



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Mecânica Celeste: Problema de dois corpos e três corpos

Acadêmico: Gustavo Massao Yoshitome

Orientador: Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes

Maringá, 23 de janeiro de 2020



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Mecânica Celeste: Problema de dois corpos e três corpos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Renio dos Santos Mendes, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física

Acadêmico: Gustavo Massao Yoshitome

Orientador: Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes

Maringá, 23 de janeiro de 2020

Sumário

Agradecimentos	2
Resumo	3
Introdução	4
1 Dinâmica em coordenadas polares	6
1.1 Componentes radiais e tangenciais	6
1.2 Forças centrais	8
1.3 Equação de Binet	9
1.4 Potencial efetivo	11
2 Problema de dois corpos	12
2.1 Órbita de um corpo	12
2.2 Movimento relativo ao centro de massa	16
2.3 Lagrangiana do problema de dois corpos	18
2.4 Leis de Kepler	19
2.5 Equação de Kepler	22
2.6 Precessão dos periélios	25
3 Problema de três corpos	29
3.1 O problema restrito de três corpos	29
3.2 Mudança de referencial e integral de Jacobi	31
3.3 Pontos de Lagrange	33
3.4 Estabilidade dos pontos de Lagrange	35
3.5 Regiões de movimento proibido	38
3.6 Solução triangular de Lagrange	40
Conclusão	42
A Cônicas	43
Referências Bibliográficas	46

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais Marcelo e Sayuri que sempre me apoiaram e deram o suporte necessário para seguir em frente e meu irmão Eric que foi extremamente importante para o meu aprendizado e inspiração para estudar física.

Aos meus amigos que tornaram toda a graduação um processo menos estressante, principalmente nos momentos de descontração e muitas risadas.

Agradeço também aos professores que com grande esforço ensinaram e passaram seus conhecimentos para mim, em especial ao professor Renio que aceitou me orientar neste trabalho.

Finalmente, agradeço a todas outras pessoas que de qualquer forma contribuíram para minha formação durante todos esses anos de graduação.

Resumo

A mecânica newtoniana, via as três leis de Newton, foi capaz de trazer uma nova visão sobre os fenômenos físicos, dando ferramentas matemáticas para analisar problemas de dinâmica. Com a lei da gravitação universal, encontrou-se uma solução para explicar as órbitas dos planetas, e ainda mais geral, de um corpo celeste qualquer, permitindo que a dinâmica de corpos celestes fossem estudados com mais precisão, em relação aos métodos observacionais e empíricos que eram utilizados até então. Esse é o espírito da mecânica celeste, que estuda a dinâmica de corpos celestes, e busca explicações teóricas para a física no espaço. Esse trabalho tem o propósito de estudar, de maneira totalmente clássica, as órbitas que envolvem sistema de dois corpos, e introduzir os resultados centrais do problema de três corpos.

Palavras chave: Mecânica celeste, problema de dois corpos, leis de Kepler, problema de três corpos.

Introdução

Observações dos movimentos planetários sempre foram focos de atenção de cientistas. Estudos a partir de observações e dados coletados permitiram entender com mais clareza como se comportam os corpos do Sistema Solar e outros corpos celestes. Um grande desenvolvimento na astronomia e no estudo de órbitas foi feito por Johannes Kepler (1571-1630), que enunciou as três leis de Kepler. Essas leis são consideradas fundamentais na mecânica celeste, pois pela primeira vez fomos capazes de relacionar grandezas orbitais e afirmar corretamente a forma da trajetória dos planetas.

O estudo de Kepler foi baseado nos dados que ele tinha a disposição sobre observações astronômicas, em especial, as de Tycho Brahe que eram extremamente precisos. Entretanto, as explicações teóricas a partir de postulados fundamentais só foi possível no século XVII com Isaac Newton (1643-1727). Newton enunciou três leis que deveriam descrever completamente a dinâmica de qualquer corpo:

- (i) Um corpo em repouso ou movimento não acelerado, deve manter seu estado de movimento, a menos que uma força mude tal estado.
- (ii) A somatória das forças atuando em um corpo deve ser igual a variação temporal de seu momento linear.
- (iii) Toda força possui uma força de reação com mesmo módulo e sentido oposto.

Quando Newton enunciou essas leis, ele se referia a referenciais inerciais. Ao ultrapassarmos essa limitação, nos deparamos com novos efeitos, e a primeira e terceira leis de Newton deixam de valer. Isso não significa que referenciais não-inerciais não sejam úteis, na verdade eles serão utilizados como forte tática para obter alguns resultados neste trabalho.

Em 1687, Newton publicou o livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, que continha, dentre outras coisas as três leis acima e a lei da gravitação universal. Essa última lei afirma que dois corpos de massa m e M devem se atrair por uma força proporcional a cada massa, e inversamente proporcional a distância entre eles ao quadrado. Matematicamente, o módulo dessa força é dado por

$$F = \frac{GmM}{r^2} \quad (1)$$

em que G é a constante gravitacional universal, e vale aproximadamente $6,67 \cdot 10^{-11} m^3/kg s^2$. Com isso, finalmente as órbitas planetárias foram verificadas. Newton foi capaz de provar que de fato os planetas descrevem elipses em torno do Sol, e verificar as três leis de Kepler via sua teoria, mostrando o quão completa e eficiente elas são. Esse foi um grande passo para mecânica celeste.

Dessa forma, o problema de dois corpos, que se preocupava em encontrar a dinâmica entre duas massas se atraindo pela força gravitacional, foi resolvido completamente, e naturalmente, físicos começaram a considerar o problema de três ou mais corpos. Este demonstrou mais dificuldades para ser estudado, devido as limitações matemáticas.

Casos particulares do problema de três corpos, como a solução triangular desse problema, que considera as três massas em vértices de um triângulo equilátero, foi estudado por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Ele provou que existe uma solução estacionária para este problema.

O principal desenvolvimento realizado foi para o problema restrito de três corpos, que considera dois corpos grandes orbitando entre si e um terceiro que não influencia nos outros dois. Lagrange foi capaz de encontrar importantes resultados que são utilizados como aplicação até hoje em estudos espaciais.

Atualmente, avanços na mecânica celeste mostram particular importância devido ao desenvolvimento de tecnologias espaciais, como aqueles que envolvem satélites. Matemáticas mais sofisticadas podem ser utilizadas para aprofundar em alguns tópicos deste campo de estudo, entretanto, nesse trabalho, estamos interessados estritamente em resultados tradicionais.

O texto é uma revisão bibliográfica sobre alguns tópicos de mecânica celeste. Começamos com alguns resultados sobre a dinâmica em coordenadas polares no capítulo 1 que servem como base para o desenvolvimento dos principais resultados. Então inicia-se o problema de dois corpos no capítulo 2, que abrange diversos resultados, em especial a cerca das órbitas planetárias. Finalmente, no capítulo 3, é discutido o problema de 3 corpos e alguns dos seus casos particulares de grande interesse para o significado físico do problema.

Capítulo 1

Dinâmica em coordenadas polares

Neste capítulo, vamos introduzir algumas ferramentas, em coordenadas polares, que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Iniciaremos calculando as grandezas cinemáticas nessas coordenadas, para então estudar as forças centrais, que é o principal tipo de força para obter os resultados desejados. Em seguida, analisaremos potenciais de forças centrais de maneira a encontrar o potencial efetivo.

1.1 Componentes radiais e tangenciais

Quando estudamos a cinemática em coordenadas cartesianas no plano, consideramos a posição, velocidade, e aceleração decompostas em termos dos versores \hat{x} e \hat{y} . Entretanto, podemos abordar alguns problemas em coordenadas polares. Nesse caso, estamos interessados em descrever essas grandezas nos versores angular (ou tangencial) \hat{e}_θ e radial \hat{e}_r , como indica a Figura 1.1 [13].

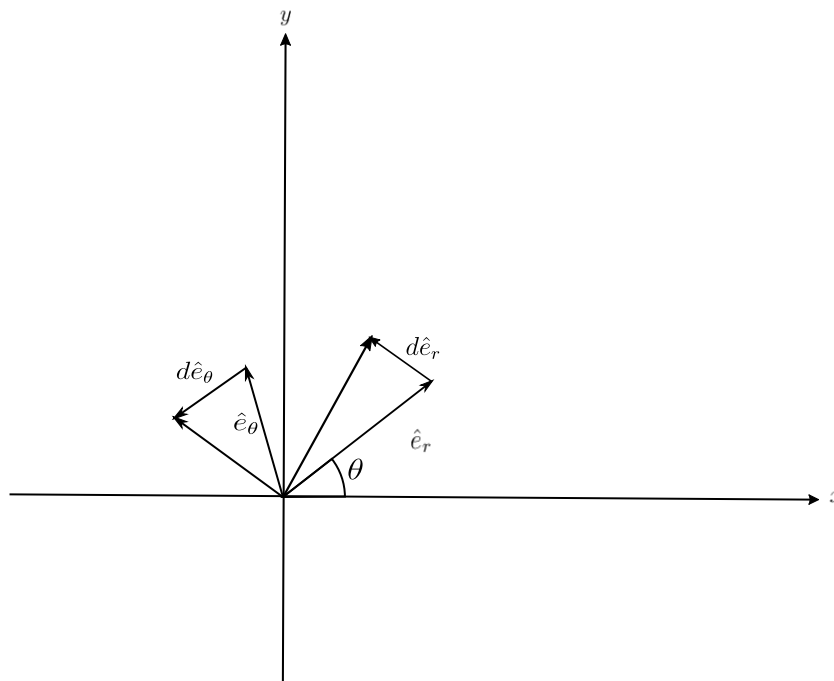


Figura 1.1: Representação dos versores, \hat{e}_θ e \hat{e}_r , em coordenadas polares e suas respectivas variações infinitesimais.

Vamos iniciar deduzindo a velocidade. Para isso, começamos lembrando que o vetor \vec{r} é, por definição, dado por

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}. \quad (1.1)$$

A velocidade é a derivada temporal de $\vec{r} = r\hat{e}_r$, mas como o versor \hat{e}_r varia com o tempo, temos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r. \quad (1.2)$$

Agora precisamos calcular $\dot{\hat{e}}_r$. Para isso, considere que \hat{e}_r passa de $\hat{e}_r^{(1)}$ para $\hat{e}_r^{(2)}$ em um intervalo dt , ou seja,

$$\hat{e}_r^{(2)} - \hat{e}_r^{(1)} = d\hat{e}_r. \quad (1.3)$$

Similarmente, uma pequena variação no versor angular \hat{e}_θ pode ser descrita como

$$\hat{e}_\theta^{(2)} - \hat{e}_\theta^{(1)} = d\hat{e}_\theta. \quad (1.4)$$

Veja que $d\hat{e}_r$ é paralelo a \hat{e}_θ , enquanto \hat{e}_θ é anti-paralelo a \hat{e}_r , de forma que vale as seguintes relações:

$$d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta \quad (1.5)$$

$$d\hat{e}_\theta = -d\theta\hat{e}_r. \quad (1.6)$$

Dividindo essas duas diferenciais por dt , obtemos as derivadas temporais dos versores:

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (1.7)$$

$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r. \quad (1.8)$$

Pelas equações (1.2) e (1.7), obtemos a velocidade em coordenadas polares,

$$\vec{v} = r\dot{\hat{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta. \quad (1.9)$$

Perceba que a velocidade possui duas componentes, em que uma é puramente radial e a outra depende de seu movimento angular.

A aceleração pode ser obtida de maneira direta derivando a velocidade em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Utilizando as equações (1.7) e (1.8), obtemos a expressão para aceleração em coordenadas polares

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta. \quad (1.11)$$

Dessa forma, a força é simplesmente igual a multiplicação da expressão acima pela massa do corpo que está sendo estudado. Essa mudança de coordenadas é muito conve-

niente quando tratamos de problemas cuja dinâmica envolve forças que dependem de r e θ e, além disso, são descritas de maneira simples pelos versores radial e angular. Como veremos na próxima seção, as forças centrais se encaixam muito bem nesse quesito.

1.2 Forças centrais

Agora, vamos estudar um tipo de força que estará muito presente neste trabalho, as forças centrais. Dizemos que uma força é central se ela depende apenas da distância radial de sua origem O até o corpo em que atua, e além disso está sempre direcionada radialmente [6]. Esses tipos de forças apresentam propriedades interessantes que ajudam a trabalhar com problemas que as envolvem. Matematicamente, para uma força central, tem-se

$$\vec{F} \equiv F(r)\hat{e}_r. \quad (1.12)$$

Existem diversos exemplos de forças centrais. Uma delas é força gravitacional, que é o principal tipo de força considerado neste trabalho. Como sabemos, a força gravitacional gerada por um determinado corpo é inversamente proporcional ao quadrado da distância, e está direcionada a ele, ou seja, além de ser radial, também é atrativa. A Figura 1.2 representa um corpo sujeito a uma força central qualquer.

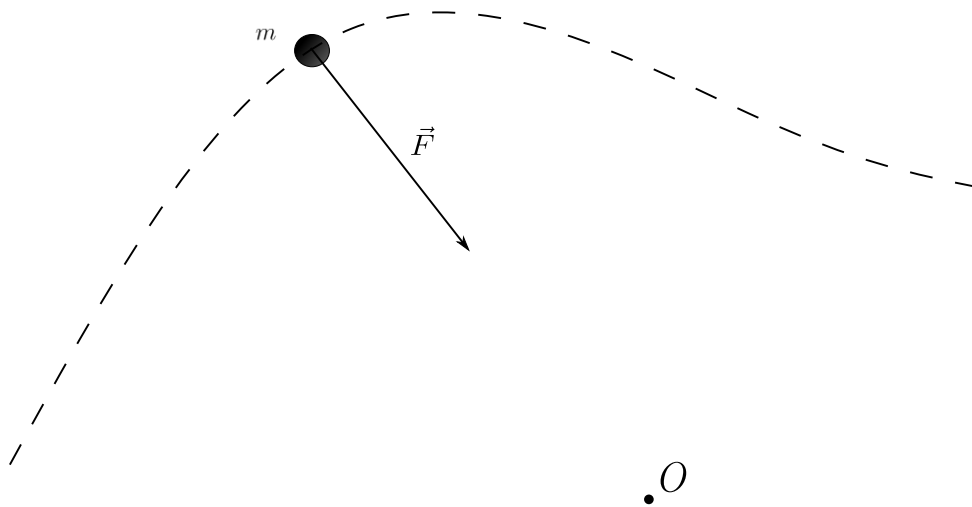


Figura 1.2: Representação de uma partícula de massa m sob ação de uma força central atrativa \vec{F} apontando em direção a origem O .

Uma primeira propriedade interessante dessa classe de forças é que, quando um sistema depende apenas de uma força central, o momento angular é conservado. Para provar isso, basta calcular a derivada de $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, em que \vec{L} é o momento angular, \vec{r} a distância até a origem da força e $\vec{p} = m\vec{v}$ o momento linear. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times F(r)\hat{e}_r.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Observe que $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{0}$, pois \vec{p} possui a mesma direção da velocidade e $\vec{r} \times F(r)\hat{e}_r$ é claramente igual a $\vec{0}$. Logo,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}, \tag{1.14}$$

ou seja, o momento angular é constante [9]. Note também que $\vec{r} \times F(r)\hat{e}_r$ é o torque e portanto, o torque de uma força central é nulo. Além disso, é comum utilizar a grandeza $\vec{h} = \vec{L}/m$ (momento angular por unidade de massa) ao invés de \vec{L} . Assim, como a velocidade em coordenadas polares é dada pela equação (1.9), podemos escrever

$$\vec{h} = r\hat{e}_r \times \vec{v} = r^2\dot{\theta}\hat{e}_z, \tag{1.15}$$

em que foi utilizado que $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_z$. Portanto, devido a conservação do momento angular, temos em módulo que $h = r^2\dot{\theta} = cte$. É interessante observar que não só o módulo do momento angular, como a direção e sentido também devem ser constantes. Isso significa que o movimento de uma partícula sob apenas uma força central deve estar confinado a um plano, caso contrário, o vetor momento angular mudaria de direção durante o movimento. Dessa forma quando trabalhamos com problemas cuja força resultante é central, podemos nos limitar ao plano, sem perder nenhuma informação.

1.3 Equação de Binet

Até então, foi visto alguns aspectos sobre as coordenadas polares junto ao momento angular, e como a escolha de tais coordenadas foi conveniente para o cálculo desse momento. Nesta seção, juntaremos esses resultados para desenvolver a equação da aceleração em coordenadas polares para uma força central [13]. Utilizando a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, e a equação (1.11), obtemos

$$\frac{F(r)}{m}\hat{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta. \tag{1.16}$$

Essa igualdade vetorial pode ser separada em duas equações (uma para cada componente):

$$\frac{F(r)}{m} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \tag{1.17}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{1.18}$$

Agora, vamos analisar essas duas equações separadamente. Iniciando pela equação (1.18), se multiplicarmos ambos lados da igualdade por r , constatamos que

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (1.19)$$

que, por sua vez, pode ser simplificada utilizando a regra do produto, em que obtém-se

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0. \quad (1.20)$$

Observe que a equação acima é exatamente o resultado obtido para o momento angular, ou seja, ela traz uma informação já conhecida pela análise vetorial feita para \vec{L} . Agora nos sobra investigar a equação (1.17).

Pela equação (1.15), temos $\dot{\theta} = h/r^2$ e, via a equação (1.17), verificamos que

$$\frac{F(r)}{m} = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}. \quad (1.21)$$

Vamos fazer uma substituição de variável indo de r para u :

$$r = u^{-1}, \quad (1.22)$$

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}. \quad (1.23)$$

Por sua vez, utilizando que $r = r(\theta)$, $\dot{u} = \frac{du}{d\theta}\dot{\theta}$ e $\dot{\theta} = hu^2$, a relação acima pode ser reescrita como

$$\dot{r} = -r^2 \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -h \frac{du}{d\theta}. \quad (1.24)$$

Pela equação (1.15), podemos reescrever a segunda derivada como

$$\ddot{r} = -h\dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (1.25)$$

Finalmente, combinando as equações (1.21) e (1.25), constatamos que

$$\begin{aligned} F(r) &= m \left(-h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3 \right) \\ &= -mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

A equação (1.26) é conhecida como equação de Binet. Ela foi derivada por Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) e nos fornece a trajetória de uma partícula sujeita unicamente à força central $F(r)$ em coordenadas polares. Revisitaremos essa equação no próximo capítulo para obter as equações de órbita em um problema de dois corpos.

1.4 Potencial efetivo

Considere uma partícula de massa m com energia total \mathcal{E} . Suponha que essa partícula está sofrendo a ação de uma força central $\vec{F}(r)$, ou seja, está submetida a um potencial $V(r)$. Vamos estudar o que podemos encontrar de especial na energia desta partícula. Temos que a energia total é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + V(r). \quad (1.27)$$

Vamos considerar agora a velocidade em coordenadas polares. Dessa forma, utilizando a equação (1.9) e tomando o módulo ao quadrado, encontramos:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \quad (1.28)$$

Sabendo também que $\dot{\theta} = h/r^2$, concluímos das equações (1.27) e (1.28) que a energia total pode ser reescrita como

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mh^2}{r^2} + V(r) \quad (1.29)$$

Empregando $V_{ef}(r) = mh^2/r^2 + V(r)$, ficamos com

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r). \quad (1.30)$$

$V_{ef}(r)$ é conhecido como potencial efetivo [13]. Veja que conseguimos dividir a energia em um termo que depende apenas da velocidade da massa e outro termo que depende unicamente da sua distância r até a origem. Note também que isso foi possível devido à conservação do momento angular. Por fim, observe que a equação (1.30) é importante para analisar os possíveis estados de movimento que um corpo possui em relação a origem da força. Em particular, como é visto em um curso de mecânica clássica, um corpo pode estar em um estado ligado em determinado potencial se tal potencial possui um mínimo de energia, e a energia do corpo não é maior do que os máximos adjacentes desse mínimo. Nesse caso, a partícula oscila em torno deste mínimo.

Capítulo 2

Problema de dois corpos

Neste capítulo, vamos estudar as possíveis órbitas que um corpo pode ter quando submetido à força gravitacional de outro. Esse estudo será o mais geral possível quando considerado apenas dois corpos, podendo ser aplicado para grandes e pequenas massas. O principal objetivo será obter a trajetória de planetas para, então, analisar a dependência do tempo, pela equação de Kepler, e finalmente estudar o fenômeno de precessão dos periélios dos planetas.

2.1 Órbita de um corpo

Vamos discutir a órbita de um corpo quando submetido a força gravitacional de outro corpo maior. Nesse primeiro caso, suporemos que o corpo maior está em repouso. Um sistema semelhante a esse é o Sol-Terra, ou qualquer outro planeta que orbita o Sol.

Primeiro queremos buscar por estados ligados, isto é, órbitas em que o corpo não escapa da gravidade do outro. Podemos analisar isso pelo gráfico da energia potencial [4]. Pela lei da gravitação de Newton, o potencial gravitacional pode ser escrito como

$$V(r) = -\frac{Gmm'}{r}, \quad (2.1)$$

em que m e m' são as massas do corpo menor e maior, respectivamente, e r a distância entre eles. Assim, obtemos o gráfico apresentado na Figura 2.1

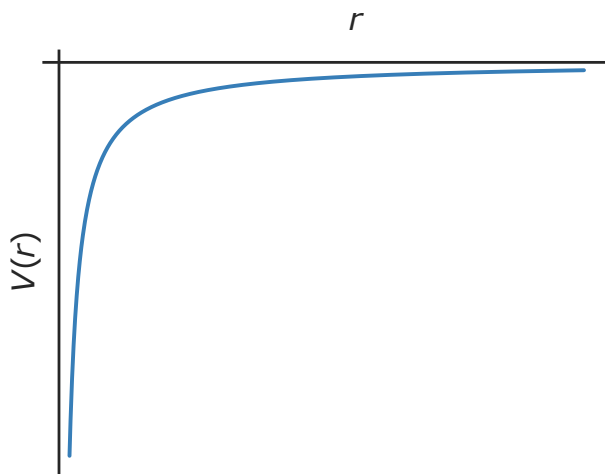


Figura 2.1: Comportamento do gráfico do potencial gravitacional.

Aqui chegamos a um problema: Não encontramos um ponto de retorno em nenhuma distância mínima do centro de força. Entretanto, como essa força é central, devemos considerar o potencial efetivo para investigar toda dependência radial na energia total. Nesse caso, o potencial efetivo é dado por

$$V_{ef}(r) = -\frac{Gmm'}{r} + \frac{mh^2}{r^2}. \quad (2.2)$$

Lembramos que h é o momento angular por unidade de massa. Com essa função obtemos um novo gráfico para o potencial como mostra a figura 2.2.

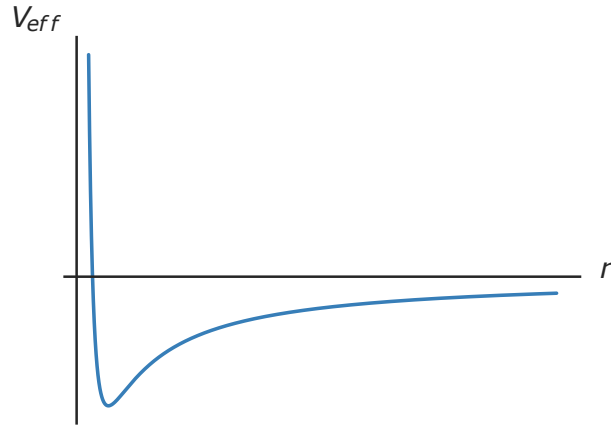


Figura 2.2: Comportamento do gráfico do potencial efetivo do campo gravitacional.

Agora sim, conseguimos verificar que se a energia do corpo for suficientemente pequena, temos um estado ligado e conseqüentemente uma órbita limitada entre um r mínimo e um r máximo.

Para encontrar exatamente a órbita que a massa m irá executar, considere a equação de Binet, sendo $F(r)$ a força gravitacional. Assim, temos

$$-Gmm'u^2 = -mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right), \quad (2.3)$$

ou seja, queremos resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm'}{h^2}. \quad (2.4)$$

A equação diferencial (2.4) é não homogênea. Para resolvê-la basta encontrar a solução da parte homogênea e a solução particular. Para a parte homogênea, tem-se

$$u_h = A \cos(\theta - \theta_o), \quad (2.5)$$

em que A e θ_o são constantes de integração. Por outro lado, a solução particular é simplesmente

$$u_p = \frac{Gm'}{h^2}. \quad (2.6)$$

Como θ_o é apenas um fator de fase, podemos fixá-lo 0. Assim, a solução geral fica

$$u = A \cos \theta + \frac{Gm'}{h^2}. \quad (2.7)$$

Como $u = r^{-1}$, a equação em r é dada invertendo a equação (2.7),

$$\begin{aligned} r &= \frac{h^2}{Ah^2 \cos \theta + Gm'} \\ &= \frac{r_c}{1 + e \cos \theta}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $r_c = h^2/Gm'$ e $e = Ah^2/Gm'$. Esse resultado é a equação de uma cônica no plano cujo foco é o centro da força. Veja que e é exatamente a excentricidade da cônica, ou seja, se $e = 1$, temos uma parábola, se $e < 1$, temos uma elipse e, para $e > 1$, obtém-se uma hipérbole. Sabendo disso, a constante r_c é o raio da órbita no caso em que a órbita é circular ($e=0$). Pelo gráfico do potencial efetivo, esperamos que quando a energia for menor do que 0, a órbita seja uma elipse e, se for maior ou igual do que 0, esperamos que a órbita seja uma parábola ou hipérbole. Vamos investigar isso com mais cuidado calculando a energia do corpo em órbita.

Energia da órbita

Conhecida a trajetória do corpo em órbita, podemos calcular a sua energia em termos de grandezas relacionadas à órbita [3]. Seja ϵ a energia total da massa m por unidade de massa. Usando que $\dot{r}^2 = h^2 (du/d\theta)^2$ e $\dot{\theta}^2 = h^2 u^4$, temos

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{Gm'}{r} \\ &= \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \frac{2u}{r_c} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por outro lado a equação (2.8), em termos de u , nos fornece as seguintes igualdades:

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{r_c}, \quad (2.10)$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{e \sin \theta}{r_c}. \quad (2.11)$$

Empregando esses dois resultados na equação (2.9), resulta na seguinte expressão de energia:

$$\epsilon = \frac{h^2}{2} \left(\frac{e^2 \sin^2 \theta}{r_c^2} + \frac{1 + 2e \cos \theta + \cos^2 \theta}{r_c^2} - \frac{2 + 2 \cos \theta}{r_c^2} \right) \quad (2.12)$$

$$= \frac{h^2}{2r_c^2} (e^2 - 1). \quad (2.13)$$

Seja r_p a menor distância da órbita até o centro de força (periélio). A partir da equação (2.8), obtemos r_p quando $\cos \theta = 1$ e, portanto,

$$r_p = \frac{r_c}{1 + e}. \quad (2.14)$$

Conseqüentemente podemos reescrever a energia como

$$\epsilon = \frac{Gm'}{2r_p}(e - 1). \quad (2.15)$$

A primeira conclusão que podemos tirar desse resultado é que a energia total do corpo é constante, que facilita muito a análise da trajetória. Além disso, podemos concluir diretamente qual tipo de cônica é a órbita:

- (i) Se $\mathcal{E} < 0$, temos uma elipse, como se esperava pela análise do gráfico representado na Figura 2.2 da energia potencial.
- (ii) Se $\mathcal{E} > 0$, a órbita é uma hipérbole. Já sabíamos que a órbita não era fechada, uma vez que não encontrava-se ponto de retorno no potencial. Agora sabemos que órbita neste caso é uma hipérbole, e de fato, o corpo pode escapar da atração gravitacional.
- (iii) Se $\mathcal{E} = 0$, obtém-se uma parábola. Neste caso a órbita não é fechada. Este tipo de órbita é o divisor entre a órbita hiperbólica e elíptica, ou seja, o corpo em órbita está na iminência de entrar em órbita fechada em torno do outro.

A órbita circular acontece para um caso particular da elipse em que $e = 0$. Nesse caso $r_p = r_c = r$ é exatamente o raio da circunferência e a energia é dada por

$$\epsilon = -\frac{Gm'}{2r_c}. \quad (2.16)$$

A Figura 2.3 ilustra o tipo de órbita em função da energia.

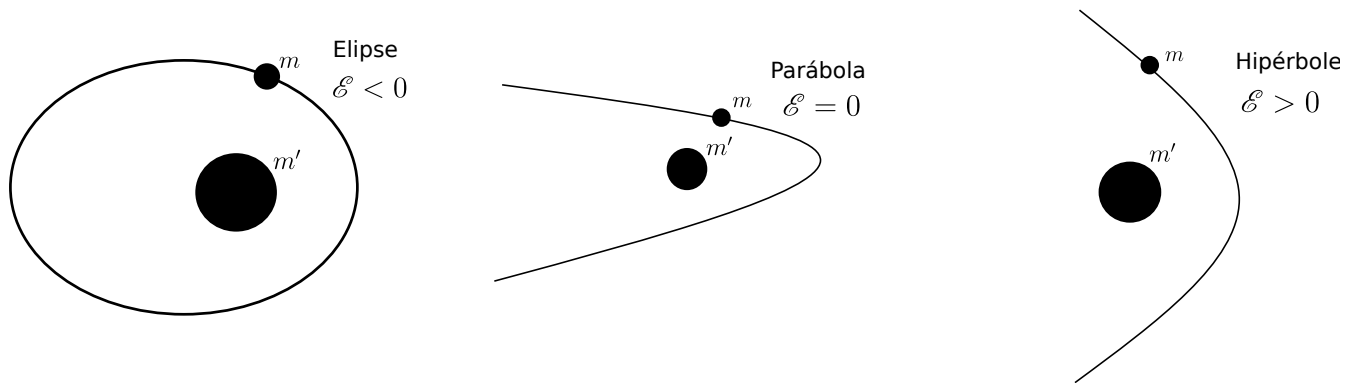


Figura 2.3: Representação dos tipos de órbitas dependendo da energia \mathcal{E} .

2.2 Movimento relativo ao centro de massa

Agora, vamos discutir o problema de dois corpos. A diferença do problema que queremos tratar agora em relação ao da seção (2.1) é que as massas dos dois corpos podem ser comparáveis, ou seja, ambos podem estar em movimento. A abordagem desse problema é feito analisando o movimento do centro de massa e a distância relativa entre os dois corpos [3].

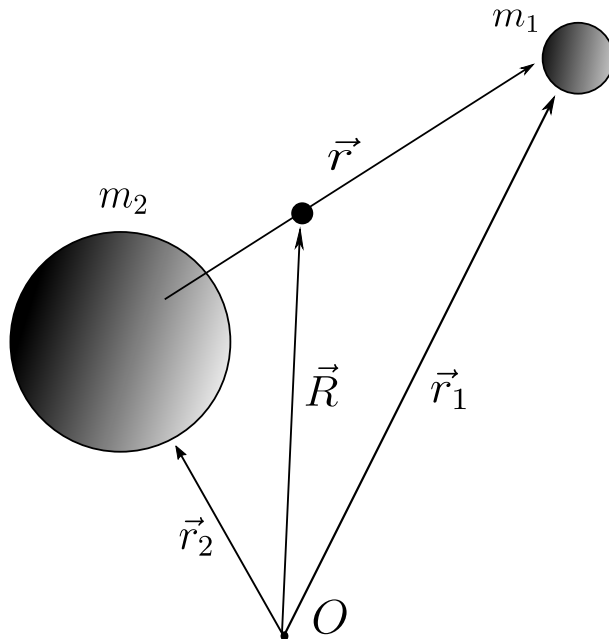


Figura 2.4: Representação dos vetores posição \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , centro de massa \vec{R} e posição relativa \vec{r} .

Dessa forma, considere duas massas m_1 e m_2 . Nesse sentido, sejam \vec{r}_1 e \vec{r}_2 os vetores posição de m_1 e m_2 , respectivamente. Denote por $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (vetor posição de m_1 relativo ao de m_2), $M = m_1 + m_2$ (massa total) e \vec{R} a posição do centro de massa. Sabemos que \vec{R} é a posição média ponderada pelas massas do sistema, isto é:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}. \quad (2.17)$$

Derivando essa equação uma vez em relação ao tempo e sendo o momento de cada partícula \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , obtemos

$$\dot{\vec{R}} = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{M} \quad (2.18)$$

$$= \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{M}. \quad (2.19)$$

Como o momento linear total do sistema deve ser constante, concluímos que o centro de massa não acelera e, portanto, o movimento dele ocorre com velocidade constante $\dot{\vec{R}} = cte$. Isso nos permite fazer uma mudança de coordenada para analisar o problema do movimento relativo entre os dois corpos. Supondo que a única interação agindo sobre a massa m_2 é a atração gravitacional de m_1 , temos

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2.20)$$

Utilizando a equação (2.17) e lembrando que $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, podemos escrever \vec{R} como

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_2 - m_1 \vec{r} + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad (2.21)$$

e, conseqüentemente,

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (2.22)$$

Analogamente, obtemos

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r}. \quad (2.23)$$

Substituindo o \vec{r}_2 da equação (2.22) na equação (2.20), segue que

$$m_1 \ddot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2.24)$$

Usando a definição de massa reduzida, $\mu = m_1 m_2 / M$, e lembrando que $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$, obtemos

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2.25)$$

Olhando cuidadosamente para a equação (2.25), percebe-se que ela representa uma partícula de massa μ em que se aplica a mesma força gravitacional entre m_1 e m_2 . Assim, temos que tal massa μ deve ocupar a posição de uma massa sob a ação de uma força central, com distância \vec{r} até o centro da força. Portanto, podemos substituir o problema inicial de dois corpos para um problema de um corpo, em que se aplica a força gravitacional $-Gm_1 m_2 / r^2$, em um movimento do centro de massa. A massa μ recebe o nome de massa reduzida pois ela é menor do que m_1 e m_2 .

Para o caso particular em que o movimento de um corpo em relação ao outro é circular, podemos escrever, usando $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$, que

$$\mu \omega^2 r = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \quad (2.26)$$

e, portanto, a velocidade angular dos dois corpos é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}. \quad (2.27)$$

A Figura 2.5 ilustra o movimento dos corpos em trajetória circular.

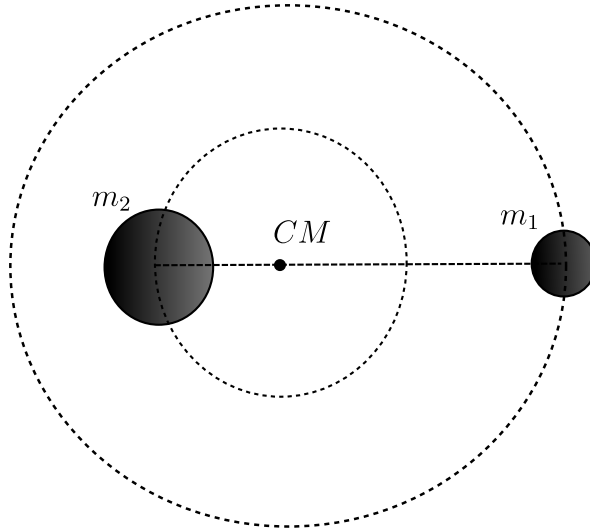


Figura 2.5: Ilustração do movimento de dois corpos de massas m_1 e m_2 relativo ao centro de massa em órbita circular.

2.3 Lagrangiana do problema de dois corpos

Assim como abordamos o problema de dois corpos pelas leis de Newton, podemos igualmente considerar o formalismo lagrangiano para obter resultados. Vamos fazer isso para encontrar as constantes de movimento.

A lagrangiana do problema de dois corpos é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - V(r), \quad (2.28)$$

em que $V(r)$ é o potencial gravitacional. Por sua vez, fazendo a mudança de variáveis para \vec{R} e \vec{r} via as equações (2.22) e (2.23), a lagrangiana pode ser reescrita da forma

$$\mathcal{L} = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} - V(r). \quad (2.29)$$

Como vimos na seção 2.2, $\dot{\vec{R}}$ é constante, então novamente reduzimos esse problema a um problema de um corpo, uma vez que podemos incorporar a constante $M\dot{\vec{R}}^2/2$ no potencial, tornando r a única coordenada generalizada da lagrangiana.

Agora, vamos analisar simetrias para encontrar as variáveis conservadas. A primeira, em \vec{R} já foi observada. A segunda é a isotropia da lagrangiana no espaço. Como ela não depende da direção, o momento angular é conservado, logo, podemos escolher o plano que contém as duas massas do problema e considerar coordenadas polares neste plano. Com essa convenção, a nossa lagrangiana pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} - V(r). \quad (2.30)$$

Finalmente, a última variável cíclica na lagrangiana é o tempo, de onde concluímos que a energia é conservada. Note ainda que a equação de Euler-Lagrange para r é

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0, \quad (2.31)$$

que é exatamente a segunda lei de Newton para esse problema.

2.4 Leis de Kepler

A seguir, discutiremos as famosas leis planetárias propostas por Johannes Kepler. As três leis de Kepler foram obtidas por meio de diversos dados e observações feitas ao longo da história. Kepler reuniu diversas dessas observações e estudou durante muito tempo a órbita de cada planeta no sistema solar para descrever como cada planeta orbita e de que forma isso ocorre. Com o desenvolvimento feito até agora neste trabalho, via a lei da gravitação de Newton, podemos demonstrar cada lei de Kepler e refinar ainda mais os resultados.

Primeira lei de Kepler

A primeira lei de Kepler afirma que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas com o Sol em um dos focos da elipse [11]. Já provamos isso anteriormente ao demonstrar que os três tipos de movimentos possíveis são hiperbólicos, elípticos ou parabólicos (Figura 2.3). Como os planetas estão confinados em torno do Sol, as órbitas devem ser elípticas, por exemplo, a Terra tem sua máxima distância do Sol (distância de afélio) a 152,1 milhões de quilômetros. Antes dos resultados obtidos por Kepler, acreditava-se que as órbitas eram circulares. De fato, a órbita de muitos planetas possuem excentricidade muito pequena, sendo que a maior delas é a de Mercúrio que vale 0,2056, porém nenhuma delas é igual a 0.

Pela geometria da elipse e pela equação (2.14), a distância de periélio r_p é dada por

$$r_p = \frac{r_c}{1+e} = a(1-e), \quad (2.32)$$

enquanto a distância de afélio r_a é dada por

$$r_a = \frac{r_c}{1-e} = a(1+e), \quad (2.33)$$

em que a é o semi-eixo maior da elipse. De fato, o semi-eixo maior da elipse é

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}. \quad (2.34)$$

Além disso, a excentricidade é

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \quad (2.35)$$

Nesse contexto, a equação da trajetória pode ser reescrita como

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \quad (2.36)$$

Note que quando tomamos $\theta = 0$, retornamos a $r = r_p$, e quando tomamos $\theta = \pi$ encontramos $r = r_a$, como se esperava.

Segunda lei de Kepler

A segunda lei de Kepler afirma que qualquer planeta em órbita em torno do Sol varre áreas iguais em tempos iguais [11], como ilustra a Figura 2.6.

A demonstração dessa lei decorre da conservação de momento angular. Para verificar isso, inicialmente, notemos que um elemento infinitesimal de área pode ser escrito como

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta. \quad (2.37)$$

Dessa forma, a derivada da área em relação ao tempo deve ser

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}. \quad (2.38)$$

Substituindo $\dot{\theta}$ pela equação (1.15), obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{h}{r^2} = \frac{1}{2}h. \quad (2.39)$$

Como o momento angular h é conservado, concluímos que a variação da área no movimento de um planeta é constante, que é exatamente o que queríamos provar.

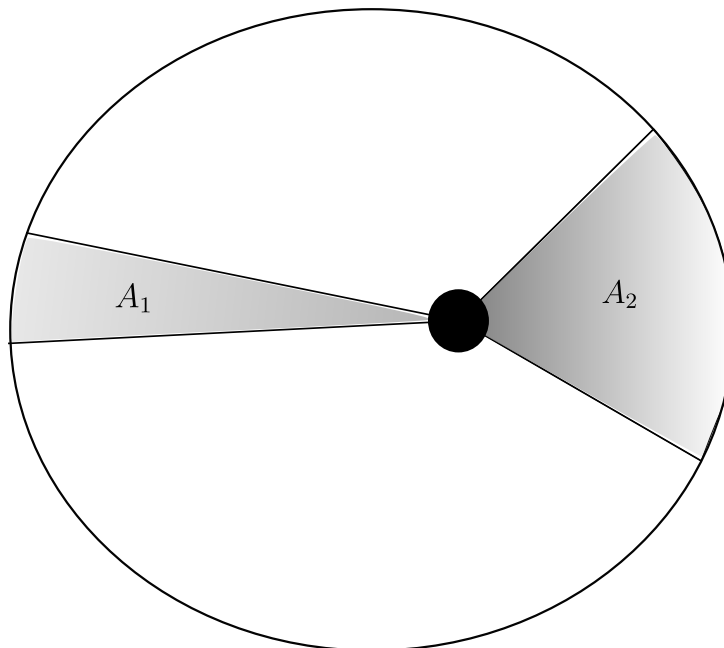


Figura 2.6: Áreas varridas por um corpo em órbita durante o mesmo intervalo de tempo em posições diferentes: A_1 em relação ao periélio e A_2 em relação ao afélio.

Um simples corolário que podemos retirar dessa lei é que a velocidade de um planeta orbitando uma estrela não é constante. Em particular, a velocidade é máxima no ponto de periélio e mínima no afélio.

Terceira lei de Kepler

A terceira lei de Kepler afirma que o quadrado do período de revolução T de um planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior a da elipse de sua órbita [11]:

$$\frac{T^2}{a^3} = k, \quad (2.40)$$

em que k é uma constante.

Para iniciar a demonstração dessa lei, partimos da segunda lei de Kepler, isto é

$$dA = \frac{h}{2} dt. \quad (2.41)$$

Integrando ambos lados, obtemos para um período completo

$$A = \frac{h}{2} T. \quad (2.42)$$

Sabemos também que a órbita é uma elipse e que sua área é dada por $A = \pi ab$, em que b é o semi-eixo menor. Pela equação (A.2) temos, $b = a\sqrt{1 - e^2}$ (Apêndice A). Segue que $A^2 = \pi^2 a^4 (1 - e^2)$. Esse resultado combinado com a equação (2.42) conduz a

$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{h^2}{4} T^2. \quad (2.43)$$

Além disso, pela equação (2.32), sabemos que

$$1 - e^2 = \frac{r_c}{a}. \quad (2.44)$$

Logo, vale a seguinte relação

$$\frac{\pi^2 a^3}{r_c} = \frac{h^2}{4} T^2. \quad (2.45)$$

Eliminando h e r_c , podemos reescrever em termos de grandezas conhecidas

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3. \quad (2.46)$$

Como $4\pi^2/GM$ é constante, concluímos que o período de revolução T ao quadrado é proporcional ao semi-eixo maior a ao cubo. É interessante lembrar que quando Kepler enunciou as três leis, ele não explicitou a constante de proporcionalidade. Entretanto, com a abordagem feita por Newton, fomos capazes de deduzir exatamente o valor de $k = 4\pi^2/GM$.

2.5 Equação de Kepler

Na seção 2.1, encontramos as órbitas que planetas devem realizar quando estão em órbita em torno de uma estrela. Entretanto, conhecemos apenas a trajetória e não a sua dependência temporal. Estamos interessados também em obter a equação que nos dá a dependência temporal das coordenadas polares (r, θ) de um planeta [3].

Para isso, considere um objeto em órbita em torno do Sol de tal forma que quando ele passa no ponto de periélio, tem-se $\theta = 0$. Sabemos ainda que

$$r = \frac{r_p(1+e)}{1+e\cos\theta} \quad (2.47)$$

e sua energia é dada por

$$\epsilon = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}, \quad (2.48)$$

em que M é massa do Sol. Por outro lado, a igualdade (2.15) pode ser utilizada para igualar com (2.48), da qual obtém-se a expressão

$$\frac{GM}{r_p}(e-1) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}. \quad (2.49)$$

Podemos reelaborar a relação acima reescrevendo o momento angular. Nesse sentido, utilizando as equações (2.13) e (2.15), podemos igualar elas para obter

$$\frac{h^2}{2r_c^2}(e^2-1) = \frac{GM}{2r_p}(e-1), \quad (2.50)$$

e, portanto,

$$h = \sqrt{\frac{GM r_c^2}{r_p(1+e)}}, \quad (2.51)$$

lembrando que r_c foi definida na equação (2.8). Além disso pela equação (2.32), essa última expressão pode ser reduzida a

$$h = \sqrt{GM r_p(1+e)}. \quad (2.52)$$

Voltando para equação (2.49), substituindo essa última expressão para h e isolando \dot{r} , segue a relação:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{\frac{GM}{r_p}(e-1) - \frac{GM r_p(1+e)}{r^2} + \frac{2GM}{r}} \\ &= \sqrt{GM} \sqrt{\frac{e-1}{r_p} - \frac{r_p(1+e)}{r^2} + \frac{2}{r}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Essa equação admite separação de variáveis. Supondo que o planeta passa pelo ponto de periélio em $t = \tau$, obtém-se a seguinte equação integral

$$\int_{r_p}^r \frac{r}{\sqrt{2r + (e-1)r^2/r_p - (e+1)r_p}} dr = \sqrt{GM}(t - \tau). \quad (2.54)$$

Resolvendo a equação acima nos daria a dependência de r no tempo, que é o que desejamos. Para resolvê-la, vamos definir uma variável angular auxiliar E chamada anomalia elíptica, de tal forma que $E = 0$ no periélio e $E = \pi$ no afélio. Fazendo a substituição de variável:

$$r = \frac{r_p}{1-e}(1 - e \cos E), \quad (2.55)$$

cuja diferencial é dada por

$$dr = \frac{r_p}{1-e} e \sin E dE. \quad (2.56)$$

Em termos de E , o denominador da integral (2.54) é simplificado:

$$\sqrt{2r + (e-1)\frac{r^2}{r_p} - (e+1)r_p} = \sqrt{\frac{r_p}{1-e} e^2 \sin^2 E}. \quad (2.57)$$

Usando esse resultado e lembrando que $a = r_p/(1-e)$, o integrando da equação (2.54) se reduz a

$$\frac{a^2(1 - e \cos E)e \sin E dE}{\sqrt{ae} \sin E} = \sqrt{a^3}(1 - \cos E)dE. \quad (2.58)$$

Segue, portanto, a igualdade:

$$\int_0^E (1 - e \cos E)dE = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - \tau). \quad (2.59)$$

Essa integral é facilmente resolvida e nos sobra a seguinte equação:

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - \tau), \quad (2.60)$$

isto é,

$$E - e \sin E = \mathcal{M}, \quad (2.61)$$

em que denotamos $\mathcal{M} = n(t - \tau)$, $n = 2\pi/T$ e T é o período orbital (esta relação é verificada pela terceira lei de Kepler). Chamamos \mathcal{M} de anomalia média. Veja que, novamente, quando $\mathcal{M} = 0$, o planeta está no ponto de periélio e quando $\mathcal{M} = \pi$, o planeta está no ponto de afélio. A equação (2.61) é a equação de Kepler que queríamos encontrar [3].

O ângulo θ da coordenada polar que representa a posição verdadeira do planeta é chamado de anomalia verdadeira. A anomalia elíptica E pode ser construída da seguinte forma: desenhando uma circunferência tangente à elipse com mesmo centro C da elipse e raio igual ao semi eixo maior a , projeta-se a posição do planeta na circunferência verticalmente. Sendo P o ponto da projeção e F o foco ocupado pelo Sol, o ângulo E é dado pelo ângulo $\angle FCP$. Já a anomalia média \mathcal{M} , pode ser vista como a posição angular ocupada

pelo planeta se sua órbita fosse circular. A Figura 2.7 representa todos esses ângulos da maneira que foi descrita.

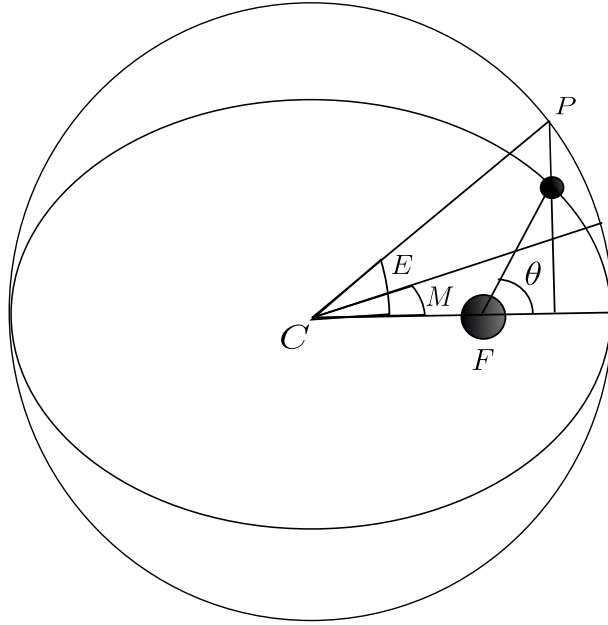


Figura 2.7: Representação das anomalias média M , elíptica E e verdadeira θ representadas geometricamente na elipse da órbita com foco F e centro C .

Voltando para equação (2.61), queremos resolve-la para encontrar E em cada instante de tempo para então obter r pela equação (2.55). Entretanto essa equação é transcendental, ou seja, não existe uma maneira algébrica de resolver, apenas métodos computacionais podem encontrar sua raiz com precisão. Contudo, para $e \ll 1$, podemos utilizar o seguinte desenvolvimento para obter o valor de E com grande precisão [8].

Iniciamos reescrevendo a equação de Kepler (2.61) na forma,

$$E = e \operatorname{sen} E + \mathcal{M}. \quad (2.62)$$

Supondo que e seja muito pequeno, podemos escrever $E = \mathcal{M}$. Ou seja em uma primeira aproximação obtém-se

$$E_1 = \mathcal{M} + e \operatorname{sen} \mathcal{M}. \quad (2.63)$$

Agora, esse ultimo valor obtido pode ser novamente utilizado para substituir na equação original (2.62) e obter uma segunda aproximação do valor de E :

$$E_2 = \mathcal{M} + e \operatorname{sen}(\mathcal{M} + e \operatorname{sen} \mathcal{M}) \quad (2.64)$$

$$= \mathcal{M} + e \operatorname{sen} \mathcal{M} \cos(e \operatorname{sen} \mathcal{M}) + e \operatorname{sen}(e \operatorname{sen} \mathcal{M}) \cos \mathcal{M}. \quad (2.65)$$

Expandindo as funções $\operatorname{sen}(e \operatorname{sen} \mathcal{M})$ e $\cos(e \operatorname{sen} \mathcal{M})$ em série de Taylor, verificamos que

$$\begin{aligned} E_2 &= \mathcal{M} + e \operatorname{sen} \mathcal{M} \left(1 - \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \mathcal{M}}{2!} + \dots \right) + e \cos \mathcal{M} \left(e \operatorname{sen} \mathcal{M} - \frac{e^3 \operatorname{sen}^3 \mathcal{M}}{3!} + \dots \right) \\ &= \mathcal{M} + e \operatorname{sen} \mathcal{M} + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2\mathcal{M} + \dots \end{aligned} \quad (2.66)$$

Seguindo dessa maneira, podemos iterar os resultados encontrados para cada E_n sucessivamente e obter aproximações com erros cada vez menores para o valor de E . Ou seja, dado a aproximação de n -ésima ordem, o valor de E_{n+1} é dado por

$$E_{n+1} = \mathcal{M} + e \operatorname{sen} E_n. \quad (2.67)$$

Vale reforçar que esse método é válido para e pequeno (muito menor do que 1). Se e for muito próximo de 1 a convergência ocorre lentamente. Por outro lado, quanto menor o valor de e mais rápido ela converge para o valor verdadeiro.

Para obter completamente a posição de um planeta em função do tempo, só nos falta encontrar a anomalia verdadeira em função do tempo. Para isso, vamos escrevê-la em função de E . As equações (2.47) e (2.55) podem ser igualadas, fornecendo

$$\frac{1+e}{1+e \cos \theta} = \frac{1-e \cos E}{1-e}. \quad (2.68)$$

Utilizando duas identidades trigonométricas e a equação (2.68), obtemos

$$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta = \frac{2(1-e) \cos^2 \left(\frac{E}{2}\right)}{1-e \cos E} \quad (2.69)$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta = \frac{2(1+e) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{E}{2}\right)}{1-e \cos E}. \quad (2.70)$$

Agora dividindo ambas equações, encontramos a relação desejada:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (2.71)$$

Observe que existe um caso trivial que é quando a órbita é circular, ou seja, $e = 0$. Nesse caso a distância r é constante e $\theta = E$.

Para resumir todo desenvolvimento desta seção. Definimos o parâmetro auxiliar E para resolver a integral (2.54) que nos dá a dependência da posição radial de um planeta no tempo. Com isso, encontramos a equação de Kepler, que quando resolvida fornece E para um dado instante de tempo e, dessa maneira, podemos calcular r e θ pelas equações (2.55) e (2.71), respectivamente.

2.6 Precessão dos periélios

Até agora, consideramos apenas a interação entre dois corpos, em geral o Sol e algum outro planeta. Mas o sistema solar é composto por oito planetas. Quando a interação de todos esses corpos são levados em consideração, encontramos fenômenos de pequena escala, e um deles é a precessão do periélio.

Ao encontrar a órbita de um corpo menor em torno de um maior fixo, verificamos que a órbita é elíptica e é mantida fixa, ou seja, o periélio e afélio são mantidos nos mesmos pontos. Vamos focar em como isso é afetado ao considerar a força de outros planetas [3].

Para iniciar, precisamos desenvolver uma equação para o ângulo apsidal. Esse ângulo é dado pelo ângulo que um planeta se move ao ir de uma distância mínima da órbita até a máxima seguinte. Assim, suponha que um planeta sofre ação de uma força central $f(r)$ (força por unidade de massa). Se tal planeta executa movimento circular de raio r_c , a equação (1.21) nos diz que

$$f(r_c) = -\frac{h^2}{r_c^3}. \quad (2.72)$$

Agora considere pequenas oscilações em torno do raio de órbita circular. Escrevendo $x = r - r_c$, podemos utilizar a equação (1.21) novamente para encontrar

$$\ddot{x} - \frac{h^2}{(r_c + x)^3} = f(r_c + x). \quad (2.73)$$

Expandindo em termos de x/r_c , e utilizando a equação (2.72), encontramos

$$\ddot{x} + \left(-\frac{3f(r_c)}{r_c} - f'(r_c) \right) x = 0. \quad (2.74)$$

Essa equação diferencial é muito bem conhecida. Quando o coeficiente acompanhando x é positivo, ela representa um oscilador harmônico. Se isso acontecer, vemos que um planeta pode oscilar radialmente em torno do raio cuja órbita seria circular. Por outro lado, se este termo for negativo, obtemos uma exponencial, ou seja, pequenas perturbações em torno do movimento circular faz com que o corpo saia deste estado de equilíbrio. Em outras palavras, a órbita é instável.

Da equação diferencial (2.74) podemos obter a velocidade angular ω da oscilação em torno do raio. Ela é dada por

$$\omega = \sqrt{-\frac{3f(r_c)}{r_c} - f'(r_c)}, \quad (2.75)$$

da qual concluímos que o período de oscilação é

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{3f(r_c)}{r_c} - f'(r_c)}}. \quad (2.76)$$

Como o ângulo apsidal ψ é determinado pelo tempo para ir de um mínimo a um máximo seguinte, temos que ele é dado por

$$\psi = \frac{T}{2} \dot{\theta}. \quad (2.77)$$

Para $\dot{\theta}$ aproximadamente constante, podemos utilizar (2.72) para obter

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r_c^2} = \sqrt{-\frac{f(r_c)}{r_c}} \quad (2.78)$$

e, finalmente, encontramos que ψ é dada por

$$\psi = \pi \left(3 + r_c \frac{f'(r_c)}{f(r_c)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.79)$$

Com esse resultado, podemos iniciar efetivamente o cálculo da precessão do periélio. O método que será utilizado é devido a Carl Friedrich Gauss (1777-1855). A ideia é considerar os outros planetas do sistema solar como anéis concêntricos centrados no Sol. Vamos enumerar a massa de cada planeta por M_i (de maneira crescente em relação a posição relativa ao Sol) e o raio por R_i , assim o i -ésimo planeta possui massa M_i e raio

R_i , enquanto o Sol possui massa M_0 . Claramente i varia de 1 a 8. É possível provar que a energia potencial que um anel uniforme de massa M e raio a gera em uma massa m é dada por [3]

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{GmM}{r} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{9}{64} \left(\frac{a}{r} \right)^4 + \dots \right) & \text{se } r > a \\ -\frac{GmM}{a} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{9}{64} \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \dots \right) & \text{se } r < a \end{cases}$$

Vamos considerar o i -ésimo planeta no sistema solar. Esse planeta deve sofrer a ação de todos os outros e mais o Sol. Entretanto, existem dois tipos de contribuições no potencial, um é dos planetas de ordem menor do que i e outro é dos planetas de ordem maior do que i . Com essas considerações, o potencial do i -ésimo planeta é

$$V(R_i) = -\frac{GM_0}{R_i} - \sum_{j < i} \frac{GM_j}{R_i} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^2 + \dots \right] + \sum_{j > i} \frac{GM_j}{R_j} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.80)$$

Com isso, podemos cacular o módulo da força resultante que age sobre esse planeta:

$$f(R_i) = -\frac{GM_0}{R_i^2} - \sum_{j < i} \frac{GM_j}{R_i^2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^2 + \dots \right] + \sum_{j > i} \frac{GM_j}{R_i R_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^2 + \frac{9}{16} \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^4 + \dots \right]. \quad (2.81)$$

Agora, estamos interessados em calcular o ângulo apsidal do i -ésimo planeta pela equação (2.32). Vamos fazer isso por partes, primeiro temos, da expressão da força,

$$R_i \frac{df(R_i)}{dR_i} = \frac{2GM_0}{R_i} + \frac{G}{R_i^2} \sum_{j < i} M_j \left[2 + 3 \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^2 + \dots \right] + \frac{G}{R_i^2} \sum_{j > i} M_j \left(\frac{R_i}{R_j} \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^2 + \frac{27}{16} \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^4 + \dots \right]. \quad (2.82)$$

Disso (e depois de muita álgebra que omitiremos) segue que o ângulo apsidal é dado por

$$\psi_i = \pi + \frac{3\pi}{4} \sum_{j < i} \frac{M_j}{M_0} \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^2 \left[1 + \frac{15}{8} \left(\frac{R_j}{R_i} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.83)$$

$$+ \frac{3\pi}{4} \sum_{j > i} \left(\frac{M_j}{M_0} \right) \left[1 + \frac{15}{8} \left(\frac{R_i}{R_j} \right)^2 + \dots \right]. \quad (2.84)$$

Queremos saber o quanto esse ângulo avança a cada volta completa, isto é equivalente

a saber como o periélio muda a cada período. Se o periélio e afélio fossem fixos, tal ângulo valeria π , entretanto vemos que é somado uma quantidade positiva, ou seja, em meio período, esta é a precessão que o planeta sofre. Logo, para um período completo, obtemos que a precessão do periélio é dada por

$$\begin{aligned} \delta\psi_i = \frac{3\pi}{2} \sum_{j<i} \frac{M_j}{M_0} \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^2 \left[1 + \frac{15}{8} \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^2 + \dots\right] \\ + \frac{3\pi}{2} \sum_{j>i} \left(\frac{M_j}{M_0}\right) \left[1 + \frac{15}{8} \left(\frac{R_i}{R_j}\right) + \dots\right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Para alguns planetas, esse cálculo se mostra próximo do experimental. Para a Terra, por exemplo, observa-se uma precessão de aproximadamente $0,00318^\circ$ por ano, enquanto a equação (2.85) nos dá $0,00329^\circ$ por ano. Para outros planetas os resultados podem demonstrar grande discrepância. Claramente refinamentos clássicos podem ser feitos para se obter melhores resultados, mas para Mercúrio, que é o planeta mais próximo do Sol, resultados precisos são encontrados apenas levando em consideração a relatividade geral. Tal efeito é causado pela curvatura do espaço-tempo na vizinhança do Sol [12].

Apesar dessa discrepância, uma importante observação pode ser feita aqui. Provamos que, de fato, o periélio dos planetas sofrem precessão devido a influência dos outros planetas, apesar desse efeito ser claramente pequeno (entretanto observável em longos períodos de tempo).

Outros fenômenos que não trataremos aqui, mas podem ser estudados com as ferramentas vistas neste trabalho são as forças de Maré e o limite de Roche. A força de Maré acontece devido a variação da gravidade ao longo de um corpo extenso, o que deixa o corpo oblíquo. Enquanto que o limite de Roche surge da força de Maré, que é a distância mínima que um satélite pode estar de um planeta sem que sua gravidade o destrua devido a tais forças de Maré [9].

Capítulo 3

Problema de três corpos

No capítulo 2, desenvolvemos todo o problema de dois corpos e descobrimos que podemos encontrar a solução da trajetória de um corpo orbitando outro, em outras palavras, fomos capazes de resolver sua equação diferencial. Neste capítulo, iremos explorar o problema de três corpos, em particular, o problema restrito de três corpos. Como veremos, tal problema não possui solução analítica, entretanto, resultados muito interessantes podem ser retirados sem resolver sua equação diferencial algebricamente.

3.1 O problema restrito de três corpos

Para iniciar o estudo do problema restrito de três corpos, vamos ver um pouco do problema geral. Temos três massas m_1 , m_2 e m_3 , com posições \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 , respectivamente. Como vamos considerar apenas a atração gravitacional mútua desses corpos, as equações de movimento podem ser facilmente escritas [3]:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = G \frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + G \frac{m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2), \quad (3.2)$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = G \frac{m_3 m_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + G \frac{m_3 m_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \quad (3.3)$$

Cada uma dessas equações representam outras três equações (uma para cada coordenada), resultando em nove equações diferenciais acopladas. Claramente, esse sistema de equações é extremamente difícil de ser resolvido. Diferente do problema de dois corpos, para o problema de três corpos, não é conhecido uma mudança conveniente das coordenadas para reduzir e simplificar o problema. Por esse motivo, ao invés de considerar o problema geral, analisaremos um caso particular que é o problema restrito de três corpos [3].

Considere dois corpos grandes, de massas m_1 e m_2 , em órbita circular, de raio R , entre si, interagindo via suas atrações gravitacionais, com velocidade angular dada por (2.27). Esses corpos são conhecidos como primárias. Vamos supor que o movimento das primárias não são perturbados por outros. Considere, então, um terceiro corpo de massa $m_3 \ll m_1, m_2$, que orbita os outros maiores. Um sistema semelhante seria um cometa, Júpiter e o Sol. O nosso principal interesse é estudar o corpo menor. Perceba que esse é o único que não conhecemos a órbita e suas propriedades.

Chamando $\mu_1 = Gm_1$ e $\mu_2 = Gm_2$, ao estudar esse problema é comum definirmos as unidades de medida de forma que $R = 1$ e $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ou equivalentemente $GM = 1$. Fazendo $\mu_2 = \mu$, teríamos $\mu_1 = 1 - \mu$, de forma que se μ_1 corresponde ao Sol, e μ_2 a qualquer outro planeta, então a massa do Sol é aproximadamente 1. Com essa, convenção tem-se $\omega = 1$, $\mu_1 = r_2$ e $\mu_2 = r_1$, mas continuaremos explicitando essas variáveis para ganhar em clareza. As coordenadas cartesianas (ξ, η, ζ) serão tomadas de forma que os corpos maiores em órbita circular estão inicialmente no eixo ξ e sempre no plano $\xi - \eta$. Já a massa m_3 é livre para se mover no espaço, como ilustra na figura (3.1).

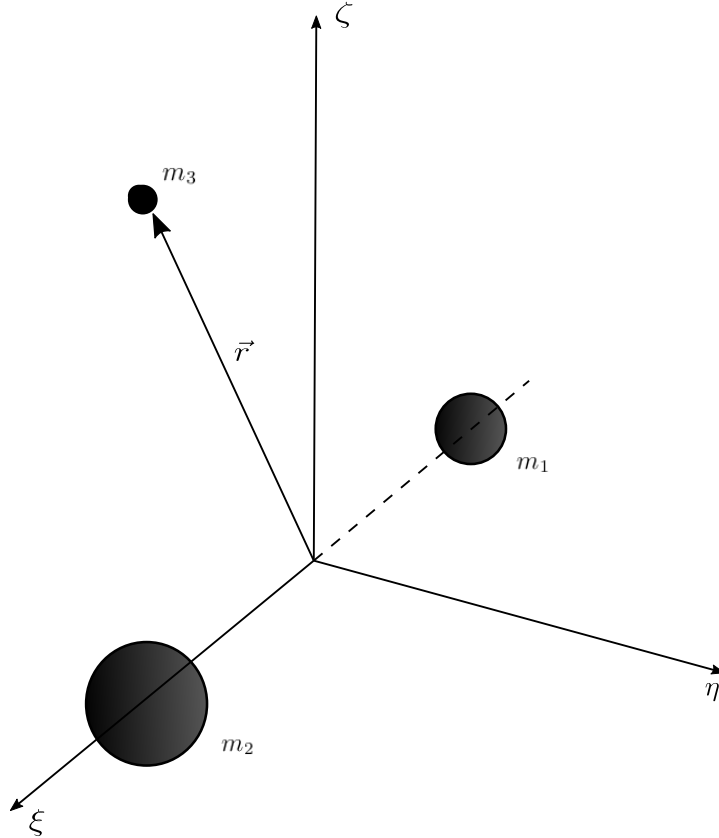


Figura 3.1: Representação das coordenadas no problema de três corpos restrito, em que as primárias m_1 e m_2 estão restritos ao plano $\xi - \eta$.

Dessa forma, as distâncias ρ_1 e ρ_2 do corpo m_3 até os corpos m_1 e m_2 , respectivamente, devem ser dadas por:

$$\rho_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2}, \quad (3.4)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2}. \quad (3.5)$$

Assim, as equações para cada coordenada de m_3 são

$$\ddot{\xi} = \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\xi - \xi_1) + \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi - \xi_2), \quad (3.6)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\eta - \eta_1) + \frac{\mu}{\rho_2^3}(\eta - \eta_2), \quad (3.7)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{1-\mu}{\rho_1^3}\zeta + \frac{\mu}{\rho_2^3}\zeta. \quad (3.8)$$

Essas são as equações que regem o movimento de m_3 nesse sistema. Perceba que a quantidade de equações foi reduzida para 3, uma vez que os movimentos de m_1 e m_2 já são conhecidos.

3.2 Mudança de referencial e integral de Jacobi

O movimento de m_3 não preserva algumas das grandezas que eram preservadas no problema de dois corpos, como a energia e o momento angular. Este último, nos obriga a considerar o movimento no espaço e não restrito ao plano, uma vez que não conseguimos garantir se ele estará contido em um plano.

Em busca de uma constante de movimento, vamos fazer uma mudança de referencial [3]. Como visto na seção 3.1, a velocidade angular ω dos corpos m_1 e m_2 é dada por (2.27). Dessa maneira, considere o referencial que gira com velocidade angular ω . Nesse referencial, o corpo m_3 sente a atração gravitacional de m_1 e m_2 , e além disso, tem-se a adição da força de Coriolis e força centrífuga, de forma que a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}\vec{\rho}_1 - \frac{\mu}{\rho_2^3}\vec{\rho}_2 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (3.9)$$

em que $\vec{\rho}_1 = (x - x_1)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e $\vec{\rho}_2 = (x - x_2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Escolhamos as coordenadas de forma que $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ e as massas m_1 e m_2 estão em repouso no eixo x . A posição de m_3 neste referencial é dada por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, e a velocidade por $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$. Assim obtemos os seguintes produtos vetoriais:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \omega\hat{k} \times (\omega\hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})) \\ &= \omega\hat{k} \times (\omega x\hat{j} - \omega y\hat{i}) \\ &= -\omega^2 x\hat{i} - \omega^2 y\hat{j} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{v} &= \omega\hat{k} \times (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) \\ &= \omega\dot{x}\hat{j} - \omega\dot{y}\hat{i}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sejam $(x_1, 0, 0)$ e $(x_2, 0, 0)$ as posições de m_1 e m_2 respectivamente. Com as equações (3.9), (3.10) e (3.11), obtemos três igualdades:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{(1-\mu)(x-x_1)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(x-x_2)}{\rho_2^3} + \omega^2 x, \quad (3.12)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{(1-\mu)y}{\rho_1^3} - \frac{\mu y}{\rho_2^3} + \omega^2 y, \quad (3.13)$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{\rho_1^3} - \frac{\mu z}{\rho_2^3}. \quad (3.14)$$

O potencial gravitacional somado ao potencial centrífugo é dado por

$$U = -\frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} - \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2}. \quad (3.15)$$

Suas derivadas parciais são exatamente os lados direito das equações (3.12), (3.13) e (3.14). Assim essas equações podem ser reescritas como

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.16)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.17)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Multiplicando (3.16) por \dot{x} , (3.17) por \dot{y} e (3.18) por \dot{z} , segue que

$$\ddot{x}\dot{x} - 2\omega\dot{y}\dot{x} = -\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\ddot{y}\dot{y} + 2\omega\dot{x}\dot{y} = -\dot{y}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.20)$$

$$\ddot{z}\dot{z} = -\dot{z}\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.21)$$

Somando as três igualdades obtidas acima, temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = \ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} \quad (3.22)$$

$$= - \left(\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (3.23)$$

$$= -\frac{dU}{dt}. \quad (3.24)$$

Logo,

$$C = -2U - v^2 \quad (3.25)$$

em que $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ é a velocidade do corpo m_3 e C uma constante. Essa é a constante de Jacobi [3] (é comum que essa constante apareça na forma $2U - v^2$ em alguns livros, entretanto isto é dado apenas por uma mudança de sinal na equação (3.15)). Ela é particularmente especial por ser a única constante de movimento conhecida para o problema de três corpos restritos e nos ajudará a obter outros resultados. Ela também serve como base para o critério de Tisserand, que tem como objetivo investigar se um determinado cometa em observação é o mesmo que outro visto anteriormente.

3.3 Pontos de Lagrange

Como visto na seção 3.2, no referencial não inercial adotado, devemos considerar os efeitos das forças de Coriolis e centrífuga. Esses efeitos permitem a existência de pontos de equilíbrio estático nesse referencial. Para isso acontecer, basta que a derivada do potencial resultante em um determinado local do espaço seja 0, ou seja, a força centrífuga se iguale a força gravitacional [7].

Seguindo essa linha de raciocínio, buscaremos tais pontos conhecidos como pontos de Lagrange que foram definidos e estudados pela primeira vez pelo matemático Joseph-Louis Lagrange. Esses pontos devem satisfazer $\vec{r} = \ddot{\vec{r}} = 0$.

Pela equação (3.14), temos

$$\left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right) z = 0 \quad (3.26)$$

e como o primeiro fator da multiplicação é maior do que 0, sobra que $z = 0$. Portanto, todos pontos de Lagrange se encontram no plano $x-y$. Por outro lado, as equações (3.12) e (3.13) nos dizem que

$$-\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{\rho_2^3} + x = 0 \quad (3.27)$$

$$-\frac{(1-\mu)y}{\rho_1^3} - \frac{\mu y}{\rho_2^3} + y = 0 \quad (3.28)$$

Aqui foi utilizado que $\omega = 1$, $\vec{r}_2 = (1-\mu)(1, 0, 0)$ e $\vec{r}_1 = -\mu(1, 0, 0)$ (convenção feita na seção 3.1 ao definir as unidades de medida), de forma que $x_1 = -\mu$ e $x_2 = 1-\mu$.

Caso 1: Soluções com $y = 0$.

O primeiro tipo de solução encontrada é quando $y = 0$. Nesse caso,

$$\rho_1 = \sqrt{(x+\mu)^2}, \quad (3.29)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x-(1-\mu))^2}. \quad (3.30)$$

Substituindo na equação (3.27), obtemos

$$-\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\left(\sqrt{(x+\mu)^2}\right)^3} - \frac{\mu(x-(1-\mu))}{\left(\sqrt{(x-(1-\mu))^2}\right)^3} + x = 0. \quad (3.31)$$

Supondo $1-\mu > \mu$, essa equação deve ser dividida em outros três casos:

$$-\frac{1-\mu}{(x-(1-\mu))^2} - \frac{\mu}{(x+\mu)^2} + x = 0 \quad , \quad x > 1-\mu, \quad (3.32)$$

$$\frac{1-\mu}{(x-(1-\mu))^2} - \frac{\mu}{(x+\mu)^2} + x = 0 \quad , \quad \mu < x < 1-\mu, \quad (3.33)$$

$$\frac{1-\mu}{(x-(1-\mu))^2} + \frac{\mu}{(x-\mu)^2} + x = 0 \quad , \quad x < -\mu. \quad (3.34)$$

Cada uma dessas equações nos fornecem apenas uma solução válida para nosso pro-

blema.

Dessa forma encontramos três pontos de Lagrange que estão na reta que contém as primárias. Perceba que a equação (3.32) fornece um ponto de estabilidade a direita do corpo menor, denotado por L_2 , enquanto a equação (3.33) fornece um ponto entre as primárias, denotado por L_1 e a equação (3.34) um ponto a esquerda do corpo maior, denotado por L_3 .

Caso 2: Soluções com $y \neq 0$.

Todos pontos encontrados anteriormente estão na reta em que $y = 0$, nos faltam então, encontrar os pontos fora dessa reta. Quando $y \neq 0$, a equação (3.28) nos dá

$$-\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 1 = 0 \quad (3.35)$$

Multiplicando por $x + \mu$, obtemos

$$-\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(x+\mu)}{\rho_2^3} + x + \mu = 0. \quad (3.36)$$

Subtraindo a equação (3.36) da (3.27), obtém-se

$$\frac{\mu}{\rho_2^3} - \mu = 0. \quad (3.37)$$

Dessa forma, encontramos que $\rho_2 = 1$. Uma vez obtido ρ_2 , podemos encontrar ρ_1 substituindo ρ_2 na equação (3.35). Mas dessa vez, encontramos que $\rho_1 = 1$, ou seja $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Temos, então,

$$(x + \mu)^2 + y^2 = (x - (1 - \mu))^2 + y^2 = 1. \quad (3.38)$$

Pela primeira igualdade, encontramos $x = 1/2 - \mu$, e com este valor de x , obtemos $y = \sqrt{3}/2$ e $y = -\sqrt{3}/2$, pela segunda igualdade. Ou seja, quando $y \neq 0$, existem dois pontos de Lagrange com coordenadas $(1/2 - \mu, \sqrt{3}/2, 0)$ e $(1/2 - \mu, -\sqrt{3}/2, 0)$, que denotaremos por L_4 e L_5 .

É interessante observar que ambos pontos de Lagrange L_4 e L_5 estão a distância unitária das primárias, e as primárias estão a distância unitária entre si, e portanto, cada um desses pontos de Lagrange são vértices de um triângulo equilátero junto com as primárias [7].

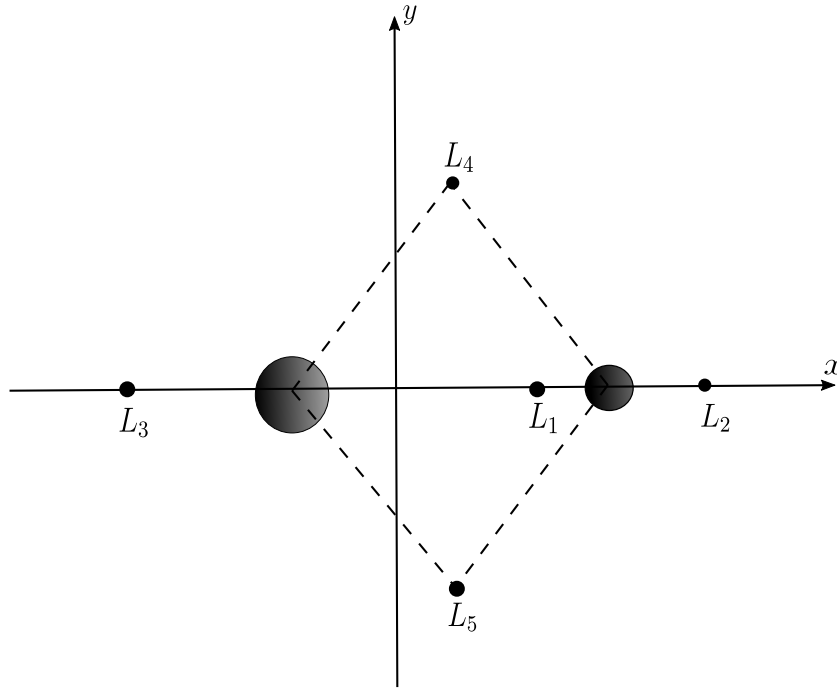


Figura 3.2: Representação da localização dos 5 pontos de Lagrange em um sistema de dois corpos quaisquer.

A Figura 3.2 representa exatamente a posição dos pontos de Lagrange L_i ($i = 1, \dots, 5$). Esses pontos permitem que corpos colocados lá fiquem em repouso no referencial girando e, portanto, no referencial inercial que observa as primárias girando, esse corpo acompanha o movimento das primárias em outro movimento circular.

3.4 Estabilidade dos pontos de Lagrange

Uma das principais questões quando se estuda pontos de equilíbrio é sua estabilidade. Um ponto de equilíbrio pode ser estável ou instável. No primeiro caso, pequenas perturbações sobre um corpo nesse tipo de equilíbrio não irá tirá-lo de sua posição de equilíbrio, e no segundo caso, pequenas perturbações podem fazer com que o corpo escape desse estado. No contexto dos pontos de Lagrange, essas perturbações podem ser outros planetas que passam próximo desses pontos, perturbando corpos que habitam esses lugares do espaço [7].

Para facilitar a notação, vamos denotar a derivada de U na direção \hat{j} por U_j . Dessa forma, temos pela equação (3.18) que a segunda derivada de U na direção de \hat{z} é dada por:

$$U_{zz} = \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} > 0. \quad (3.39)$$

Portanto, qualquer ponto de Lagrange é estável para pequenas perturbações no eixo z .

Para o eixo x e y , vamos definir as variáveis $\alpha = x - x_0$ e $\beta = y - y_0$, que representam as posições relativas ao ponto de equilíbrio, ou seja, variáveis de perturbações em torno do equilíbrio. Por definição, os pontos de Lagrange satisfazem

$$U_\alpha = U_\beta = 0. \quad (3.40)$$

Com isso, a linearização (via polinômio de Taylor) em pontos da vizinhança do equilíbrio, é dada por:

$$U_\alpha = U_{xx}\alpha + U_{xy}\beta, \quad (3.41)$$

$$U_\beta = U_{xy}\alpha + U_{yy}\beta. \quad (3.42)$$

Substituindo as derivadas linearizadas nas equações (3.16) e (3.17), e utilizando o fato que $\omega = 1$, encontramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} &= -U_{xx}\alpha - U_{xy}\beta, \\ \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} &= -U_{xy}\alpha - U_{yy}\beta. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Agora vamos analisar casos separados dos pontos de Lagrange.

Caso 1: Estabilidade dos pontos L_1 , L_2 e L_3 .

Os pontos L_1 , L_2 e L_3 são caracterizados por $y = 0$. Dessa forma, na vizinhança desses pontos temos $\rho_1 \simeq |x + \mu|$ e $\rho_2 \simeq |x - (1 - \mu)|$. Assim, pela equação (3.15), podemos escrever

$$U_{xx} = -1 - 2\gamma, \quad (3.44)$$

$$U_{yy} = -1 + \gamma, \quad (3.45)$$

$$U_{xy} = 0, \quad (3.46)$$

em que $\gamma = (1 - \mu)/\rho_1^3 + \mu/\rho_2^3$. Essas últimas equações, junto com as equações da (3.43), nos fornecem duas equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} &= (1 + 2\gamma)\alpha, \\ \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} &= (1 - \gamma)\beta. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vamos supor soluções do tipo $\alpha = Ae^{\omega t}$ e $\beta = Be^{\omega t}$. Substituindo em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} A\omega^2 - 2B\omega &= (1 + 2\gamma)A, \\ B\omega^2 + 2A\omega &= (1 - \gamma)B. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Resolvendo o sistema encontramos a relação:

$$\omega^4 + \omega^2(2 - \gamma) + (1 - \gamma)(1 + 2\gamma). \quad (3.49)$$

Se estivermos interessados em soluções de equilíbrio estável, precisamos que ω seja puramente imaginário, para que o movimento seja do tipo restaurador no ponto de equilíbrio. Para isso acontecer as duas soluções de (3.49) para ω^2 devem ser negativas, de forma que,

$$(1 - \gamma)(1 + 2\gamma) > 0. \quad (3.50)$$

Como $1 + 2\gamma > 1 - \gamma$, basta que $\gamma > 1$. Por outro lado, a equação (3.27), mostra que

$$x - x \left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \right) = \mu(1-\mu) \left(\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho_2^3} \right), \quad (3.51)$$

$$1 - \gamma = \frac{\mu(1-\mu)}{x} \left(\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho_2^3} \right). \quad (3.52)$$

Para continuar a análise precisaríamos dos valores numéricos das posições dos pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 . Entretanto observando a Figura 3.2, podemos concluir que para L_3 , tem-se $x < 0$ e $1/\rho_1^3 - 1/\rho_2^3 > 0$, enquanto que para L_2 e L_3 , verifica-se $x > 0$ e $1/\rho_1^3 - 1/\rho_2^3 < 0$. Em todos casos concluímos que $\alpha < 1$. Portanto, os pontos L_1 , L_2 e L_3 são pontos de instabilidade.

Caso 2: Estabilidade dos pontos L_4 e L_5

Os pontos L_4 e L_5 possuem coordenadas $(1/2 - \mu, \pm\sqrt{3}/2)$. Dessa vez não é possível fazer a aproximação feita no caso 1 para ρ , então precisamos calcular as derivadas de U por completo. Novamente utilizamos a equação (3.15) para obter:

$$U_{xx} = 1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)(x-\mu)^2}{\rho_1^5} + \frac{3m(x-(1-\mu))^2}{\rho_2^5}, \quad (3.53)$$

$$U_{yy} = 1 - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)y^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu y^2}{\rho_2^5}, \quad (3.54)$$

$$U_{xy} = \frac{3(1-\mu)(x-\mu)y}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(x-(1-\mu))y}{\rho_2^5}. \quad (3.55)$$

Substituindo as coordenadas do ponto L_4 , obtemos

$$U_{xx} = \frac{3}{4}, \quad (3.56)$$

$$U_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - m \right), \quad (3.57)$$

$$U_{yy} = \frac{9}{4}. \quad (3.58)$$

Seguindo o mesmo raciocínio do caso 1, as equações para as variáveis α e β são dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} &= \frac{3}{4}\alpha + \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \beta, \\ \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \alpha + \frac{9}{4}\beta. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Novamente, iremos tentar soluções do tipo $\alpha = Ae^{\omega t}$ e $\beta = Be^{\omega t}$. Isso nos leva a um sistema de equações:

$$\left(\omega^2 - \frac{3}{4}\right) A = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + 2\omega\right] B, \quad (3.60)$$

$$\left[2\omega - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\right] A = \left(\frac{9}{4} - \omega^2\right) B. \quad (3.61)$$

Dividindo ambas equações, e após algumas álgebras, encontramos a seguinte equação algébrica para ω :

$$4\omega^4 + 4\omega^2 + 27\mu(1 - \mu) = 0. \quad (3.62)$$

Para que o equilíbrio seja estável, é necessário que ω^2 seja um número real negativo e isso ocorre quando o discriminante de (3.62) é maior do que 0, ou seja,

$$1 - 27\mu + 27\mu^2 > 0. \quad (3.63)$$

Concluimos que nos pontos L_4 e L_5 , encontramos equilíbrio estável para $\mu < 1/2 - \sqrt{23}/108 \simeq 0,0385$. No sistema solar, qualquer sistema de três corpos constituído pelo Sol e algum outro planeta nas primárias, terão equilíbrio estável nesses pontos.

A nossa conclusão final é que L_1 , L_2 e L_3 são pontos de equilíbrio instável, enquanto L_4 e L_5 são pontos estáveis. Obviamente, lugares espaciais tão curiosos como esses servem de grande utilidade para estudos espaciais.

Uma das consequências da existência de tais pontos são asteroides que orbitam nos pontos L_4 e L_5 , conhecidos como troianos. Júpiter foi o primeiro planeta em que se observou troianos nos seus pontos de Lagrange, e ao longo do tempo foram observados outros troianos que acompanham a órbita de outros planeta. A Terra teve seu primeiro troiano descoberto em 2010 nomeado 2010 TK₇, que orbita no ponto L_4 e possui aproximadamente 300 metros de diâmetro [1].

Os pontos de Lagrange também já foram utilizados para colocar sondas espaciais em órbita. Mais especificamente, utilizou-se os pontos L_1 , L_2 e L_3 , uma vez que L_4 e L_5 são geralmente ocupados por grande quantidade de poeira por serem pontos de equilíbrio estável.

3.5 Regiões de movimento proibido

Considere novamente a integral de Jacobi dada por (3.25). Perceba que

$$v^2 = -C - 2U > 0. \quad (3.64)$$

A relação $-C - 2U > 0$ permite estudar as regiões do espaço permitidas para o movimento da massa menor [8], que denotamos por m_3 na seção 3.1. Quando temos $C = -2U$, a velocidade de m_3 deve ser igual a 0, e obtemos uma superfície dada por:

$$\frac{2(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + x^2 + y^2 = C. \quad (3.65)$$

Essa superfície é conhecida como superfície de velocidade 0. Ela é particularmente importante pois ela forma a fronteira das regiões em que m_3 não pode movimentar, ou seja,

o corpo em órbita não pode cruzar essa superfície.

A Figura (3.3) representa as regiões em que a massa m_3 não pode ser encontrada no plano $x - y$, para diferentes valores da constante de Jacobi.

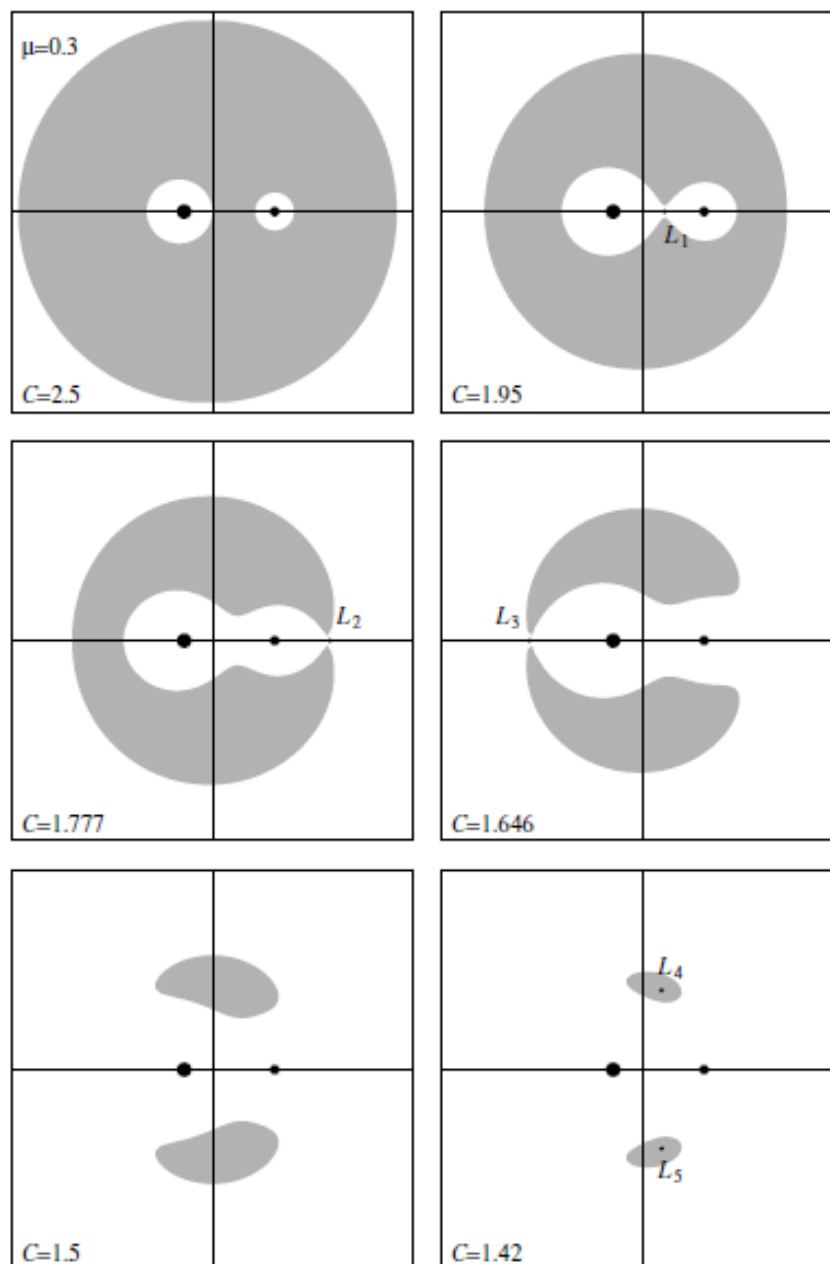


Figura 3.3: Regiões de movimento proibido (área cinza) para $\mu = 0, 3$, delimitadas por curvas de velocidade zero. Retirada da referência [3].

Perceba que para o maior valor da constante ($C = 2, 5$), a região em que m_3 pode se movimentar está separada em três outras regiões: duas em volta das primárias, e uma maior que contém o restante do espaço depois da superfície de velocidade zero. Isso significa que nesse caso, m_3 pode ter sua órbita em torno de uma das primárias, ou em torno de ambas com uma órbita mais aberta, entretanto, se ela está orbitando em torno de uma delas, ela não pode passar a orbitar a outra.

Quando diminuimos o valor de C , a região cinza diminui, e abre uma conexão no ponto L_1 , portanto, um corpo orbitando uma das primárias pode ser capturado pela órbita do

outro. Ao continuarmos a variar a constante de Jacobi, observamos que a região de movimento proibido diminui cada vez mais, abrindo outras conexões, até que toda região do espaço se torna dinamicamente permitida.

3.6 Solução triangular de Lagrange

Em 1772, Lagrange encontrou uma solução particular para o problema de três corpos. A solução dele consiste de três massas que permanecem nos vértices de um triângulo equilátero o tempo todo (Figura (3.4)) [7]. Dizemos que essa solução é estacionária no sentido que a configuração dos corpos permanecem a mesma enquanto eles descrevem uma trajetória.

A trajetória que cada corpo irá descrever é uma elipse em torno do centro de massa. Para provar isso, considere a configuração da Figura 3.4.

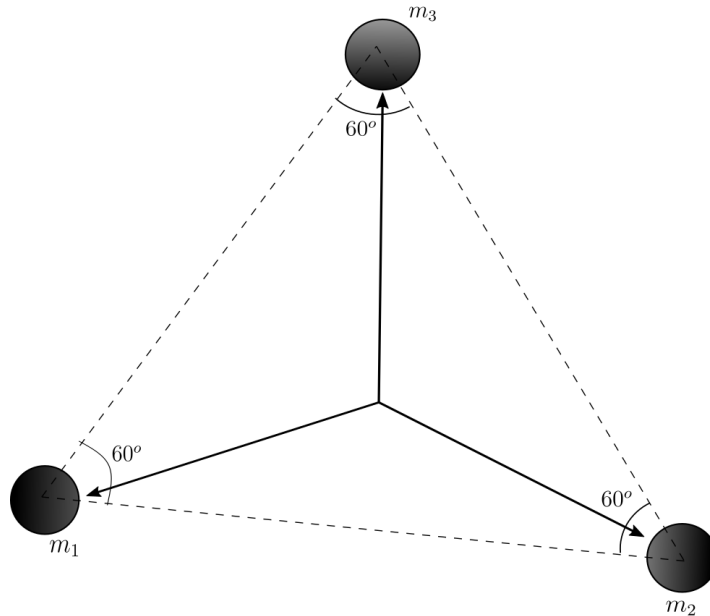


Figura 3.4: Representação da posição inicial de três corpos que formam os vértices de um triângulo equilátero.

Nessa configuração as massas ocupam os vértices de um triângulo equilátero. Sendo \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 as posições de m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente, relativo ao centro de massa, temos por definição de centro de massa que

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = \vec{0}. \quad (3.66)$$

Podemos reescrever essa equação da seguinte forma:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \vec{0}, \quad (3.67)$$

ou seja,

$$M\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_{12} - m_3\vec{r}_{13} = \vec{0}, \quad (3.68)$$

em que M é a massa total do sistema, \vec{r}_{12} e \vec{r}_{13} as posições das massas m_2 e m_3 relativas a

m_1 . Isolando o termo $M\vec{r}_1$ nessa equação e elevando ambos lados ao quadrado, obtemos a seguinte relação:

$$M^2 r_1^2 = m_2^2 r_{12}^2 + m_3^2 r_{13}^2 + 2m_2 m_3 \vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{13}. \quad (3.69)$$

Como a distância entre as massas devem ser iguais, podemos escrever $r_{12} = r_{13}$ e, além disso, o ângulo entre \vec{r}_{12} e \vec{r}_{13} deve ser 60° , ou seja, $\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{13} = m_2 m_3 r^2 / 2$. Portanto, a equação (3.69) fica

$$M^2 r_1^2 = (m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3) r^2. \quad (3.70)$$

Utilizando as equações (1.28) e (3.70), podemos encontrar a equação de movimento para m_1 :

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G \left(\frac{m_2 \vec{r}_{12} + m_3 \vec{r}_{13}}{r^3} \right) = GM \frac{\vec{r}_1}{r^3} \quad (3.71)$$

$$= -GM \left(\frac{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}{M^2} \right)^{3/2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = -GM_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}, \quad (3.72)$$

em que

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{3/2}}{M^2}. \quad (3.73)$$

Comparando a equação (2.25) com (3.72), vemos que encontramos o movimento de \vec{r}_1 análogo ao problema de dois corpos, e fazendo cálculos semelhantes, \vec{r}_2 e \vec{r}_3 obedecem a mesma estrutura de \vec{r}_1 . Portanto, existe uma configuração triangular do problema de três corpos, em que o movimento de cada um deles será uma elipse em torno do centro de massa, como ilustrado na Figura 3.5.

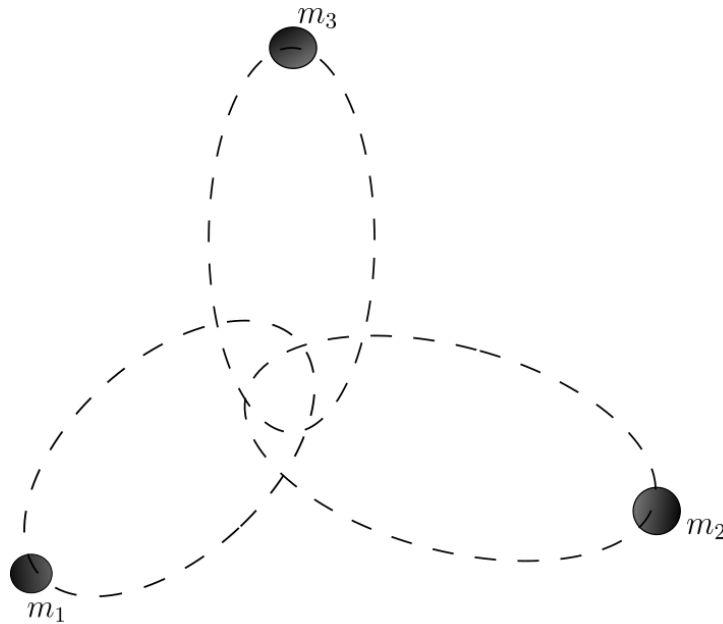


Figura 3.5: Ilustração do movimento de três corpos de massa m_1 , m_2 e m_3 na solução triangular de Lagrange. Cada corpo realiza uma trajetória elíptica em torno do centro de massa.

Considerações Finais

Após esse longo estudo sobre a interação de corpos em atração gravitacional, percebemos a beleza da mecânica clássica, que apesar de simples nos seus postulados, nos permite tirar resultados precisos sobre corpos celestes. A mecânica celeste, em particular, os problemas de dois corpos e três corpos, se provaram tópicos importantes para estudo. Analisando esses problemas, conseguimos encontrar diversos resultados a respeito da dinâmica no espaço que permitem aplicações para estudos espaciais. Além disso, como foi enfatizado diversas vezes, o problema de três corpos demonstra grande dificuldade de ser investigado e, por isso, recorreremos a casos particulares. Ademais, avanços nessa direção podem ser feitos e, claramente, podemos aumentar o número de massas para estudar o caso mais geral conhecido como problema de n -corpos. Em outras palavras, a mecânica celeste ainda possui avanços a serem feitos, que devem servir de inspiração para o interesse de estudantes.

Apêndice A

Cônicas

As cônicas são seções transversais obtidas através de um corte em um cone por um plano. As principais cônicas são a parábola, hipérbole e elipse. Nesse trabalho, essas formas geométricas foram importantes pois as possíveis órbitas encontradas no problema de dois corpos são compostas por cônicas.

Elipse

A elipse tem um papel central para entender como os planetas se comportam em torno do Sol, e obter resultados através de sua geometria. Vamos discutir um pouco de suas propriedades, a iniciar por sua definição [10].

Definição: Dados dois pontos F_1 e F_2 , o lugar geométrico de todos pontos P cuja soma das distâncias $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ é constante, é chamado elipse, e os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse.

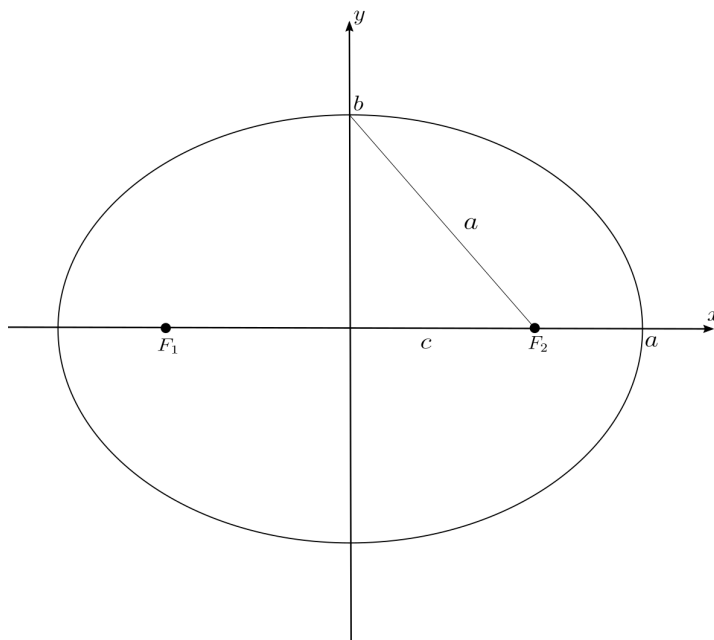


Figura A.1: Ilustração de uma elipse no plano cartesiano com focos F_1 e F_2 .

A distância a na Figura A.1, denominado semi-eixo maior, é a maior distância entre o centro da elipse e um ponto da elipse. Por outro lado, b é a menor dessas distâncias e é

denominado semi-eixo menor. A distância c é a distância entre o centro e um dos focos. Para essas três distâncias, vale a relação:

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (\text{A.1})$$

Outro elemento importante da elipse é a excentricidade $e = c/a$, que satisfaz $0 < e < 1$. Ela indica o quão achatada é a elipse em relação a uma circunferência. Veja que quando $e = 0$, a elipse se degenera em uma circunferência. Dessa forma, a equação (A.1) pode ser reescrita como:

$$b^2 = a^2(1 - e). \quad (\text{A.2})$$

No plano cartesiano, quando o eixo maior da elipse coincide com o eixo x do plano e o eixo menor com o eixo y , a equação da elipse pode ser escrita como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.3})$$

Parábola

A parábola é uma das cônicas mais comuns de ser estudada e corresponde ao gráfico de uma função quadrática. Sua definição é como segue [10]:

Definição: Dados um ponto F e uma reta r . O lugar geométrico dos pontos equidistantes do ponto e da reta dada, é chamado parábola. O ponto F é denominado foco da parábola e r é a reta diretriz.

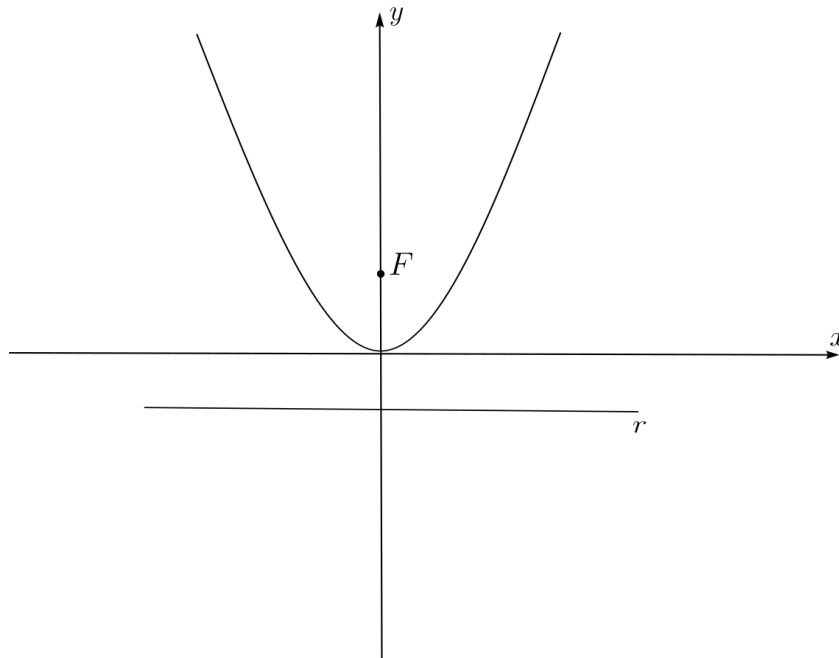


Figura A.2: Ilustração de uma parábola no plano cartesiano com foco F e reta diretriz r .

Quando as coordenadas do foco é $(0, p)$ e o vértice da parábola é (h, k) , a equação da parábola é dada por (Figura A.2)

$$(x - h)^2 = 4p(y - k). \quad (\text{A.4})$$

Entretanto, é mais comum escrevermos $y = ax^2 + bx + c$ para a equação geral da parábola.

Hipérbole

A última cônica que iremos estudar é hipérbole, que é definida da seguinte forma [10]:

Definição: Dados dois pontos F_1 e F_2 . O lugar geométrico de todos pontos P cuja diferença $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}|$ é constante, é chamado hipérbole. Os pontos F_1 e F_2 são conhecidos como focos da hipérbole (Figura A.3).

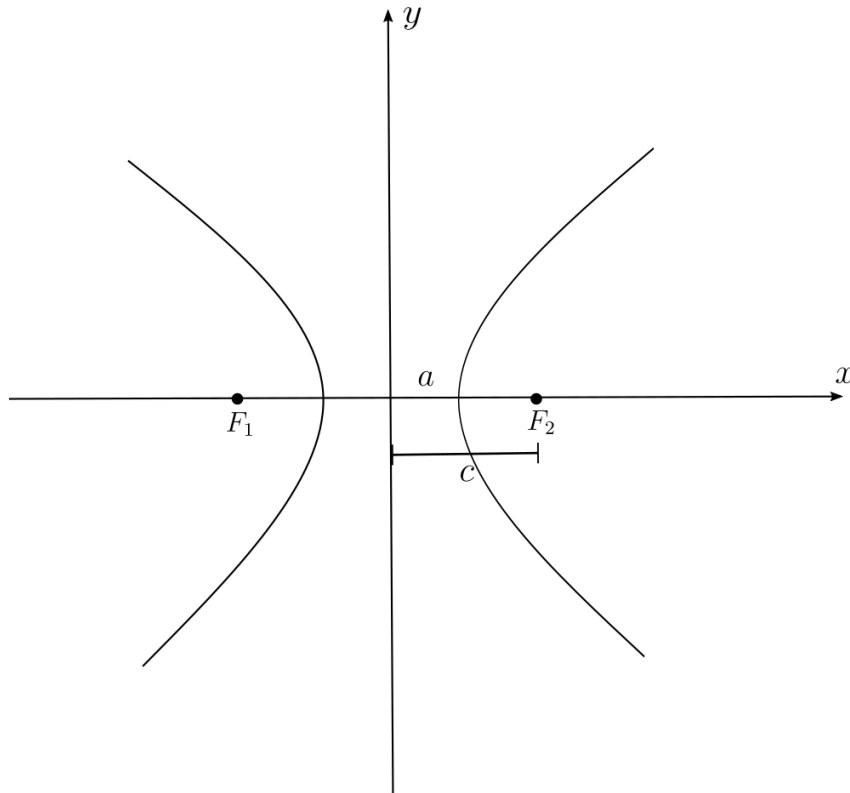


Figura A.3: Ilustração de uma hipérbole no plano cartesiano com focos F_1 e F_2 .

Denotamos a menor distância entre os dois ramos da hipérbole por $2a$, e a distância entre a distância entre os dois focos é $2c$. A distância a é conhecida como semi-eixo real, enquanto o número $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ é chamado semi-eixo imaginário.

Analogamente à elipse, definimos a excentricidade da hipérbole por $e = c/a$, entretanto, neste caso, devemos ter $e > 1$. Quando os focos estão localizados sobre o eixo x , a equação cartesiana da hipérbole centrada na origem é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.5})$$

Assim como a elipse pode se degenerar em uma circunferência para $e = 0$, a hipérbole pode se degenerar em um par de retas secantes tomando valores de c e a cada vez menores.

Referências Bibliográficas

- [1] Nasa's wise finds earth's first trojan asteroid. <https://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?feature=3080>. Acessado em 2020-01-20.
- [2] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1 edition, 1968.
- [3] R. Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 1 edition, 2012.
- [4] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company., 3 edition, 2001.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. *Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1976.
- [6] J. B. Marion and S. T. Thorton. *Classical Dynamics of Particle and Systems*. Cengage Learning, 5 edition, 2011.
- [7] V. Mauri and K. Hannu. *The Three-Body Problem*. Cambridge University Press, 1 edition, 2005.
- [8] S. W. McCuskey. *Introduction to Celestial Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1 edition, 1963.
- [9] D. Morin. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 1 edition, 2010.
- [10] M. S. Nathan. *Vetores e Matrizes*. IMPA, 2 edition, 1975.
- [11] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica 1 Mecânica*. Editora Edgard Blucher, 4 edition, 1975.
- [12] L. Ryder. *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 1 edition, 2009.
- [13] K. R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 2 edition, 1960.