da força que age num objeto a uma determinada posição; (iii) a força de inércia continua na mesma direção da aceleração, garantindo, assim, a isotropia do espaço, e (iv) no limite de pequenas acelerações, a inércia será proporcional ao quadrado da aceleração. Desta forma, a curva de rotação de uma galaxia finita terá se tornado assintoticamente plana.

A suposição (iv) implica na criação de uma nova constante que divide os regimes de alta e de baixa aceleração, sendo esta constante a_0 .

Pode-se reescrever a equação (3.16) com a_N sendo a aceleração newtoniana clássica,

$$a_N = \mu(a)a \quad (3.18)$$

e,

$$F = ma_N \quad (3.19)$$

Como escrito anteriormente, é possível utilizar qualquer função que se adeque às condições de contorno para este problema. Uma das formas mais simples que se tem é a função

$$\mu(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \quad (3.20)$$

resultando em,

$$a_N = \frac{a^2}{a_0(1 + (a/a_0)^2)^{1/2}} \quad (3.21)$$

que, quando aplicada à aceleração centrípeta, resulta em:

$$a_N = \frac{V^4}{r^2 a_0 \left(1 + \left(\frac{V^2}{ra_0}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (3.22)$$

que pode ser igualada à aceleração gravitacional que o corpo sente devido à massa M da galáxia estando a uma distância r . Portanto,

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{V^4}{r^2 a_0 \left(1 + \left(\frac{V^2}{ra_0}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (3.23)$$

$$\frac{V^4}{\left(1 + \left(\frac{V^2}{ra_0}\right)^2\right)^{1/2}} = GMa_0 \quad (3.24)$$

Utilizando uma serie de Taylor é possível expandir o denominador de (3.24):

$$\left(1 + \left(\frac{V^2}{ra_0}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{V^4}{2r^2 a_0^2} - \frac{3V^8}{8r^4 a_0^4} + \dots \quad (3.25)$$

que, devido à ordem de grandeza de a_0 , terá contribuição significativa até o segundo termo. Assim,

$$GMa_0 \left(1 + \frac{V^4}{2r^2 a_0^2}\right) = V^4 \quad (3.26)$$

$$V^4 = GMa_0 + \frac{GMa_0 V^4}{2r^2 a_0^2} \quad (3.27)$$

$$V^4 - \frac{GMV^4}{2r^2 a_0} = GMa_0 \quad (3.28)$$

$$V^4 \left(1 - \frac{GM}{2r^2 a_0}\right) = GMa_0 \quad (3.29)$$

$$V^4 = \frac{GMa_0}{\left(1 - \frac{GM}{2r^2 a_0}\right)} \quad (3.30)$$

$$V^4 = \frac{GMa_0}{\left(\frac{2r^2 a_0 - GM}{2r^2 a_0}\right)} \quad (3.31)$$

$$V^4 = \frac{2GMa_0^2 r^2}{2r^2 a_0 - GM} \quad (3.32)$$

Finalmente, a velocidade de um corpo dentro de uma galáxia de massa total M a uma distância r do centro será,

$$V = \left(\frac{2GMa_0^2 r^2}{2r^2 a_0 - GM} \right)^{1/4} \quad (3.33)$$

Tomando o limite de r muito grande ou $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2GMa_0^2 r^2}{2a_0 r^2 - GM} \quad (3.34)$$

Usando a regra de L'Hospital devido a indeterminação, temos que:

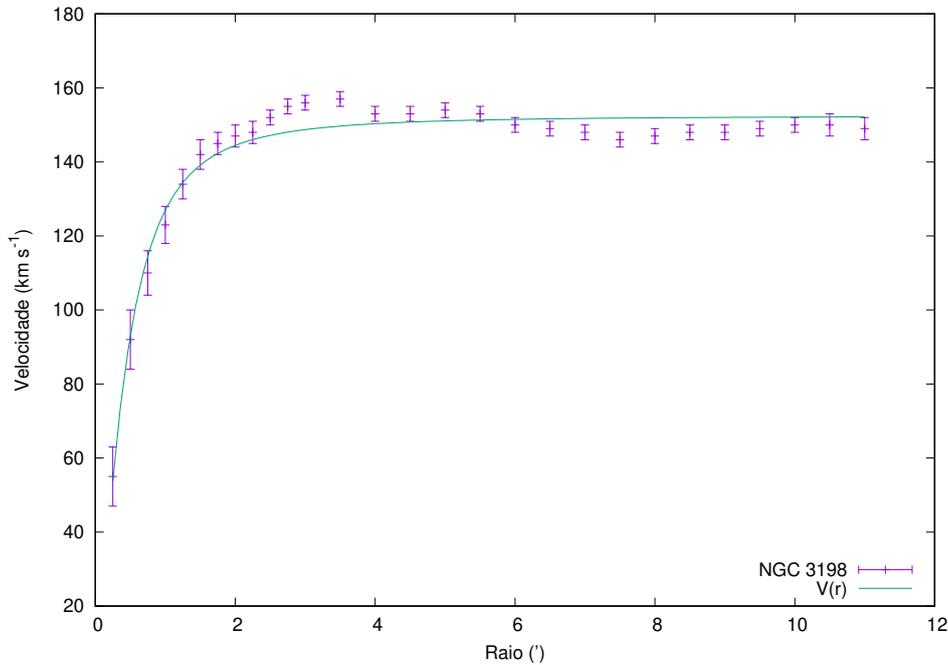
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4GMa_0^2 r}{4a_0 r} \quad (3.35)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GMa_0 \therefore V_\infty = (GMa_0)^{1/4} \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

Portanto, da mesma forma que para o caso da matéria escura, para grandes raios galácticos, o valor da velocidade de rotação permanece constante, mantendo, assim, a conformidade com os dados experimentais. Na figura 3.4 pode-se notar como a função utilizada também se ajusta com grande concordância aos dados apresentados.

Figura 3.4: Gráfico de comparação entre os valores de velocidade radial da galáxia NGC 3198 e a curva teórica fornecida pela teoria MOND



Fonte: Elaborado pelo Autor

Capítulo 4

Comparação e escolha entre as teorias

No capítulo anterior foram apresentadas duas teorias que, de maneiras distintas, respondem ao mesmo problema: a discordância com a teoria da dinâmica newtoniana conhecida. Uma delas busca resolver o problema por meio da manutenção dos teoremas clássicos já existentes criando um novo conceito que pode ser explorado e descoberto, expandido os horizontes da Física de partículas e relacionados, mas que ainda reside no imaginário teórico da Física, sem detecções diretas e nem amostras de ação em outros lugares e origem e forma desconhecida.

A outra teoria apresentada como “alternativa” parte do pressuposto de que a Física não é homogênea para escalas muito dissonantes com a experienciada pela realidade humana. Assim, as teorias físicas podem sofrer alterações para casos extremos que retornem aos casos clássicos quando feitas as corretas considerações, como os casos relativísticos e quânticos, onde, a partir de uma certa fronteira as leis da Física, mudam-se e apresentam-se novos paradigmas.

Tanto a teoria de matéria escura quanto o MOND apresentam respostas razoáveis para a solução do problema da rotação das galáxias, e até mesmo quando comparadas matematicamente, utilizando de argumentos e caminhos distintos mas chegando às mesmas conclusões. A “preferência” entre uma e outra se dá pelo estabelecimento e aceitação do paradigma proposto pela comunidade científica [35].

Thomas Kuhn em [35] trabalha o conceito de paradigma e ciência natural, onde a sociedade científica busca a resolução de problemas por meio de concepções e ideias que venham resolver os problemas gerados por uma crise. O paradigma para Kuhn é

Considero “paradigmas” as realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência (KUHN, *Estrutura das Revoluções Científicas*, 1997, p. 23)

Desta forma pode-se compreender que, para Kuhn, o paradigma científico é um conjunto de conhecimentos que afirmam a realização de um pesquisa científica, determinando até onde é permitido pensar, visto que os dados e teorias sempre buscam confirmar e reafirmar o paradigma já estabelecido. E, quando os conhecimentos científicos não se encaixam mais com o apresentado pela natureza, ocorre o que Kuhn chama de crise [36], e a comunidade científica então procura a manutenção do paradigma até o limite. Quando as anomalias começam a invalidar o paradigma, ocorre uma revolução científica com o abandono ou reformulação do que já havia antes. Um exemplo é Copérnico que revolucionou a Astronomia quando já não se era possível mais utilizar os conceitos desenvolvidos por Ptolomeu [37]

As hipóteses do MOND e da matéria escura surgem buscando resolver o problema da rotação das galáxias, mas tomando decisões sob formulações distintas, sendo influenciada pelas visões e dogmas daqueles que os formularam. Isto ocorre, segundo Paul Feyerabend [38] [39] porque quando se faz análise dos fatos, estes não são neutros e nem estão despidos das concepções prévias que possuímos. Desde sua primeira observação os fatos são interpretados conforme a vivência e experiência pessoal. Desta forma os “fatos” são “vistos” já moldados por uma teoria.

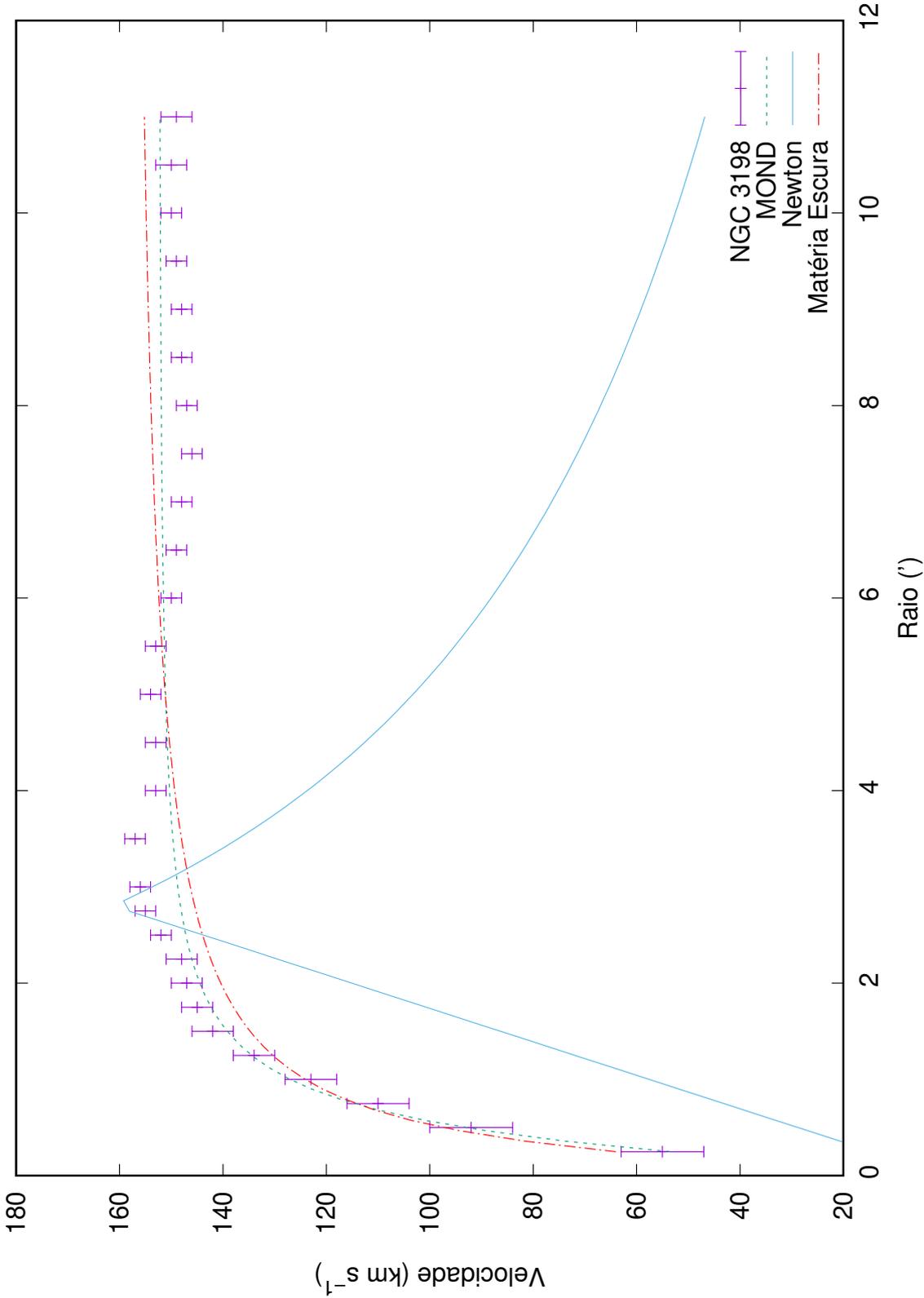
Para Feyerabend, as teorias “[...] são abandonadas e substituídas por explicações que estão mais de acordo com a moda muito antes de terem tido a oportunidade de mostrar suas virtudes” (FEYERABEND, *Contra o método*, 2011b, p. 62). Assim, “justifica-se” a escolha da matéria escura ao invés do MOND, ou os casos de censura à Halton Arp e a desvalorização da teoria da “luz cansada” para a explicação e interpretação do *redshift* [39].

Desta forma, além das influências individuais, a manutenção do antigo paradigma das formulações newtonianas parecem muito mais favorável para a comunidade científica do que uma revolução mudando a forma com que o princípio basilar da mecânica se sustenta.

Para Feyerabend, a única forma de comparar os resultados obtidos é por meio da formulação matemática de ambas as teorias como visto na figura 4.1 onde as três teorias (Mecânica Clássica, Matéria Escura e MOND) são postas juntas em contraste com os valores observados da galáxia NGC 3198. Devido as suas fundamentações e origens filosóficas não é possível compará-las, pois partem de princípios extremamente divergentes, sendo, assim, incomensuráveis [39].

Porém, isto não implica que uma ou outra teoria deve ser descartada, e sim que o sujeito deve ser livre para escolher aquela que melhor lhe satisfaz, e o pluralismo de ideias deve ser defendido, uma vez que, para Feyerabend, não existe uma verdade universal [40].

Figura 4.1: Comparação entre as três teorias, a linha sólida sendo a teoria newtoniana pura, o pontilhado a teoria do MOND e o alternado, a matéria escura.



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerações Finais

O estudo e compreensão da Natureza é uma das paixões do ser humano, buscando construir e racionalizar todos os fenômenos e efeitos que lhe são apresentados à sua contemplação. Para este fim são utilizados teorias, conceitos e postulados, que são criados para representar e prever o mundo ao seu redor. Entretanto, devido à experiência humana, diversos caminhos podem ser tomados para a justificativa de um mesmo fenômeno.

Newton racionalizou e matematizou relações que deveriam descrever a dinâmica de uma ou mais partículas, mostrando que, por meio de experimentações e conhecimentos da Natureza, é possível descrever os corpos e seus fundamentos mecânicos, mudando toda a Física, mas, principalmente, revolucionando os ramos da Mecânica Clássica. Kepler baseado em suas crenças metafísicas, deduziu, compreendeu e matematizou as órbitas dos corpos celestes, permitindo uma expansão do conhecimento natural e caminhando para o estabelecimento de um novo paradigma moderno.

Diversos outros físicos e pesquisadores realizaram contribuições que permitiram o crescimento do conhecimento natural. Entretanto muitas teorias foram abandonadas devido à sua refutação e superação, como, por exemplo, a Alquimia e a Astrologia, e outras apenas ignoradas e desprezadas por motivos sociais e culturais, como a Eletrodinâmica de Weber e o modelo da *Tired Light* de De Broglie e Max Born, dando lugar a teorias que a comunidade científica alicerçou sobre o paradigma do Big Bang.

Duas teorias divergentes foram apresentadas e fundamentadas neste trabalho. Ambas buscando responder ao mesmo problema mas partindo de pressupostos muito diferentes, disputando a manutenção de antigos dogmas da Física em detrimento da criação de novos entes físicos que são “indetectáveis” diretamente, ou uma reformulação de um paradigma bem estabelecido, aceitando as limitações da experiência humana e de que há física além disso.

Ambas teorias resolvem as anomalias que surgem quando estudadas as curvas de rotações das galáxias espirais, mas com distintas origens físicas e epistemológicas. Estas distinções podem acabar resultando num atraso científico devido a supressão de ideias e conhecimentos alternativos. Como salientado, não existe apenas uma “verdade” ou uma teoria “correta”. O que existe é a aceitação e desenvolvimento de uma Ciência plural e aberta.

Apêndice A

Cálculo do campo e do potencial gravitacional dentro de uma camada esférica

Um dos problemas mais importantes da gravitação é o cálculo do potencial, e, conseqüentemente do campo, sentido por uma partícula no ponto P à uma distância R de um corpo; neste caso, uma casca esférica de massa M , densidade constante, com parede interna de raio b e raio externo a , como visto na figura A.1.

Conhecemos de antemão que o potencial gravitacional devido a uma distribuição de matéria é dado por:

$$\Phi = -G \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' \quad (\text{A.1})$$

onde G é a constante da gravitação universal, $\rho(\mathbf{r}')$ a densidade de massa e dv' é o elemento de volume na posição definida pelo vetor \mathbf{r}' da origem no ponto na distribuição de massa. Como o sistema possui simetria totalmente esférica, tem-se que:

$$\Phi = -G\rho \int_b^a r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta \quad (\text{A.2})$$

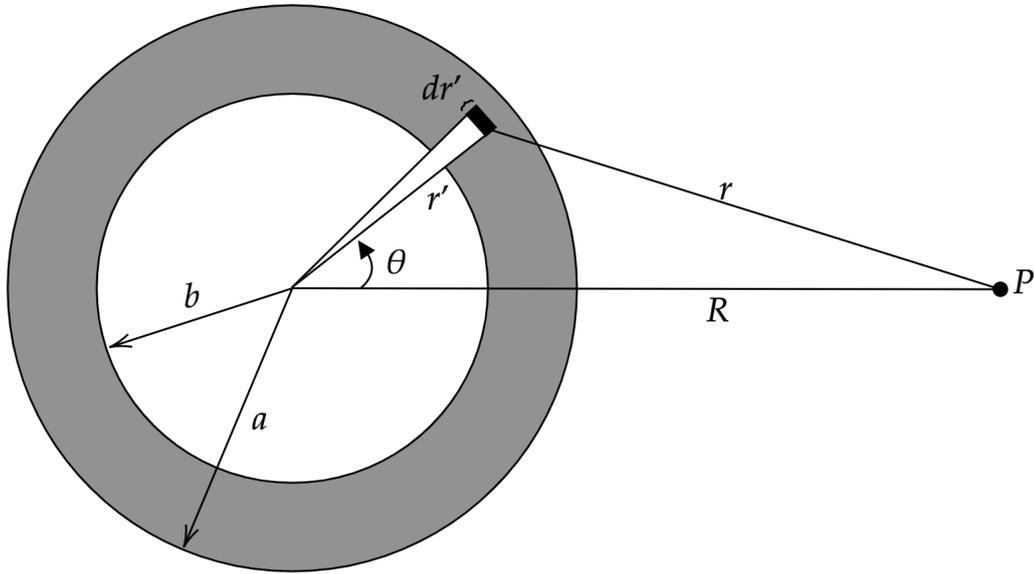
$$\phi = -2\pi G\rho \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta \quad (\text{A.3})$$

Utilizando a lei dos cossenos,

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\theta \quad (\text{A.4})$$

Como $R = cte$ em relação a r' , pode-se diferenciar (A.4) e obter-se

Figura A.1: Representação para encontrar o potencial gravitacional no ponto P devido a uma camada esférica de massa M



Fonte: Elaborado pelo autor

$$2rdr = 2r'R\text{sen}\theta d\theta \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\text{sen}\theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r'R} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.6) em (A.3)

$$\Phi = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \quad (\text{A.7})$$

onde os limites de dr dependem da localização do ponto P , e portanto, para $R > a$

$$\Phi(R > a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr \quad (\text{A.8})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [r]_{R-r'}^{R+r'} \quad (\text{A.9})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [R + r' - R + r'] \quad (\text{A.10})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [2r'] \quad (\text{A.11})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-4\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr' \quad (\text{A.12})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-4\pi\rho G}{R} \left[\frac{r'^3}{3} \right]_b^a \quad (\text{A.13})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-4\pi\rho G}{R} \left[\frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\Phi(R > a) = \frac{-4\pi\rho G}{3R} [a^3 - b^3] \quad (\text{A.15})$$

Como a massa é dada por $M = \rho v$ e o volume é $4/3(a^3 - b^3)$, então, tem-se que:

$$\Phi(R > a) = -\frac{GM}{R} \quad (\text{A.16})$$

e o campo gravitacional é dado por $g = -d\Phi/dR$. Então,

$$g(R > A) = -\frac{GM}{R^2} \quad (\text{A.17})$$

que é o campo gravitacional exercido por um ponto material de massa M , mostrando, assim, que para corpos fora da distribuição de massa M , o campo pode ser tratado como o de uma partícula pontual.

Se o ponto de campo estiver dentro da camada, tem-se que:

$$\Phi(R < b) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr \quad (\text{A.18})$$

$$\Phi(R < b) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [r' + R - r' + R] \quad (\text{A.19})$$

$$\Phi(R < b) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [2R] \quad (\text{A.20})$$

$$\Phi(R < b) = -4\pi\rho G \left[\frac{r'^2}{2} \right]_b^a \quad (\text{A.21})$$

$$\Phi(R < b) = -2\pi\rho G [a^2 - b^2] \quad (\text{A.22})$$

O potencial, portanto, é constante dentro da camada e, assim, o campo gravitacional dentro é nulo.

Finalmente, para calcular o potencial dentro da camada, tem-se que

$$\Phi(b < R < a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_R^a r' dr' \int_{r'-R}^{r'+R} dr - \frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^R r' dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr \quad (\text{A.23})$$

$$\Phi(b < R < a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [r' - R - r' + R] + \frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r' dr' [R + r' - R + r'] \quad (\text{A.24})$$

$$\Phi(b < R < a) = \frac{-2\pi\rho G}{R} \int_R^a r' dr' [2R] - \frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^R r' dr' [2r'] \quad (\text{A.25})$$

$$\Phi(b < R < a) = -4\pi\rho G \left[\frac{r'^2}{2} \right]_R^a - \frac{4\pi\rho G}{R} \left[\frac{r'^3}{3} \right]_b^R \quad (\text{A.26})$$

$$\Phi(b < R < a) = -2\pi\rho G [a^2 - R^2] - \frac{4\pi\rho G}{3R} [R^3 - b^3] \quad (\text{A.27})$$

$$\Phi(b < R < a) = -4\pi\rho G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6} \right) \quad (\text{A.28})$$

Para este resultado é possível observar que quando aplicado os limites de $R \rightarrow a$, reproduzem-se os efeitos de (A.16) e quando $R \rightarrow b$ reproduz-se (A.22), mostrando, desta forma, a continuidade do efeito físico e como a descrição matemática deve apresentar consistência ao representar um fenômeno real.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Milgrom, “A modification of the Newtonian Dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis,” *The Astrophysical Journal*, vol. 270, pp. 365–370, 1983.
- [2] M. Milgrom, “A modification of the Newtonian Dynamics: Implications for galaxies,” *The Astrophysical Journal*, vol. 270, pp. 371–389, 1983.
- [3] A. K. T. Assis, M. C. D. Neves, and D. S. L. Soares, “A cosmologia de Hubble: De um universo finito em expansão a um universo infinito no espaço e no tempo,” *Evoluções e Revoluções: O Mundo em Transição.*, pp. 199–221, 2008.
- [4] Aristotle and D. W. Graham, *Physics VIII*. Clarendon Aristotle Series, Oxford University Press, 1999.
- [5] R. Martins, *Estado de repouso e estado de movimento: uma revolução conceitual de Descartes*, pp. 291–308. 01 2012.
- [6] I. Newton, *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural livro 1*. Principia: princípios matemáticos de filosofia natural, EDUSP, 2018. Tradução de Ricci, T.
- [7] A. K. T. Assis, *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. 01 2013.
- [8] F. L. d. Silveira, “A filosofia da ciência de Karl Popper: o racionalismo crítico,” *Caderno Catarinense de Ensino de Física. Florianópolis. Vol. 13, n. 3 (dez. 1996), p. 197-218*, 1996.
- [9] L. Euler, “Découverte d’un nouveau principe de Mécanique,” *Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin*, pp. 185–217, 1752.
- [10] Aristoteles and E. Bini, *Do Ceu*. Obras Completas, Edipro, 2014.
- [11] A. Medeiros, “Entrevista com Tycho Brahe,” *Revista Física na Escola*, vol. 2, no. 2, p. 21, 2001.
- [12] P. Barker and B. R. Goldstein, “Theological foundations of kepler’s astronomy,”

- Osiris*, vol. 16, pp. 88–113, 2001.
- [13] C. Wilson, “How did kepler discover his first two laws?,” *Scientific American*, vol. 226, no. 3, pp. 92–107, 1972.
- [14] B. Stephenson, *The music of the heavens: Kepler’s harmonic Astronomy*. Princeton University Press, 1994.
- [15] A. Medeiros, “Continuação da entrevista com kepler: a descoberta da terceira lei do movimento planetário,” *A Física na Escola*, vol. 4, no. 1, pp. 19–24, 2003.
- [16] I. Newton and A. K. T. Assis, *Principia: princípios matemáticos de filosofia natural livros II e III*. Principia: princípios matemáticos de filosofia natural, EDUSP, 2012.
- [17] P. M. C. Dias, W. M. S. Santos, and M. T. M. de Souza, “A gravitação universal: um texto para o Ensino Médio,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 26, no. 3, pp. 257–271, 2004.
- [18] E. S. Júnior and J. B. B. Filho, “Reconstruindo a gravitação universal e seus fundamentos epistemológicos,” *Saberes Docentes em Ação*, vol. 02, no. 01, 2016.
- [19] R. R. F. Mourão, *Da Terra às Galáxias: Uma introdução à Astrofísica*. Editora Vozes, 5^a ed., 1997.
- [20] Aristóteles and E. W. Webster, *Meteorology*. <https://ebooks.adelaide.edu.au/a/aristotle/meteorology>: eBooks@Adelaide, 2016. Livro I - Parte 8 . Acessado em 21/06/2019.
- [21] Y. Xu, H. J. Newberg, J. L. Carlin, C. Liu, L. Deng, J. Li, R. Schönrich, and B. Yanny, “Rings and radial waves in the disk of the Milky Way,” *The Astrophysical Journal*, vol. 801, no. 2, p. 105, 2015.
- [22] K. de Souza Oliveira Filho and M. de Fátima Oliveira Saraiva, *Astronomia e Astrofísica*. Livraria da Física, 2^a ed., 2007.
- [23] L. S. Sparke and J. S. Gallagher III, *Galaxies in the Universe: an introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [24] M. Zeilik, E. van Panhuys Smith, and S. Gregory, *Introductory Astronomy and Astrophysics*. Saunders College Pub, 3 ed., 1992.
- [25] C. Chiappini, “The formation and evolution of the Milky Way,” *American Scientist*, vol. 89, pp. 506–515, 11 2001.
- [26] D. P. Clemens, “Massachusetts-stony brook galactic plane co survey-the galactic disk rotation curve,” *The Astrophysical Journal*, vol. 295, pp. 422–428, 1985.

- [27] K. Begeman, “Hi rotation curves of spiral galaxies. i-ngc 3198,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 223, pp. 47–60, 1989.
- [28] H. Velten, “Mond: uma alternativa à Mecânica Newtoniana,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 30, no. 3, p. 3314, 2008.
- [29] W. T. B. Kelvin, *Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*. CJ Clay and Sons, 1904.
- [30] H. Poincare, “The milky way and the theory of gases,” *Popular Astronomy*, vol. 14, pp. 475–488, 1906.
- [31] J. C. Kapteyn, “First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system,” *The Astrophysical Journal*, vol. 55, p. 302, 1922.
- [32] J. H. Oort *et al.*, “The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems,” *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, vol. 6, p. 249, 1932.
- [33] V. C. Rubin, W. K. Ford Jr, and N. Thonnard, “Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/r= 4kpc/to ugc 2885/r= 122 kpc,” *The Astrophysical Journal*, vol. 238, pp. 471–487, 1980.
- [34] J. E. Gunn and J. R. Gott III, “On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution,” *The Astrophysical Journal*, vol. 176, p. 1, 1972.
- [35] T. Kuhn, *A estrutura das revoluções científicas*. Editora Perspectiva S.A, 5 ed., 1997.
- [36] R. C. Bartelmebs, “Resenhando as estruturas das revoluções científicas de Thomas Kuhn,” *Revista Ensaio Pesquisa em Educação em Ciência (Belo Horizonte)*, vol. 14, pp. 351 – 358, 12 2012.
- [37] N. T. Massoni, “Epistemologias do século XX,” *Textos de apoio ao professor de Física*, 2005.
- [38] H. S. T. dos Santos, P. A. Fusinato, and D. Gardelli, “O anarquismo epistemológico e o Ensino de Física: Implicações da Epistemologia de Paul Feyerabend no Ensino.,” *e-Boletim da Física*, vol. 7, no. 3.
- [39] H. S. T. d. Santos *et al.*, “Controvérsias entre a ação a distância e a ação por campos: subsídios para o uso da história do eletromagnetismo em sala de aula,” Master’s thesis, Universidade Estadual de Maringá, 2018.
- [40] P. K. Feyerabend, *Contra o método*. UNESP, 2 ed., 2011b.