



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Determinismo na Mecânica Quântica

Acadêmico: Lucas Maquedano da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves

Maringá, 22 de janeiro de 2020



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Determinismo na Mecânica Quântica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do Professor Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física

Acadêmico: Lucas Maquedano da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcos Cesar Dahoni Neves

Maringá, 22 de janeiro de 2020

Sumário

Agradecimentos	ii
Epígrafe	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Pensamento Clássico	2
1.1 Causalidade e Determinismo	2
1.2 Localidade	8
2 Mecânica Quântica	16
2.1 Radiação de Corpo Negro	16
2.1.1 Energia Eletromagnética	18
2.1.2 Potenciais Eletromagnéticos	18
2.1.3 Catástrofe do Ultravioleta	21
2.1.4 Hipótese de Planck	23
2.2 Desenvolvimento da Mecânica Quântica	24
2.2.1 Paradoxo Onda-Partícula	28
2.2.2 Princípio de Incerteza	31
2.2.3 Paradoxo EPR-Bohm	33
2.2.4 Resumo da Interpretação Ortodoxa	34
3 Mecânica Bohmiana	36
3.1 Teoria das variáveis ocultas	36
3.2 Teoria da Onda-Piloto	36
3.3 Potencial Quântico	39
3.4 Desigualdade de Bell	42
Considerações Finais	43
Referências Bibliográficas	46

Agradecimentos

À minha mãe, pelo zelo e carinho incessantes. Minha primeira professora, a qual me ensinou as maiores lições da vida;

A meu pai, cientista nato e entusiasta do saber. Por me acompanhar nessa jornada, nas invenções e por sempre dividir sua paixão pelo conhecimento;

Aos meus padrinhos, pela forma única de amar e pelas muitas de me apoiar;

À Catarine, por todo o viver compartilhado e pelo sonho de um futuro a conquistarmos;

Ao Prof. Dr. Marcos Danhoni e ao Prof. Dr. Daniel Gardelli, pelo ensino plural e espírito de luta;

A Pedro Haerter, pela amizade e constantes conversas, as quais inspiraram este trabalho;

Agradeço a todas as oportunidades que tive e às pessoas que conheci e estiveram a meu lado, familiares, amigos e professores, os quais contribuíram para meu crescimento pessoal e formação acadêmica.

Quantas Verdades
cabem em um porquê?

Resumo

O trabalho teve por objetivo o estudo dos fundamentos da Mecânica Quântica. Para isso, primeiro foi apresentado alguns conceitos clássicos tais como *causalidade*, *determinismo* e *localidade*. Em seguida, foi discutido acerca do problema da energia de um corpo negro, sua abordagem clássica, na chamada catástrofe para o ultravioleta, e a solução proposta por Planck, a partir do *quantum* de energia. Dado o potencial da ideia dos *quanta* de explicar outros fenômenos observados, como o efeito fotoelétrico, Compton e da estrutura atômica, debateu-se acerca do desenvolvimento da Mecânica Quântica, seu formalismo matemático e filosófico, e como estes romperam com as ideias clássicas vistas. Por fim, foi estudado os trabalhos de de Broglie e David Bohm em suas respectivas teorias da onda-piloto e das variáveis ocultas, abordagem estas que explicariam os mesmos fenômenos quânticos mas mantendo o aspecto *determinista* da Natureza.

Palavras chave: Mecânica Quântica, Epistemologia, Determinismo, Mecânica Bohmiana.

Abstract

The aim of this text is to study the fundamentals of Quantum Mechanics. For this, we first presented some classic concepts such as causality, determinism and locality. Then, it was discussed about the problem of blackbody energy, its classical approach to the so-called ultraviolet catastrophe, and Planck's solution from the energy quantum. It is used the idea of the potential of the quanta to explain other observed phenomena, such as the photoelectric effect, Compton, and the atomic structure. It was debated about the development of quantum mechanics, its mathematical and philosophical formalism, and how they broke with the classical ideas. Finally, the works of de Broglie and David Bohm were studied in their respective theories of pilot wave and hidden variables, which approach would explain the same quantum phenomena but maintaining the deterministic aspect of the Nature.

Keywords: Quantum Mechanics, Epistemology, Determinism, Bohmian Mechanics.

Introdução

A forma como vivenciamos o mundo, nossos sentidos e experiências, são nossas ferramentas para compreender as leis que regem o Universo. Contudo, as leis que se apresentam em nosso mundo macroscópico parecem não valer para os extremos do muito grande (estrelas, galáxias e buracos negros) e do muito pequeno (elétrons, fótons e quarks). Essa inevitável discrepância se deu historicamente na mesma época, primeira metade do século XX, com o avanço tanto da Relatividade quanto da Mecânica Quântica. Conceitos que até então eram o princípio para nosso entendimento da Natureza, se viram por terra para que pudéssemos explicar os novos e nada intuitivos resultados experimentais.

Nesse novo cenário que se abriu diante da evolução humana, poderíamos romantizar o papel dos físicos que uniram a filosofia, ou melhor chamada metafísica, à criatividade e a um trato matemático para explicar os novos mundos, enquanto inegavelmente muniam suas teorias com suas concepções individuais acerca do quão acessível seria nosso entendimento sobre a realidade. É nesse contexto que a Física mostra sua beleza, o caráter de uma ciência exata dá lugar a uma efervescência de ideias para explicar um novo fenômeno, usando da matemática como instrumento e dos resultados experimentais como guia.

Mas esse palco aparentemente democrático se vê constantemente diante de uma Academia que deve, dentre as muitas correntes de pensamento, adotar a mais proeminente como protagonista e então testá-la incessantemente para contextos ainda mais amplos. Dessa forma, uma gama de teorias ganha importância periférica por não apresentarem de imediato as soluções exigidas. O objetivo desse trabalho é mostrar uma dessas ideias, a interpretação proposta por Louis de Broglie, depois melhor desenvolvida por David Bohm, e que ainda hoje é tema de estudo para os curiosos acerca dos fundamentos do mundo quântico.

Começaremos apresentando alguns princípios familiares ao nosso cotidiano, que servirão de base para o método científico e a forma como ainda hoje fazemos ciência. No segundo capítulo estudaremos como a Mecânica Quântica se desenvolveu, sua nova álgebra e quais princípios tiveram que ser reformulados. No Capítulo III mostraremos a teoria de de Broglie-Bohm e como ela serve de importante instrumento para uma melhor compreensão do mundo quântico sem abandonar muitos dos conceitos clássicos.

Por fim, concluiremos com um posicionamento sobre os dilemas em que a Física Quântica se encontra, dilemas estes que estão longe de colocar um ponto final, se é que ele possa existir, na forma pela qual buscamos entender o microcosmo.

Capítulo 1

Pensamento Clássico

1.1 Causalidade e Determinismo

Na busca por entendermos a Natureza, formulamos hipóteses baseados na regularidade dos fenômenos e em descrevê-los de forma causal, no sentido de que estes decorrem de outros fatores, num processo de causa-consequência. Esse pensamento remete à própria evolução da humanidade e ao surgimento das primeiras civilizações, onde os fenômenos naturais ou eram venerados como deuses, tais como o Sol, a Lua e os planetas, ou como sendo produto da ação divina, a exemplo das estações, marés, tempestades e eclipses. É a essa tradição mítica dos povos que habitaram a China, Índia, Mesopotâmia e Egito, além das culturas incas, maias e astecas, a quem devemos, por exemplo, os primeiros relógios, calendários e observatórios, frutos de um amplo conhecimento e desenvolvimento da Astronomia.

Com o domínio de novas técnicas, o homem passou à condição de agente ao criar, reproduzir e transformar seu meio. Assim, a concepção do divino foi dando espaço para a uma nova compreensão dos fenômenos a partir de causas naturais, leis matemáticas e princípios filosóficos. Esse pensamento surgiu com as colônias gregas, em especial na região de Mileto, que ao se tornar um grande centro econômico e de intercâmbio cultural, sobretudo com o Oriente, foi se afastando das tradições mitológicas assim como das antigas condições sociais.

É importante salientarmos que essa passagem do mito para a filosofia não se deu de forma absoluta, assim como também não rompeu com a crença de divindades agindo sobre o Universo. Muito pelo contrário, essa visão metafísica permaneceria atrelada à todo desenvolvimento científico posterior. Embora as crenças mudassem ao longo da História, foram muitas vezes os princípios metafísicos que precederam as teorias e os formalismos físicos¹ e, embora tenha recebido com o Positivismo importância periférica a ponto de hoje ter uma conotação negativa, a Metafísica sempre esteve aliada ao pensamento científico.

A causalidade teve com a filosofia grega atrelada à busca pelos elementos fundamentais que compõem a matéria e dos quais tudo provinha, assim como a natureza do movimento dos corpos. Quanto aos constituintes da matéria, Aristóteles em sua obra *Metafísica* apresenta:

“A maior parte dos primeiros filósofos considerava como os únicos princípios de todas as coisas os que são da natureza da matéria. Aquilo de que todos

¹Foi por acreditar que os planetas se moveriam de forma a produzir uma melodia divina que Kepler desenvolveu a lei dos períodos, ou Maupertuis buscando demonstrar a existência de Deus quando apresentou o princípio de ação mínima.

os seres são constituídos e de que primeiro são gerados e em que por fim se dissolvem, enquanto a substância subsiste mudando-se apenas as afecções, tal é, para eles, o elemento, tal é o princípio dos seres; e por isso julgam que nada se gera nem se destrói, como se tal natureza resistisse sempre... Pois deve haver uma natureza qualquer, ou mais do que uma, donde as outras coisas se engendram, mas continuando ela a mesma.

Quanto ao número e à natureza destes princípios, nem todos dizem o mesmo. [...]” (PRÉ-SOCRÁTICOS, 1985, p. 7).

De fato, eram muitas as hipóteses: se essa substância era observável (água, ar), de outra natureza (ápeiron, éter) ou se tratava de um ou mais elementos (para Empédocles eram a água, o ar, a terra e o fogo, já para Leucipo e Demócrito eram os átomos tomados de formas geométricas diferentes). Os processos pelos quais estes elementos se transformam na diversidade de coisas também diferia segundo a perspectiva de cada pensador.

Além de tentarem compreender a natureza mínima da matéria, os pensadores também se perguntavam qual o princípio responsável pelo movimento. A discussão corria entre ser o espaço e o tempo contínuos (defendido por Zenão em seus problemas lógicos) ou discreto (apoiado por Pitágoras e embasado nas leis matemáticas). Leucipo e Demócrito defendiam a lógica pitagórica do discreto, vendo no “intervalo” de vazio que separaria as unidades, o lugar onde os átomos se moveriam.

Aristóteles propôs uma explicação para as causas do movimento e, junto a ela, um sistema de mundo que iria persistir até o século XVII². Nela, o Universo estaria dividido em duas regiões, a *sublunar*, formada pelos quatro elementos de Empédocles os quais teriam um “lugar natural” no Universo, o que explicaria por exemplo a queda dos corpos na qual os corpos *graves* tais como terra e a água³ tenderiam para o centro do Universo, que também seria, pela perspectiva geocêntrica, o centro da Terra. Já os corpos *leves* tais como o ar e o fogo tenderiam a ascender, por isso o Sol, constituído de fogo, segundo a visão aristotélica, estaria elevado ao céu. A outra região é a *supralunar*, constituída pelo éter e por uma sucessão de esferas mecânicas as quais movimentariam os astros.

Em linhas gerais, a causalidade tinha como base uma pluralidade de argumentos qualitativos e diferentes raciocínios lógicos, apresentados segundo a visão de cada escola filosófica. Destacamos os importantes trabalhos experimentais de Arquimedes sobre Estática e Hidrostática, trabalhos estes que iriam influenciar posteriormente os de Galileu. Arquimedes já havia apresentado expressões precisas das leis da Estática, mas as leis da Mecânica geral ficaram no campo qualitativo.

A proposição de um método investigativo que oferecesse uma base não só argumentativa mas passível de ser testada e comprovada, veio com Bacon, Descartes e principalmente Galileu. Para Bacon, a observação de fenômenos regulares levaria à formulação de leis científicas de forma indutiva, onde a ciência experimental e o empirismo tinham papéis fundamentais na busca pelo conhecimento. Já René Descartes, acreditava em uma dedução pura e realista. A dúvida cartesiana lançava mão de todo saber pré-definido, de forma a construir o conhecimento a partir de noções fundamentais e sempre fazendo uso do formalismo matemático.

Galileu Galilei, considerado o precursor do método científico, tinha como sequência lógica a observação dos fenômenos, sua demonstração experimental seguida de uma formulação matemática. Pode ainda ser apresentada como a tradução matemática daquilo

²Em grande parte por influência da Igreja Católica.

³O termo não está relacionado à gravidade, mas sim para distinguir dos corpos leves.

que é observado numa lei generalizada para fenômenos semelhantes e passíveis de múltiplas demonstrações. Galileu desenvolveu importantes trabalhos sobre a queda dos corpos, referenciais, Astronomia e instrumentação, pensamentos estes que viriam a romper com os paradigmas aristotélicos vigentes.

Embora outros pensadores como Kepler já utilizassem da matemática para explicar os fenômenos do movimento dos planetas, foi com Bacon, Descartes e, principalmente com Galileu, que essas regras foram propostas como método em suas obras.

Essas ideias foram sintetizadas no século seguinte por Isaac Newton, usando do empirismo indutivo de Bacon, o racionalismo dedutivo e matemático de Descartes e o método científico realista, matemático e experimental de Galileu. Para Newton as hipóteses deveriam ser deduzidas mediante observação dos fenômenos.

No prefácio do *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, Newton resume sua obra da seguinte forma:

“(...) Ofereço este trabalho como os princípios matemáticos da filosofia, pois toda a essência da filosofia parece consistir nisso - a partir dos fenômenos de movimento, investigar as forças da natureza e, então, dessas forças demonstrar os outros fenômenos; e para esse fim dirigem-se as proposições gerais no primeiro e no segundo Livro. (...) No terceiro (Livro) derivado dos fenômenos celestes as forças de gravidade com as quais corpos tendem para o Sol e para os vários planetas. Então, dessas forças, por outras proposições que também são matemáticas, deduzo os movimentos dos planetas, dos cometas, da Lua e do mar.” (NEWTON, 2016, p. 14).

Newton conseguiu, dessa forma, leis matemáticas que descrevessem o movimento de uma ampla variedade de fenômenos ⁴. Para isso, usou como método o que explica em *O Sistema do Mundo* como uma das quatro regras de raciocínio em filosofia,

“REGRA I. *Não devemos admitir mais causas para as coisas naturais do que as que são verdadeiras e suficientes para explicar suas aparências.*”

Sobre isso dizem os filósofos que a Natureza não faz nada em vão, e mais algo é vão quando menos serve. Pois a Natureza é simples e não se compraz com causas supérfluas. ” (NEWTON, 2012, p. 185).

Isso significa que, ao estudarmos um fenômeno, devemos primeiro analisar quais suas causas mais fundamentais. Tomando o exemplo de uma folha de papel, na grande maioria das vezes quando a soltarmos de determinada altura, ela irá cair, o que para Newton era fruto da atração que a Terra exercia sobre o objeto. Ele deduziu, a partir de seus axiomas ou leis do movimento, que essa atração ainda seguia a relação,

$$\mathbf{F} = \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

Ela pode ser generalizada para quaisquer pares de corpos de forma que a força de atração \mathbf{F} entre esses dois corpos é diretamente proporcional a tal produto de suas massas (Mm) e inversamente proporcional à distância relativa entre ambos (r^2), isso multiplicado por uma constante de proporcionalidade G e direcionada ao longo da linha reta que une os

⁴Mais que isso, uniu os mundos sub e supralunares de Aristóteles, mostrando que as leis que movimentam os corpos terrenos também são válidas para descrever o movimento dos astros.

corpos (\hat{r}). É conhecida como a Lei da Gravitação Universal e, junto às três leis do movimento, constituem um formalismo fundamental para o estudo da Estática e da Dinâmica.

Podemos chamar essa Mecânica de *causal*, por conseguir explicar os movimentos como consequências de certos agentes e de suas respectivas forças de interação. A Mecânica Newtoniana possibilita que, dada a posição e velocidade iniciais de um corpo, assim como as forças envolvidas, seu movimento seja determinado para todo instante futuro. À essa predição damos o nome de *determinismo* o qual, a partir das leis causais, determinaria a dinâmica de todos os corpos.

Esse pensamento levou Laplace a generalizar as leis de Newton como válidas universalmente. Isso significava que, uma vez conhecido as posições e velocidades de todos os corpos em qualquer instante de tempo, o comportamento futuro de todas as coisas no Universo seriam determinadas para todo o tempo. Essa tendência de reduzir todos os fenômenos da Natureza a certos princípios levou o nome de *mecanicismo* e, dada a predição da Mecânica Newtoniana, de *determinista*.

Voltando ao nosso experimento com a folha de papel, podemos perceber que o ponto no qual a soltamos e o lugar que ela chega ao solo não estão estritamente alinhados verticalmente. Contudo, a Lei da Gravitação exerce influência apenas na direção radial entre os corpos. Assim, a que se deve o desvio em sua trajetória? Poderíamos responder que se deve à um terceiro agente, sendo ele o meio ao qual a folha se encontra, no caso o ar. Essa interação com o meio pode ser tão expressiva que há casos, quando, por exemplo, passa uma corrente de ar, em que a folha não somente não irá cair como também poderá subir a grandes distâncias! O que é intuitivo quando lançamos um aviãozinho de papel. Isso não invalida o fato de que os corpos caem, mas coloca um novo agente na história, que pode ser compreendido somente se expandirmos nosso sistema de dois corpos (papel-Terra) para outro com mais interações (papel-ar-Terra).

Newton propõe esse raciocínio da seguinte forma:

“Regra III As qualidades dos corpos que não admitem intensificação nem diminuição de graus, e que pertencem a todos os corpos dentro do alcance de nossas experiências, deve ser consideradas como qualidades universais de todos os corpos de qualquer tipo.

Pois como as qualidades dos corpos só são conhecidas por nós por meio das experiências, devemos considerar como universais todas aquelas que concordam universalmente com as experiências, e as que não são capazes de diminuição não podem nunca ser completamente removidas.” (NEWTON, 2012, p. 186)

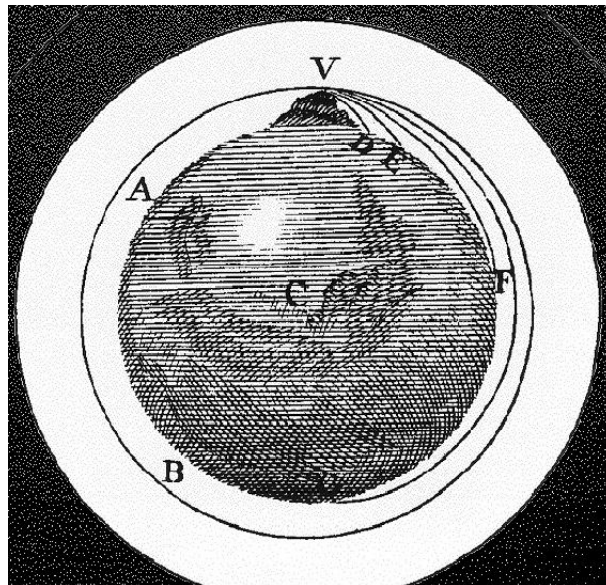
Dessa forma, as flutuações nos resultados experimentais que divergem dos valores preditos pela teoria, podem ser atribuídas a agentes externos ao sistema, ou seja, causas até então não consideradas. À essas causas damos o nome de *contingências*.

Mas quando realizamos um experimento, devemos sempre considerar um erro experimental em sua medida, que pode ser decorrente de uma série de fatores (precisão do aparato de leitura e do arranjo experimental, isolamento do sistema, etc.). Da forma que sempre apresentará uma imprecisão ou flutuações em torno do valor esperado teoricamente.

Isso pode ser observado, por exemplo, no lançamento de um projétil. Quando o realizamos em um curto alcance, digamos que da ordem de metros, a Mecânica Newtoniana é capaz de predizer seu alcance máximo (P) com uma boa precisão, na ordem de centímetros. Agora, se formos muito cautelosos e quisermos uma medida com a precisão de

milímetros, teremos uma grande flutuação em torno de P . Isso se deve porque a ação de novos agentes, tais como o vento, passam a interferir de forma expressiva nessas pequenas escalas, fazendo o projétil desviar alguns milímetros do ponto estipulado teoricamente. O mesmo se dá em escalas maiores, se o lançamento é em uma distância de quilômetros (Figura 1.1), teremos que levar em consideração não apenas os ventos mas também a curvatura da Terra, adicionando forças extras ao sistema.

Figura 1.1: Desenho de Newton acerca do estudo do lançamento de projéteis.



researchgate.net⁵

Portanto, as leis deterministas são válidas apenas se abstrairmos as contingências relacionadas ao sistema, as quais produzem perturbações ao acaso. Dessa forma, as contingências por estarem fora do sistema de estudo, possuem um caráter independente, na forma que seja difícil definir sua natureza e, só é possível encontrar as leis que governam tais contingências, se ampliarmos o sistema de análise, isto é, considerarmos um problema com mais interações, ou seja, de mais corpos. Assim, é impossível atribuir a natureza de uma contingência, percebida pelos fenômenos ao acaso ou as flutuações experimentais, do contexto restrito desse sistema. Para descobri-la teríamos que ampliar nosso contexto.

Essa ideia levou Von Mises, em seu livro *Probabilidade, Estatística e Verdade* (MISES, 1981), à noção de que as leis deterministas são apenas aproximações de primeira ordem de leis de probabilidade, as quais teriam um caráter mais fundamental por expressarem o comportamento ao acaso que cada fenômeno sofreria quando analisado mais a fundo.

Dessa forma, diferente de Laplace que reduziu o movimento de todos os corpos à processos causais (mecanicismo determinista), Von Mises tomou tais fenômenos em essência como interações ao acaso de agentes desconhecidos, da forma que o melhor entendimento desse processo se daria a partir de leis probabilistas.

Mas da mesma forma que Laplace foi motivado pelos trabalhos contemporâneos de Newton, que se mostravam tão promissores para explicar a ampla variedade de fenômenos, Von Mises também foi motivado pelos avanços que a ciência proporcionava, em

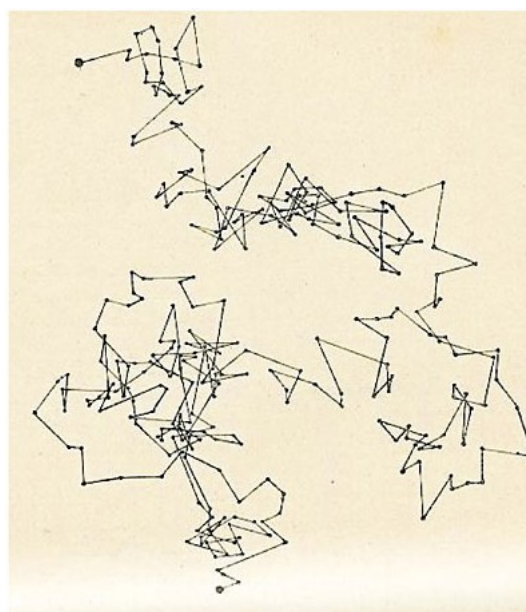
⁵https://www.researchgate.net/publication/280303672_Wet_van_Coulomb_versus_Gravitati-ewet_van_Newton_Allemaal_een_pot_kracht/figures?lo=1. Acessado em 21/01/2020.

particular com o estudo da Termodinâmica e da Teoria Cinética dos Gases. Estudemos agora alguns desses avanços.

Em 1824, o botânico Brown observou que esporos suspensos na água se moviam em movimentos irregulares e aparentemente sem uma fonte de energia. Quando observados no ar, esses esporos podiam atingir grandes alturas. Esses movimentos, depois chamados brownianos, puderam ser explicados quantitativamente apenas com o advento da Teoria Cinética dos Gases como sendo um movimento molecular caótico.

A ideia de a matéria ser constituída por elementos menores já era explorada, como vimos, desde os gregos, em especial por Leucipo e Demócrito que imaginaram que a matéria fosse formada por entidades menores, com diferentes formas geométricas, os átomos. A Teoria Cinética dos gases incorpora a ideia na qual um gás é formado por moléculas menores em movimento irregular ou caótico. Seu tamanho deveria ser muito menor que a distância média entre as moléculas. Dessa forma, essas moléculas se moveriam livremente no espaço exceto quando eventualmente colidissem umas com as outras. Essas colisões acarretariam mudanças bruscas tanto na direção quanto na magnitude da velocidade, de forma que essas partículas fariam trajetórias irregulares ao acaso (Figura 1.2).

Figura 1.2: Movimento browniano de uma partícula.



scielo.br⁶

O movimento browniano seria explicado então como sendo o esporo uma molécula constituída por átomos que, ao ser golpeada por uma molécula de gás em que está suspensa, recebe um impulso que provoca uma leve mudança em sua velocidade. O esporo por ter mais massa que as moléculas de ar, variaria de forma pequena sua velocidade, mas ainda assim com uma flutuação irregular de forma que quanto maior o esporo menor sua flutuação.

Quando se calculou a velocidade média de flutuação para uma partícula de dimensões conhecidas, viu-se que a teoria concordava com a observação. Ideias semelhantes foram

⁶http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000100007. Acessado em 21/01/2020.

incorporadas na teoria molecular do calor, o qual seria um efeito macroscópico causado pelo movimento (associado à energia cinética) das moléculas que constituiriam os gases.

A teoria da probabilidade tem contribuído para nossa compreensão da relação entre os níveis microscópicos e macroscópicos, ao permitir que tomemos em conta fenômenos macroscópicos ao acaso que se originam de interações microscópicas, sem que seja necessário o cálculo preciso e detalhado dos movimentos de todas as moléculas individuais de um grande conjunto, ou o conhecimento preciso das leis do nível microscópico.

Mas essa limitação que temos em estudar fenômenos macroscópicos, aproximando-os para a média de interações aparentemente ao acaso em níveis microscópicos, é apenas uma limitação tecnológica, ou seja, cada átomo é governado por leis deterministas da Mecânica Newtoniana, dessa forma, se pudéssemos observar e calcular as interações de cada átomo com as demais partículas (da ordem de 10^{23}), o caráter ao acaso do movimento desapareceria.

Temos então duas diferentes visões: de um lado, na qual as flutuações tem origem em níveis menores do sistema, fruto de interações causais de subagentes, o que implica que a Natureza pode ser sempre predita com exatidão e só estaríamos limitados pelo avanço tecnológico de conhecer esses subsistemas e subagentes. Já, por outro lado, de que as leis deterministas são apenas aproximações de uma Natureza fundamentalmente ao acaso, regida por leis estatísticas e probabilistas.

David Bohm em *Causality and chance in modern physics*, conclui da seguinte forma:

“A suposição de que uma classe particular qualquer de flutuações seja arbitrária e carente de lei em relação com *todos* os contextos possíveis, em igual que a suposição análoga de que existe uma lei determinada absoluta e final, evidentemente não podem basear-se em nenhum desenvolvimento experimental ou teórico surgido de problemas científicos específicos; sendo que, melhor sendo, é uma suposição puramente filosófica.” (BOHM,2005, p. 44).

Dessa forma, embora cada visão tenha seu princípio metafísico próprio, ambas poderiam descrever a Natureza de forma completa. Já a preferência por uma em detrimento da outra é um posicionamento filosófico e uma aceitação individual, refletindo a forma particular de interpretar a realidade.

Mas alguns fenômenos físicos, dos quais a Mecânica Quântica propôs estudar, se mostraram aparentemente de natureza ao acaso, cujo comportamento não seria exato e previsível, mas composto por uma série de possibilidades com certa probabilidade de ocorrerem. Seria esse um comportamento último da realidade, ou novamente mais uma dentre as muitas formas de interpretarmos e compreendermos a complexidade e beleza da Natureza?

1.2 Localidade

A maneira como um corpo exerce uma ação sobre outro foi, e ainda é, uma das grandes dúvidas da humanidade. Essa ação, ou *força*, poderia ser de duas naturezas: mecânica ou à distância. A do primeiro tipo nos é familiar, ela sugere que a interação entre dois corpos é mediada por agentes intermediários. Ao tocarmos um sino por exemplo, nossa força muscular é transmitida sucessivamente por cada pedaço da corda até chegar ao peso, movendo-o em direção à campana e produzindo o som da badalada. Dessa forma, nossa força sobre o sino é mediada por um meio, no caso a corda, sendo transmitida pelo contato de cada pedaço da matéria. Esse meio pode ainda ser mais tênue e não tão perceptível,

no mesmo exemplo do sino, após a badalada podemos escutar seu som, de forma que o sino também exerce uma força sobre os ossos de nosso ouvido, essa ação é mediada pelas massas de ar, que se comprimindo e relaxando, propagam essa sonoridade.

Esse e muitos outros exemplos ao nosso cotidiano levaram desde os antigos pensadores gregos a generalizar as ações entre os corpos como sendo todas do tipo mecânico, mesmo quando aparentemente não houvesse um meio. Atrélada a essa discussão estava o pensamento acerca da existência ou não do vazio, tendo de um lado a Escola Pitagórica e sua noção de um espaço discreto, advindo do desenvolvimento da matemática, e de outro os eleatas, dentre eles Zenão, com sua intuição de um espaço contínuo, segundo seus problemas lógicos⁷. Mas a ideia da existência de um quinto elemento, o *éter* que servisse de meio quando este aparentemente não existisse, ganhou força com Aristóteles e seu sistema de mundos. Como vimos, o mundo abaixo do Lua (sublunar) seria formado pelos quatro elementos de Empédocles; já o mundo acima da Lua (supralunar) seria constituído de uma quintessência, o éter, o qual formaria esferas mecânicas as quais movimentariam os astros.

A concepção aristotélica de mundo persistiu até o século XVII, quando Newton publicou seus *Principia*, nos quais apresentava as leis de movimento assim como a Lei da Gravitação Universal, da forma que as leis que regiam os movimentos dos corpos na Terra também previam o movimento dos astros. Mas a natureza da gravitação não era certa para Newton, e suas mudanças de opiniões refletem bem o contexto e as discussões da época em torno do assunto.

Em 1644, René Descartes publicou o *Princípios de Filosofia Natural* no qual aborda uma possível explicação para o movimento planetário. Nela, o Cosmos estaria repleto de éter e o Sol, em seu movimento de rotação, o qual já era conhecido pelos trabalhos de Galileu, colocaria esse éter em movimento na forma de vórtex (Figura 1.3). Os planetas estando neste meio, transladariam ao redor do Sol na forma como os observamos. O movimento da Lua também se daria de forma análoga, tendo a Terra como agente do turbilhão de éter.

Newton tentou inicialmente compreender a queda dos corpos também como um efeito mecânico. Em seu *Optical Queries* e também em cartas trocadas com Boyle, Newton propõe explicar a gravitação como um efeito de pressões de um meio interplanetário, mas não o publicou pois essas investigações “procederam apenas do fato que ele pensava não ser capaz, a partir da experiência e da observação, de dar uma explicação satisfatória deste meio e do modo pelo qual operava ao produzir os principais fenômenos da natureza”. (TORT, 2004, p. 277).

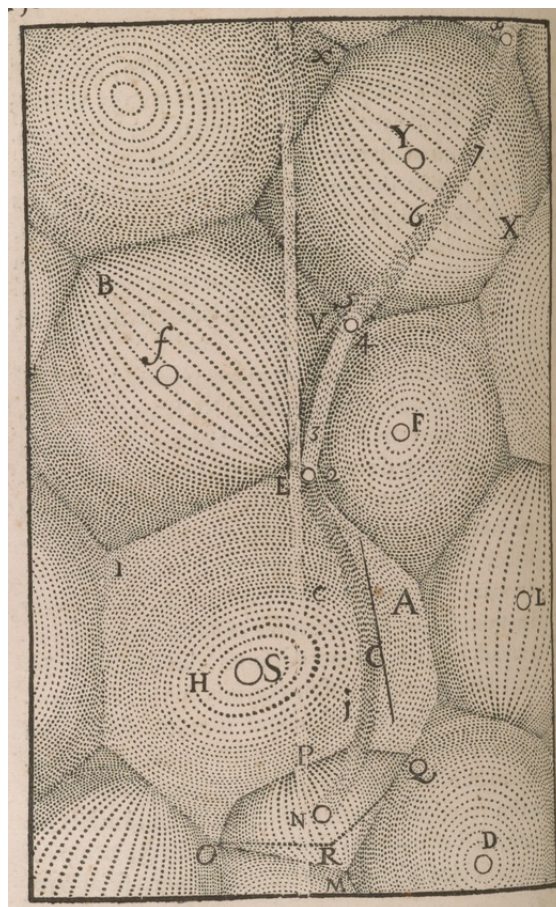
Além disso, a lei da gravitação mostrava uma força não somente que parecia atuar a distância como também ser independente do meio entre os corpos, ou seja, uma vez que essa distância é relativa ao centro dos corpos, a atração entre o Sol e a Terra, por exemplo, despreza toda a camada de gás do primeiro assim como toda a crosta terrestre do segundo, considerando-os inexistentes. Newton, contudo, abominava a noção de uma ação à distância, ele afirma em uma das cartas a Bentley:

“É inconcebível que a matéria bruta inanimada possa, sem a interpretação de algo que não seja material, agir e afetar outra porção de matéria sem contato mútuo, como deve ser se a gravitação, no sentido de Epicuro, for essencial e

⁷Citemos aqui os paradoxos da dicotomia, de Aquiles e da flecha imóvel.

⁸DESCARTES, René. *Principia philosophiae*. Blaeu, 1994.

Figura 1.3: Desenho esquemático de Descartes para explicar o movimento planetário a partir de turbilhões de éter.



*Principia philosophiae*⁸

inerente a ela... Que a gravidade deva ser inata, inerente e essencial à matéria de tal modo que um corpo possa agir sobre um outro a distância, através de um vácuo, sem a intermediação de qualquer coisa por meio da qual as suas ações e forças possam ser transmitidas, é para mim um absurdo tão grande que acredito que nenhum homem que tenha competência em questões filosóficas possa aceitar.” (TORT, 2004, p. 277).

Mas a ação à distância ainda se mostra intuitiva em outros exemplos, como ao pressionar uma lente sobre a outra (Figura 1.4), originando discos coloridos (Figura 1.5). ao passo que quanto maior a força, mais uma lente se aproxima da outra e maior será a variação das cores para o violeta (menor comprimento de onda), dessa forma podemos relacionar o comprimento de onda da cor do disco com a distância relativa entre as lentes. Havendo tomado certa magnitude, os discos desaparecem, mas as lentes ainda não estão em contato óptico, o que significa que o comprimento de onda relacionado à distância é inferior ao perceptível pela nossa visão.

“Para mostrar que as superfícies não estão em contato real removemos os pesos. Os anéis contraem-se e diversos deles desaparecem no ponto central. Entretanto, sabemos que é possível fazer com que dois pedaços de vidro fiquem

tão próximos entre si que eles tenderão a não se separar de modo algum; ao contrário, eles aderem tão firmemente um ao outro que, quando separados, o vidro quebra. Nesta experiência os vidros estão muito mais próximos do que quando estavam em mero contato óptico.

Assim mostramos que dois corpos começam a pressionar-se mutuamente quando ainda estão a uma distância mensurável um do outro (...).” (TORT, 2004, p. 276)

Figura 1.4: Arranjo experimental de duas lentes (uma convexa e outra plana) pressionadas.

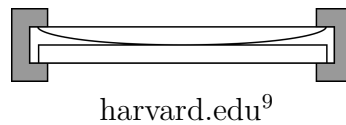
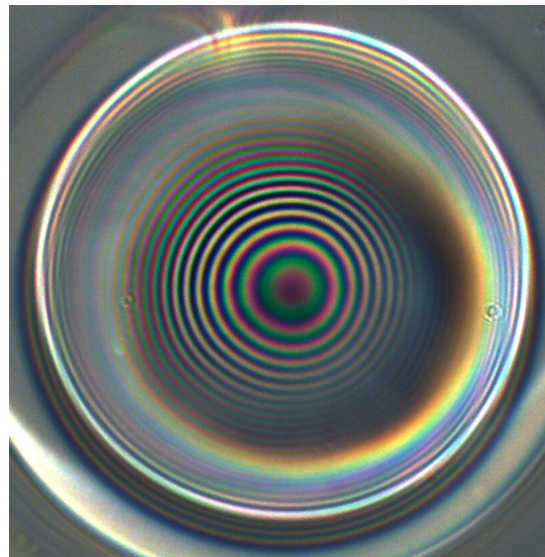


Figura 1.5: Padrão de anéis observados, os chamados anéis de Newton.

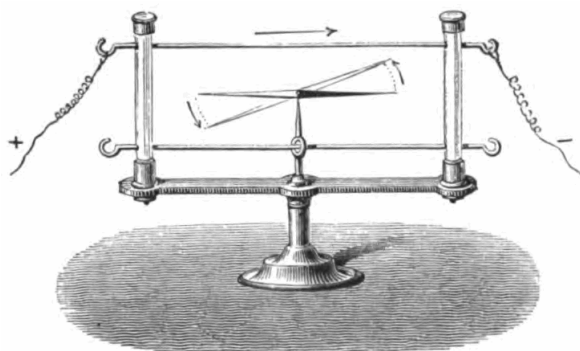


A discussão sobre a natureza das forças também se estendeu com o avanço da eletromagnetismo. Quando Oersted observou que um fio percorrido por uma corrente defletia uma agulha imantada (Figura 1.6), reascendeu a discussão de um éter mediador. A questão é que diferente da força gravitacional newtoniana que se direcionava na reta que unia os corpos, o efeito da corrente atuava ao redor do fio, voltando à intuição dos vórtex de Descartes.

⁹<https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/newtons-rings>. Acessado em 21/01/2020.

¹⁰<https://www.flickr.com/photos/andrewrileywatson/5762397569/in/photostream/>. Acessado em 21/01/2020.

Figura 1.6: Experimento de Oersted da deflexão de uma agulha imantada próxima a um fio com corrente.



wikipedia.org¹¹

Ampère, estudando a atração e repulsão entre dois fios paralelos, conseguiu obter uma lei do tipo radial, na qual cada segmento de corrente exercia uma força sobre os segmentos do outro fio ¹². A equação tinha a forma,

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\mu_0 I_i I_j}{4\pi} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} [3(d\vec{r}_i \cdot \hat{r}_{ij})(d\vec{r}_j \cdot \hat{r}_{ij}) - 2(d\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)]$$

onde μ_0 é a permeabilidade no vácuo, r_{ij} a distância entre os elementos de corrente e \hat{r}_{ij} o versor apontando de $I_j d\vec{r}_j$ para $I_i d\vec{r}_i$. Outro formalismo que também leva em conta a distância radial e velocidades relativas entre as partículas de carga foi o desenvolvido por Weber (para esse tema deixamos como referência os trabalhos de André K. T. Assis ¹³).

Michael Faraday, considerado uma figura ímpar na História da Ciência, embora não tenha recebido uma formação acadêmica, mostrou-se um excelente físico experimental com uma intuição diferente do dogmatismo seguido pela Academia. A partir de experimentos com limalhas de ferro, Faraday propôs o conceito de *linhas de força*. A experiência consiste em colocar, por exemplo, uma folha de papel sobre um ímã e despejar sobre ela limalhas de ferro, ao sacudir um pouco o papel percebemos que as limalhas irão formar padrões de linhas (Figura 1.7). Tais linhas serão menos espaçadas nas pontas do ímã e mais no seu meio, sendo um método eficaz para visualizar o potencial de atração ou repulsão em sistemas mais complexos, uma vez que quanto mais próximas, maior o potencial atrativo. As linhas de força, mesmo quando não visualizadas com as limalhas, serem tratadas por Faraday como reais.

Um ano depois de sua experiência com a agulha, Oersted mostrou que um ímã também poderia gerar corrente e Faraday conseguiu demonstrar a força gerada entre dois terminais de corrente. Baseado nesses trabalhos, Maxwell veio a unificar os trabalhos de

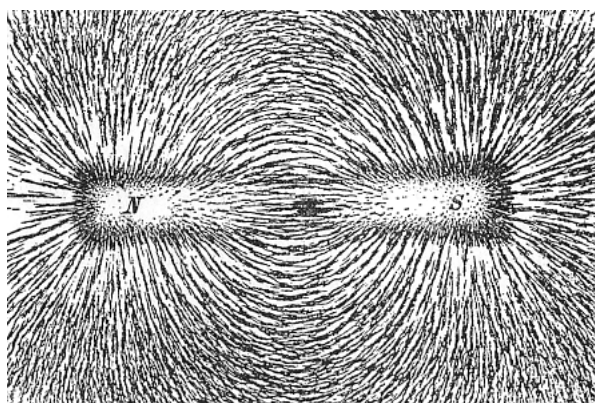
¹¹https://ca.wikipedia.org/wiki/Experiment_d'Oersted. Acessado em 22/01/2020.

¹²Para Ampère, as propriedades magnéticas dos ímãs eram devido ao fluxo de correntes elétricas microscópicas de cada molécula do material. Weber baseado na concepção atomística de corrente e nos trabalhos de Ampère, desenvolveu uma nova expressão para a força eletrodinâmica. Usando da força de Weber, Assis a implementou para a gravidade na chamada Mecânica Relacional.

¹³[ASSIS, 2015] e [ASSIS, 2012].

¹⁴https://pt.wikipedia.org/wiki/Campo_magnético. Acessado em 22/01/2020.

Figura 1.7: Experimento da atração de um ímã com limalhas de ferro.



wikipedia.org ¹⁴

Oersted, Ampère ¹⁵ e Faraday no que hoje aprendemos como suas quatro equações ¹⁶.

Maxwell cria num éter intermediário, o qual, assim como o ar e a água, poderia suportar esforços internos e efetuar movimentos ondulatórios. Esses esforços internos se manifestariam como efeitos elétricos e magnéticos. Dessa forma, para Maxwell as interações se dariam por contato, tendo o éter como meio de propagação dos fenômenos eletromagnéticos. Para ele, a permissividade elétrica (ϵ_0) e a permeabilidade magnética (μ_0) eram relativas ao éter.

Mais tarde, Michelson e Morley desenvolveram uma experiência para detectar a velocidade da Terra em relação a este éter, contudo, os resultados foram negativos¹⁷. A comunidade científica estava então sob um conflito: as equações de Maxwell prediziam muito bem os resultados experimentais, contudo, foram formuladas baseada na existência do éter. Dessa forma, ou reformulavam as equações vistas em um contexto sem o éter, ou tentavam explicar o resultado negativo de sua detecção pela experiência de Michelson-Morley. O que sucedeu foi: continuar com as equações de Maxwell e também aceitar a não existência do éter!

Essa decisão antagônica só foi possível a partir da criação de uma nova entidade física, o *campo*. O campo seria, a princípio, uma ferramenta matemática, uma distribuição contínua através do espaço, onde para cada ponto no espaço os valores do campo elétrico e magnético estariam associados à força que seria exercida sobre uma carga elétrica ou de um dipolo elétrico (um ímã). O campo associado a esse dipolo formaria o padrão as linhas de força estudadas por Faraday.

Nas palavras de Bohm:

“Se supôs então que os campos existiam, sem considerar a existência ou não do éter. Da forma que ainda que o éter existisse, pelo menos dentro do contexto dos experimentos possíveis na época, os resultados eram os mesmos que se não existisse. Em outras palavras, que os campos eram os que de fato importavam.”(BOHM, 2005, p.30).

¹⁵Embora leve seu nome, a equação de Ampère-Maxwell de campo magnético não representava a visão de Ampère, o qual descrevia os fenômenos apenas em termos de forças elétricas atuantes radialmente.

¹⁶No começo eram doze equações, que se reduziram com o cálculo vetorial.

¹⁷Sugerimos os trabalhos de Dayton Miller quanto a validade deste resultado, abordados em [DEMEIO, 2001].

Tal abordagem, além de positivista e pragmática, também trazia sérias consequências. A questão é que para obedecer as leis de conservação, ao fazer uso do campo este deveria possuir energia, momento angular e momento linear, ou seja, passar de um artifício puramente matemático para um detentor de propriedades físicas.

Como resultado, os campos se mostraram novas classes de entidades, da mesma forma como hoje os elétrons, quarks e demais partículas elementares. Tais ideias vigoraram sob a prerrogativa de que, ao postularmos sua existência, nos ajudasse a compreender uma grande variedade de resultados experimentais. Esse pensamento que surgiu, a princípio com Lorentz, foi ampliado mais tarde por Einstein e, na atualidade, é sustentado pela maioria dos físicos.

Einstein propôs ainda que pudesse existir uma classe especial de campos, os quais estivessem concentrados, análogo à pulsos, que se moveriam de forma estável tal como uma partícula em movimento. As partículas elementares seriam então constituídas de tais formas de movimentos desses campos ¹⁸.

Por fim, temos uma inversão quanto à isso: o campo passa de uma ferramenta matemática para uma classe qualitativamente nova de existência, “por seu próprio direito de existir e passa constituir um elemento fundamental da Natureza” (BOHM, 2005, p. 31). Ao reduzir todos os fenômenos assim como o próprio funcionamento do Universo a mudanças puramente quantitativas de uma certa classe de entidades básicas (seja elas corpos e campos, ou somente campos como proposto por Einstein) sem mudar qualitativamente, isto se constituiria numa uma forma de mecanicismo.

Essa foi a motivação de Einstein e ainda é para uma grande parcela de físicos ao tentarem unificar as forças existentes na Natureza, na chamada Teoria de Tudo. Porém, do ponto de vista epistemológico, assim como da própria história da evolução e revolução da ciência, está fadada a se encontrar diante de um estreito laço entre o micro e o macro, que com o desenvolvimento tecnológico, poderá-se mostrar existente.

Portanto, as forças não seriam do tipo à distância, uma vez que o campo permearia o espaço e conduziria os fenômenos eletromagnéticos e gravitacionais. Mas podemos nos perguntar qual o sentido de tratarmos como um efeito de contato, uma vez que o campo seria uma entidade diferente da matéria física que experimentamos. Parece haver então uma nova classe de interações, do tipo local mas tendo como transmissor uma entidade abstrata com propriedades físicas.

Essa nova interação local teria um limite de velocidade para propagar as forças. Essa velocidade seria igual à velocidade máxima de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo (ou historicamente em relação ao éter), a qual Weber havia calculado e obtido o valor igual ao da velocidade da luz ¹⁹. Mais tarde Einstein, em sua Teoria da Relatividade Restrita, tomaria essa velocidade máxima como princípio:

“A luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento da fonte luminosa.

Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas ‘em repouso’ com uma velocidade determinada c , que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento.” (ASSIS, 1998, p. 158).

¹⁸É nessa linha que se desenvolve a Teoria das Cordas e Supercordas, nas quais as partículas são módulos vibracionais de uma entidade mínima de energia.

¹⁹A primeira medida eletrodinâmica da velocidade da luz foi realizada em 1856 por Weber e Kohlrausch [ASSIS, 1998†].

Assim, a Mecânica Clássica é tida como local, embora o sentido de *localidade* tenha sido modificado a partir da noção de um campo como "meio".

Munidos então dos conceitos de causalidade, localidade e determinismo, que serviram de base para o desenvolvimento de toda a Física até o século XX, entremos em um novo mundo, um microcosmo que se mostrará não-causal, não-local e indeterminista, mundo este que ganha o nome de Mecânica Quântica.

Capítulo 2

Mecânica Quântica

Como vimos a Física Clássica, e nela também incluímos a Relatividade Especial e Geral, uma vez que estão fora do limite quântico, é realista quando assume a existência de uma realidade externa com propriedades bem definidas e que independem de um observador (realidade objetiva). Essa realidade nos é acessível de forma que podemos compreendê-la completamente e expressá-la através de teorias, no que chamamos de *completeza*. É determinista ao passo que, conhecendo as condições iniciais do sistema e seu meio, podemos prever seu comportamento futuro, assumindo, dessa forma, que os fenômenos sejam completamente descritos por leis causais. E, por fim, é uma física local, tendo os campos como *meio* de propagação onde as interações possuem uma velocidade finita de transmissão.

Veremos a seguir que a Mecânica Quântica, em sua interpretação ortodoxa, “é uma teoria não-realista, não-determinista, não-objetiva, não-local, mas completa.” (JAMMER, 1980, p.519). Essa aparente ruptura com os sentidos e com a razão clássica veio, em primeiro momento, com o estudo da radiação de corpo negro, onde as leis do eletromagnetismo clássico não explicavam os fenômenos observados. Daremos então uma atenção especial a tal experimento.

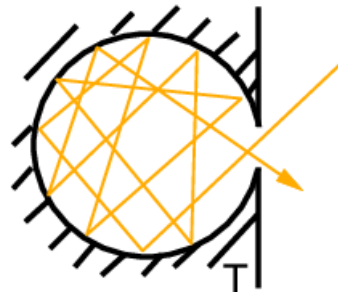
2.1 Radiação de Corpo Negro

Historicamente, a teoria quântica começa com a tentativa de quantificar a distribuição da radiação eletromagnética em equilíbrio numa cavidade oca, o chamado *corpo negro*. Devemos, portanto, começar com uma breve descrição das características da distribuição de radiação. A energia radiante proveniente das paredes da cavidade, que emitem continuamente ondas nas mais variadas frequências e direções, aumenta rapidamente com a temperatura. A quantidade de energia na cavidade não continua, contudo, aumentando indefinidamente com o tempo, porque o processo de emissão é balanceado pelo processo de absorção numa taxa proporcional a intensidade de radiação já presente na cavidade. No estado de equilíbrio termodinâmico, a quantidade de energia $U(\nu)d\nu$, no intervalo de frequência entre ν e $\nu + d\nu$, que será determinado pela condição dessa taxa com a qual as paredes emitem essa frequência, deve ser balanceada com a taxa a qual ele absorve essa frequência. Isso foi demonstrado tanto experimentalmente como teoricamente, que depois do equilíbrio ser alcançado, $U(\nu)$ depende apenas da temperatura das paredes, e não do material com o qual são feitas ou de seu formato.

Para observar essa radiação, fazemos um buraco na parede (Figura 2.1). Se o buraco

for muito pequeno comparado ao tamanho da cavidade, ele produz uma insignificante mudança na distribuição da energia radiante dentro da cavidade.

Figura 2.1: Desenho esquemático de um corpo negro.



researchgate.net¹

Experimentos revelam isto: em uma particular temperatura, a função $U(\nu)$ tem um comportamento semelhante à curva contínua da Figura 2.2. Para baixas frequências, a frequência é proporcional à ν^2 , enquanto em altas frequências decai exponencialmente. Enquanto a temperatura é aumentada, o máximo é deslocado para a direção das altas frequências; isso é observado pela mudança na cor de radiação emitido pelo corpo quando ele é aquecido.

Por argumentos termodinâmicos, Wien apresentou essa distribuição como sendo na forma $U(\nu) = \nu^3 f(\nu/T)$. A função f , contudo, não pode ser determinada puramente por conceitos termodinâmicos. Wien obteve uma boa aproximação, mas não perfeita, à curva empírica com a fórmula

$$U(\nu)d\nu \sim \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu \quad \text{Lei de Wien} \quad (2.1)$$

onde k é a constante de Boltzmann, e h é uma constante determinada experimentalmente (a qual depois seria dado lugar ao famoso quanta de ação).²

O Eletromagnetismo Clássico por outro lado, leva a uma forma bastante incorreta para $U(\nu)$. Essa distribuição teórica, que veremos em mais detalhes, é dada por,

$$U(\nu)d\nu \sim kT\nu^2 d\nu \quad \text{Lei de Rayleigh-Jeans} \quad (2.2)$$

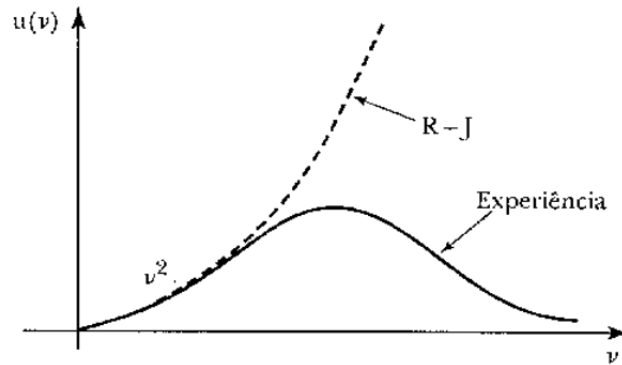
A lei de Rayleigh-Jeans está de acordo com experimentos a baixas frequências, mas excede a radiação para as altas. De fato, se tentarmos integrar por todas as frequências para encontrarmos a energia total, o resultado diverge, e chegaremos a conclusão de que a cavidade contém uma quantidade infinita de energia. Experimentalmente, a curva correta começa a desviar apreciavelmente da lei de Rayleigh-Jeans quando $h\nu$ toma a ordem de

¹https://www.researchgate.net/publication/231168119_Probing_Planck's_law_at_home. Acessado em 22/01/2020.

²Wien não introduziu exatamente a constante de Planck, h , mas inseriu a constante $\frac{h}{k}$.

³BOHM, David. Quantum theory. Courier Corporation, 2012.

Figura 2.2: Energia de um corpo negro em função da frequência.



Quantum theory³

kT . Conseqüentemente, devemos desenvolver uma teoria que leva ao resultado clássico para $h\nu < kT$, mas que desvie da teoria clássica para altas frequências.

Antes de prosseguirmos com a discussão de como a teoria clássica pode ser modificada, examinaremos em alguns detalhes a derivação da lei de Rayleigh-Jeans. No curso dessa dedução, veremos não só como a Física Clássica falha, mas também seremos capazes de intruzir novos conceitos que ajudarão no entendimento da Física Quântica.

2.1.1 Energia Eletromagnética

De acordo com o Eletromagnetismo Clássico, no espaço vazio (vácuo) a radiação se propaga transportando energia, melhor dizendo, essas ondas são formadas pela variação dos campos elétrico e magnético, os quais possuem energia própria. Essa energia radiante seria responsável pela capacidade de cavidades ocas absorverem calor. Em termos dos campos elétrico, $\vec{E}(x, y, z)$, e magnético, $\vec{B}(x, y, z)$, a energia pode ser dada como,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d\tau \quad (2.3)$$

onde $d\tau$ significa a integral sobre todo o espaço atingido pelos campos.

Nosso problema então é determinar a lei pela qual a energia é distribuída ao longo das várias frequências presentes na cavidade, onde as paredes estão em uma temperatura dada. Para isso, primeiro escreveremos os campos elétrico e magnético em termos dos potenciais escalar e vetor. Depois, faremos uma expansão do potencial vetor, e conseqüentemente dos campos, em uma série de Fourier. Por último, calcularemos a energia total e, a partir da Mecânica Estatística, a energia interna esperada classicamente.

2.1.2 Potenciais Eletromagnéticos

Começaremos com um breve resumo do Eletromagnetismo. As equações diferenciais parciais do campo eletromagnético, de acordo com Maxwell, são dadas por:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{j} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad (2.7)$$

onde \vec{j} é a corrente de densidade e ρ a densidade de carga. Supondo agora que não há cargas no espaço vazio, tem-se:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.11)$$

Como o divergente do campo magnético é nulo, podemos escrevê-lo matematicamente com o rotacional de uma função vetorial na forma,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.12)$$

substituindo esse resultado na equação (2.8) segue que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Dado que o rotacional do termo entre parênteses é nulo, o mesmo pode ser escrito como o gradiente de uma função escalar,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (2.15)$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.16)$$

Substituindo este resultado na equação (2.11):

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = 0 \quad (2.17)$$

Agora, as equações (2.12) e (2.16) não definem os potenciais únicos em termos dos campos. Se, por exemplo, adicionarmos um vetor arbitrário, $-\nabla \lambda$, para o vetor potencial, o campo magnético não muda porque $\nabla \times \lambda = 0$. Se, simultaneamente adicionarmos a quantidade $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda$ para o potencial escalar, o campo elétrico é também invariável. Portanto, encontramos os campos elétrico e magnético que permanecem invariantes sob a seguinte transformação de potenciais:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\lambda \qquad V' = V + \frac{1}{c} \frac{\partial\lambda}{\partial t} \qquad (2.18)$$

Essas são as chamadas *transformações de gauge*, ou de calibre. Podemos utilizar a invariância dos campos para a transformação de gauge com a finalidade de simplificar a expressão para \vec{E} e \vec{B} . Uma escolha comum é tomar $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, o chamado calibre de Coulomb. Disso decorre que a equação (2.17) se torna,

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (2.19)$$

Substituindo agora as equações (2.12) e (2.16) na (2.10) e rearranjando os termos, decorre que:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla V \qquad (2.20)$$

Não havendo cargas no interior da cavidade, podemos adotar V como nulo, dessa forma,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.21)$$

Portanto, no espaço vazio obtemos as seguintes expressões para os campos:

$$B = \nabla \times \vec{A} \qquad (2.22)$$

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \qquad (2.23)$$

Como vimos, energia eletromagnética de uma cavidade vazia de volume V é dada pela equação (2.3). Como a geometria do corpo não influencia na distribuição de equilíbrio, tomemos a forma de um paralelepípedo de lados L_1 , L_2 e L_3 e imaginemos que essa estrutura se repita periodicamente no espaço, e que não interajam umas com as outras. Podemos então escrever o potencial vetor \vec{A} como uma expansão em série de Fourier na forma:

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \qquad (2.24)$$

Sendo o vetor de onda \vec{k} :

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi m}{L_1}, \frac{2\pi n}{L_2}, \frac{2\pi l}{L_3} \right)$$

onde $m, n, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Uma vez que o potencial \vec{A} é real, o mesmo deve ser igual a seu complexo conjugado,

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{A}_{\vec{k}}^* \qquad (2.25)$$

e como ele é ortogonal ao vetor de onda:

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} = 0 \qquad (2.26)$$

A equação de onda toma então a forma:

$$\frac{d^2 \vec{A}_{\vec{k}}}{dt^2} + c^2 k^2 \vec{A}_{\vec{k}} = 0 \quad (2.27)$$

Que é análogo à expressão para um oscilador harmônico e cuja solução pode ser dada por

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}}t) + \vec{b}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_{\vec{k}}t) \quad (2.28)$$

onde $\omega_{\vec{k}} = ck$.

Dada a igualdade do potencial vetor com seu complexo conjugado, toma-se $\vec{b}_{\vec{k}} = \vec{a}_{-\vec{k}}^*$. A expansão então pode ser escrita como

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + c.c. \right] \quad (2.29)$$

sendo *c.c.* o termo do complexo conjugado.

Calculando os campos elétrico e magnético a partir das relações (2.12) e (2.16):

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sum_{\vec{k}} \left[-ik \vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + c.c. \right] \quad (2.30)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left[i(\vec{k} \times \vec{a}_{\vec{k}}) \exp(i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + c.c. \right] \quad (2.31)$$

2.1.3 Catástrofe do Ultravioleta

Para obtermos \mathcal{H} devemos primeiro calcular \vec{E}^2 e \vec{B}^2 e depois integrarmos em todo o volume $d^3\vec{r}$. Os resultados serão,

$$\begin{aligned} \int_V \vec{E}^2 d^3\vec{r} &= \sum_{\vec{k}} -Vk^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{-\vec{k}} \exp(2i\omega_{\vec{k}}t) + Vk^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{-\vec{k}}^* + \\ &+ Vr^2 \vec{a}_{-\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{-\vec{k}} - Vk^2 \vec{a}_{-\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{-\vec{k}} \exp(-2i\omega_{\vec{k}}t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_V \vec{B}^2 d^3\vec{r} &= \sum_{\vec{k}} Vk^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{-\vec{k}} \exp(2i\omega_{\vec{k}}t) + Vk^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* + \\ &+ Vr^2 \vec{a}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{\vec{k}} - Vk^2 \vec{a}_{\vec{k}}^* \cdot \vec{a}_{-\vec{k}} \exp(-2i\omega_{\vec{k}}t) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3\vec{r} = \frac{V}{2\pi} \sum_{\vec{k}} k^2 \vec{a}_{\vec{k}} \cdot \vec{a}_{\vec{k}}^* \quad (2.32)$$

Para obtermos a energia interna do corpo negro faremos uso da mecânica estatística, mais propriamente da função de partição Z e, para isso, vamos reescrever a energia \mathcal{H} em termos das coordenadas generalizadas da posição $\vec{Q}_{\vec{k}}(t)$ e do momento $\vec{P}_{\vec{k}}(t)$ definidas como,

$$\vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \alpha \left[\vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}}t) + \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp(-i\omega_{\vec{k}}t) \right] \quad (2.33)$$

sendo α uma constante real e

$$\vec{P}_{\vec{k}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{Q}_{\vec{k}}(t) = \alpha \left[i\omega_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}} \exp(i\omega_{\vec{k}}t) - i\omega_{\vec{k}} \vec{a}_{\vec{k}}^* \exp(-i\omega_{\vec{k}}t) \right] \quad (2.34)$$

Possibilitando escrever a equação (2.32) como:

$$\mathcal{H} = \frac{V}{8\pi\alpha^2 c^2} \sum_{\vec{k}} \left[\vec{P}_{\vec{k}}^2 + k^2 c^2 \vec{Q}_{\vec{k}}^2 \right] \quad (2.35)$$

e o hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},j} \left[P_{\vec{k},j}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k},j}^2 \right] = \sum_{\vec{k},j} H_{\vec{k},j} \quad (2.36)$$

que é a mesma expressão para um oscilador harmônico com frequência angular $\omega_{\vec{k},j} = kc$.

A função de partição é definida como,

$$Z = \prod_{\vec{k},j} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_{\vec{k},j} dP_{\vec{k},j} \exp \left[-\frac{\beta}{2} (H_{\vec{k},j}) \right] \quad (2.37)$$

Assim,

$$Z = \prod_{\vec{k},j} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_{\vec{k},j} dP_{\vec{k},j} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \left[P_{\vec{k},j}^2 + \omega_{\vec{k}}^2 Q_{\vec{k},j}^2 \right] \right\} \quad (2.38)$$

A energia interna U é dada como uma função de Z na forma:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (2.39)$$

Aplicando o logarítmo na função de partição obtemos,

$$\ln Z = \sum_{\vec{k},j} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta k c} \right) \quad (2.40)$$

e, por fim,

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \sum_{\vec{k},j} \frac{1}{\beta} = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\beta} d^3k \longrightarrow \infty \quad (2.41)$$

$$U = \frac{V}{4\pi^3} k_B T \int_0^\infty 4\pi k^2 dk = \frac{8\pi}{c^3} V k_B T \int_0^\infty \nu^2 d\nu \quad (2.42)$$

onde

$$\nu = \frac{kc}{2\pi}$$

Essa é a divergência para as altas frequências, a chamada *catástrofe do ultravioleta*⁴.

⁴O termo se da porque no limite das altas frequências, faixa correspondente ao ultravioleta, a função energia diverge.

A lei de Rayleigh-Jeans é obtida ao escrever,

$$u(\nu) = 8\pi \frac{k_B T}{c^3} \nu^2 \quad (2.43)$$

Que é condizente apenas com os resultados para baixas frequências.

2.1.4 Hipótese de Planck

Na procura por modificar a abordagem clássica, reduzindo a contribuição para as altas frequências de energia, Planck foi capaz de fazer uma suposição equivalente ao que se segue: a energia para um oscilador em frequências naturais ν é restrito à múltiplos de uma unidade básica $h\nu$ ($E = nh\nu$). Com essa suposição, Planck obteve a correção para altas frequências da distribuição de radiação observada.

A função de partição é expressa então como,

$$Z = \prod_{\vec{k},j} Z_{\vec{k},j} \quad (2.44)$$

sendo $Z_{\vec{k},j}$ dada por:

$$Z_{\vec{k},j} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\beta \frac{h}{2\pi} \omega_{\vec{k}} n\right) = \left[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_{\vec{k}})\right]^{-1} \quad (2.45)$$

Tomando o mesmo procedimento para calcular a energia interna U , calculemos o logarítimo da função de partição,

$$\ln Z = \sum_{\vec{k},j} \ln Z_{\vec{k},j} = -2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \ln \left[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_{\vec{k}})\right] \quad (2.46)$$

e segue que,

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \frac{\hbar k c}{\exp(\beta \hbar k c) - 1} \quad (2.47)$$

Já a densidade do espectro de energia é expresso por:

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(\beta h\nu) - 1} \quad (2.48)$$

na chamada *Lei de Planck*, a qual no limite para baixas frequências se reduz à lei de Reyleigh-Jeans,

$$u(\nu) \longrightarrow 8\pi \frac{k_B T}{c^3} \nu^2 \quad (2.49)$$

e que não diverge para altas frequências:

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp(\beta h\nu) - 1} \quad (2.50)$$

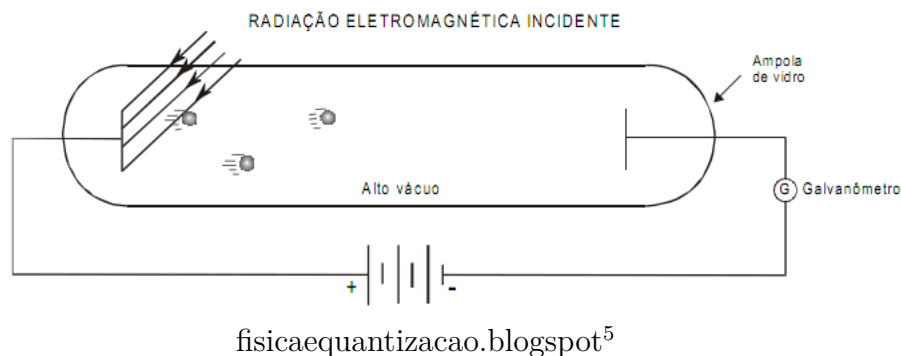
Mas como em nossas experiências com osciladores, ondas de rádio, molas e pêndulos não observamos tais energias discretas? A resposta está no fato de que o valor de h ser muito pequeno, de forma que a energia se mostra praticamente contínua. Mas para altas frequências, onde o produto ($h\nu$) se torna grande, os níveis de energia quantizados se

mostram fáceis de serem observados.

2.2 Desenvolvimento da Mecânica Quântica

Cinco anos depois de Planck propor que átomos radiantes (os osciladores) só poderiam emitir e absorver quantidades discretas de energia, Albert Einstein utilizou de tal pensamento para interpretar o *efeito fotoelétrico*, fenômeno observado por Hertz no qual elétrons eram emitidos de metais pela ação da luz (Figura 2.3). Lenard (1902) já havia mostrado que a energia dos elétrons emitidos não dependia da intensidade da luz incidente, mas de sua frequência. Tal resultado não poderia ser explicado pela Física tradicional da radiação, Einstein então interpretou o efeito como sendo a luz constituída de “pacotes” de energia, os chamados *quanta*, sendo essa energia proporcional à frequência da luz na forma $E = h\nu$, onde h era a constante de Planck. Tal Lei viria a ser confirmada em 1916 com os trabalhos de Robert Millikan.

Figura 2.3: Efeito fotoelétrico.



fisicaequantizacao.blogspot⁵

Em 1907, Einstein usando novamente do postulado de Planck conseguiu explicar o comportamento térmico de corpos a baixas temperaturas. A teoria até então explicava o calor específico de sólidos para altas temperaturas, mas divergia para as baixas. Einstein aplicou então a hipótese de vibrações elásticas discretas para os átomos destes sólidos, tornando possível o entendimento dos resultados observados.

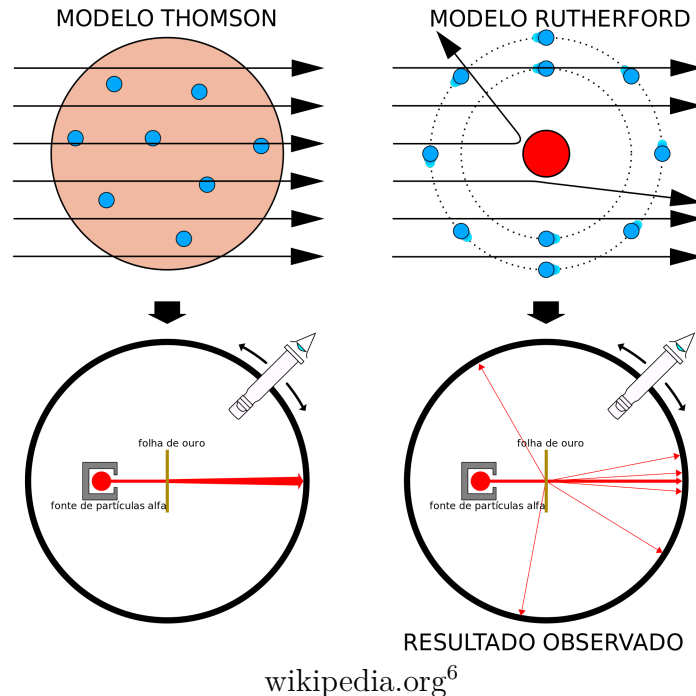
Bohr, já em 1913, ao revisar o experimento de Rutherford da incidência de radiação na matéria (Figura 2.4), incorporando também o postulado de Planck, propondo um modelo no qual o átomo possuía um núcleo maciço e positivamente carregado, responsável por quase toda a massa do átomo, e elétrons que circulavam ao redor desse núcleo, tais como os planetas ao redor do Sol, tornando capaz de explicar as ligações químicas e propriedades dos elementos.

O modelo, contudo, não elucidava a estabilidade do átomo, uma vez que os elétrons estando acelerados, deveriam irradiar e perder energia, colapsando com o núcleo. A explicação dada por Bohr foi de que os elétrons só poderiam ocupar níveis específicos de energia, e mudar desses estados estacionários somente com a absorção ou emissão de

⁵<http://fisicaequantizacao.blogspot.com/2013/08/o-efeito-fotoeletrico-e-quantizacao-da.html>. Acessado em 22/01/2020.

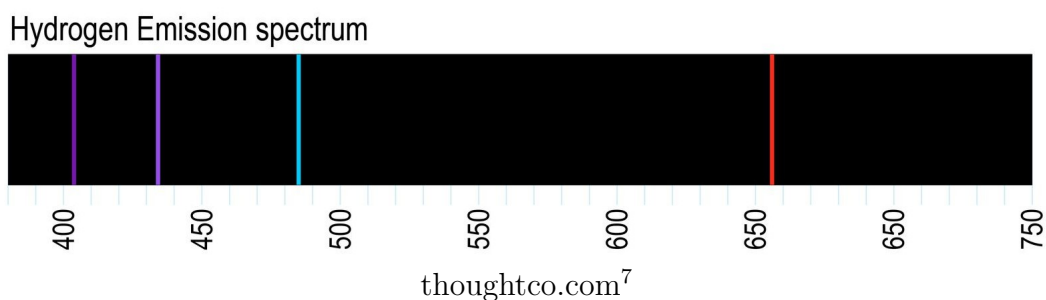
quantidades discretas de energia, os *quanta*.

Figura 2.4: Experimento de Rutherford e seus resultados comparados ao modelo vigente (átomo de Thomson).



Com essa teoria, Bohr pode explicar também as linhas espectrais emitidas pelo átomo de hidrogênio quando submetido à descargas elétricas ou quando aquecido (Figura 2.5). A teoria ainda não condizia com as frequências orbitais dos elétrons ao redor do núcleo, de forma que o conceito de *órbita* eletrônica só era válido para os elétrons mais afastados.

Figura 2.5: Raias espectrais do hidrogênio na faixa dos nanômetros.



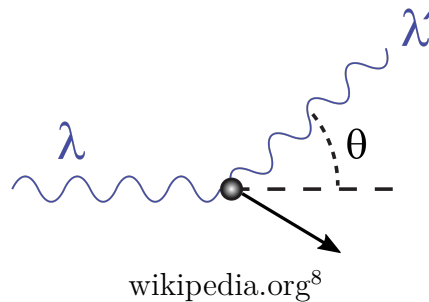
Outro problema residia no espalhamento de raios X estudado por Compton. A teoria do espalhamento era a de que ao incidir uma onda eletromagnética sobre um elétron, este iria oscilar com a mesma frequência e voltaria a emitir uma onda tridimensional de mesma frequência, a chamada luz espalhada. Em 1923, contudo, Compton observou que

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Geiger-Marsden_experiment. Acessado em 22/01/2020.

⁷<https://www.thoughtco.com/definition-of-balmer-series-604381>. Acessado em 22/01/2020.

a frequência dos raios X espalhados não coincidia com a do raio X incidente. Para ele essa discrepância poderia ser entendida se o processo de absorção consistisse da colisão de um *quanta* de raio X com o elétron (Figura 2.6). Dessa forma, o *quanta* ao colidir transferiria parte de sua energia para o elétron e a energia remanescente, por meio da relação $E = h\nu$, teria uma frequência diferente.

Figura 2.6: Explicação de Compton para as diferentes frequências do feixe espalhado (λ').



Visto o comportamento dual, ora onda ora partícula, da interação da luz com a matéria, De Broglie em 1924 mostrou que assim como o *quanta*, com seu aspecto corpuscular, poderia corresponder a uma onda de luz, o elétron enquanto partícula também poderia corresponder a uma onda associada. Dessa forma, uma onda circulando ao redor do núcleo corresponderia a uma onda estacionária, cujo perímetro (orbital eletrônico) seria um múltiplo de seu comprimento de onda. Ademais, este comprimento de onda estaria associado ao momento da partícula na forma $\nu = \frac{h}{p}$, sendo h a constante de Planck.

No ano seguinte, pôde-se obter os valores das frequências e intensidades emitidas pelos elétrons do átomo, ao tratar o problema por meio da expansão de Fourier dos níveis orbitais, onde as equações não traziam a velocidade e posição do elétron, mas os valores das frequências e amplitudes da expansão.

As equações de movimento da Mecânica Clássica deram lugar então à equações semelhantes entre matrizes. Observáveis⁹ como posição, momento e energia ganharam *operadores* matriciais correspondentes, na chamada *Mecânica Matricial*. Posteriormente (1925) Born, Jordan e Dirac evidenciaram que matrizes relacionadas à posição e ao momento do elétron não comutavam entre si, e Heisenberg mostrou que o produto da imprecisão dessas duas grandezas não podia ser menor que a constante de Planck dividida pela massa da partícula, ambos estes resultados trariam importantes cisões com a Mecânica Clássica.

Dada a interpretação de uma onda material associada ao elétron, Schrödinger buscou uma equação que regesse esse comportamento ondulatório. Essa equação de onda para uma grandeza Ψ , onda associada, deveria ser consistente com os postulados de de Broglie ($\lambda = \frac{h}{p}$) e Einstein ($\nu = \frac{E}{h}$), assim com a equação da energia total,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

onde E é a energia total da partícula, m sua massa, $p^2/2m$ sua energia cinética e V a

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Compton_scattering. Acessado em 22/01/2020.

⁹Um observável é toda quantidade física que se pode medir em um sistema, assim como posição, momento, energia, spin, etc. Os observáveis passaram com a Mecânica Quântica a serem símbolos relacionados com procedimentos experimentais específicos para medí-los.

energia potencial. Deveria ainda ser linear, da forma que a soma de duas soluções também fosse uma solução para o sistema. Tal equação tomou a seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.51)$$

Em 1926, conseguiu-se demonstrar os níveis de energia estacionários do átomo de hidrogênio como sendo *autovalores* da equação (2.51) e, dessa forma, associar as equações de movimento da Física Clássica com equações de onda, na chamada *Mecânica Ondulatória*. Mais tarde, Schödinger demonstrou a equivalência entre o formalismo ondulatorio e o matricial.

Porém, para que a Ψ fosse aplicada para duas ou mais partículas, seria necessário um espaço de mais de três dimensões. Em 1926, Max Born diante do problema, propôs uma interpretação probabilista para a função de onda, a qual não seria um campo “real”, mas estaria associado à probabilidade de se encontrar uma partícula em determinada posição. Assim, Ψ seria uma função matemática que forneceria a probabilidade de se localizar uma partícula.

Desenvolvera-se, então, uma abordagem matemática para o estudo dos fenômenos quânticos a partir de dois formalismos equivalentes, que viriam a confirmar os níveis de energia de átomos mais pesados como o hélio. A teoria, entretanto, ainda não tratava do comportamento dual onda-partícula.

De forma breve, o formalismo da Mecânica Quântica pode ser resumido como:

- i. O estado do sistema é representado como um vetor (Ψ , ou também denotado por $|\Psi\rangle$) no espaço de Hilbert;
- ii. Os observáveis clássicos tais como posição, momento e energia, ganharam operadores quânticos relacionados, símbolos vinculados aos procedimentos experimentais específicos para medí-los;
- iii. Os operadores hermitianos \hat{A} aplicados ao vetor de estado Ψ resultariam em *autovalores* a_j correspondentes aos observáveis,

$$\hat{A}\Psi = a_j\Psi_j$$

- iv. O vetor de estado tem sua evolução temporal regida pela equação de Schrödinger,

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

onde H é o operador hamiltoniano;

- v. O valor esperado (valor médio) para um observável \hat{A} é dado por $\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$;
- vi. O estado quântico representa a soma de possíveis *autoestados* a serem observados. Dizemos que no processo de medida ocorre um colapso de onda, onde o sistema assumirá um dos possíveis autoestados. A probabilidade de após a medida se obter um dos possíveis autoestados Ψ_j é dado por $|a_j|^2$.

$$\Psi = \sum_j a_j\Psi_j$$

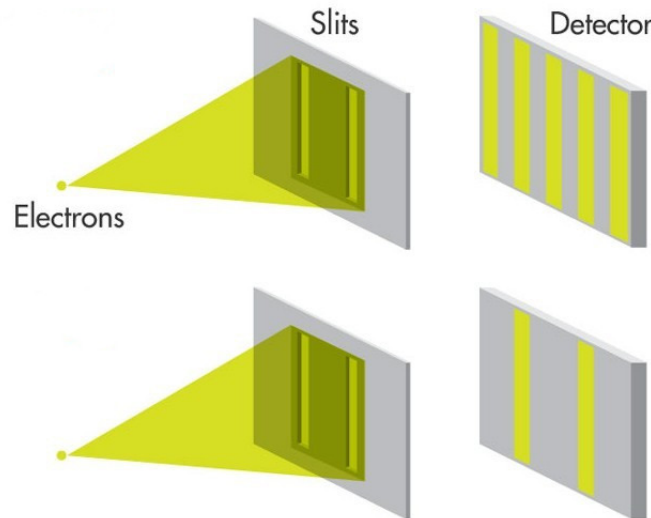
2.2.1 Paradoxo Onda-Partícula

Os questionamentos acerca da natureza da luz são antigos na história da humanidade, Aristóteles já o investigava em termos de *potência* e *ato*. A concepção da luz como matéria foi sistematizada com Descartes e por Newton. Já a ideia da luz como onda, assim com o som, foi primeiro sugerida por Hooke, em 1665, sendo desenvolvida por Huygens em 1678, em seu “*Traité de la Lumiere*”.

Um importante experimento para essa discussão foi o realizado por T. Young em 1804. Nele, ao incidirmos um feixe de luz paralelo por um orifício, uma parte desse feixe irá refletir enquanto a outra passará pelo buraco e chegará ao anteparo. Se abrirmos agora outro orifício e assumirmos a luz como constituída de pequenos corpúsculos, poderíamos intuir que duas faixas luminosas paralelas iriam se formar no anteparo (Figura 2.7-inferior), correspondendo a ambas as fendas pelas quais os corpúsculos passariam.

Contudo, o que pode se observar é um conjunto de franjas claras e escuras (Figura 2.7-superior). Ao passo que fechamos um dos orifícios o padrão de franjas some, aparentando se tratar de um fenômeno ondulatório, semelhante à ondas na água. Nesse aspecto, a luz como onda poderia somar suas cristas e vales resultando nas franjas claras, ou se cancelar pela diferença de fase resultando nas franjas escuras.

Figura 2.7: Fenômeno de dupla fenda. A imagem inferior é o resultado esperado para o comportamento corpuscular (não observado) e a superior para o ondulatório (observado).



quantamagazine.org¹⁰

Quando apenas uma fenda está aberta, sua intensidade luminosa será proporcional ao campo elétrico na forma:

$$I_1(x) \propto E_1^2(x) \quad (2.52)$$

onde,

$$E_1(x) = A \cos \theta_1$$

¹⁰<https://www.quantamagazine.org/pilot-wave-theory-gains-experimental-support-20160516/>. Acessado em 22/01/2020.

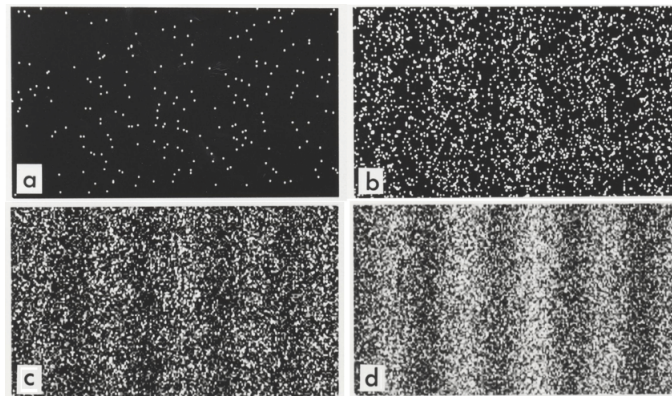
Já quando ambas as fendas estão abertas,

$$\begin{aligned}
 E(x) &= E_1(x) + E_2(x) \\
 I(x) &\propto E^2(x) = [E_1(x) + E_2(x)]^2 \\
 &= I_1 + I_2 + (I_1 \cdot I_2)\cos\theta_{12}
 \end{aligned}
 \tag{2.53}$$

Da perspectiva corpuscular as intensidades vindas de ambas as fendas deveriam se somar ($I_1 + I_2$), já quando assumimos que a luz é uma onda de perturbação do campo eletromagnético (onde a contribuição de E é $c \cdot B$ maior que o campo magnético), temos um fator de fase $\cos\theta_{12}$ que resulta tanto em uma soma das intensidades (franjas claras) como em um cancelamento (franjas escuras).

Por outro lado, o padrão observado na tela não é contínuo, mas formado por uma grande quantidade de pontos luminosos, sugerindo que sejam partículas (fótons). Em experimentos quando à a emissão de apenas um fóton por vez (Figura 2.8), excluindo então qualquer interação entre os demais fótons, o mesmo atingirá o aparato de maneira aparentemente aleatória e, sucessivamente, os demais fótons irão formar os padrões de franjas claras e escuras.

Figura 2.8: Evolução temporal do experimento de dupla fenda com fótons.



researchgate.net¹¹

É nisso que consiste o paradoxo: o que se observa é que o padrão de interferência é formado por um conjunto de pontos, mas uma teoria unicamente corpuscular não explicaria de forma clara como um fóton “saberia” se uma ou ambas as fendas estariam abertas para formar os dois tipos de padrões (uma franja quando apenas uma fenda estivesse aberta ou de interferência quando ambas estivessem abertas). Agora, se tratarmos o feixe como onda, a mesma formaria o padrão de interferência mas estaria distribuída em todo o espaço, e não como uma sucessão de pontos.

Se associarmos cada partícula a um vetor de estado $|\psi\rangle$, temos que a probabilidade dela colidir no ponto x é dada, a menos de uma constante, por:

$$P(x) = |\langle x | \psi \rangle|^2$$

¹¹https://www.researchgate.net/publication/315804485_About_the_Double_Nature_of_Matter_Ontological_Approach. Acessado em 22/01/2020.

onde $|\psi\rangle$ é o estado total, ou seja, a soma dos estados possíveis. A partícula pode passar pela fenda 1, representado pelo estado $|\psi_1\rangle$, ou pela fenda 2, $|\psi_2\rangle$, e o estado total será:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$$

O que implica em:

$$P(x) = |\langle x | \psi_1 \rangle + \langle x | \psi_2 \rangle|^2$$

Essa relação é diferente da soma das probabilidades para cada uma das fendas,

$$|\langle x | \psi_1 \rangle + \langle x | \psi_2 \rangle|^2 \neq |\langle x | \psi_1 \rangle|^2 + |\langle x | \psi_2 \rangle|^2$$

onde,

$$|\langle x | \psi_1 \rangle + \langle x | \psi_2 \rangle|^2 = |\langle x | \psi_1 \rangle|^2 + |\langle x | \psi_2 \rangle|^2 + 2\Re(\langle x | \psi_1 \rangle \langle x | \psi_2 \rangle)$$

e o termo

$$2\Re(\langle x | \psi_1 \rangle \langle x | \psi_2 \rangle)$$

contribui para o efeito de interferência observado.

Em 1896, com a descoberta do raio X, as dúvidas pairavam em qual seria sua natureza, a primeira hipótese foi a de que seria um impulso eletromagnético semelhante à luz, ainda que mais energético. Contudo, J.J. Thomson percebeu em 1897 que ao ionizar gases com raio X, apenas uma pequena parcela das moléculas do gás eram excitadas. Se tratando de uma onda e, conseqüentemente, distribuída em todo o espaço, deveria ionizar todas as moléculas da mesma forma.

William H. Bragg em 1906, também percebeu que a energia que uma molécula de gás absorvia durante a ionização era quase igual energia do pulso como um todo. Novamente, como a onda estaria distribuída em todo o espaço, uma mesma molécula não seria capaz de absorver toda essa energia.

Esses efeitos evidenciavam uma propriedade corpuscular da radiação, e junto ao modelo de luz partícula proposta por Einstein em 1905, Bragg (1907) sugeriu qualitativamente o caráter dual do raio X. Um importante fenômeno que veio a contribuir com seu aspecto ondulatório foi o efeito de interferência observado por Friedrich, Knipping e Laue em 1912.

Por outro lado, Maurice de Broglie demonstrou em 1921 o efeito fotoelétrico para o raio X, contribuindo novamente para a ideia do mesmo ter propriedades corpusculares. Por fim, em 1923, Arthur Compton realizou experimentos de espalhamento com raio X, resultado do choque com elétrons.

A discussão em torno da natureza da radiação (dentre elas a luz) estava diante de duas teorias distintas, cada uma embasada em diferentes experimentos os quais evidenciavam esse caráter dual. De um lado o efeito Compton e fotoelétrico não podiam ser explicados com a teoria ondulatória, e os fenômenos de difração e interferência também não encontravam respostas na teoria corpuscular. Assim, ambas as naturezas pareciam coexistir, sendo evidenciadas dependendo do experimento que se realizasse, as próprias relações de Planck ($E = h\nu$) e Einstein ($p = hk$) mostram essa dualidade onda partícula, na qual a energia e o momento de uma partícula é expresso em termos de parâmetros ondulatórios

(ν e k).

Louis de Broglie foi o primeiro a propor (1923) que, assim como a luz e o raio X apresentavam o comportamento dual de onda e partícula, toda partícula ou forma de radiação se reduz a um objeto com uma onda associada, e o comprimento de onda associado a uma partícula de momento p seria $\lambda = \frac{h}{p}$.

Frente ao impasse, Bohr propõe em 1926 o *princípio da complementaridade* no qual o caráter corpuscular e ondulatório formariam juntos e de forma complementar o ente quântico, de forma que nunca se manifestavam simultaneamente, e que seriam evidenciados de acordo com as condições do experimento. Como a interpretação ondulatória explica o padrão de interferência mas elimina o conceito de trajetória, e o tratamento corpuscular sugere uma trajetória mas não explica o fenômeno de interferência, seria impossível termos um experimento no qual saibamos a trajetória de cada partícula e ainda assim obtermos os padrões de franjas. Em resumo, o ente quântico não é nem onda nem partícula mas assume uma dessas naturezas dependendo das condições que o analisemos, dessa forma, seria onda e partícula ao mesmo tempo.

2.2.2 Princípio de Incerteza

Temos que na Mecânica Quântica as previsões experimentais são de caráter probabilístico, onde dado um estado $|\psi\rangle$ e um certo operador \hat{A} , o formalismo só apresenta as probabilidades de se obter cada um dos resultados possíveis.

Para verificar essas previsões estatísticas é necessário analisar um *ensemble* desse estado $|\psi\rangle$, ou seja, sistemas preparados de forma idêntica. Dessa forma, é possível determinar o valor médio, que é o valor esperado estatisticamente para o sistema, e o desvio-padrão, que é a variância estatística ou o quanto a medida *espalha* em torno do valor médio.

Em analogia com a teoria das probabilidades, as relações de incerteza podem ser escritas em termos do desvio-padrão Δ como,

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

onde A e B são operadores e $[A, B]$ é o complexo conjugado na forma $[A, B] = AB - BA$. Sendo o desvio-padrão definido na forma,

$$\Delta A = [\langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle]^{1/2}$$

em que o valor médio é $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$.

Como quantidades classicamente conjugadas podem ser definidas de forma isolada e independente, ou seja, podemos comutar os processos de medida, a incerteza estaria vinculada à nossa mensurabilidade do processo de medida, ou, em quão preciso é a nossa leitura do sistema.

Em 1925, contudo, Born, Jordan e Dirac explicaram que algumas quantidades canonicamente conjugadas, tais como posição e momento, não o eram para os processos quânticos, de forma que seus operadores não comutavam entre si. Heisenberg, então, em 1927, demonstrou que *dados dois observáveis A e B cujos operadores não comutam, não é possível que os meçamos simultaneamente, em um mesmo sistema, sem uma imprecisão mínima*. No caso para medidas de posição e momento, o produto de suas incertezas seria de no mínimo $\frac{h}{2}$.

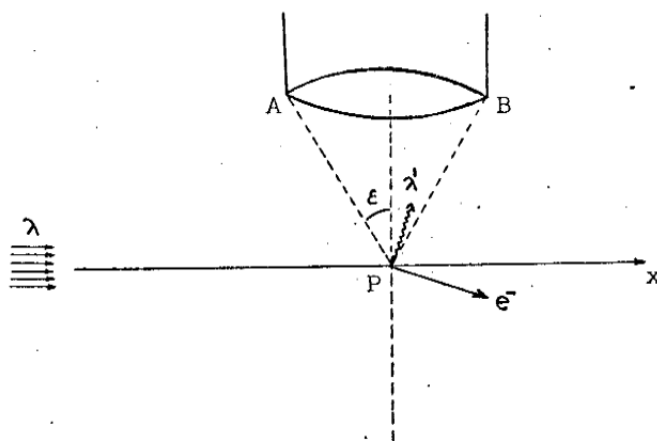
$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}$$

de modo que quanto mais preciso for a medida da posição, menos se saberá o momento, e vice versa.

Para Heisenberg essa limitação decorre do processo de medida. Quando fazemos a medida de um observável sempre iremos perturbar de forma imprevisível e incontrollável a aquisição da outra medida, “todo experimento destrói parte do conhecimento do sistema que se obtivera anteriormente”. (HEISENBERG, 1930, p.20).

Em um exemplo proposto por ele (Figura 2.9), seja um microscópio com lente objetiva AB, supondo que o elétron seja observado no ponto P e que o cone da luz espalhada por ele tenha uma abertura angular ϵ , a precisão da posição do elétron será dada pela resolução do microscópio, que da ótica resulta em:

Figura 2.9: Experimento proposto por Heisenber para justificar o princípio de incerteza.



Uma introdução aos fundamentos da mecânica quântica¹²

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\text{sene}\epsilon}$$

em que λ é o comprimento de onda do feixe de luz incidente.

Assim, o elétron irá espalhar um fóton do feixe incidente (λ') o qual irá penetrar a objetiva e atingir o observador com uma margem de erro dada por Δx . Como o fóton ao atingir com o elétron transfere uma quantidade $\frac{h}{\lambda}$ de momento (efeito Compton) e a direção de propagação do elétron está definida dentro do ângulo ϵ , a incerteza do momento transferido ao elétron na direção \vec{x} será,

$$\Delta P_x = \frac{h}{\lambda} \text{sene}\epsilon$$

de maneira que quando ϵ tomar valores cada vez menores, mais precisa será a medição da posição (ΔP_x pequeno) mas maior será o desvio do momento, dado que este é inversamente proporcional ao $\sin(\epsilon)$. Já a relação de incerteza continua válida,

¹²FARIAS, Ruy Hanazaki do Amaral et al. Uma introdução aos fundamentos da mecânica quântica. 1987.

$$\Delta x \Delta P_x \geq h$$

Assim, “o erro experimental não apresenta - pelo menos dentro de certos limites - uma propriedade do elétron, mas sim o conhecimento deficiente que temos acerca dele” (Heisenberg, 1958, p.20). Bohr difere dessa interpretação ao atribuir que “as incertezas na medição simultânea da posição e do momento existem porque posição e momento nem mesmo existem com valores simultânea e perfeitamente bem definidos” (BOHM, 2012, pg. 100). O que evidencia os posicionamentos diferentes entre Heisenberg e Bohr é que para o primeiro o conhecimento é epistemológico, referente à uma limitação do processo de medida e aquisição da informação. Já para o segundo, é de caráter ontológico, ou seja, referente ao ser, a própria natureza do elétron.

2.2.3 Paradoxo EPR-Bohm

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram um artigo questionando o caráter de *completeza* da Teoria Quântica. Mais tarde em 1951, David Bohm propõe um experimento factível para o problema apresentado por EPR. Nele uma fonte S decai em duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ que se movem em direções opostas, tomemos o caso do decaimento do méson pi neutro em um elétron e em um pósitron (Figura 2.10),

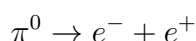
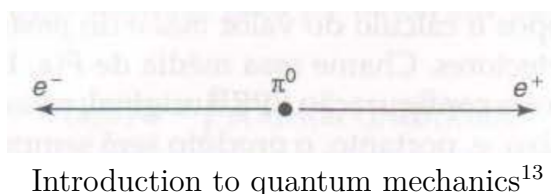


Figura 2.10: Experimento proposto por Bohm para o experimento EPR, onde um pión decai em um elétron e um pósitron em sentidos contrários.



A função de onda do sistema é dada por:

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+ \rangle_1 | - \rangle_2 + | - \rangle_1 | + \rangle_2] \quad (2.54)$$

Se o elétron tiver spin para cima, o pósitron deverá ter spin para baixo, e vice-versa. Agora, suponha que o elétron esteja à 10 anos-luz de sua fonte (π^0) e então medimos seu spin e, supondo que seu valor seja para cima, poderíamos afirmar que alguém a 20 anos-luz de distância obterá o spin do pósitron para baixo.

A Mecânica Quântica afirma, contudo, que nenhuma partícula tem seu spin definido até o momento da medição, quando $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ colapsaria em dos autovalores. Desse modo, quando o observador 1 mede o spin do elétron para cima, a função de onda seria,

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \rightarrow | + \rangle_1 | - \rangle_2 \quad (2.55)$$

¹³GRIFFITHS, David J.; SCHROETER, Darrell F. Introduction to quantum mechanics. Cambridge University Press, 2018.

mas para o observador 2 o vetor estado ainda seria a sobreposição

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[| + \rangle_1 | - \rangle_2 + | - \rangle_1 | + \rangle_2] \quad (2.56)$$

“O pressuposto fundamental sobre o qual repousa o argumento EPR é que nenhuma influência pode se propagar mais rapidamente do que a velocidade da luz. Chamamos isso de princípio da localidade. Talvez você se sinta tentado a sugerir que o colapso da função de onda não é instantâneo, mas que ‘viaja’ em certa velocidade finita. Entretanto, isso levaria a uma violação da conservação do momento angular, pois se medíssemos o spin do pósitron antes da informação do colapso o alcançar, haveria uma probabilidade de 50 por cento de encontrarmos ambas as partículas com spin para cima. Embora qualquer um possa pensar sobre tal teoria abstratamente, os experimentos são inequívocos: nenhuma violação ocorre - a (anti) correlação dos spins é perfeita. Evidentemente, o colapso da função de onda - não importa qual seja seu status ontológico - é instantâneo.” (GRIFFITHS, 2011. p.313).

O fato da teoria possibilitar o valor de spin para cima para ambas as partículas parece ilógico e se mostrou incoerente com os experimentos. Esse resultado pode ter duas principais interpretações, ou de que a Mecânica Quântica é uma teoria incompleta - ponto de vista defendido por EPR - ou de que é não local, dessa forma, quando medíssemos o spin do elétron instantaneamente a informação chegaria ao pósitron. “Neste caso, mesmo que os dois subsistemas não estejam mais interagindo, a medição efetuada em um deles ‘perturbaria’ instantaneamente o outro. A teoria Quântica seria completa mas estaria violando o princípio da relatividade segundo o qual não é possível enviar sinais com velocidade maior do que a da luz. É claro que Einstein preferiu se manter à localidade.” (MOKROSS, 1997, p.143).

2.2.4 Resumo da Interpretação Ortodoxa

Do ponto de vista conceitual, a Mecânica Quântica assume que:

- (i) Não é possível descrever os fenômenos quânticos em termos de trajetórias das partículas;
- (ii) A probabilidade tem na teoria quântica papel intrínseco e não-eliminável;
- (iii) Algumas grandezas físicas tais como posição e momento são tidas como *complementares*, de forma que seus operadores relacionados não comutam entre si e o produto de suas incertezas possuem um valor mínimo de indeterminação. Em última análise, é *impossível* determinar simultaneamente a posição e a velocidade de uma partícula;
- (iv) É *impossível* prever os fenômenos quânticos de forma determinista antes da observação, e conseqüente colapso de estados.

Quanto a este último ponto, Max Born apresenta:

“Na Teoria Quântica é o *princípio de causalidade*, ou mais precisamente o do *determinismo*, que deve ser abandonado e substituído por outra coisa [...] Temos agora uma *nova forma* da lei da causalidade [...] É a seguinte:

se em um certo processo as condições iniciais forem determinadas tão acuradamente quanto o permitido pelas relações de incerteza, então as probabilidades de todos os estados subsequentes possíveis são governados por leis exatas.” (BORN, 1951, p.155, 163-4).

- (v) Todo elemento da realidade física pode ser expresso na teoria que descreve o fenômeno (*completeza*). Assumindo essa proposição, defendida por Heisenberg e Bohr a partir do experimento EPR, a Mecânica Quântica se mostra *não-local*.

Capítulo 3

Mecânica Bhomeiana

3.1 Teoria das variáveis ocultas

Em 1926, Max Born havia sugerido a hipótese de que *coordenadas microscópicas* pudessem determinar processos individuais, e que uma média sobre estas variáveis forneceria as previsões quânticas ¹. Diante de tal proposição, John Neumann desenvolveu em 1932 um formalismo para o problema de se adicionar novos parâmetros à Teoria Quântica, a fim de torná-la causal e onde o caráter probabilista seria resultado de um aspecto estocástico dessas novas interações, semelhante ao movimento browniano.

Neumann concluiu, contudo, pela impossibilidade dessas variáveis até então ocultas à Teoria Quântica. Em seu formalismo, postula a existência de um operador \hat{Q} com dispersão não-nula, ou seja,

$$\langle \hat{Q} \rangle \neq \langle \hat{Q} \rangle^2$$

Contudo, um estado descrito em termos dessas variáveis ocultas, tem um operador relacionado que fornecerá mais de um autovalor, continuando a apresentar o caráter probabilístico. Sucedeu uma grande aceitação dessa teoria pela comunidade europeia ².

No início dos anos 50, houve um grande incentivo por parte da União Soviética para o desenvolvimento de uma Teoria de Variáveis Ocultas que se contrapôs à interpretação da complementaridade. Dimitrii Blokhintsev conseguiu então desenvolver um formalismo diferente do da Mecânica Quântica.

Em 1951, David Bohm, talvez por inspiração dos trabalhos de Blokhintsev, retorna à proposta das variáveis ocultas desenvolvendo uma teoria que voltasse aos conceitos de causalidade e determinismo. Depois de finalizado seu artigo, Bohm aponta para a semelhança com as ideias propostas por de Broglie acerca da onda-piloto.

3.2 Teoria da Onda-Piloto

Quando de Broglie propôs sua teoria ondulatória para as partículas, apresentou também um significado para a função Ψ . Ele admitia a existência, enquanto realidades distintas, tanto do ponto material (partícula) quanto da onda contínua representada pela

¹Born pode ter se inspirado nos trabalhos do russo Jakov I. Frenkel, especialista em Mecânica Estatística.

²Salvo as críticas da alemã Grete Hermann (1935).

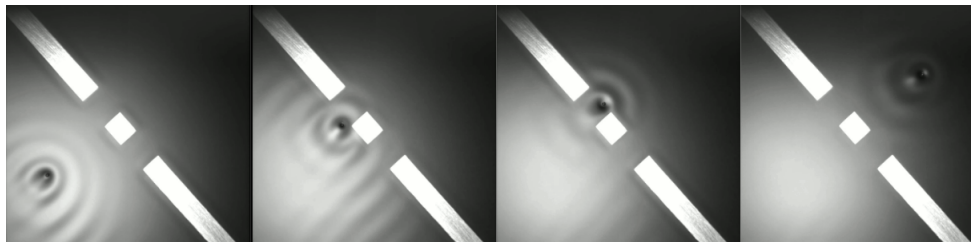
função Ψ . A onda teria o papel de guiar o movimento da partícula, sendo chamada portanto de *onda-piloto*. Para de Broglie ainda “a partícula se desloca sobre uma onda de tal modo que sua vibração interna, admitida como decorrência da análise da frequência comentada acima, deva permanecer em fase com a onda que a porta” (FARIAS, 1987, p.113).

Dessa forma, diferente da proposição da complementaridade, o ente quântico seria para de Broglie formado de duas entidades distintas e inseparáveis, constituído de uma partícula e uma onda guia real.

Mas a onda é uma deformação de algum meio, e para de Broglie haveria um *meio subquântico* no qual a partícula se encontra em constante contato. A trajetória da partícula seria guiada por essa onda em padrões do tipo-browniano.

Essa ideia de uma partícula ter sempre associada a si uma onda tem um análogo clássico do experimento com gotas de óleo oscilando. Nela, cada gota gera uma perturbação no líquido no qual saltita em forma de uma onda estática. Quando submetida a um experimento do tipo dupla fenda, observa-se que a onda associada percorre as duas fendas gerando padrões de interferência, e a gota, por sua vez, percorre apenas uma fenda.

Figura 3.1: Partícula caminhante submetida ao experimento de dupla fenda.



youtube.com³

A onda-piloto de de Broglie estaria vinculada à função de onda Ψ' de Schrödinger na forma,

$$\Psi' = c\Psi \quad (3.1)$$

onde c é um fator de normalização, e que tanto Ψ' como Ψ seriam ambas soluções para a equação de Schrödinger, sendo então denominada por de Broglie como *teoria da dupla solução*. Assim, Ψ' seria uma onda de caráter subjetivo, como interpretada por Born, mas obtida a partir de uma onda objetiva Ψ .

Uma das importantes consequências de tal interpretação foi a *fórmula de guiamento* que demonstrava a velocidade da partícula guiada pela onda. Para isso, tomemos como solução complexa da equação de onda representada por Ψ como sendo

$$\Psi = R(\vec{r}, t)e^{iS(\vec{r}, t)/\hbar} \quad (3.2)$$

Onde $R(\vec{r}, t)$ é uma amplitude e $S(\vec{r}, t)$ um fator de fase, ambas funções reais. Tomando a equação de Schrödinger como postulado,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi \quad (3.3)$$

³<https://www.youtube.com/watch?v=W9yWv5dqSKk>. Acessado em 22/01/2020.

substituindo a nova Ψ e derivando para o caso unidimensional, teremos os termos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} - R \frac{\partial S}{\partial t} \right) e^{iS/\hbar}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{iR}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{R}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] e^{iS/\hbar}$$

$$V(x)\Psi = V(x)R e^{iS/\hbar}$$

Agora, separemos os termos nas partes reais e imaginárias. Para a equação ser válida a parte real do lado esquerdo deve ser igual à do lado direito, o mesmo ocorre para a parte imaginária. Dessa forma,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x) - \frac{\hbar^2}{2mR} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2m} R \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

Multiplicando a parte imaginária por R e rearranjando a equação teremos que,

$$\frac{\partial(R^2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R^2}{m} \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.6)$$

Generalizando para três dimensões:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \quad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial(R^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Para o limite clássico de \hbar tendendo a zero, a parte real toma exatamente a forma da equação de Hamilton-Jacobi, onde $S(\vec{r}, t)$ é a *função principal de Hamilton*. Por outro lado, o termo quântico $-\frac{\hbar^2}{2mR} \nabla^2 R$ funciona como um potencial Q adicionado ao potencial clássico V . Este termo foi denominado de *potencial quântico* na forma,

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla S)^2 + V(\vec{r}) + Q = 0 \quad (3.9)$$

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (3.10)$$

Assim, a parte real pode ser escrita como uma equação de Newton,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla[V(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, t)] \quad (3.11)$$

onde o potencial quântico explica uma força não-clássica que guiará a partícula.

O limite para a transição clássica seria interpretado não postulando que $\hbar \rightarrow 0$, mas quando o potencial $Q(\vec{r}, t)$ tendesse à zero, recuperando a notação clássica. Outra importante consideração é de que no caso de uma partícula livre, ela estaria ausente de um

potencial clássico $V(\vec{r}, t)$, mas ainda sob influência do potencial quântico, cujo gradiente atua como uma força.

A parte imaginária, por sua vez, também pode ser obtida da Mecânica Estatística Clássica, desde que R^2 seja igual à densidade de probabilidade P de se encontrar a partícula em uma dada posição.

Lembrando que a fórmula geral para uma equação de continuidade é

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}) = s \quad (3.12)$$

onde ϕ é qualquer quantidade, \vec{v} é a velocidade do fluido e s descreve a geração (ou remoção) de ϕ .

Dada a semelhança com a equação de continuidade, a parte imaginária representa a conservação da densidade de probabilidade.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(P \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Dessa semelhança obtemos também que a velocidade da partícula guiada pela onda-piloto será

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\nabla S}{m} \quad (3.14)$$

que é a fórmula de guiamento e que condiz com a Teoria Clássica na qual o momento é dado pelo gradiente da fase,

$$\vec{p} = \nabla S(\vec{r}, t) \quad (3.15)$$

Obtemos, portanto, o mesmo resultado de

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\nabla S}{m} \quad (3.16)$$

3.3 Potencial Quântico

Como vimos, a densidade de probabilidade $P(\vec{r}, t)$ de se encontrar uma partícula é dada por:

$$P(\vec{r}, t) = R(\vec{r}, t)^2$$

que é equivalente à notação $R^2 \equiv |\psi|^2$.

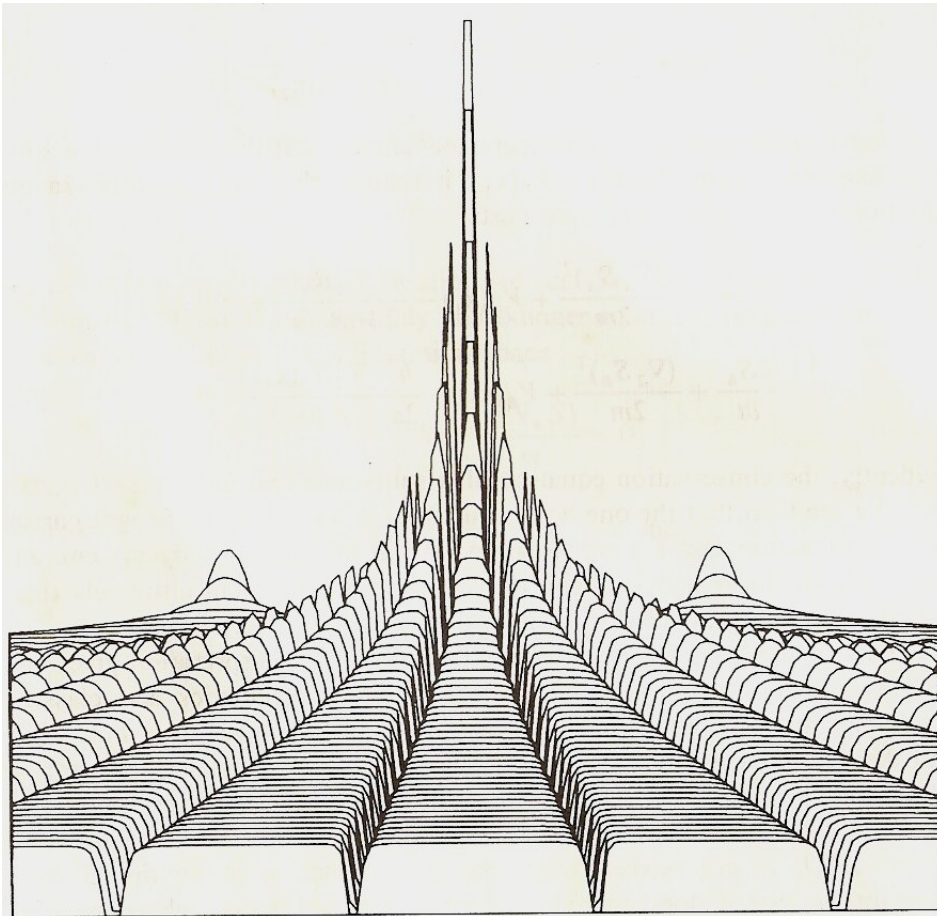
Dessa forma, quando a probabilidade tende à zero, ou seja, $R(\vec{r}, t) \rightarrow 0$, o quociente $\frac{\nabla^2 R}{R}$ pode assumir valores bastante grandes. Em consequência, a força relativa também seria muito intensa sobre a partícula, fazendo com que ela assumia velocidades muito elevadas (no limite de R indo à zero a velocidade seria infinita!). Assim sendo, o tempo que a partícula permaneceria nessas regiões é praticamente nulo, não possibilitando sua detecção.

Poderíamos explicar o experimento de dupla fenda como sendo a onda real associada à partícula que atravessa simultaneamente as duas fendas e define os padrões de interferência, conduzindo a partícula de acordo com as equações vistas.

Philipidis, em 1979, simulou a função de onda a partir do método de integral de ca-

minho de Feynman, da qual obtive o potencial quântico no padrão mostrado pela Figura 3.2.

Figura 3.2: Potencial quântico.



researchgate.net⁴

Ao fundo, se observa dois pacotes gaussianos que correspondem ao potencial nas fendas. No centro, quando as duas amplitudes se encontram, o potencial varia bruscamente, consequência da soma construtiva das amplitudes. Já no plano da frente essa mudança brusca do potencial, é observada como sendo os vales, onde as amplitudes se somam de forma destrutiva.

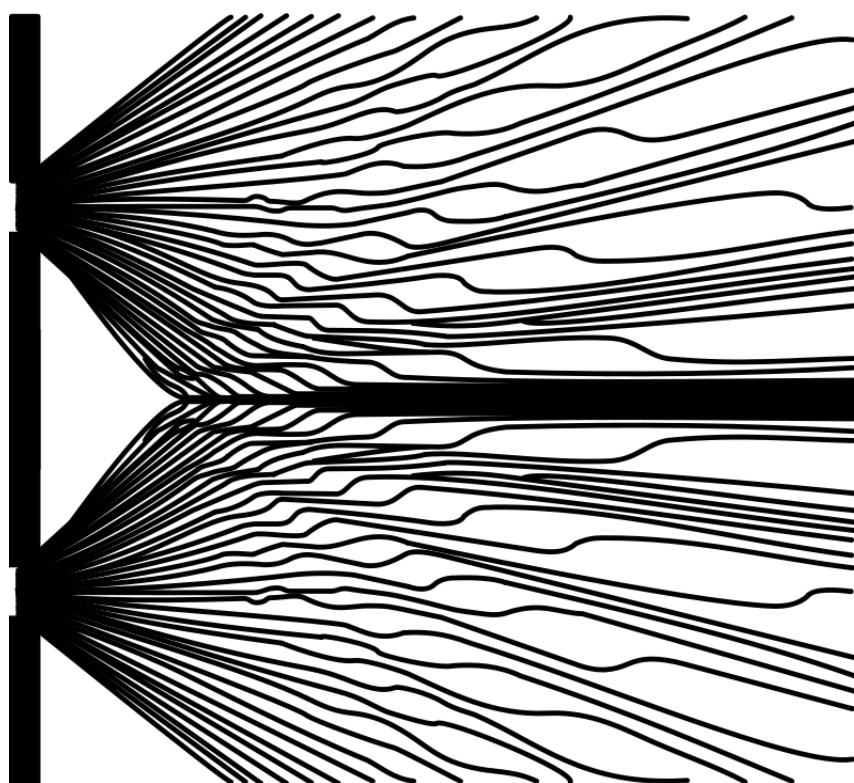
Sabendo o potencial $U(\vec{r}, t)$, podemos integrar a equação (3.11) para obter as possíveis trajetórias das partículas, obtendo como resultado a Figura 3.3.

Percebemos que o padrão de fendas é formado a uma distância razoável das fendas. Algumas poucas partículas ainda passam pelas raias escuras, regiões correspondentes aos vales do potencial quântico. Como vimos, quando a magnitude do potencial é muito grande, ocorre que a força sobre a partícula também é muito intensa, fazendo com que atravesse essas regiões com velocidades que tendem ao infinito, ou seja, o tempo que permanecem nas raias escuras é tão pequeno (tendendo à zero) que não possibilita sua detecção.

⁴https://www.researchgate.net/publication/262452641_Bohm's_approach_to_Quantum_Mechanics_and_Individuality. Acessado em 22/01/2020.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_potential. Acessado em 22/01/2020.

Figura 3.3: Trajetórias possíveis da partícula quântica.



wikipedia.org⁵

Dessa forma, a teoria de de Broglie-Bohm retoma com o conceito de trajetória. Poderíamos nos perguntar então quanto à violação do Princípio de Incerteza de Heisenberg, uma vez que saberíamos com certeza a posição da partícula. Temos que para que nossa equação de Schrödinger tenha uma solução única, ou seja, uma dentre as muitas trajetórias, teríamos que especificar a condição inicial, em outras palavras, a função de onda no instante inicial $\psi(\vec{x}, 0)$, que corresponde no experimento da dupla-fenda à função de onda que a partícula assume ao percorrer a fenda. A dificuldade estaria então em determinarmos com precisão essa condição inicial, uma vez que, como exposto por Heisenberg no problema do microscópio (Figura 2.9), para melhor observarmos um objeto quântico, mais teríamos que perturbá-lo, de forma imprevisível e incontrolável.

A teoria da onda-piloto apresenta resultados fantásticos, embora não diferentes dos previstos pela Mecânica Quântica, mas interpretados de uma forma mais intuitiva. Contudo, se essa onda associada é real, porque ainda não a detectamos? De Broglie acreditava que tanto o momento quanto a energia do sistema onda + partícula estaria associado em grande escala à partícula, e apenas uma quantidade muito pequena estaria difundida pela onda, o que justificaria sua difícil detecção. Tal explicação é condizente ao fato de o meio perturbado pela partícula ser de origem “subquântica”, o que remete a experimentos de detecção ainda mais refinados.

3.4 Desigualdade de Bell

John Bell mostrou que a hipótese de Neumann da aditividade de valores médios para quaisquer observáveis era muito restrigente e observou que a Teoria de Variáveis Ocultas de Bohm, por ter seus resultados de medida dependentes não apenas das propriedades inerentes ao sistema medido, mas também do “contexto” de medida, ou seja, da disposição do arranjo experimental de preparação do estado e da medida, é que escaparia das provas da impossibilidade.

Reescrevendo a fórmula de guiamento de de Broglie-Bohm para partículas com spin correlacionados, do tipo EPR-Bohm, Bell derivou uma desigualdade que seria satisfeita por qualquer Teoria de Variáveis Ocultas do tipo local. Bell partiu da pressuposto de uma teoria local, realista e completa. Local no sentido de as partículas estarem longe o suficiente para que qualquer sinal de medida em uma partícula não chegue até a outra, ou seja, não há interação entre as partículas. Realista na qual é assumida uma *realidade externa*, a qual tenha propriedades bem definidas. Por último, completa no sentido de descrever teoricamente todo elemento ou fenômenos dessa *realidade*. Podemos ainda citar, segundo Hanazaki, o indutivismo no qual *a inferência indutiva é válida, de modo que conclusões verdadeiras podem ser obtidas a partir de observações consistentes*.

O resultado foi de que nenhuma teoria local de variáveis escondidas pode reproduzir todas as previsões estatísticas da Mecânica Quântica para experimentos do tipo EPR-Bohm.

Considerações Finais

A Mecânica Quântica, como evidenciada pelo experimento de EPR-Bohm, tem como implicação ou se tratar de uma teoria *incompleta* ou do tipo *não-local*. Einstein defendia a primeira ideia onde segundo ele “Deus não joga dados”, em alusão ao caráter probabilístico intrínseco à teoria. Bohm, também embasado na incompletude, propõe uma teoria englobando variáveis adicionais ao sistema, sistema este que por ser constituído não só das variáveis ocultas do objeto quântico, mas também das do aparelho de medição, conseguiu escapar da prova de impossibilidade de von Neumann. Bohm pôde ainda com essa teoria, que contemplava também os aspectos da onda-piloto de Broglie, tornar os fenômenos quânticos um processo causal e, conseqüentemente, determinista. Contudo, a Mecânica Bohmiana, assim como a Teoria Quântica ortodoxa, apresentam a não-localidade. Na opinião de Bohm:

“Nós queremos afirmar claramente que a nova qualidade essencial implicada pela teoria quântica é a não-local (...) É geralmente admitido que a teoria quântica tem muitas novas propriedades notáveis, incluindo energia e momentum discretos, saltos discretos em processos quânticos, dualidade onda-partícula, penetração de barreiras, etc. Tem existido muito pouca ênfase, contudo, sobre aquela que é, em minha opinião, dentre todas, a nova propriedade mais fundamentalmente diferente, isto é, a íntima interconexão de sistemas distintos que não estão em contato espacial.” (BOHM, 1975, p.1)

Bell ao estudar o problema de uma teoria que fosse ao mesmo tempo *completa* e *local*, chegou a uma desigualdade com uma importante implicação epistemológica, na qual “nenhuma teoria local de variáveis escondidas pode reproduzir todas as previsões estatísticas da mecânica quântica, para experimentos do tipo EPR-Bohm ((FARIAS, 1987, p.60). Dessa forma, ao descrever duas partículas correlacionadas inicialmente e que se separam a uma grande distância, é necessário estipular uma “ação à distância”, na qual o ato de medição realizado em uma partícula afetaria instantaneamente a outra, o que aparentemente violaria a Teoria da Relatividade Restrita.

Vejam os alguns pontos de vista apresentados por André Assis em seu artigo *Argumentos a Favor da Ação Distância* [ASSIS, 2019], quanto aos aspectos positivos da ação à distância:

“Todas estas leis de força satisfazem o princípio de ação e reação. Este fato significa conservação do momento linear para qualquer sistema de partículas que estão interagindo de acordo com estas leis. Estas forças também estão ao longo da linha reta que conecta as partículas, sendo que este fato significa conservação do momento angular. Estas forças também podem ser deduzidas de energias potenciais, sendo que este fato significa conservação da energia. Estes três aspectos são muito importantes de um ponto de vista conceitual e

também simplificam enormemente os cálculos.

Usualmente as pessoas que são contrárias à ação a distância tentam explicar a interação entre cargas elétricas por meio da pressão e das colisões. Isto é, cada carga deve emitir corpúsculos ou campos que irão deslocar-se no espaço com uma velocidade finita, afetando a segunda carga quando estes corpúsculos ou campos chegam nela.

Um dos argumentos mais fortes a favor da ação a distância é o fato de quão poderosa ela pode ser. Mostro aqui como várias coisas podem ser deduzidas começando apenas com a força de Weber entre cargas pontuais”

Assis então apresenta como a força de Coulomb, lei de Gauss, força de Ampère e lei de indução de Faraday podem ser deduzidas da lei de Weber, que é de natureza não-local. O autor ainda estende a lei weberiana para a gravitação:

“Quando a lei de Weber para a gravitação é combinada com o princípio de equilíbrio dinâmico, torna-se possível implementar quantitativamente o princípio de Mach. (...) Também a precessão do periélio dos planetas é deduzida corretamente da lei de Weber.”

Destacamos ainda o trecho no qual diz:

“(...) Poderiam ser citadas aqui muitas outras entidades fictícias ou de pensamento que foram inventadas para explicar a gravidade. Contudo, estes seis exemplos já são suficientes para ilustrar o que queremos dizer. Em vez de postular todos estes conceitos (o vórtice de Descartes, o éter de Newton, os corpúsculos de Le Sage, o espaço curvo de Einstein, etc.), é muito mais simples considerar apenas aquilo que de fato é observado na natureza. Ou seja, considerar apenas a maçã, a Terra e o espaço vazio entre estes dois corpos. A lei de Newton da gravitação lida apenas com estas grandezas (massa do corpo A, massa do corpo B e a distância entre eles), explicando os fatos observados (tal como a aceleração de queda livre da maçã em direção à Terra). Por este motivo a lei de Newton deve ser preferida em relação a todas as outras explicações que utilizam entidades fictícias.”

Nesse aspecto, a não-localidade da teoria apresentaria uma característica positiva. Outra importante característica da Mecânica Bohmiana é que todas as partículas do universo deveriam estar correlacionadas:

“Na teoria quântica, vimos que nenhuma das propriedades destas partes [do universo] podem ser definidas, exceto em interação com outras partes (...) parece necessário, portanto, abandonar a ideia de o mundo pode ser corretamente analisado em partes distintas [que trabalham juntas de acordo com leis causais exatas para formar um todo], e substituir esta ideia pela suposição de que o universo todo é basicamente uma unidade única e indivisível.” (Bohm, 1951).

Aspecto este que dificultaria estendê-la para o domínio relativístico.

“... implica, por isto, que a mudança na função de onda em um ponto particular do espaço dependa dos valores da função de onda em todos os outros pontos do espaço. Não existe possibilidade, claramente, de generalizar essa teoria para incluir fenômenos relativísticos se a equação de movimento é preservada em sua presente forma, a qual incorpora um mecanismo causal explícito por meio do qual qualquer efeito em uma parte do espaço é transmitido instantaneamente para uma outra parte. A teoria é, devido a isto, limitada ao fenômenos não-relativísticos.” (Freire, 1999).

O que seria um dos principais motivos pela sua pequena aceitação pela comunidade acadêmica. Por fim, concluímos usando as palavras de Bell:

“Em 1952, vi o impossível sendo feito. Foi nos artigos de David Bohm. ... A subjetividade da versão ortodoxa, a referência necessária ao “observador” poderia ser eliminada (...). Mas por que então Born não me contou sobre essa ‘onda piloto’? Talvez apenas para apontar o que haveria de errado com ela? Por que von Neumann não considerou isso? (...) Por que a teoria da onda piloto é ignorada nos livros texto? Não deveria ser ensinada, não como o único caminho, mas como um antídoto para a complacência prevalecente? Para nos mostrar que a imprecisão, subjetividade e indeterminismo, não nos são forçados por fatos experimentais, mas por uma escolha teórica deliberada? (...) Eu sempre senti, desde então, que as pessoas que não compreenderam as ideias desses artigos (...) e infelizmente elas permanecem a maioria (...) estão em desvantagem em qualquer discussão sobre o significado de mecânica quântica.” (NETO. 2010).

Referências Bibliográficas

- 1 GRIFFITHS, David J. Eletrodinâmica, 3ª Edição. 2011.
- 2 SALINAS, Sílvio RA. Introdução a física estatística vol. 09. Edusp, 1997.
- 3 BOHM, David. Quantum theory. Courier Corporation, 2012.
- 4 PESSOA JR, Osvaldo. Conceitos de Física Quântica I. Editora Livraria da Física, 2003.
- 5 PESSOA JR, Osvaldo. Conceitos de Física Quântica II. Editora Livraria da Física, 2006.
- 6 FARIAS, Ruy Hanazaki do Amaral et al. Uma introdução aos fundamentos da mecânica quântica. 1987.
- 7 BOHM, David. Causality and chance in modern physics. Routledge, 2005.
- 8 BOHM, David. A Suggested Interpretation in Terms of “Hidden Variables”: Part I and Part II. Phys. Rev, v. 85, n. 166179, p. 180193, 1952.
- 9 TORT, Alexandre C. et al. Uma tradução comentada de um texto de Maxwell sobre a ação a distância. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2004.
- 10 ASSIS, André KT. Interações na Física-ação à distância versus ação por contato. SILVA, CC Estudos de História e Filosofia das Ciências. São Paulo: Livraria da Física, p. 87-102, 2006.
- 11 MOKROSS, B. J. Não-localidade na mecânica quântica. Revista Brasileira de, 1997.
- 12 PESSOA JR, OSVALDO. Fundamentos da física 1: simpósio David Bohm. Editora Livraria da Física, 2000.
- 13 FREIRE, Olival. David Bohm e a controvérsia dos Quanta. UNICAMP, 1999.
- 14 JAUCH, J. M. São os quanta reais. Um diálogo galileano. São Paulo: Nova Stella, 1986.
- 15 PLANCK, Max. Auto biografia científica e outros ensaios. Rio de Janeiro: Contraponto, 2013.
- 16 HEISENBERG, Werner. A parte eo todo: encontros e conversas sobre física, filosofia, religião e política. Contraponto, 1996.
- 17 FEYERABEND, Paul K. Contra o método. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.
- 18 KUHN, Thomas. Revoluções Científicas. São Paulo: Perspectiva, 1978.

- 19 BARBOSA, Elyana. O secreto do mundo: uma leitura de Gaston Bachelard. 1985. 1985. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Filosofia)–Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo.
- 20 CHIBENI, Silvio Seno. Aspectos da descrição física da realidade. UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1997.
- 21 NEWTON, Isaac. Principia—livro I: princípios matemáticos de filosofia natural. São Paulo: EDUSP, 2016.
- 22 NEWTON, Isaac. Principia—livro II e III: princípios matemáticos de filosofia natural. São Paulo: EDUSP, 2012.
- 23 PRÉ-SOCRÁTICOS, Os. Coleção os pensadores. São Paulo: Ed. Nova Cultural, 1985.
- 24 EISBERG, Robert Martin et al. Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas. 1994.
- 25 MISES, Richard von. Probability, Statistics and Truth. Nova Iorque: Dover, 1981.
- 26 BUENO, Marcelo; ASSIS, Andre Koch Torres. Cálculo de indutância e de força em circuitos elétricos. Editora da UFSC/Editora da UEM, Florianópolis/Maringá, 1998.
- 27 ASSIS, A. K. T. Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional. Montreal: Apeiron, 2013.
- 28 ASSIS, A. K. T. Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 2015.
- 29 DEMEO, James. Dayton Miller’s ether-drift experiments: A fresh look. Infinite Energy Magazine, v. 35, 2001.
- 30 ASSIS, A. K. T. Comparação entre as eletrodinâmicas de Weber e de Maxwell-Lorentz. Episteme, v. 3, n. 6, p. 7-15, 1998†.
- 31 ASSIS, A. K. T. Mecânica Relacional. Campinas: Editora do Centro de Lógica e Epistemologia - CLE da UNICAMP/FAPESP, 1998.
- 32 JAMMER, M. Le paradoxe Einstein, Podolsky et Rosen. La Recherche 111 (11), p.510, 1980.
- 33 HEISENBERG, W. The Physical Principles of the Quantum Theory. Un. Chicago Press. 1930.
- 34 HEISENBERG, Werner. Physics and philosophy. 1958.
- 35 GRIFFITHS, David Jeffrey; FREITAS, Lara. Mecânica quântica. Pearson Prentice Hall, 2011.
- 36 MOKROSS, B. J. Revista Brasileira de Ensino de Física. vol. 19, no. 1, março, 1997.
- 37 BOHM, David; HILEY, Basil. On the intuitive understanding of non-locality as implied by quantum theory. In: Quantum Mechanics, A Half Century Later. Springer, Dordrecht, 1977. p. 207-225.

38 ASSIS, Andre Koch Torres. Argumentos a Favor da Ação a Distância. Revista Educar Mais, v. 3, n. 2, p. 202-218, 2019.