



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Espectroscopia de Impedância: Uma Visão Elétrica e Mecânica

Acadêmico: João Marcos Fávaro Lopes

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Maringá, 16 de janeiro de 2020



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Espectroscopia de Impedância: Uma Visão Elétrica e Mecânica

Trabalho apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Fernando Carlos Messias Freire, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física

Acadêmico: João Marcos Fávaro Lopes

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Maringá, 16 de janeiro de 2020

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	1
1 Espectroscopia de Impedância	2
1.1 Impedância Eletroquímica	2
1.2 Bioimpedância	3
2 Impedância Elétrica em Circuitos	4
2.1 Parte Experimental	5
2.2 Elemento de Fase Constante	6
2.3 Puramente Resistivo	7
2.4 Puramente Capacitivo	7
2.5 Puramente Indutivo	8
2.6 Notação Complexa	9
2.7 Circuitos em Série	10
2.8 Circuitos em Paralelo	14
3 Osciladores	18
3.1 Oscilador Harmônico Simples	18
3.2 Oscilador Harmônico Amortecido	19
3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado	20
3.3.1 Eletricamente Forçado	20
3.4 Oscilador Harmônico: Primeira Modificação	23
3.5 Oscilador Harmônico com Viscosidade Anômala	25
4 Análise do Oscilador Harmônico com Viscosidade Complexa	29
4.1 Modelo Simplificado	29
4.2 Adição da Constante Elástica de Volume	30
4.3 Adição da Viscosidade Complexa	31
4.4 Posição da Partícula	32
Conclusões	36

Agradecimentos

De início, gostaria de agradecer ao professor Dr. Fernando C. M. Freire por ter aceitado me orientar ao longo da confecção trabalho.

Em especial, agradeço à minha mãe, à minha irmã, ao meu pai e à minha namorada pelo apoio e também por terem me ouvido falar sobre o trabalho inúmeras vezes (mesmo não entendendo muito bem do que se trata).

Logicamente gostaria de deixar um agradecimento diferenciado à minha gata de estimação, Mimi, que me ouviu discursar sobre este trabalho inúmeras vezes nos últimos meses.

Também gostaria de agradecer aos amigos que fiz durante a graduação e que me ajudaram, de uma forma ou de outra, na elaboração do trabalho.

Agora, para encerrar, gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora que aceitaram fazer parte deste importante momento da minha formação.

Resumo

Equações de osciladores descrevem o comportamento de diferentes sistemas, sejam eles elétricos, mecânicos, de viscosidade, atômicos, etc. Nesse trabalho, analisaremos diferentes circuitos elétricos, desde o simples circuito puramente resistivo, até o característico circuito RLC. A análise é feita considerando o comportamento esperado de cada componente dos circuitos de acordo com diversos autores e alguns manuais de laboratório comparando o comportamento previsto pela teoria com o observado mediante espectroscopia de impedância dos circuitos mencionados.

Fazendo também uma revisão histórica sobre o comportamento de osciladores harmônicos, compararemos o comportamento do oscilador harmônico forçado e amortecido devido a uma viscosidade anômala no meio em que o oscilador se encontra com um circuito RLC ligado em série a um elemento de fase constante e em paralelo a um segundo capacitor, onde as duas capacitâncias agem como as viscosidades real e complexa apresentada pelo meio. Esse modelo eletromecânico foi proposto por Silva e Colaboradores, e permite comparar diretamente o circuito RLC com um oscilador cujo comportamento pode ser previsto conhecendo-se a massa da partícula oscilante, os coeficientes de viscosidade, as constantes elásticas de superfície e do meio.

Palavras chave: física, matéria condensada, osciladores, circuitos, espectroscopia de impedância.

Abstract

Oscillator equations describe the behavior of different systems, whether they are electrical, mechanical, viscous, atomic, etc. In this monography, we will analyze different electrical circuits, from the simple purely resistive circuit to the characteristic RLC circuit. The analysis is made considering the expected behavior of each component of the circuits according to several authors and some lab manuals comparing the behavior predicted by the theory with the one observed upon the previously mentioned circuit's impedance spectroscopy.

Also making a historical review of the behavior of harmonic oscillators, we will compare the behavior of the forced and damped harmonic oscillator due to anomalous viscosity in the fluid in which the oscillator is located with a RLC circuit connected in series to a constant phase element and parallel to a second capacitor, where the two capacitors act as the real and complex viscosities presented by the fluid. This electromechanical model was proposed by Silva and collaborators, and allows to directly compare the RLC circuit with an oscillator whose behavior can be predicted by knowing the oscillating particle mass, the viscosity coefficients, the elastic constants due to the surface and the medium.

Keywords: physics, condensed matter, oscillators, circuits, impedance spectroscopy.

Introdução

A técnica de espectroscopia de impedância é amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento - com ênfase na Física - cujos pesquisadores sentem a necessidade de caracterizar o comportamento elétrico de materiais e dispositivos eletrônicos. Em geral, a técnica consiste em posicionar uma amostra do material a ser estudado entre dois eletrodos e aplicar um estímulo elétrico, de modo a observar a resposta oferecida pelo material. Dos diversos tipos de estímulos que podem ser impostos sobre o material, o mais comum a ser utilizado é o de corrente alternada do tipo senoidal para que seja possível medir as partes real e imaginária da impedância complexa em função da frequência. O espectro é composto pelos gráficos da parte real e da parte imaginária da impedância do material estudado [1].

De modo geral, essa técnica pode ser utilizada para analisar o comportamento de materiais dielétricos como, por exemplo, semicondutores, vidros e polímeros amorfos [2]. Também é possível aplicá-la para caracterizar materiais mais complicados como dielétricos que apresentam condutividade iônica e eletrônica simultaneamente. Ao realizar esse trabalho a espectroscopia de impedância foi empregada para analisar o comportamento $Z \times \omega$ usando um *frequency response analyzer* (pode ser traduzido como "analisador de resposta de frequência") da marca Solartron modelo 1260A (Figura 2.1).

No primeiro capítulo deste trabalho, serão analisados os procedimentos de impedância e impedância eletroquímica com o intuito de explicitar suas características principais e formas de utilizações mais recorrentes.

No segundo capítulo, será discutida a importância da técnica de espectroscopia de impedância na análise comportamental de circuitos elétricos bem como suas aplicações na pesquisa e no ensino.

Ao terceiro capítulo, os modelos mais comuns de osciladores harmônicos serão revisados, bem como o modelo desenvolvido por Silva e Colaboradores [3, 4] - um oscilador harmônico forçado em um meio de viscosidade complexa cujo movimento da partícula oscilante é similar ao previsto por um circuito equivalente com elemento de fase constante - e terá suas propriedades analisadas.

Por fim, o quarto capítulo trará uma análise detalhada do modelo descrito na última seção do Capítulo 3, além de uma interpretação dos resultados obtidos.

Capítulo 1

Espectroscopia de Impedância

Ao buscar a caracterização de circuitos elétricos, interfaces eletrodo/solução e sistemas biológicos é muito comum fazer uso da técnica de espectroscopia de impedância. Neste capítulo, serão introduzidas os conceitos de espectroscopias de Impedância Eletroquímica e Bioimpedância.

1.1 Impedância Eletroquímica

A técnica de Espectroscopia de Impedância Eletroquímica (EIE) é uma técnica poderosa para a caracterização de sistemas eletroquímicos pois fornece uma visão completa e detalhada das características de interfaces eletrodo/solução. Tais informações são muito importantes na eletroquímica aplicada ou básica. A EIE permite estudar o comportamento geral de um sistema quando um número grande de processos inter-correlacionados ocorre com velocidades distintas. Em geral, a gama de aplicação da técnica abrange do transporte eletrônico em dispositivos semicondutores até processos cinéticos eletroquímicos. Alguns exemplos de aplicações são: baterias de lítio, células fotovoltaicas, sistemas de corrosão e processos eletrocatalíticos.

De modo geral, a técnica corresponde em aplicar uma onda senoidal de baixa amplitude ao sistema investigado e medir sua resposta - para altas amplitudes as respostas de cada um dos processos inter-correlacionados tender a se embaralhar e dificultar a componente de cada processo. Uma onda senoidal de baixa amplitude do tipo $\Delta E \cdot \sin(\omega t)$, com uma frequência particular ω , é imposta sobre o sistema de estudo de modo que a corrente seja $\Delta I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. A expansão em série de Taylor para a corrente é

$$\Delta I = \left(\frac{dI}{dE} \right)_{E_0, I_0} \Delta E + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 I}{dE^2} \right)_{E_0, I_0} \Delta E^2 + \dots \quad (1.1)$$

Para um ΔE de baixa magnitude, a resposta da corrente pode ser considerada linear numa primeira aproximação, de modo que os termos de ordem superior possam ser desconsiderados.

A impedância do sistema em análise poderá ser determinada pela Lei de Ohm

$$Z(\omega) = \frac{E(\omega)}{I(\omega)} \quad (1.2)$$

$Z(\omega)$ é uma grandeza complexa com magnitude e diferença de fase que dependem da frequência do sinal. Assim, ao variar a frequência do sinal aplicado ao sistema verifica-se

que a impedância depende também da frequência. Os valores de impedância podem ser representados em coordenadas cartesianas ou polares, sendo estas escritas como

$$Z(\omega) = |Z(\omega)|e^{i\varphi\omega} \quad (1.3)$$

onde $|Z(\omega)|$ é a magnitude da impedância, medida em Ohms $[\Omega]$, e φ é a diferença de fase. Em coordenadas cartesianas a impedância é dada por [5]

$$Z(\omega) = Re[Z(\omega)] + iIm[Z(\omega)] \quad (1.4)$$

1.2 Bioimpedância

A bioimpedância é interpretada como a oposição que um material biológico tem à passagem de corrente elétrica. Quando a técnica é empregada em materiais vivos, por exemplo o ser humano, é possível determinar a composição corporal, fazer diagnósticos de doenças e caracterizar grupos musculares. A realização da técnica consiste em aplicar um tensão/corrente no alvo de estudos e analisar como essa se comporta no meio. Sendo a tensão e a corrente aplicadas determinadas por V e I respectivamente, a impedância será determinada por

$$Z = \frac{V}{I} \quad (1.5)$$

A resistividade R de um material condutivo homogêneo de seções transversais uniformemente cilíndricas é proporcional ao seu comprimento L e inversamente proporcional à sua área seccional A . Apesar do corpo não ser uniformemente cilíndrico, e sua condutividade não ser constante, um relação empírica pode ser determinada à partir do quociente de impedância ($Z \equiv L^2/R$) e o volume hídrico - que contém eletrólitos capazes de conduzir a corrente elétrica através do corpo.

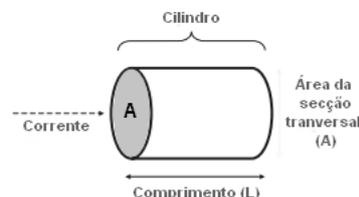


Figura 1.1: Esquemática de material biológico cilíndrico condutivo. Fonte: [6] Modificado

As membranas celulares que compõem um corpo biológico podem ser comparados a capacitores de modo que o fluido intracelular seria comparado à pequenos resistores. Desse modo, é verificável duas grandezas que resistem à passagem de corrente elétrica, uma resistência interna R e uma espécie de reatância capacitiva χ_C . Desse modo, o sistema biológico pode ser considerado análogo a um circuito elétrico do tipo RC (descrito na seção 2.7 e o valor real da bioimpedância pode ser aproximada para a equação 2.21, que será visto mais adiante).

Capítulo 2

Impedância Elétrica em Circuitos

Em um sistema elétrico alimentado por corrente contínua (CC) a dificuldade que a corrente sente para atravessar o meio é chamada de Resistência e denotada pela letra R no caso mais simples. Para corrente alternada (CA) essa dificuldade também existe, mas devido ao comportamento ondulatório da corrente faz-se necessário identificar uma nova forma de resistividade, chamada de impedância e denotada por Z de modo que suas partes real e imaginária sejam representadas por $Re[Z]$ e $Im[Z]$.

Os três elementos básicos de um sistema elétrico são:

Resistor: sua resistência R contribui principalmente para $Re[Z]$;

Capacitor: sua reatância capacitiva X_C contribui principalmente para $Im[Z]$;

Indutor: sua reatância indutiva X_L contribui principalmente para $Im[Z]$.

No sistema internacional de medidas (SI) a unidade de uma medida da impedância e das reatâncias é a mesma da resistência, ou seja, em Ohms[Ω].

Outra grandeza importante na análise dos circuitos de corrente alternada é a frequência das tensões e das correntes do circuito. A frequência linear é medida em Hertz (Hz) e corresponde ao número de ciclos por segundo denotada por f , ao passo que a frequência angular é medida em rad/s e é igual à taxa de variação da fase da corrente, denotada por ω . A relação entre as grandezas é

$$\omega = 2\pi f \quad (2.1)$$

Vamos analisar o comportamento da impedância elétrica em diversos circuitos de corrente alternada. Vale ressaltar que na prática é *impossível* obter circuitos puramente resistivos, indutivos ou capacitivos, as análises desses casos serão feitas apenas com fins didáticos em casos idealizados. As características individuais previstas para cada caso teórico serão mantidas nas combinações de elementos. A tabela 2.1 lista os valores de para resistência, capacitância e indutância utilizados ao longo do trabalho.

Resistência	47k Ω	141k Ω
Capacitância	47 μ F	47mF
Indutância	3.9mH	9.1mH

Tabela 2.1: Valores de R, C e L utilizados.

2.1 Parte Experimental



Figura 2.1: Solartron 1260A utilizado para fazer as medições ligado a um computador e ao suporte utilizado para prender os circuitos. O software utilizado para recolher os dados experimentais no computador foi o SweepRepeat.

As medidas experimentais realizadas para o desenvolvimento deste trabalho foram feitas no aparato Solartron 1260A da marca Ametek Scientific Instruments. De acordo com as especificações fornecidas pela marca, o 1260A é o analisador de resposta de frequência mais poderoso, preciso e flexível disponível atualmente. O aparato é frequentemente mencionado em publicações científicas em campos como [7]:

- Estudos de corrosão;
- Pesquisas em baterias e células de combustíveis;
- Células solares;
- LCD's;
- Bio-materiais;
- Cerâmicas;
- Desenvolvimento de componentes eletrônicos;
- Engenharia civil.

O alcance de frequência da máquina vai de $10\mu Hz$ até $32MHz$ com resolução de $0.15ppm$, o que garante o mapeamento preciso de todos os mecanismos químicos e moleculares em um único instrumento. A precisão do 1260A é de 0.1%, ou seja, as medidas podem ser feitas com segurança. Até mesmo a menor diferença no comportamento do objeto medido será observada e captada.

As medições realizadas durante a confecção deste trabalho para obter o espectro de impedância dos circuitos elétricos foram feitas com voltagem de $0.025V$ no intervalo de frequências de $10^{-3}Hz$ a 10^6Hz . Devido à sensibilidade do aparelho, as medidas em frequências muito altas ou muito baixas podem apresentar algumas divergências do esperado teoricamente visto que as condições de experimentação não são ideais.

Os circuitos que tiveram suas propriedades medidas foram montados soldando resistores, capacitores e indutores em diversas montagens. Abaixo é possível verificar alguns exemplos:

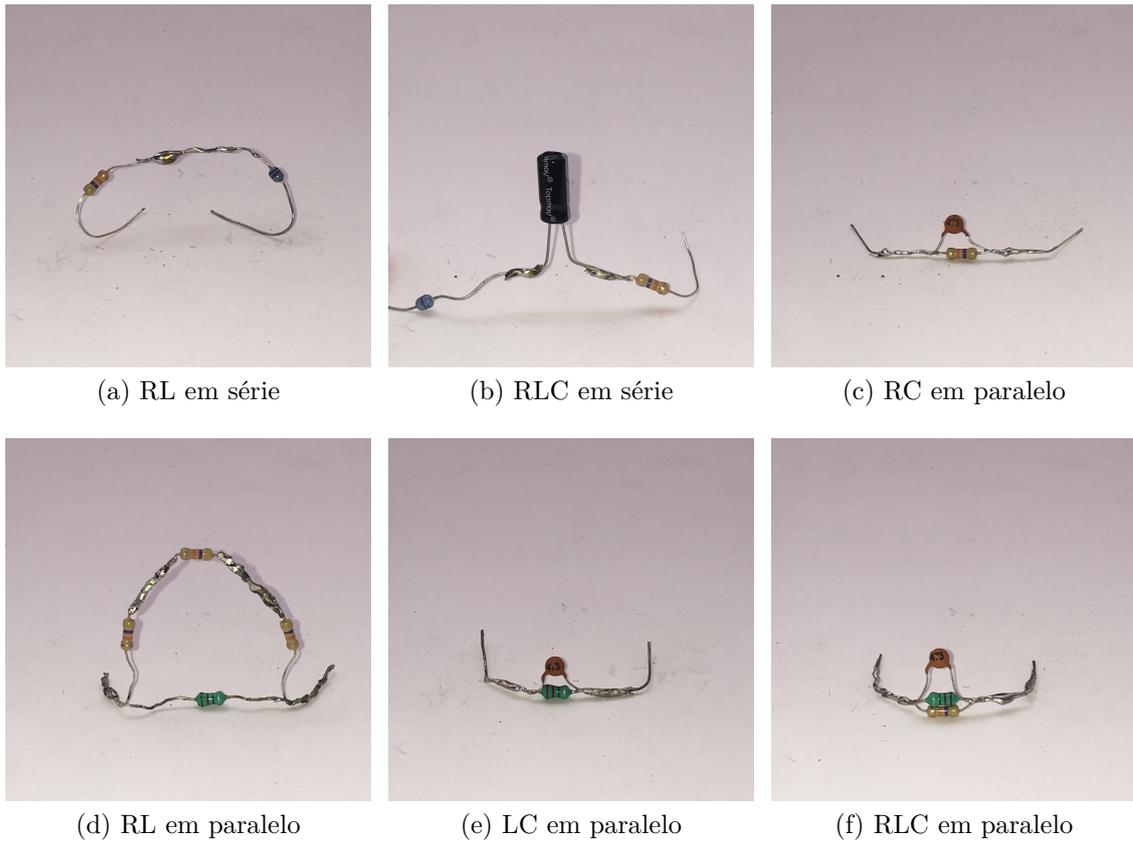


Figura 2.2: Alguns dos circuitos utilizados para realizar as medidas de espectroscopia.

Os dados experimentais e equações foram tratados utilizando os softwares Wolfram|Alpha [8] e MATLAB [9].

2.2 Elemento de Fase Constante

Elementos de fase constante (CPE, do inglês *Constant Phase Element*) são amplamente utilizados em circuitos elétricos equivalente para ajustar dados experimentais de impedância. Normalmente o comportamento do CPE é utilizado para explicar de maneira simplificada irregularidades na superfície de uma placa condutora, reações eletroquímicas na interface eletrodo-eletrolito, porosidade dos eletrodos, potenciais não uniformes, reações de adsorção lentas e distribuições de corrente e potencial.

Matematicamente, a impedância de um CPE é dada por

$$\frac{1}{Z} = Y = Q^0(i\omega)^n \quad (2.2)$$

onde Q^0 é o valor numérico da admitância Y à frequência $\omega = 1\text{rad/s}$. A unidade de Q^0 é s^n/Ω . Uma consequência simples dessa equação é que o ângulo de fase da impedância do CPE é independente da frequência e tem de um valor de $-(90n)$ graus. O nome "elemento de fase constante" é bem explicado por essa propriedade [10]. Quando $n = 1$, a equação do CPE passa a ser a equação da impedância de um capacitor. Tomando que $Q^0 = C$,

$$\frac{1}{Z} = Y = i\omega C \quad (2.3)$$

2.3 Puramente Resistivo

Analisando um sistema elétrica com uma fonte de tensão alternada da forma $V = V_0 \cos(\omega t + \delta)$, como na figura 2.3 podemos determinar a corrente que flui pelo resistor à partir da Lei de Ohm

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t + \delta) = I_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (2.4)$$



Figura 2.3: Esquema elétrico de circuito puramente resistivo.

A impedância do circuito é dada, em módulo, pela razão entre os valores de pico da tensão (V_0) e da corrente (I_0):

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = R \quad (2.5)$$

que no caso, nada mais é do que a resistência do circuito. Na Figura 2.4 é possível observar o espectro obtido no circuito puramente resistivo comparando os valores com a previsão teórica.

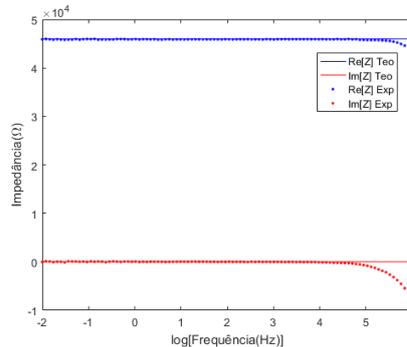


Figura 2.4: Espectro de impedância de um circuito puramente resistivo com resistor de $R = 47k\Omega$.

2.4 Puramente Capacitivo

Na figura 2.5 o capacitor está submetido a uma diferença de potencial da forma $V = V_0 \cos(\omega t + \delta)$, a carga acumulada dentro deste é $Q = Q_0 \cos(\omega t + \delta)$, onde $Q_0 = CV_0$. A corrente que flui através do circuito pode ser calculada por:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega CV_0 \sin(\omega t + \delta)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}) \quad (2.6)$$

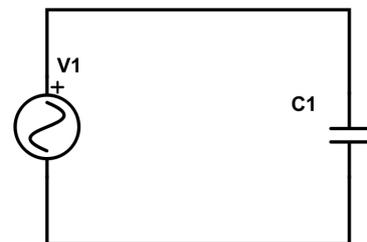


Figura 2.5: Esquema elétrico de circuito puramente capacitivo.

A equação 2.6 mostra que neste caso a tensão e a corrente variam com o tempo, mas estão defasados por um ângulo de 90° . Neste tipo de circuito a corrente é adiantada em relação à tensão e tem amplitude dada por $I = \omega CV_0$. No caso de corrente contínua, o capacitor descarregado permite que a corrente do sistema seja máxima e a diferença de potencial mínima. Com o passar do tempo verifica-se que a corrente diminui exponencialmente até se tornar muito próxima de zero e a tensão aumenta até atingir seu valor máximo. No caso da corrente alternada esse processo se repete até que a corrente seja desligada [11]. A impedância do circuito é dada, em módulo, pela razão entre os valores de pico da tensão (V_0) e da corrente (I_0), ou seja

$$Z = X_C = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \quad (2.7)$$

A reatância capacitiva (X_c) é inversamente proporcional à frequência da tensão alternada. Na Figura 2.6 é possível observar o espectro obtido no circuito puramente capacitivo comparando os valores com a previsão teórica.

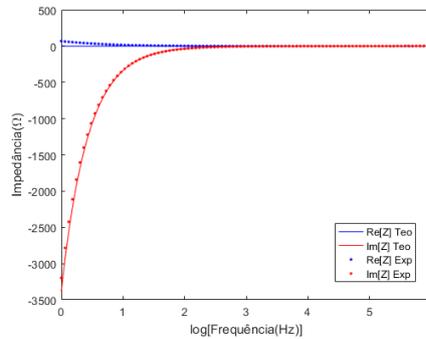


Figura 2.6: Espectro de impedância de um circuito puramente capacitivo com capacitor de $C = 47\mu F$.

2.5 Puramente Indutivo

Analisando um sistema elétrico com uma fonte de tensão alternada da forma $V = V_0 \cos(\omega t + \delta)$, como na figura 2.7 podemos determinar a diferença de potencial sobre o indutor como:

$$V = L \frac{dI}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (2.8)$$

A corrente I que flui pelo sistema pode ser calculada por

$$I = \frac{V_0}{L} \int \cos(\omega t + \delta) dt$$

$$I = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t + \delta) + \kappa$$

sendo κ uma constante de integração.

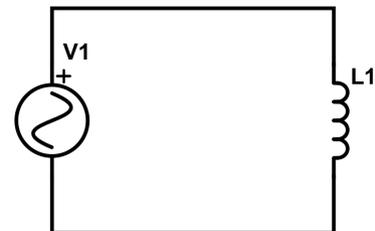


Figura 2.7: Esquema elétrico de circuito puramente indutivo.

Ainda é possível reescrever a expressão como

$$I = I_0 \cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2}) + \kappa \quad (2.9)$$

Assim como no caso puramente capacitivo (2.4), aqui a tensão e a corrente variarão periodicamente no tempo com uma defasagem de 90° . Entretanto, no caso do circuito puramente capacitivo a corrente é *atrasada* em relação à tensão. Tal resultado pode ser compreendido qualitativamente ao relacioná-lo com a lei de Faraday-Lenz: "a força eletromotriz no indutor é proporcional à taxa de variação da corrente no tempo" [12]. No caso de corrente contínua, verifica-se que ao ligar o indutor no circuito ele deve se comportar como um curto-circuito e é possível notar que a corrente tende a aumentar continuamente apresentando máxima taxa de variação, imediatamente surge uma tensão nos terminais do indutor - a força contra-eletromotriz - que impede a passagem de corrente. Com o passar do tempo a força eletromotriz da fonte fará com que a corrente seja estabelecida de forma gradual e tensão no indutor diminua até que a corrente atinja um valor de equilíbrio e tensão nos terminais do indutor seja nula. O pico de máxima tensão no indutor deve ocorrer antes da máxima corrente - caracterizando, assim a defasagem da corrente em relação à tensão. No caso de uma corrente alternada, o indutor é energizado e desenergizado continuamente em função da tensão [11]. Uma característica fundamental do indutor é a capacidade de armazenar energia em forma de campo magnético.

Da mesma forma que nos circuitos puramente resistivo (seção 2.3) e puramente capacitivo (seção 2.4), a impedância do circuito é, em módulo, a razão entre V_0 e I_0

$$Z = X_L = \frac{V_0}{I_0} = \omega L \quad (2.10)$$

A impedância de um circuito puramente indutivo é diretamente proporcional à frequência e tende a zero para correntes contínuas. Um indutor real é costumeiramente uma bobina, isto é, um fio metálico enrolado várias vezes ao longo de seu eixo central que possui, além da indutância, uma resistência interna (na maioria das vezes desprezível). Na Figura 2.8 é possível observar o espectro obtido no circuito puramente indutor comparando os valores com a previsão teórica.

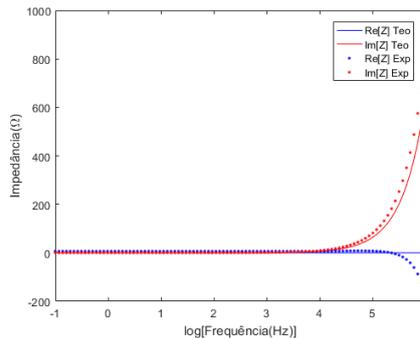


Figura 2.8: Espectro de impedância de um circuito puramente indutivo com indutor de $L = 9.1mH$.

2.6 Notação Complexa

Ao estudar circuitos mistos com corrente alternada, é vantajoso usar a notação complexa para definir a corrente e a tensão. É possível escrever estas em formas exponenciais.

A grande vantagem vem na resolução das equações características de cada sistema pois as equações diferenciais lineares serão facilmente transformadas em ordinárias. Para todos os casos, o valor medido experimentalmente corresponde à parte real dos valores complexos. A notação complexa da tensão e da corrente alternadas senoidais são

$$\begin{cases} V(t) = V_0 e^{i\omega t} \\ I(t) = I_0 e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2.11)$$

O conceito de impedância também pode ser generalizado em notação complexa como sendo a razão entre os valores complexos da tensão e da corrente. O resultado será um número complexo cujo módulo é igual à impedância real e o argumento, à diferença de fase entre a corrente e a tensão.

Puramente Resistivo No circuito descrito na seção 2.3 a corrente e a tensão estão em fase, de modo que a impedância continuará correspondendo ao valor real da resistência mesmo em notação complexa.

$$Z_R = R \quad (2.12)$$

Puramente Capacitivo Para o caso do capacitor (seção 2.4) a corrente está adianta à tensão em 90° , o que coloca a impedância no eixo imaginário negativo cujo módulo é dado pela equação 2.7. Em notação complexa:

$$Z_C = iX_C = -\frac{i}{\omega C} \quad (2.13)$$

Puramente Indutivo O caso puramente indutivo (descrito na seção [2.5]) apresenta corrente atrasada em 90° em relação à tensão, o que faz com que a impedância complexa esteja no eixo imaginário positivo cujo módulo é dado pela equação 2.10. Em notação complexa:

$$Z_L = iX_L = i\omega L \quad (2.14)$$

2.7 Circuitos em Série

Para fazer a análise teórica dos circuitos elétricos será considerado uma fonte de tensão senoidal da forma $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, cuja forma complexa é dada por $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ e uma corrente que atravessa o circuito também que tem forma $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$.

RC em Série

Usando a Lei de Kirchoff é possível verificar que a tensão em total é igual à tensão em cada elemento passivo do circuito ilustrado pela figura 2.9.

$$V(t) = V_R + V_C \quad (2.15)$$

As tensões no resistor e no capacitor são dadas por

$$V_R = RI(t) = RI_0 e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

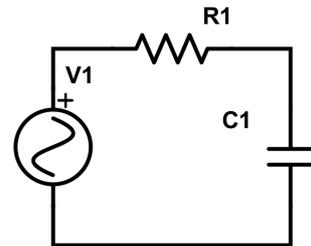


Figura 2.9: Esquema elétrico de circuito RC.

Substituindo a forma da tensão e as equações 2.15 e 2.16 na equação 2.14 e ainda dividindo-a por $e^{i\omega t}$ para simplificação, obtém-se

$$V_0 = RI_0 + \frac{I_0}{i\omega C} \quad (2.18)$$

o que permite determinar I_0 ,

$$I_0 = \frac{V_0}{R - i\frac{1}{\omega C}} \quad (2.19)$$

A impedância complexa é a razão entre os valores complexos de tensão e corrente, ou seja

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = R - i\frac{1}{\omega C} \quad (2.20)$$

cujo módulo é dado por

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.21)$$

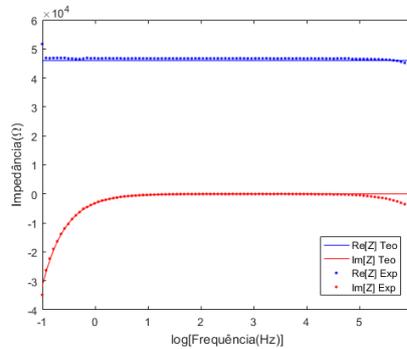


Figura 2.10: Espectro de impedância de um circuito composto por um resistor de $R = 47\text{k}\Omega$ e um capacitor de $C = 47\mu\text{F}$.

RL em Série

A tensão no resistor é igual à descrita pela equação 2.15 e a tensão no indutor é

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = i\omega LI_0 e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

A tensão total é dada pela Lei de Kirchoff, isto é $V(t) = V_R + V_L$. Ou seja

$$V_0 = RI_0 + i\omega LI_0 \quad (2.23)$$

de modo que

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L} \quad (2.24)$$

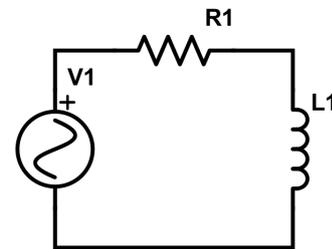


Figura 2.11: Esquema elétrico de circuito RL.

A impedância complexa será dada pela razão entre a tensão e a corrente complexas, isto é

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{RI_0 + i\omega LI_0}{I_0} = R + i\omega L \quad (2.25)$$

e seu módulo

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (2.26)$$

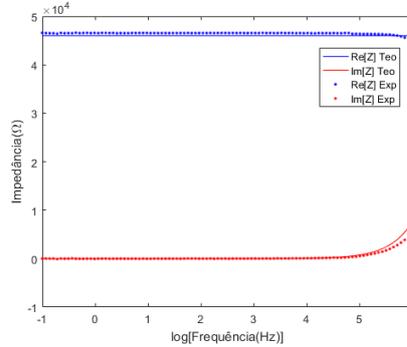


Figura 2.12: Espectro de impedância de um circuito composto por um resistor de $R = 47\text{k}\Omega$ e um indutor de $L = 3.9\text{mH}$ ligados em série.

LC em Série

As tensões no capacitor e no indutor serão as descritas pelas equações 2.17 e 2.22, respectivamente, e a tensão total será dada por

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} = \frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t} + i\omega L I_0 e^{i\omega t} \quad (2.27)$$

que pode ser simplificada para

$$V_0 = \frac{I_0}{i\omega C} + i\omega L I_0 \quad (2.28)$$

onde

$$I_0 = \frac{iV_0\omega C}{1 + i\omega^2 CL} \quad (2.29)$$

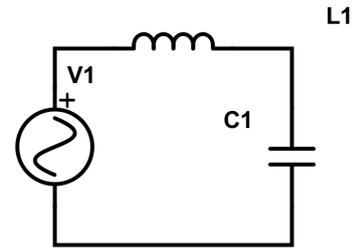


Figura 2.13: Esquema elétrico de circuito LC.

A impedância complexa será dada pela razão entre a tensão e a corrente complexas, isto é

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\frac{I_0}{i\omega C} + i\omega L I_0}{I_0}$$

que pode ser simplificado como

$$Z = i\omega L - \frac{i}{\omega C} \quad (2.30)$$

cujo módulo é

$$|Z| = \sqrt{\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.31)$$

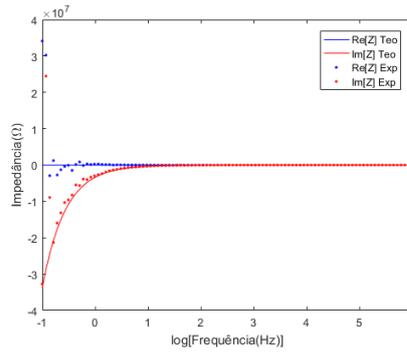


Figura 2.14: Espectro de impedância de um circuito composto por um indutor de $L = 3.9\text{mH}$ e um capacitor de $C = 47\mu\text{F}$ ligados em série.

RLC em Série

As tensões no resistor, no capacitor e no indutor serão descritas pelas equações 2.16, 2.17 e 2.22, respectivamente. De modo que a tensão total do circuito RLC será

$$V(t) = RI_0e^{i\omega t} + \frac{I_0}{i\omega C}e^{i\omega t} + i\omega LI_0e^{i\omega t} \quad (2.32)$$

que pode ser simplificada para

$$V_0 = RI_0 + \frac{I_0}{i\omega C} + i\omega LI_0 \quad (2.33)$$

de modo que

$$I_0 = \frac{iV_0\omega C}{1 + iR\omega C - \omega^2 CL} \quad (2.34)$$

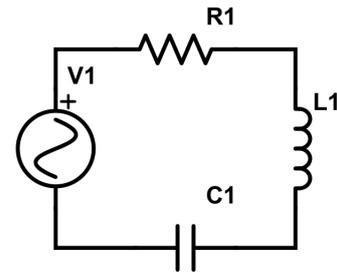


Figura 2.15: Esquema elétrico de circuito RLC.

A impedância complexa será dada pela razão entre a tensão e a corrente complexas, isto é

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{RI_0 + \frac{I_0}{i\omega C} + i\omega LI_0}{I_0}$$

que pode ser simplificada para a expressão

$$Z = R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L \quad (2.35)$$

cujos módulo é dado por

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (2.36)$$

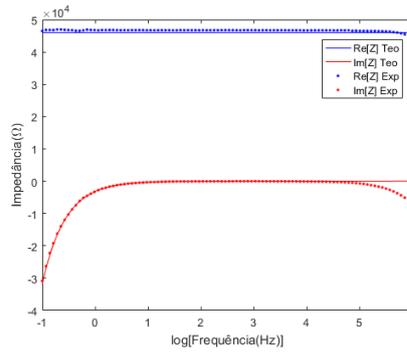


Figura 2.16: Espectro de impedância de um circuito composto por um resistor de $R = 47k\Omega$, um indutor de $L = 3.9 \text{ mH}$ um capacitor de $C = 47\mu\text{F}$.

A diferença para altas frequências entre o valor teórico e o experimental se dá principalmente pelo desgaste dos cabos de conexão usados no aparato Solartron 1260A.

2.8 Circuitos em Paralelo

Para circuitos em que os componentes estão associados em paralelo a corrente tem maior facilidade para percorrer os caminhos entre os polos da fonte. Dado essa facilidade, é mais fácil descrever as impedância elétrica dos circuitos como à partir da *admitância*, tal que $Y = 1/Z$. De modo semelhante, tem-se a condutância G (inverso da resistência) e a susceptância B (inverso da reatância, seja ela capacitiva ou indutiva).

RC em Paralelo

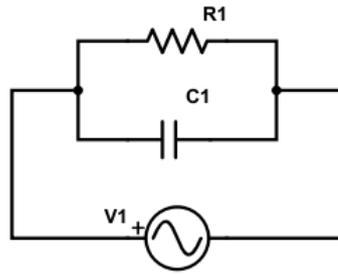
A admitância do circuito ilustrado pela figura 2.17 é dada por

$$\begin{aligned} Y_{RC} &= G + iB \\ &= \frac{1}{R} + i\omega C \end{aligned}$$

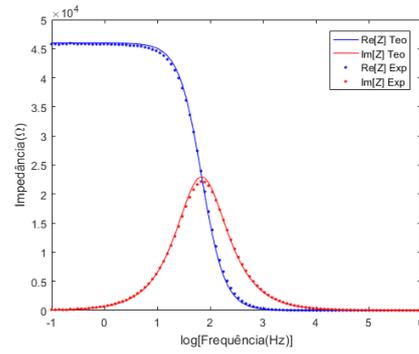
de modo que a impedância do circuito, já separando a parte real e imaginário, será

$$\begin{aligned} Z_{RC} &= \frac{1}{Y_{RC}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} \\ &= \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + i \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

onde o primeiro termo do segundo membro é relativo à resistência e segundo à reatância.



(a) Esquema elétrico



(b) Espectro

Figura 2.17: Circuito RC em paralelo utilizando um resistor de $R = 47k\Omega$ e um capacitor de $C = 47mF$.

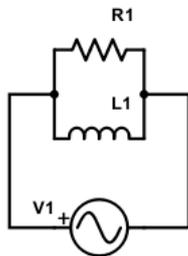
RL em Paralelo

A admitância do circuito ilustrado pela figura 2.18 é dada por

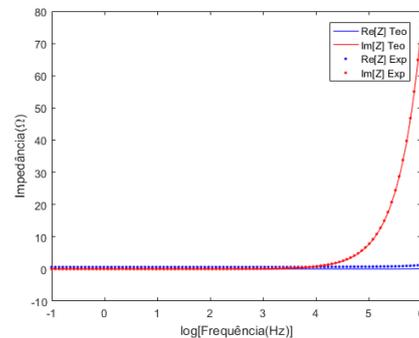
$$\begin{aligned}
 Y_{RL} &= G + iB_L \\
 &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \\
 &= \frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L}
 \end{aligned}$$

de modo que a impedância do circuito é

$$\begin{aligned}
 Z_{RL} &= \frac{1}{Y_{RL}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{i}{\omega L}} \\
 &= \frac{R(\omega L)^2}{(\omega L)^2 + R^2} + i \frac{R^2 \omega L}{(\omega L)^2 + R^2}
 \end{aligned}$$



(a) Esquema elétrico



(b) Espectro

Figura 2.18: Circuito RL em paralelo utilizando três resistores em série de $R = 47k\Omega$ ligados paralelamente a um indutor de $L = 9.1mH$.

Aqui foi feita uma associação entre os resistores para possibilitar uma melhor visualização dos efeitos dos elementos do circuito sobre a impedância.

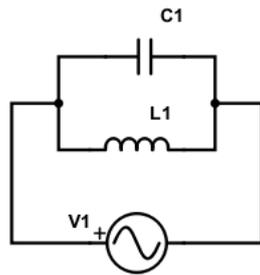
LC em Paralelo

A admitância do circuito ilustrado pela figura 2.19 é dada por

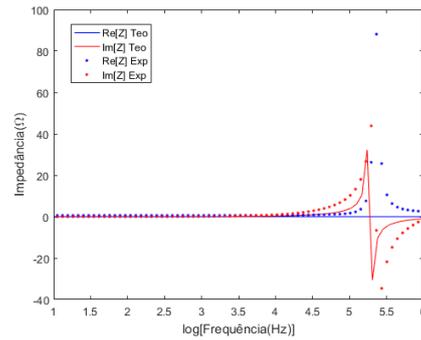
$$\begin{aligned} Y_{LC} &= iB_L + iB_C \\ &= \frac{1}{i\omega L} - \frac{\omega C}{i} \\ &= -\frac{i}{\omega L} + i\omega C \end{aligned}$$

de modo que a impedância do circuito é

$$\begin{aligned} Z_{LC} &= \frac{1}{Y_{LC}} \\ &= \frac{1}{i\omega C - \frac{i}{\omega L}} \\ &= \frac{i\omega}{L - C\omega^2} \end{aligned}$$



(a) Esquema elétrico



(b) Espectro

Figura 2.19: Circuito LC em paralelo utilizando um capacitor de $C = 47\text{mF}$ e um indutor de $L = 9.1\text{mH}$ ligados em paralelo.

O pico verificado na parte real do gráfico não é previsto teoricamente visto que não há contribuição real na impedância para os elementos que compõe o circuito. O comportamento deve-se à resistência interna dos fios e demais componentes usados para realizar a medição da espectroscopia.

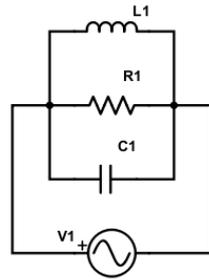
RLC em Paralelo

A admitância do circuito ilustrado pela figura 2.20 é dada por

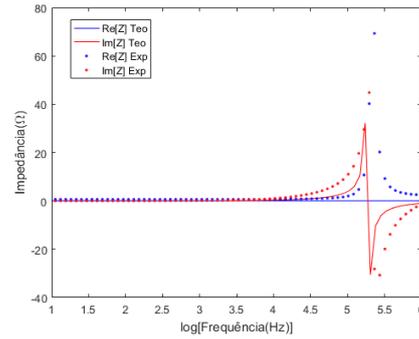
$$\begin{aligned} Y_{RLC} &= iB_L + iB_C + iB_R \\ &= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} - \frac{\omega C}{i} \\ &= \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L} \end{aligned}$$

de modo que a impedância do circuito é

$$\begin{aligned} Z_{RLC} &= \frac{1}{Y_{RLC}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L}} \\ &= \frac{1}{(\omega L)^2 + (\omega^2 RLC)^2} \left[RL2\omega^2 + i(\omega R^2 L - \omega^3 R^2 L^2 C) \right] \end{aligned}$$



(a) Esquema elétrico



(b) Espectro

Figura 2.20: Circuito RLC em paralelo utilizando um resistor de $R = 47\text{k}\Omega$, um capacitor de $C = 47\text{mF}$ e um indutor de $L = 9.1\text{mH}$.

O pico verificado na parte real do gráfico não é previsto teoricamente já que a contribuição real na impedância para os elementos que compõe o circuito vem somente do resistor e seu valor é muito próximo de zero, $G \approx 2.10^5 \Omega^{-1}$. O comportamento deve-se à resistência interna dos fios e demais componentes usados para realizar a medição da espectroscopia.

Pela definição newtoniana, a "quantidade de movimento" surge "da velocidade e quantidade de matéria conjuntamente" ou seja, do produto mv . E ainda a "mudança de movimento", ou mudança na quantidade de movimento, "é proporcional à força motora imprimida". Com essa análise, é possível retomar a equação da Segunda Lei de Newton como

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad (3.1)$$

Aplicando a Lei de Hooke na equação 3.1,

$$-k\vec{x} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

a notação vetorial pode ser desconsiderada já que todos os termos se encontram na mesma direção - a do movimento - e assim é possível escrever que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

de forma mais simplificada,

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0 \quad (3.2)$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Uma análise da equação 3.2 permite ver que a massa do oscilador apresentará uma frequência natural de oscilação ω .

3.2 Oscilador Harmônico Amortecido

O oscilador amortecido é muito semelhante ao simples, exceto por uma força resistiva do tipo $\vec{F}_B = c\frac{d\vec{x}}{dt}$ que "segura" a massa oscilante, ou seja, age na mesma direção mas com sentido contrário. No caso amortecido, a equação 3.1 passa a ser

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

que pode ser simplificada como

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2x = 0 \quad (3.3)$$

onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$ e $2\gamma = \frac{c}{m}$. A solução dessa equação diferencial é encontrada ao supor uma solução do tipo $x(t) = e^{\alpha t}$, de modo ela se transforme num polinômio de segundo grau do tipo

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$$

que pode ser solucionada utilizando a Fórmula de Bháskara,

$$\alpha = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}$$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Assim, o oscilador assumirá três tipos de amortecimentos distintos dependendo da relação entre γ e ω . Quando $\gamma^2 > \omega^2$ temos o caso superamortecido, para $\gamma^2 = \omega^2$ temos o caso criticamente amortecido e se $\gamma^2 < \omega^2$ verificamos o caso subamortecido. A relação entre

a amplitude e a frequência natural de oscilação para cada caso do oscilador amortecido está ilustrada na figura 3.2.

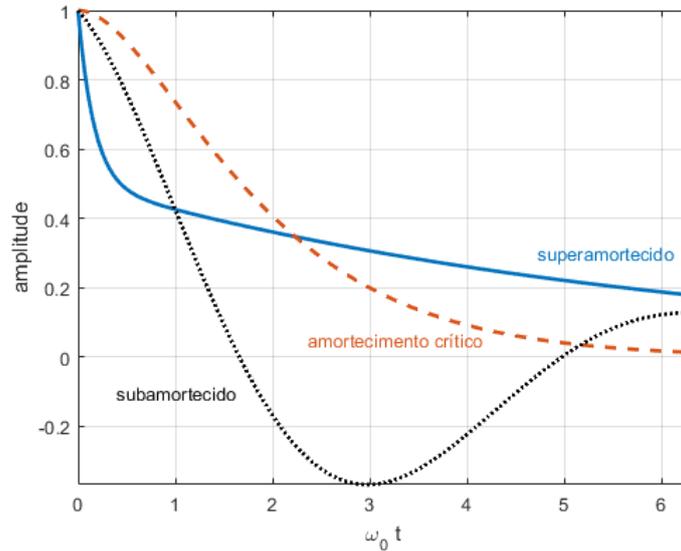


Figura 3.2: Comportamento dos osciladores harmônicos amortecidos.

3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado

Seguindo a mesma linha evolutiva do caso descrito na seção 3.1 para a 3.2, agora haverá uma força do tipo $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \alpha t$ que age no mesmo sentido do movimento. A equação 3.1 tomará a forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + c \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \alpha t$$

que pode ser simplificada para

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t \quad (3.4)$$

onde onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $2\gamma = \frac{c}{m}$ e $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

As soluções das equações 3.2, 3.3 e 3.4 serão determinadas ao solucionar as equações diferenciais descritas. Com tais soluções será possível prever as posições e velocidades instantâneas da massa oscilante.

3.3.1 Eletricamente Forçado

Um exemplo de oscilador harmônico amortecido e forçado por uma força de natureza elétrica é de um íon de um fluido dentro de um espectrômetro. O campo elétrico do equipamento interage com o íon gerando uma força elétrica. Ao assumir que a força surge de um campo elétrico do tipo $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, ela terá forma dada por $\vec{F}(t) = Q\vec{E}t$ [14]. As notações vetoriais podem ser ignoradas daqui em diante devido ao fato do oscilador ter seu movimento dado em apenas uma a direção - que será a mesma do campo e, conseqüentemente, da força. A nova equação para o movimento do oscilador será

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{Q}{m} E(t) \quad (3.5)$$

algumas notações estão diferentes da equação 3.4 por motivos didáticos, nenhum significado será perdido.

A frequência de ressonância do íon é dada por $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sendo k a constante elástica da superfície. O termo $\gamma = \frac{c}{m}$ é referente às forças dissipativas que amortecem o movimento da partícula. Considerando uma função horária do tipo $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ como solução para o movimento do íon, obtém-se:

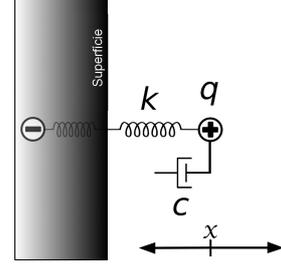


Figura 3.3: Representação do modelo de íons oscilando nas proximidades de um eletrodo. Fonte: [4], modificado.

$$x_0 \frac{d^2 e^{i\omega t}}{dt^2} + x_0 \omega \frac{de^{i\omega t}}{dt} + x_0 \frac{k}{m} e^{i\omega t} = \frac{Q}{m} E_0 e^{i\omega t}$$

$$\left(-\omega^2 + \gamma i\omega + \frac{k}{m} \right) x_0 = \frac{Q}{m} E_0 \quad (3.6)$$

a amplitude de deslocamento do íon é dada pelo valor de x_0 , que vale:

$$x_0 = \frac{QE_0}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (3.7)$$

Considerando que os eletrodos do porta-amostra têm área S e a distância entre estes seja d , o volume disponível para a amostra será de $V = dS$, contendo N íons. A densidade de corrente elétrica será

$$J(t) = \frac{NQ}{V} \frac{dx(t)}{dt} \quad (3.8)$$

Considerando que a densidade de corrente também apresenta o comportamento oscilatório das demais grandezas analisadas de modo que $J(t) = J_0 e^{i\omega t}$, a equação 3.8 pode ser reescrita de modo a determinar J_0 à partir de $x(t)$

$$J_0 = \frac{NQ}{V} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{t=0} \quad (3.9)$$

substituindo $x(t)$ na equação 3.9 como dado pela sua definição,

$$J_0 = \frac{NQ}{V} \left[\frac{dx_0 e^{i\omega t}}{dt} \right]_{t=0}$$

$$J_0 = \frac{NQ}{V} x_0 \left[\frac{de^{i\omega t}}{dt} \right]_{t=0}$$

$$J_0 = \frac{NQ}{V} x_0 [i\omega e^{i\omega t}]_{t=0}$$

$$J_0 = \frac{NQ}{V} x_0 i\omega$$

substituindo o valor de x_0 da equação 3.7

$$J_0 = \frac{NQ^2}{V} \frac{i\omega}{-\omega^2 m + i\omega c + k} E_0$$

Definindo a grandeza condutividade como $\sigma_m = \frac{NQ^2}{V}$ a equação acima pode ser simplificada para

$$J_0 = \sigma_m \frac{1}{i\omega m + c + \frac{k}{i\omega}} E_0 \quad (3.10)$$

A condutividade pode ser determinada à partir da Lei de Ohm, e pode ser escrita na forma complexa como

$$\sigma^*(\omega) = \frac{J_0}{E_0}$$

ou ainda

$$\sigma^*(\omega) = \frac{d}{S} Y \quad (3.11)$$

sendo Y denominado de admitância, que é o inverso da impedância. Utilizando as equações 3.10 e 3.11 é possível escrever a condutividade complexa na forma

$$\sigma^*(\omega) = \sigma_m \frac{1}{i\omega m + c + \frac{k}{i\omega}} \quad (3.12)$$

As partes real e imaginária da condutividade podem ser separadas de modo a obter

$$\sigma' = \frac{\sigma_m}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (\gamma\omega)^2} \quad (3.13)$$

e

$$\sigma'' = \frac{\sigma_m}{m} \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (\gamma\omega)^2} \quad (3.14)$$

A admitância complexa e o espectro de condutividade estão relacionados pelo fator S/d , como evidenciado na equação 3.11. A admitância, assim como a impedância, é uma grandeza complexa expressa pela forma $Y = G + iB$ [15]. Assim sendo, a condutância será definida como $G = Re(Y)$ e está relacionada com $\sigma' = Re(\sigma^*)$. Da mesma forma, a susceptância é $B = Im(Y)$ e está relacionada com $\sigma'' = Im(\sigma^*)$, de modo que

$$G(\omega) = \frac{S}{d} \frac{\sigma_m}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \quad (3.15)$$

e

$$B(\omega) = \frac{\sigma_m}{m} \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \quad (3.16)$$

Sabendo que a admitância é o inverso da impedância, é fácil ver que a expressão da impedância para o modelo do oscilador será dada por:

$$\frac{d}{S} \frac{1}{Z(\omega)} = \sigma_m \frac{1}{i\omega m + c + \frac{k}{i\omega}}$$

$$Z(\omega) = \frac{d}{S} \frac{V}{NQ^2} \left(i\omega m + c + \frac{k}{i\omega} \right) \quad (3.17)$$

3.4 Oscilador Harmônico: Primeira Modificação

Na seção 3.2 foi descrito o movimento de uma partícula que oscila em um meio resistivo capaz de amortecer o movimento, entretanto, é possível estender esse modelo idealizado para o de íon oscilante. Em 2016, F. Freire e T. Andrade [3] propuseram uma modificação para explicar as interações entre um fluido eletrolítico. Ao acrescentar um novo elemento oscilante em paralelo com o modelo do oscilador amortecido comum, os pesquisadores se viram capazes de representar a oscilação do íon de modo análogo ao descrito na equação 3.3.

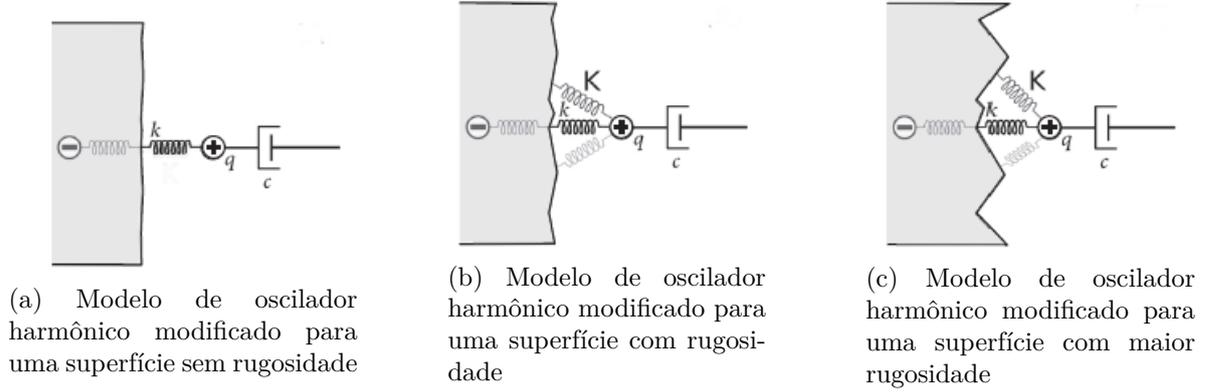


Figura 3.4: Ilustração da interação entre um íons oscilante com a superfície do eletrodo. Fonte: [3], modificado.

De acordo com o que foi ilustrado na figura 3.4 em comparação à figura 3.3, a constante elástica passa a ter duas componentes, tornando-se $k + K$ e a ω_0^2 tomará a forma $\omega_0^2 + \omega_k^2$, em que $\omega_k = \sqrt{K/m}$. Assumindo que K tem forma definida por $k/(i\omega)^{\alpha-1}$, o novo termo da frequência será $\omega_k^2 = \frac{\omega_s}{(i\omega)^{\alpha-1}}$ e $\omega_s = \frac{K}{m}$. Desse modo, a equação diferencial que rege o movimento oscilatório será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m} + \frac{K}{m} \right) x = \frac{Q}{m} E(t) \quad (3.18)$$

A equação 3.18 é análoga à equação 3.5, tendo como única diferença o segundo termo resistivo relacionado à coordenada x . De modo semelhante ao feito na seção 3.3.1, a condutividade pode ser rescrita na forma

$$\sigma^* = \frac{\sigma_m}{i\omega m + c + \frac{k}{i\omega} + \frac{K}{(i\omega)^\alpha}} \quad (3.19)$$

E a admitância complexa em termos da condutividade,

$$Y_{osc}(\omega) = \frac{S}{d} \sigma_m \frac{1}{i\omega m + c + \frac{k}{i\omega} + \frac{K}{(i\omega)^\alpha}} \quad (3.20)$$

Fazendo aparecer uma fator multiplicativo tal que

$$\beta = \frac{S}{d\sigma_m} = \frac{SV}{dNQ^2}$$

$$\beta = \frac{1}{N} \frac{1}{\sigma_L^2} \quad (3.21)$$

sendo σ_L a densidade superficial de carga. A equação 3.20 pode ser reescrita como:

$$Y_{osc}(\omega) = \frac{1}{\beta O(\omega)} \quad (3.22)$$

de modo que a impedância é dada por

$$Y_{osc} = \beta O(\omega) \quad (3.23)$$

Aqui, Freire e Andrade [3] introduziram uma nova nomenclatura mecânica para representar o análogo mecânico da impedância, a "amortância", que é convertido em impedância elétrica pelo fator multiplicativo β . A amortância do sistema é descrita por

$$O(\omega) = i\omega m + c + \frac{k}{i\omega} + \frac{K}{(i\omega)^\alpha} \quad (3.24)$$

Comparando as equações que descrevem este modelo (3.23) com a equação que descreve o modelo circuital (2.35), verifica-se a possibilidade de determinar uma correspondência entre os modelos através do fator multiplicativo β . Ou seja, é possível obter os parâmetros do modelo circuital à partir dos parâmetros do modelo aqui descrito e vice-versa. Os valores elétricos e mecânicos podem ser relacionados entre si como descrito pela tabela 3.1.

Tabela 3.1: Correspondência entre os valores elétricos e mecânicos para o modelo de oscilador harmônico modificado e o modelo circuital.

Parâmetro Mecânico	Correspondente Circuital
Massa do íon	$L_s = \beta m$
Coefficiente de viscosidade	$R_s = \beta c$
Constante elástica de volume	$C_s = (\beta k)^{-1}$
Constante elástica de superfície	$A = (\beta K)^{-1}$
Expoente	$\alpha = \alpha$

Para que o modelo seja válido também para regimes de altas frequências, faz-se necessária a adição de um termo correspondente à corrente de deslocamento, de modo que a densidade de corrente deve ser reescrita como

$$J = \frac{NQ}{V} \frac{dx}{dt} + \epsilon \frac{dE}{dt} \quad (3.25)$$

onde ϵ é a permissividade absoluta, isto é, o produto entre as permissividades do meio e do vácuo, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. Considerando-se a corrente de deslocamento, a expressão da admitância (equação 3.20) passará a ter um novo termo dependente da frequência $i\omega\epsilon$, isto é

$$Y(\omega) = \frac{S}{d} \sigma_m \frac{1}{i\omega m + c + \frac{k}{i\omega} + \frac{K}{(i\omega)^\alpha}} + i\omega\epsilon \quad (3.26)$$

que pode ser simplificada em termos da impedância como

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z_{osc}} + i\omega\epsilon \quad (3.27)$$

O enfoque do trabalho de Freire e Andrade é o de sistemas em regimes de baixa frequência, assim análise da corrente de deslocamento não se faz sempre necessária devido à ínfima contribuição, na maioria dos casos. Entretanto, é necessário explicitá-la para altas frequências com o objetivo de estimar mais precisamente a resposta elétrica da amostra [3].

3.5 Oscilador Harmônico com Viscosidade Anômala

O modelo descrito em 3.4 analisa o movimento de um íon em um fluido newtoniano, isto é, de viscosidade constante. Em 2017, Silva e colaboradores [4] desenvolveram um modelo de oscilador harmônico em um fluido não Newtoniano, isto é, possui uma viscosidade complexa que varia de acordo com a frequência. A variação de densidade iônica como função da corrente de deslocamento pode ser determinada à partir da equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial z} \quad (3.28)$$

onde $\rho_i = N_i - N_0$ representa a variação do número de íons da amostra, sendo N_0 a densidade iônica no equilíbrio antes de aplicar o potencial externo, e N_i é a densidade iônica dos íons positivos e negativos - definidos, respectivamente, pelos subíndices $i = p, n$. A densidade de corrente total terá a contribuição de dois termos relacionados aos fenômenos de difusão e potencial externo aplicado, isto é,

$$J_i(z, t) = -D_i \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \pm N_0 \mu_i \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.29)$$

sendo D_i é o coeficiente de difusão, μ_i a mobilidade iônica dos íons i e V está relacionado ao potencial aplicado nas células. Considerando que existem duas difusões envolvidas no modelo, uma normal e uma anômala como previsto por Evangelista e colaboradores em 2011 [16], sendo a anômala determinada pelo coeficiente fractal γ , a equação de continuidade (Equação 3.28) deve ser corrigida para tomar a forma

$$A \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + B \frac{\partial^\gamma \rho_i}{\partial t^\gamma} = -\frac{\partial J_i}{\partial z} \quad (3.30)$$

Em um regime linear, com corrente alternada de baixa frequência, é possível escrever $\rho = \eta_i e^{i\omega t}$ e $V(z, t) = \phi_i e^{i\omega t}$. Pode-se utilizar a relação de Einstein-Smoluchoski

$$\frac{\eta_i}{D_i} = \frac{q}{k_B T} \quad (3.31)$$

para reescrever a mobilidade iônica descrita pela equação 3.29 e substituir na equação 3.30 de modo que

$$A \frac{\partial \eta_i e^{i\omega t}}{\partial t} + B \frac{\partial^\gamma \eta_i e^{i\omega t}}{\partial t^\gamma} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-D_i \frac{\partial \eta_i e^{i\omega t}}{\partial z} \pm N_0 \mu_i \frac{\partial \phi e^{i\omega t}}{\partial z} \right)$$

para simplificar, é possível tomar apenas os íons positivos. Além disso, simplificando a equação acima e derivando-a em relação ao tempo é possível obter

$$[A(i\omega) + B(i\omega)^\gamma] \eta_p(z) = D \left[\eta_p''(z) + \frac{N_0 q}{k_B T} \phi''(z) \right] \quad (3.32)$$

Da equação 3.32 é possível determinar o coeficiente de difusão efetivo através da equação

$$D_a = \frac{D_\infty}{A + B(i\omega)^{\gamma-1}} \quad (3.33)$$

onde o coeficiente D_∞ define o processo difusivo quando ω tende a $+\infty$ e as constantes A e B são reais.

Ao substituir o coeficiente de difusão obtido na equação 3.33 na relação de Einstein-Smoluchoski, e reescrever a mobilidade iônica como $\mu = q/c$ sendo $c = 6\pi r\eta$ o coeficiente de amortecimento de Stokes e r o raio aproximado no íon, é possível escrever a viscosidade complexa como:

$$\eta^*(\omega) = \eta_1(i\omega)^{\gamma-1} + \eta_2 \quad (3.34)$$

onde as constantes η_1 e η_2 correspondem a

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{k_B T}{6\pi r D_\infty} B \\ \eta_2 = \frac{k_B T}{6\pi r D_\infty} A \end{cases} \quad (3.35)$$

É possível reescrever o termo de amortecimento de Stokes à partir do valor determinado para a viscosidade na equação 3.34 tal que

$$c^* = c_1(i\omega)^{\gamma-1} + c_2 \quad (3.36)$$

onde

$$\begin{cases} c_1 = 6\pi r \eta_1 \\ c_2 = 6\pi r \eta_2 \end{cases} \quad (3.37)$$

são os coeficientes de amortecimento anômalo e não anômalo, respectivamente.

Na seção 3.3.1 a equação para a condutividade complexa do oscilador harmônico amortecido e forçado foi encontrada à partir do termo de amortecimento viscoso do íon oscilante no fluido. De maneira análoga, para a viscosidade complexa a equação 3.12 sofrerá uma pequena alteração de modo que a equação

$$\sigma^*(\omega) = \sigma_m \frac{1}{i\omega m + c^*(\omega) + \frac{k}{i\omega}} \quad (3.38)$$

descreve a condutividade complexa. Da definição da impedância complexa $Z(\omega) = \frac{d}{S} \frac{1}{\sigma^*}$ onde $\sigma_m = \frac{NQ^2}{V}$, tem-se

$$Z(\omega) = \frac{d}{S} \frac{V}{NQ^2} \left[i\omega m + c_1(i\omega)^{\gamma-1} + c_2 + \frac{k}{i\omega} \right] \quad (3.39)$$

de forma mais resumida, é possível escrever

$$Z(\omega) = \varphi_N O \quad (3.40)$$

em que $\varphi_N = \frac{d^2}{NQ^2}$ e a amortância O é definida como

$$O = i\omega m + c_1(i\omega)^{\gamma-1} + c_2 + \frac{k}{i\omega} \quad (3.41)$$

A amortância descrita na equação 3.41 é análoga à medida da impedância do circuito RLC descrito na seção 2.7 exceto pelo termo $c_1(i\omega)^{\gamma-1}$ que pode ser interpretada como a impedância do circuito RLC ligado em série com um elemento de fase constante (CPE). Tal elemento provém das rugosidades na superfície do eletrodo como descrito pela figura 3.4. Assim sendo, o circuito ilustrado na figura 3.5a e o oscilador ilustrado na figura 3.5b são análogos.

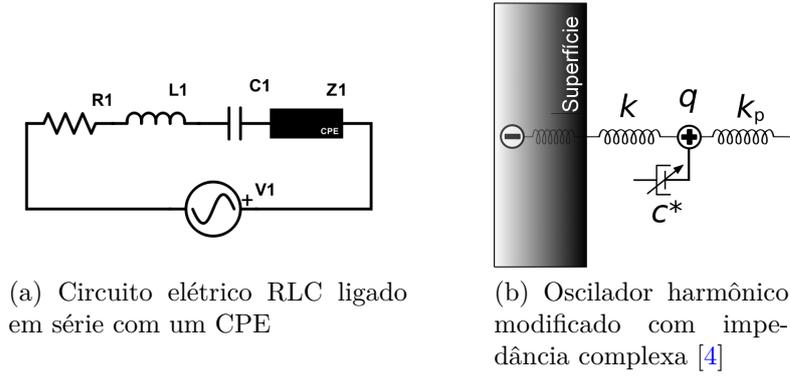


Figura 3.5: Circuito RLC e oscilador cmk análogos.

A impedância elétrica para o circuito da figura 3.5a é definida por

$$Z(\omega) = i\omega L + \frac{1}{A(i\omega)^\alpha} + R + \frac{1}{i\omega C} \quad (3.42)$$

Em [3], os autores verificaram que os dados experimentais de espectroscopia de impedância para esse modelo apresentam resultado satisfatório para amostras com grandes quantidades de íons. Entretanto, para amostras pouco condutivas, o ajuste de dados experimentais não está de acordo com o que se verifica para altas frequências. Desse modo, fez-se necessária a adição de um elemento oscilante com constante elástica k_p (como evidenciado na figura 3.5b) para levar em conta os fenômenos observados em altas frequências. O novo elemento tem o propósito de representar a interação entre o íon oscilante com o demais íons que compõe a amostra analisada. Com esse novo elemento, a equação da impedância é reescrita como

$$P_p(\omega) = \frac{1}{O} + \frac{i\omega}{k_p}$$

$$Z(\omega) = \varphi_N \frac{1}{P_p(\omega)} \quad (3.43)$$

Assim como a impedância $Z(\omega)$ e a amortância $O(\omega)$ são análogas, o mesmo vale para a admitância $Y(\omega)$ e o termo $P_p(\omega)$. A expressão da impedância do modelo eletromecânico com a contribuição das altas frequência pode ser relacionada com o modelo circuital descrito na equação 3.33, obtém-se

$$Z_0(\omega) = i\omega L + \frac{1}{A(i\omega)^\alpha} + R + \frac{1}{i\omega C}$$

$$Y_p(\omega) = \frac{1}{Z_0(\omega)} + i\omega C_p$$

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y_p(\omega)} \quad (3.44)$$

O circuito cuja impedância é dada pela equação 3.34 está representado pela figura 3.6. O capacitor em paralelo com o circuito RLCZ fornece ajustes que acordam com o que se verifica em regimes de altas frequência para o espectro de impedância do oscilador independentemente da quantidade de íons contidos na amostra.

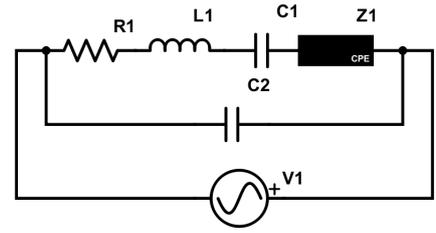


Figura 3.6: Modelo circuitual correspondente ao modelo eletromecânico.

Comparando as equação de impedância e amortância aqui propostas, é possível relacionar as grandezas análogas entre os valores elétricos e os mecânicos. Tal relação está feita através da tabela 3.2.

Tabela 3.2: Correspondência entre os valores elétricos e mecânicos.

Parâmetros	Correspondente Circuitual
Massa do Íon	$L = \varphi_N m$
Coefficiente de Viscosidade	$R = \varphi_N c_2$
Coefficiente de Viscosidade Complexa	$A = (\varphi_N c_1)^{-1}$
Contante Elástica de Superfície	$C = (\varphi_N k)^{-1}$
Contante Elástica do Meio	$C_p = (\varphi_N k_p)^{-1}$
Expoente Fractal	$\alpha = 1 - \gamma$

Capítulo 4

Análise do Oscilador Harmônico com Viscosidade Complexa

O modelo descrito na seção 3.5 contém dois elementos essenciais para seu funcionamento, a viscosidade complexa $c_1(i\omega)^{\gamma-1}$ e a interação entre a partícula oscilante e as demais partículas contidas no volume da amostra $k_p/i\omega$. Entretanto, esses termos só podem ser obtidos após a solução da equação diferencial que governa o movimento oscilatório.

O modelo oscilatório é descrito pela equação 4.1.

$$Z_a(\omega) = \varphi_N \frac{1}{P_a(\omega)} \quad (4.1)$$

onde

$$P_a(\omega) = \frac{1}{O_a(\omega)} + \frac{i\omega}{k_p},$$
$$O_a = i\omega m_H + \frac{k}{i\omega} + c^*(\omega)$$

sendo

$$\begin{cases} c^*(\omega) = c_1(i\omega)^{\gamma-1} + c_2 \\ \varphi(\omega) = \frac{1}{N} \left(\frac{d}{Q} \right)^2 \end{cases}$$

como visto anteriormente. A impedância Z_a representa a forma mais completa do oscilador apresentador por Silva e colaboradores [4]. Para fins didáticas, será feita a análise das componentes do modelo aumento gradativamente o nível de dificuldade para que se possa observar o efeito de cada componente sobre o modelo e o comportamento da partícula oscilatória. A impedância Z_b não levará em conta a viscosidade complexa ao passo que Z_c ignorará, também, a contribuição da interação com as demais partículas contidas na amostra.

4.1 Modelo Simplificado

A equação da impedância, desconsiderando tanto o comportamento anômalo da viscosidade quanto a interação das demais partículas do fluido sobre a partícula oscilante, é dada por

$$Z_c(\omega) = \varphi_N O_c(\omega) \quad (4.2)$$

onde

$$O_c(\omega) = i\omega m_H + \frac{k}{i\omega} + c$$

Em [17], o autor mediu o espectro de impedância de três soluções de cloreto de potássio nas concentrações de 1mM, 100 μ M e 10 μ M a temperatura de aproximadamente 25°C. Nessa temperatura a mobilidade dos íons é conhecida, o que permite determinar o coeficiente de amortecimento não anômalo dentro do fluido.

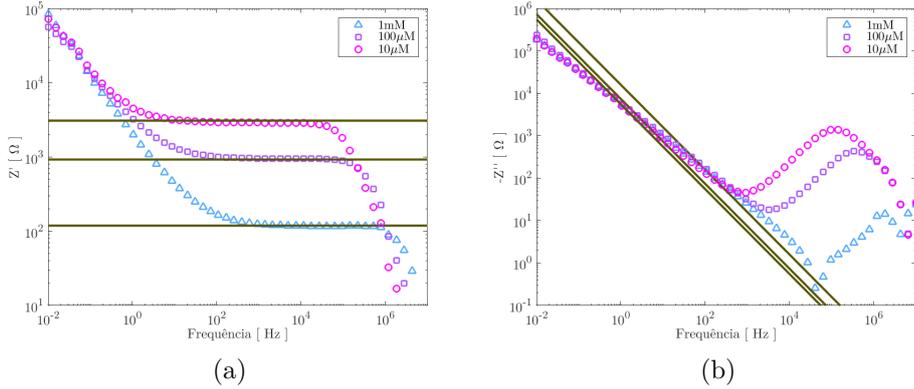


Figura 4.1: Parte real (a) e imaginária (b) do espectro de impedância de três concentrações de KCl e o ajuste teórico do modelo Z_c .

Nos gráficos da Figura 4.1, os símbolos representam os valores obtidos experimentalmente e as curvas, os valores teóricos obtidos através da equação 4.2. A simplicidade do modelo permite analisar somente as frequências intermediárias com exatidão, visto que a relação entre os valores teóricos e experimentais diverge para frequências muito baixas ou muito altas.

4.2 Adição da Constante Elástica de Volume

Considerando apenas a interação entre as partículas e ignorando o comportamento anômalo do fluido, a equação da impedância será

$$Z_b(\omega) = \varphi_N \frac{1}{P_b(\omega)} \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{cases} P_b(\omega) = \frac{1}{O_b(\omega)} + \frac{i\omega}{k_p} \\ O_b(\omega) = i\omega m_H + \frac{k}{i\omega} + c \end{cases}$$

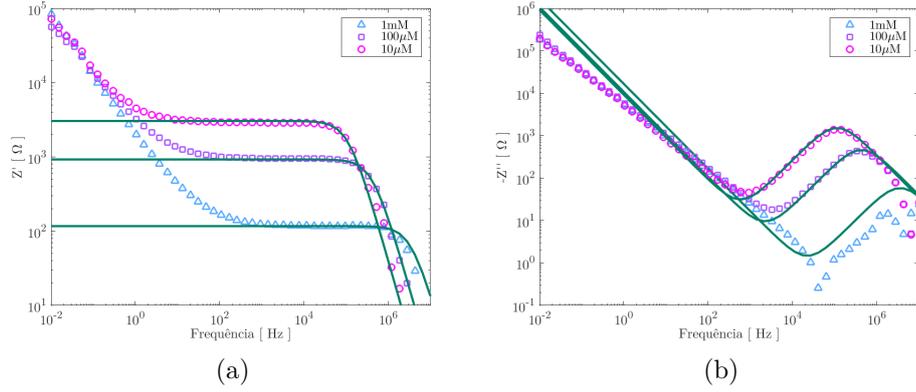


Figura 4.2: Parte real (a) e imaginária (b) do espectro de impedância de três concentrações de KCl e o ajuste teórico do modelo Z_b .

Como fica evidente pelos gráficos da Figura 4.2, a adição da constante elástica de volume k_p ajusta o modelo para regimes de altas frequências. De modo geral, para a parte imaginária 4.2b é possível verificar um comportamento razoavelmente parecido entre os dados experimentais e teóricos. Entretanto, para a parte real 4.2a ainda existe uma diferença considerável entre os valores, principalmente para regimes de baixa frequência.

4.3 Adição da Viscosidade Complexa

A equação para a impedância do considerando todas as variáveis presentes no movimento oscilatório da partícula no meio de viscosidade complexa está descrito na equação 4.1.

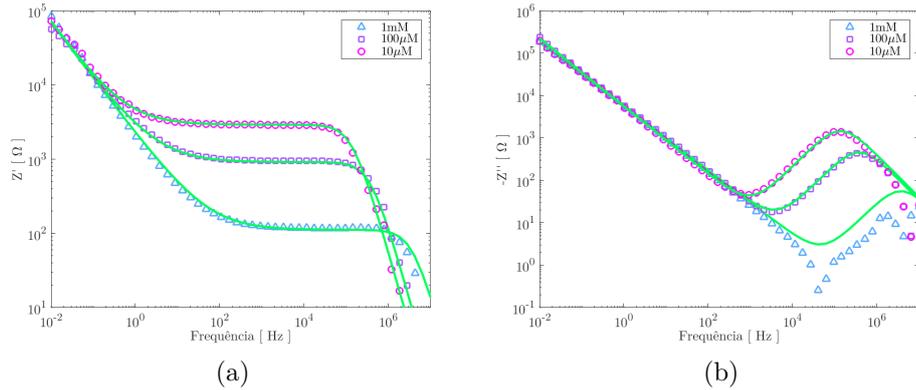


Figura 4.3: Parte real (a) e imaginária (b) do espectro de impedância de três concentrações de KCl e o ajuste teórico do modelo Z_a .

Por fim, utilizando do modelo completo para o oscilador, [17] foi capaz de ajustar um modelo teórico para o comportamento das medidas experimentais considerando que a contribuição da viscosidade é composta por uma parte anômala e uma não anômala. Isto é, utilizando o coeficiente $c^*(\omega) = c_1(i\omega)^{\gamma-1} + c_2$.

Comparando com os modelos mais simplificados 4.1 e 4.2, o espectro de impedância utilizando o modelo completo apresenta uma fidelidade muito maior para com os valores experimentais nos regimes de baixas, médias e altas frequências.

4.4 Posição da Partícula

A posição da partícula em função do tempo pode ser obtida analisando a equação do oscilador harmônico amortecido e forçado por uma força elétrica. Se o campo elétrico aplicado sobre a partícula for do tipo $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, a força elétrica aplicada sobre a partícula deverá ser $\vec{F} = Q\vec{E}t$ (como visto na seção 3.3.1). Mais uma vez, a notação vetorial pode ser ignorada pois o movimento ocorre numa única direção. Assim, tem-se a equação diferencial do movimento da partícula dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{Q}{m}E_0 e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

Esse tipo de equação é denominado *equação diferencial linear não-homogênea com coeficientes constantes*, e sua solução é obtida através da combinação linear da solução da equação homogênea associada $x_h(t)$ e da solução particular $x_p(t)$.

A equação homogênea associada é simplesmente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.5)$$

cujas soluções nada difere do caso oscilatório abordado na seção 3.2. Para uma solução do tipo $x_h(t) = e^{\alpha t}$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2e^{\alpha t}}{dt^2} + 2\gamma \frac{de^{\alpha t}}{dt} + \frac{k}{m}e^{\alpha t} &= 0 \\ \alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma \alpha e^{\alpha t} + \frac{k}{m}e^{\alpha t} &= 0 \end{aligned}$$

dividindo a igualdade por $e^{\alpha t}$ e sendo $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ a frequência de oscilação natural do oscilador,

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

os valores de α que compõem a solução são obtidos através da solução da equação polinomial de segundo grau descrita acima. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ \alpha &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Para os casos superamortecido, amortecimento crítico e subamortecido tem-se as soluções como descritas pelas equações 4.6, 4.7 e 4.8, respectivamente.

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}), \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (4.6)$$

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt), \quad \gamma = \omega_0 \quad (4.7)$$

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}[A \sin(\lambda t) + B \cos(\lambda t)], \quad \lambda = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (4.8)$$

nos três casos, as constantes A e B são encontradas à partir das condições iniciais do oscilador. A equação 4.8 ainda pode ser reescrita como

$$x_h(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\lambda t - \phi) \quad (4.9)$$

onde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ é chamada de amplitude e o valor ϕ é chamado de ângulo de fase. Assim sendo, a solução da homogênea $x_h(t)$ pode assumir as formas dadas pelas equações 4.6, 4.7 e 4.9 dependendo do tipo de amortecimento observado.

A equação diferencial para qual se deve determinar as soluções particulares é

$$\ddot{x}_p + \gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{Q}{m} E_0 e^{i\omega t} \quad (4.10)$$

Uma solução particular razoável para a equação diferencial é $x_p = x_0 e^{i\omega t}$. Como as soluções particulares são da forma exponencial de α , polinomial e cossenoidal é seguro dizer que a solução particular do tipo exponencial de $i\omega$ abrange os três tipos de amortecimento sem danificar as definições de uma equação diferencial de segunda ordem, que exige duas soluções distintas. Assim, sendo

$$\begin{cases} \dot{x}_p = i x_0 \omega e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_p = -x_0 \omega^2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

substituindo esses valores equação diferencial 4.10, tem-se

$$\begin{aligned} -x_0 \omega^2 e^{i\omega t} + i\gamma x_0 \omega e^{i\omega t} + \omega_0^2 x_0 e^{i\omega t} &= \frac{Q}{m} E_0 e^{i\omega t} \\ -x_0 \omega^2 + i x_0 \gamma + \omega_0^2 x_0 &= \frac{Q}{m} E_0 \\ x_0 (i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2) &= \frac{Q}{m} E_0 \\ x_0 &= \frac{Q E_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

de modo que a solução particular seja definida pela forma

$$x_p(t) = \frac{Q E_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (4.11)$$

usando a fórmula de Euler ($e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$), é possível obter

$$x_p(t) = \frac{Q E_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) + i \frac{Q E_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

sendo E_0 , m , Q , t , γ , ω_0 e ω valores reais, torna-se possível fazer a separação

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{Q E_0 \sin(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - \frac{Q E_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} + \frac{Q E_0 \omega_0^2 \cos(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} \\ &+ i \left[-\frac{Q E_0 \omega^2 \sin(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} + \frac{Q E_0 \omega_0^2 \sin(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - \frac{Q E_0 \cos(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} \right] \end{aligned}$$

sendo a parte real,

$$x_p(t) = \frac{Q E_0 \sin(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - \frac{Q E_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} + \frac{Q E_0 \omega_0^2 \cos(\omega t)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} \quad (4.12)$$

Usando a solução particular de acordo com a equação 4.11, a solução geral para o caso superamortecido deverá ser

$$x(t) = K_1 x_h(t) + K_2 x_p(t)$$

$$x(t) = K_1(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t})e^{-\gamma t} + K_2 \frac{QE_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

analogamente, para o caso de amortecimento crítico tem-se

$$x(t) = K_1 e^{-\gamma t} (A + Bt) + K_2 \frac{QE_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (4.14)$$

e para o caso subamortecido

$$x(t) = K_1 C e^{-\gamma t} \cos(\lambda t - \phi) + K_2 \frac{QE_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (4.15)$$

Um oscilador amortecido, com o passar do tempo, deixará de oscilar devido à ação da força conservativa. No caso do oscilador estudado, esse fato ocorreria devido à viscosidade do meio. Quando um campo elétrico é aplicado no material, a força elétrica manterá a partícula oscilando mesmo quando a oscilação amortecida deixar de ocorrer. A solução homogênea x_h é chamada de *transiente* pois quando o tempo tende a um valor específico sua contribuição ao sistema deixa de ser relevante. Para o caso subamortecido, por exemplo, quando o tempo $t \gg \frac{1}{\gamma}$ a parte homogênea da solução deixará de existir, restando apenas a solução particular x_p , também chamada de *estacionária*.

Ressonância

O fenômeno de ressonância é muito comum em sistemas tanto mecânicos quanto elétricos. Tal fenômeno consiste em um sistema oscilante que atinge uma frequência específica para a qual a amplitude de oscilação pode ser significativamente aumentada. A obtenção dessa frequência será possível após a solução transiente ter desaparecido e restar apenas a estacionária. Ou seja, para qualquer tipo de amortecimento:

$$x_p(t) = \frac{QE_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

onde a amplitude de oscilação é dada por

$$D = \frac{QE_0}{m(i\gamma + \omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.16)$$

sendo E_0 , m , Q , t , γ , w_0 e ω valores reais, torna-se possível fazer a separação

$$D = \frac{QE_0\omega_0^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - \frac{QE_0\omega^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - i \frac{QE_0\gamma}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)}$$

tomando apenas a parte real,

$$D = \frac{QE_0\omega_0^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - \frac{QE_0\omega^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} \quad (4.17)$$

A frequência de ressonância pode ser encontrada ao derivar a expressão da amplitude em relação à ω e igualando-a a zero.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial D}{\partial \omega} \right|_{\omega_R} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{QE_0\omega_0^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} - \frac{QE_0\omega^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2)} \right]_{\omega_R} &= 0 \\ -\frac{2QE_0\omega_R\gamma^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2)} + \frac{2EQ_0\omega_R^5}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2)} - \frac{4QE_0\omega_0^2\omega_R^3}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2)} + \frac{2QE_0\omega_R\omega_0^4}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2)} &= 0 \end{aligned}$$

utilizando o software WolframAlpha, é possível encontrar as raízes do polinômio como

$$\omega_R = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (4.18)$$

desde que $\gamma m \neq 0$. Entretanto, a única raiz e que interessa nesse caso é a positiva. Isto é, quando a frequência de oscilação do oscilador for de $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, o oscilador entrará em ressonância.

Assim sendo, ao entrar em ressonância a amplitude do movimento oscilatório será

$$\begin{aligned} D_R &= \frac{QE_0\omega_0^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2)} - \frac{QE_0\omega_R^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_R^2)^2)} \\ D_R &= \frac{QE_0\omega_0^2}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_0^2 - \gamma^2)^2)} - \frac{QE_0(\omega_0^2 - \gamma)}{m(\gamma^2 + (\omega_0^2 - \omega_0^2 - \gamma)^2)} \\ D_R &= \frac{QE_0\omega_0^2}{2m\gamma^2} - \frac{QE_0(\omega_0^2 - \gamma)}{2m\gamma^2} \\ D_R &= \frac{QE_0}{2m\gamma} \end{aligned} \quad (4.19)$$

A figura 4.4 ilustra a relação $x(t) \times t$ do oscilador para frequência de ressonância igual a 1, coeficiente de atrito igual a 0.2, amplitude igual a 0.1 e $\omega = 1.2$.

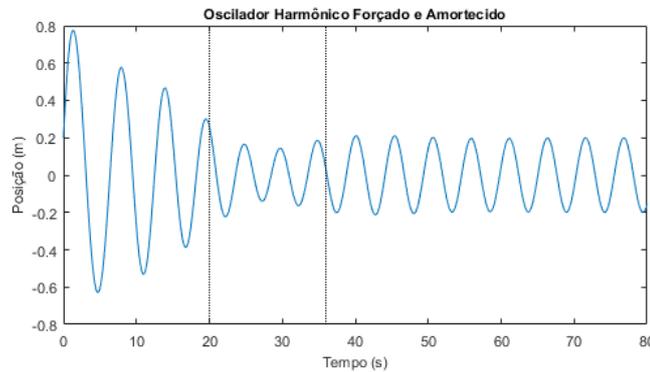


Figura 4.4: Regime de um oscilador harmônico amortecido e forçado.

É possível notar que no intervalo de tempo entre 0 e 20 segundos, a força é amortecida pelo meio e nos próximos 15 segundos a oscilação será descrita pela solução da equação estacionária associada. À partir de aproximadamente 36 segundos, é possível notar um aumento na amplitude de oscilação, tal fenômeno é explicado pelo fato de o oscilador entrar em ressonância.

Conclusões

Ao analisar o comportamento de diversos tipos de circuitos ao longo do Capítulo 2 foi possível verificar que algumas associações tendem a apresentar um caráter oscilatório que pode ser comparado aos osciladores harmônicos do Capítulo 3. Por apresentarem propriedades análogas é natural que o físico sinta interesse em relacionar de alguma forma esses dois fenômenos. O modelo do oscilador harmônico de viscosidade proposto por Silva e colaboradores [4] associa o comportamento oscilatório da partícula nas proximidades de uma placa condutora e imersa em um fluido não-Newtoniano ao comportamento de um circuito equivalente, composto por um circuito RLC ligado em série com um elemento de fase constante que estão ligados em série com um capacitor, ilustrado pela figura 3.6.

As relações verificadas na tabela 3.2 permitem converter livremente o oscilador eletromecânico para um circuito equivalente e vice-versa. As aproximações feitas para analisar cada parte do modelo mostram que a teoria tem uma boa aproximação, visto que nos gráficos de Santana [17] e aqui ilustrados ao longo Capítulo 4 trazem uma aproximação satisfatória entre os valores teóricos previstos e os experimentais medidos para três concentrações de um mesmo fluido do ponto de vista da espectroscopia de impedância.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Chinaglia, G. Gozzi, R. Alfaro, and R. Hessel, “Espectroscopia de impedância no laboratório de ensino,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 30, 2008.
- [2] J. R. Macdonald, “Impedance spectroscopy,” *Annals of biomedical engineering*, vol. 20, no. 3, pp. 289–305, 1992.
- [3] F. Freire and T. Andrade, “Surface-like over-damped oscillator model to interpret impedance spectroscopy data,” *Journal of Electroanalytical Chemistry*, vol. 778, 2016.
- [4] A. E. T. Silva, T. M. Andrade, and F. C. M. Freire, “Overdamped oscillator model with a complex viscosity to interpret impedance spectroscopy data,” *The Journal of Physical Chemistry C*, vol. 121, 2017.
- [5] Metrohm Autolab B.V., *Electrochemical Impedance Spectroscopy (EIS) Part 1 - Basic Principles*, July 2011.
- [6] U. G. Kyle, I. Boseaus, A. D. D. Lorenzo, P. Deurenberg, M. Elia, J. M. Gómez, B. L. Heitmann, L. Kent-Smith, J.-C. Melchior, M. Pirlich, H. Scharfetter, A. M. W. J. Schols, and C. Pichard, “Bioelectrical impedance analysis - part i: review of principles and methods,” *Clinical Nutrition*, vol. 23, no. 5, 2004. Elsevier.
- [7] A. S. Instruments, “1260a impedance analyzer,” Disponível em: <https://www.ameteki.com/products/frequency-response-analyzers/1260a-impedance-analyzer>. Acessado em 19 de junho de 2019.
- [8] E. W. Weisstein, “Wolfram|alpha.”
- [9] MATLAB, *R2016a*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2016.
- [10] R. S. . R. LLC., “The constant phase element (cpe),” Disponível em: <http://www.consultrsr.net/resources/eis/cpe1.htm>. Acessado em 19 de junho de 2019.
- [11] A. L. Koerich, “Análise de circuitos.” Manual de Laboratório de Eletrônica II. Departamento de Engenharia Elétrica - Universidade Federal do Paraná.
- [12] Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo, *Circuitos de Corrente Alternada 1*.
- [13] I. Newton, *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, vol. 1. Editora da Universidade de São Paulo, 2 ed., 2018.
- [14] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 3rd ed.* Pearson, 2011.

- [15] H. Sanabrina and J. Miller, "Relaxation processes due to the electrode electrolyte-interface in ionic solutions," *Physical Review E*, vol. 74, 2006.
- [16] L. R. Evangelista, E. K. Lenzi, G. Barbero, and J. R. Macdonald, "Anomalous diffusion and memory effects on the impedance spectroscopy for finite-length situations," *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 23, no. 48, p. 485005, 2011.
- [17] A. J. de Santana, "Construção, análise e aplicação de um modelo eletromecânico na interpretação da espectroscopia de impedância," Master's thesis, UEM, 2019.
- [18] I. F. Almog, M. S. Bradley, and V. Bulovic, "The lorentz oscillator and its applications." Disponível em: <https://docplayer.net/48207190-The-lorentz-oscillator-and-its-applications-described-by-i-f-almog-m-s-bradley-and-v-bulovic.html>.
- [19] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 3: Eletromagnetismo*. Blucher, 2015.
- [20] A. R. dos Santos, *Análise por Impedância Eletroquímica "On-Line" de Conjuntos Eletrodo/Membrana (MEA) de Células a Combustível a Membrana Polimérica (PEMFC)*. PhD thesis, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (ipen), 2007.
- [21] L. A. de Carvalho and A. R. de Andrade, "Espectroscopia de impedância eletroquímica aplicada ao estudo das reações heterogêneas em Ânodos dimensionalmente estáveis," *Química Nova*, vol. 29, 2006.
- [22] V. C. Sirtoli and P. B. Filho, "Sistema de medição de bioimpedância com microcontroladores de baixo custo." 25º Seminário de Iniciação Científica Universidade Estadual de Santa Catarina, 2015.
- [23] C. H. Rogrigues and J. d. I. S. Guerra, "Implementação da técnica de espectroscopia de impedâncias para o estudo de propriedades físicas em materiais ferroelétricos," tech. rep., Instituto de Física - Universidade Estadual de Uberlândia, 2015.
- [24] F. L. Hegeto, "Espectro de impedância utilizando uma ponto rlc em polímeros luminescentes." Trabalho de Conclusão de Curso, 2011.
- [25] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku, *Fundamentals of Electric Circuits*. McGraw-Hill, 4 ed., 1999.
- [26] W. R. Weinand, E. A. Mateus, and I. Hibler, "Circuitos série sob tensão alternada e Ótica." Projeto de Ensino de Física, fevereiro 2011.
- [27] C. C. Colucci, "Mecânica clássica," 2012. Coleção Formação de Professores de Física EAD.
- [28] M. R. Spiegel, *Mecânica Racional*. Coleção Schaum, McGraw-Hill, 1973.
- [29] C. Dalmolin, "Técnicas de impedância." Notas de aula de Eletroquímica.
- [30] D. C. Pizetta, "Osciladores livres, amortecidos, forçados e ressonância." Notas de aula de Laboratório de Física II.
- [31] S. L. Morelhão, "Osciladores harmônicos forçados-amortecidos," agosto 2016. Notas de aula. USP.

- [32] MathWorks, “The physics of the damped harmonic oscillator,” Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/symbolic/examples/physics-damped-harmonic-oscillator.html#ThePhysicsOfTheDampedHarmonicOscillatorExample-5>. Acessado em 27 de março de 2019.
- [33] M. Monkey, “Solve a 2nd order ode: Damped, driven simple harmonic oscillator,” Disponível em: <https://matlab-monkey.com/ODE/resonance/resonance.html>. Acessado em 17 de abril de 2019.
- [34] J.-B. Jorcin, M. E. Orazem, N. Pébère, and B. Tribollet, “Cpe analysis by local electrochemical impedance spectroscopy,” *Electrochimica Acta*, vol. 51, no. 8-9, pp. 1473–1479, 2006.