



**Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física**

Trabalho de conclusão de curso

**Investigação da impedância elétrica da mistura KL/DeOH/água com o uso
de circuitos elétricos equivalentes**

**Acadêmico: Ricardo Ornagui de Oliveira
Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo Garcia Fernandes
Maringá, 2018**



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de conclusão de curso

**Investigação da impedância elétrica da mistura KL/DeOH/água com o uso
de circuitos elétricos equivalentes**

*Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao departamento de
física da Universidade Estadual de
Maringá sob orientação do professor
Dr. Paulo Ricardo Garcia Fernandes,
como parte dos requisitos para obter
o título de bacharel em física.*

Acadêmico: Ricardo Ornagui de Oliveira
Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo Garcia Fernandes
Maringá, 2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter concedido a possibilidade de participação em um trabalho com fundamento científico, onde acentuou meu conhecimento e obtendo grande experiência em trabalho deste ramo.

Agradeço ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Fluidos Complexos (INCT-FCx), à Fundação Araucária e CNPq pelo apoio financeiro (equipamentos laboratoriais e bolsa).

Ao orientador professor Doutor Paulo Ricardo Garcia Fernandes pela completa ajuda neste trabalho (seja pela escrita e erros de português) e no experimento (método experimental e referências).

Agradeço ao departamento por fornecer os materiais necessários.

Agradeço aos familiares que influenciaram, direta e indiretamente, na preparação deste trabalho e a minha namorada (Letícia). A ambos que me incentivaram e me apoiaram.

Resumo

Neste trabalho foi investigada a impedância elétrica do Cristal Líquido Liotrópico (CLL) da mistura KL/DeOH/H₂O por meio da técnica de espectroscopia de impedância elétrica. Utilizando a ponte de impedância *Solartron SI 1260*, conectada à um porta amostra específico, investigamos duas amostras de CLL, com 23% e 27% da concentração relativa de KL, na fase isotrópica. As amostras foram produzidas com base em um guia de fase [1]. Foram realizadas tomadas de dados de impedância elétrica de cada amostra ao longo de três dias consecutivos em diferentes temperaturas. A análise dos resultados indica que a impedância complexa das amostras sofrem alterações iniciais (primeiro dia de medida) que atribuímos a não estabilidade química da mistura após a sua homogeneização. Foi possível perceber que as amostras, quando na região de baixas frequências, resistem à passagem de corrente elétrica enquanto que, em altas frequências, as amostras apresentam pouca resistência. Como também que, as medidas do terceiro dia representam maior estabilidade nos valores da impedância elétrica, devido a pouca flutuação nos valores dos parâmetros obtidos e também ao módulo da impedância elétrica ter comportamento semelhante entre todas as temperaturas. O comportamento do CPE é predominantemente capacitivo, que representa um acúmulo de íons próximos dos contatos dos eletrodos com a amostra. Por fim, o problema da estabilidade química acentuou após o primeiro dia de medidas, necessitando de mais do que somente vinte e quatro horas de repouso, após sua homogeneização.

Palavras chave: Impedância Elétrica, Espectroscopia de Impedância Elétrica, Cristal Líquido Liotrópico, Fases Isotrópicas, Circuitos Elétricos Equivalentes.

Sumário

Resumo		i
1	Introdução Teórica	1
1.1	Números complexos	3
1.1.1	Uma breve história	3
1.1.2	Unidade Imaginária	4
1.1.3	Operações com números complexos e complexo conjugado	4
1.1.4	Equação de Euler	5
1.1.5	Equação de Moivre	6
1.2	Introdução a equações diferenciais de primeira ordem de uma variável	9
1.2.1	Tipos de equações diferenciais	9
1.2.2	Separação de Variáveis em Equações Homogêneas e não Homogêneas	9
1.2.3	Equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de segunda ordem	13
1.2.3.1	Soluções Reais Diferentes	13
1.2.3.2	Soluções Complexas	14
1.3	Introdução a Circuitos em Corrente Contínua	15
1.3.1	Elementos de Circuito	15
1.3.1.1	Capacitores	15
1.3.1.2	Os Resistores	16
1.3.1.3	Os Indutores	16
1.3.2	Circuitos Elétricos em Corrente Contínua	16
1.3.2.1	As Leis de Kirchhoff	16
1.3.3	Associação de Resistores em Série e em Paralelo	17
1.3.4	Associação de Capacitores em Série e em Paralelo	18
1.3.5	Circuito RC em Série	19
1.3.6	Circuito RL em Série	21
1.3.7	Circuito LC em Série	22
1.3.8	Circuito RLC em Série	23
1.4	Circuitos em Corrente Alternada	25
1.4.1	Resistores, Capacitores e Indutores em Corrente Alternada	25
1.4.2	Impedância Circuito RL Série	27
1.4.3	Impedância Circuito RC Série	29
1.4.4	Impedância Circuito RLC Série	30
1.4.5	Circuito RC, CC e CL em Paralelo	31
1.4.6	O Dispositivo CPE	34
1.4.7	Circuito Proposto	34
1.5	Introdução a Cristais Líquidos	38
1.5.1	Cristais Líquidos Termotrópicos (CLTs)	38
1.5.2	Cristais Líquidos Liotrópicos (CLLs)	40
2	Técnica Experimental e Amostras	42
2.1	Introdução à Espectroscopia de Impedância Elétrica	42

2.2	Materiais Utilizados	42
2.3	Preparação das Amostras de Cristal Líquido	43
2.4	Equipamentos e Montagem Experimental	45
3	Resultados e Análises	48
3.1	Resultados da Espectroscopia de Impedância Elétrica da Água e Decanol e seus Ajustes Teóricos	48
3.2	Resultados da Espectroscopia de Impedância Elétrica da Amostra S1	49
3.3	Ajuste dos Resultados para a Amostra S1	52
3.4	Resultados da Espectroscopia de Impedância Elétrica da Amostra S2	58
3.5	Ajuste dos Resultados para a Amostra S2	60
3.6	Parâmetros Obtidos Para o Ajuste dos Resultados para a água, decanol e as amostra S1 e S2	63
3.7	Analises	64
3.7.1	Analises das medidas da amostra S1	64
3.7.2	Analises das medidas da amostra S2	65
3.7.3	Análise dos módulos das Impedâncias Elétricas	65
3.8	Conclusões Finais	70
	Referências Bibliográficas	71

1.Introdução

A matemática vem sendo utilizada para modelar o universo por meio de números, equações e teorias para que o ser humano possa entendê-lo melhor. Pode-se destacar uma famosa frase de Galileu Galilei que diz (não literalmente): “*A matemática é o alfabeto que Deus utilizou para criar o universo*”¹. Neste contexto, foi desenvolvida diversas teorias para estudar os fenômenos que ocorrem na natureza tais como fenômenos termodinâmicos (aquecimento de corpos, compressão de gases, etc), eletromagnéticos (para investigar as propriedades da luz, reflexão, refração, etc), quânticos (fenômenos que ocorrem na escala de átomos ou menores), relativísticos (fenômenos da ordem de grandeza de planetas) e entre outros. Assim, neste trabalho será desenvolvida uma investigação de fenômenos na matéria, que necessitam da cooperação de variados conceitos. Dentro das quais a teoria Eletromagnética é estritamente importante.

A necessidade de se revisar, uma pequena parte, da teoria Eletromagnética, diz respeito ao conhecimento de carga elétrica, corrente elétrica, campo elétrico, campo magnético, resistência elétrica de um material, circuitos elétricos, impedância e etc. Uma grande motivação para tal revisão também se refere a contemplar o quão grande é o conhecimento de um ramo que, apesar de gigantesco como é a física e a matemática, é somente uma fração do que já foi desenvolvida. Neste trabalho de conclusão de curso sairemos do puro aprendizado para a área de investigação experimental (que é o foco deste trabalho) aplicando boa parte do que foi aprendido durante a graduação em Física. Da revisão, que será abordada no capítulo 1, têm-se os números complexos (seção 1.1), revisão de Equações Diferenciais Ordinárias (seção 1.2), circuitos em corrente contínua (seção 1.3) e alternada (seção 1.4), na seção 1.5 será feita uma breve revisão sobre cristais líquidos. No capítulo 2, é apresentado a forma que foram produzidas as amostras. Os resultados e as análises ficam no capítulo 3.

O Eletromagnetismo moderno foi desenvolvido com trabalhos experimentais de diversos Físicos, dentre eles muitos experimentais e teóricos. Faz-se necessário destacar alguns de maior reconhecimento devido a suas contribuições como Michael Faraday (nascido em 22 de setembro de 1791 e falecido em 25 de agosto de 1867) que fez as primeiras explanações matemáticas da relação entre eletricidade e magnetismo, André-Marie Ampère (Nascido em 20 de junho de 1775 e morreu em 10 de junho de 1836) onde investigou interações entre dois fios que possuem corrente elétrica², James Clerk Maxwell (nascido em 13 de junho de 1831 e falecido em 5 de novembro de 1879) que, ajustando as equações dos trabalhos de Michael Faraday, Ampère, etc., propôs as equações fundamentais do Eletromagnetismo, conhecidas agora como equações de Maxwell para o eletromagnetismo.

Cristais Líquidos são substâncias que possuem características dos fluidos (a fluidez) e a birrefringência (característica associada à sólidos cristalinos). Cristais Líquidos são vastamente utilizados em aplicações tecnológicas [2]. Existem, essencialmente, dois grandes grupos de Cristais Líquidos: os termotrópicos e os liotrópicos. Nosso foco será a respeito dos

¹ Retirado de: <https://kdfrases.com/frase/142657> . Acessado em 21 de maio de 2018.

² CAVALCANTE, Kleber G. "André-Marie Ampère"; *Brasil Escola*. Disponível em <<https://brasilecola.uol.com.br/fisica/andremarie-ampere.htm>>. Acesso em 30 de maio de 2018.

liotrópicos que possuem micelas como seus componentes fundamentais que, por sua vez formam as estruturas micelares. Micelas são formadas por moléculas anfifílicas, possuem uma parte hidrofílica (possui afinidade com a água) e outra hidrofóbica (que não possui afinidade com a água). As amostras produzidas possuem compostos como KL (Laurato de potássio), H₂O (água destilada) e DeOH (decanol); São misturadas, homogeneizadas e, depois de 24 horas, estão prontas para uso.

Utilizando um porta amostra e uma ponte de impedância *Solartron*, foi realizadas as medidas em duas amostras de cristal líquido liotrópico, obteve-se curvas que expressam o comportamento da amostra quando submetida a uma corrente elétrica (alternada) com frequência variável (entre 10⁻¹ Hz e 10⁶ Hz). Quando uma corrente elétrica (alternada) atravessa uma material (seja líquido ou sólido) encontra uma resistência, tal resistência é melhor descrita por uma parte real e outra imaginária, denominamos este tipo de resistência de impedância [3]. Portanto, os resultados obtidos são da impedância da amostra que nos permitirá estudar a condutividade em função da frequência [4].

Desta forma utiliza-se um circuito elétrico [4] para caracterizar, uma representação, da amostra em questão. Desta forma, procuramos verificar a validade do estudo da impedância de um Cristal Líquido com um circuito equivalente.

Este trabalho de conclusão de curso (TCC) teve, entre seus objetivos, a preparação do graduando no trabalho experimental investigando o comportamento elétrico de misturas liotrópicas com o uso da técnica de Espectroscopia de Impedância Elétrica (EIE). A EIE tem sido utilizada no Laboratório de Fluidos Complexos DFI/UEM, há quase uma década, na investigação do comportamento elétrico de alguns fluidos tais como: água [5], óleos vegetais [6], hidrogéis dopados com cristais líquidos [7] e soluções iônicas [8].

1.1 Números complexos

1.1.1 Uma breve história

Em 1545, o matemático, físico e médico italiano Girolamo Cardano (1501-1576) causou grande alvoroço entre os algebristas da época ao publicar a obra *Ars Magna*. Nesta obra foi publicado, o que seria uma forma de se resolver equações polinomiais de terceira (3º também chamadas de cúbicas) e quarta (4º ou quárticas) grau. Cardano, em sua obra afirmou que o método para resolver as de terceiro grau foi a ele apresentado pelo matemático italiano Niccolo Tartaglia (1500-1557) e das quárticas pelo seu antigo auxiliar Ludovico Ferrari (1522-1565).

A publicação desta obra *Ars Magna* por Cardano (em 1545) fez com que este período se tornasse o marco inicial do período moderno da história da matemática.

Para tentar resolver a equação de terceiro grau:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (1.1.1)$$

Cardano propôs a seguinte equação:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \quad (1.1.2)$$

Em 1572, o matemático italiano Raffaele Bombelli (1526-1573), publicou uma obra na qual discutia a solução da equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$ onde, já conhecia sua solução que é dada por: $x = 4$, $x = -2 + \sqrt{3}$, $x = -2 - \sqrt{3}$, mas utilizando a fórmula de Cardano obtia:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (1.1.3)$$

Mas o que seria $\sqrt{-121}$? Não poderia ser tratado como um número real, logo Bombelli teve a genial idéia de tentar obter os números reais a e b positivos tais que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1} \quad (1.1.4)$$

Após alguns cálculos Bombelli encontrou que $a = 2$ e $b = 1$, pois assim teria $x = 4$ (que é uma das soluções). Após este momento Bombelli começou a operar com $\sqrt{-1}$ da mesma forma que operava com números reais. No século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) começou a utilizar o i como sendo $\sqrt{-1}$. Ainda neste século, Abraham de Moivre criou métodos matemáticos para estudar e analisar números complexos.

No início do século XIX, com os trabalhos independentes do, físico e astrônomo, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e por, matemático suíço, Jean Robert Argand (1768-1822), apresentaram uma forma geométrica dos números complexos (geometria no plano).

Atualmente os números complexos possuem grande aplicação na física e na tecnologia contemporânea. Outra aplicação da álgebra dos números complexos ocorre na computação gráfica e da topologia como, por exemplo, o equacionamento de figuras de fractais.

1.1.2 Unidade Imaginária

Para ficar mais claro a utilização dos números complexos, tratamos de resolver à seguinte equação de segundo grau:

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1.1.5)$$

Então simplesmente têm-se:

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \quad (1.1.6)$$

Note que, não é possível ter solução desta equação de segundo grau, uma vez que não se pode ter um número real que seu quadrado seja -1. Para tal, deve-se utilizar a seguinte notação (que representa os números complexos):

$$i = \sqrt{-1} \quad (1.1.7)$$

Então fica claro que i é, na verdade, um número complexo. Assim é possível escrever o conjunto solução para esta equação do segundo grau:

$$S = \{-i, i\}$$

Por tanto definimos a unidade imaginária como sendo:

$$i^2 = -1, \text{ ou seja, } i = \sqrt{-1}$$

Agora é possível resolver qualquer equação do segundo grau, seja em termos de números complexos quanto em termos de números reais.

1.1.3 Operações com números complexos e complexo conjugado

Nesta seção será mostrado como um número complexo age com certas operações, agora será definida a soma, subtração e multiplicação. Definindo um número complexo que pode ser escrito na seguinte forma

$$z = a + bi \quad (1.1.8)$$

Note que, a é uma constante e, também, a conhecida parte real do complexo Z , por sua vez têm-se o b que, por estar sendo multiplicado pela letra i , é a parte imaginária (b constante) do complexo Z .

Definindo o complexo conjugado, que é representado da seguinte forma:

$$\bar{z} = a - bi \quad (1.1.9)$$

Muitas vezes pode ser representado como Z^* ou como o já mencionado acima.

Para definir o que ocorre com a soma, define-se dois números complexos

$$\begin{cases} Z = a + bi \\ w = c + di \end{cases} \quad (1.1.10)$$

A soma entre os dois:

$$Z + w = (a + c) + (b + d)i \quad (1.1.11)$$

Onde $(a + c)$ é a parte real da soma e $(b + d)$ é a parte imaginária. Note que, se trocarmos a ordem por $w + Z$ ainda têm-se o mesmo resultado, logo a soma é comutativa.

Pode-se, de forma análoga, definir a subtração (utilizando os mesmos números complexos):

$$Z - w = (a - c) + (b - d)i \quad (1.1.12)$$

De qualquer forma (tanto pra soma e subtração) a operação ocorre somente com os números reais com os reais e os imaginários com os imaginários.

Já o produto entre os números complexos (ainda utilizando os já definidos) tem-se:

$$Z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi \cdot i \quad (1.1.13)$$

Com $i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$:

$$Z \cdot w = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (1.1.14)$$

Que é o produto (multiplicação) dos números complexos.

Pode-se realizar a divisão do número complexo Z por w :

$$\frac{Z}{w} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \quad (1.1.15)$$

Note o complexo i no denominador, para retirá-lo, basta multiplicar o numerador e o denominador da equação (1.1.15) pelo complexo conjugado de w :

$$\frac{Z}{w} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bd(-1)}{c^2 + cdi - cdi - d^2(-1)} \quad (1.1.16)$$

$$\frac{Z}{w} = \frac{(ac + bd) + (cb - ad)i}{c^2 + d^2} \quad (1.1.17)$$

Onde pode ser separada a parte real da imaginária.

1.1.4 Equação de Euler [9]

A equação de Euler nada mais é que uma representação dos números complexos em coordenadas polares, ela é dada pela seguinte relação:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) \quad (1.1.18)$$

Para provar este resultado pode-se realizar a expansão do termo do lado esquerdo da igualdade:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \approx 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} \dots \quad (1.1.19)$$

A expansão das funções trigonométricas:

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{2n!} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

É a representação em série de Taylor (em torno da origem) para cosseno e a parte par da representação da exponencial (equação 1.1.19);

$$\text{sen}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

Representação em série da função seno; Adicionando o número complexo i :

$$i\text{sen}(\theta) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$$

Que nada mais é que a parte ímpar da exponencial (equação 1.1.19);

Realizando a soma:

$$\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) \approx 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} \dots$$

Por tanto:

$$\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2} \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{i\theta} \quad (1.1.20)$$

Note que, utiliza-se o fato de que $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ e assim por diante. Este seria um artifício utilizado para provar a equação 1.1.18, a equação de Euler.

1.1.5 Equação de Moivre [10]

Com base na equação de Euler (demonstrado anteriormente), pode-se mostrar uma nova forma de se escrever um número complexo, onde ocorre a ligação entre as coordenadas cartesianas e polares nos números complexos.

Seja um número complexo, da forma da equação 1.1.8, é possível montar um gráfico no plano de Argand-Gauss (ou plano imaginário):

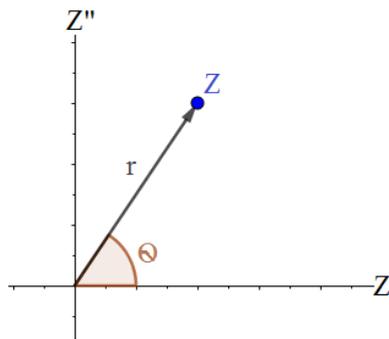


Figura 1.1.1 – Gráfico no plano complexo (Argand-Gauss). Z é o ponto formado pela parte real e imaginária do número complexo, r é o módulo de Z, Z' é a parte real, Z'' a parte imaginária e θ o ângulo entre o eixo real e o “vetor” formado pelo módulo do número complexo;

Pode-se relacionar as grandezas reais e imaginárias ao ângulo de inclinação da reta que liga o ponto à origem. Assim, obtendo:

$$\begin{cases} Z'' = r\text{sen}(\theta) \\ Z' = r\cos(\theta) \end{cases} \quad (1.1.21)$$

Note que, denotando Z'' como a parte imaginária do número complexo e Z' a parte real. Utilizando a forma convencional (equação 1.1.8):

$$\begin{cases} b = r\text{sen}(\theta) \\ a = r\cos(\theta) \end{cases} \quad (1.1.22)$$

Substituindo na 1.1.18, têm-se:

$$Z = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \quad (1.1.23)$$

Que lembra a equação de Euler (equação 1.1.18).

Agora realizando n-multiplicações da equação 1.1.23:

$$Z \cdot Z \cdot \dots \cdot Z = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \cdot \dots \cdot r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \quad (1.1.24)$$

$$Z^n = r^n(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^n \quad (1.1.25)$$

O termo entre parênteses pode ser desenvolvido para a seguinte forma:

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta) \quad (1.1.26)$$

Portanto:

$$Z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)) \quad (1.1.27)$$

Esta ultima equação é a famosa Equação de Moivre, que, em breve, será muito importante.

Um outro método de obter esta última equação: testando a equação 1.1.26 com $n=1$:

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^1 = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$$

Com $n=2$:

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^2 = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\text{sen}(\theta)$$

Utilizando as relações trigonométricas:

$$\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u))$$

$$\text{sen}^2(u) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2u))$$

$$2\cos(u)\text{sen}(u) = \text{sen}(2u)$$

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) - \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) + i\text{sen}(2\theta)$$

Simplificando:

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^2 = \cos(2\theta) + i\text{sen}(2\theta)$$

Para $n=3$:

$$(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^3 = \cos^3(\theta) - i\text{sen}^3(\theta) - 3\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\text{sen}(\theta)$$

Utilizando as mesmas relações trigonométricas descritas acima:

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^3 &= \\ &= \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta)\cos(2\theta) - \frac{i}{2}\text{sen}(\theta) + \frac{i}{2}\text{sen}(\theta)\cos(2\theta) - \frac{3}{2}\cos(\theta) + \\ &\quad + \frac{3}{2}\cos(2\theta)\cos(\theta) + \frac{3i}{2}\text{sen}(\theta) + \frac{3i}{2}\cos(2\theta)\text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Para simplificar e resolver esta última equação, será enunciado novas relações trigonométricas:

$$\cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v))$$

$$\text{sen}(u)\cos(v) = \frac{1}{2}(\text{sen}(u+v) + \text{sen}(u-v))$$

Utilizando-as e simplificando:

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))^3 &= \\ &= -\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{1}{4}\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) + \frac{i}{4}\text{sen}(3\theta) - \frac{i}{4}\text{sen}(\theta) + \frac{3}{4}\cos(3\theta) \\ &\quad + \frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{3i}{4}\text{sen}(3\theta) - \frac{3i}{4}\text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Onde, após mais simplificações:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

Logo, de forma análoga a feito anteriormente:

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$$

...

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Que é a equação (1.1.26).

Na próxima seção, será feita uma introdução a equações diferenciais de primeira ordem em uma variável.

1.2 Introdução a equações diferenciais de uma variável

1.2.1 Tipos de Equações Diferenciais [9]

As equações diferenciais são utilizadas extensivamente na física para modelar diversos tipos de problemas. Será feito um estudo das equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem, por exemplo:

$$\frac{d}{dt}y + y = 0 \quad (1.2.1)$$

Esta última é uma EDO de primeira ordem e linear (linear, pois não existe produto envolvendo y , como por exemplo y^2 ou funções de y);

$$\frac{d^2}{dt^2}y + \frac{d}{dt}y + y = 0 \quad (1.2.2)$$

A equação 1.2.2, é de segunda ordem e linear (como a equação 1.2.1). Ambas são do tipo homogênea; Para que sejam homogêneas devem satisfazer a seguinte relação:

$$y(\omega t) = \omega y(t); \omega \neq 0 \quad (1.2.3)$$

Onde ω é uma constante, é fácil verificar que as 1.2.1 e 1.2.2 são homogêneas.

Por tanto, uma equação diferencial linear não homogênea é da forma:

$$\frac{d}{dt}y + ay = b; a \neq 0; b \neq 0 \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y + c \frac{d}{dt}y + dy = e; c \neq 0; d \neq 0; e \neq 0 \quad (1.2.5)$$

No próximo tópico, serão introduzidos alguns métodos para encontra a solução de equações diferenciais. Antes de começar pode-se utilizar a seguinte notação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}y = y' \\ \frac{d^2}{dt^2}y = y'' \\ \frac{d^n}{dt^n}y = y^{(n)} \end{array} \right. \quad (1.2.6)$$

1.2.2 Separação de Variáveis em Equações Homogêneas e não Homogêneas [9]

Este é o método mais simples para resolver EDOs lineares homogêneas de primeira ordem, começando com o caso da equação 1.2.1 na seguinte forma:

$$y'(t) + ay(t) = 0 \quad (1.2.7)$$

Onde y é uma função que depende de t , a é uma constante real. Reescrevendo:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -a \quad (1.2.8)$$

$$\frac{dy}{y(t)} = -adt \quad (1.2.9)$$

Integrando ambos os lados, sendo que o lado esquerdo será em y e do lado direito será em t :

$$\ln(y) = -at + C \quad (1.2.10)$$

Onde C é constante de integração; A solução é dada na forma:

$$y(t) = e^{-at+C} = e^{-at} e^C \quad (1.2.11)$$

e^C é uma constante e poderemos substituí-la por uma outra constante, no caso, $C_{1.1}$.

$$y(t) = C_1 e^{-at} \quad (1.2.12)$$

Esta equação é a solução geral da equação 1.2.1.1. Analisando a solução: para t muito grande (indo para o infinito) a solução tende a 0 e para t tendendo a menos infinito, a solução não possuirá limite, ou seja, cresce em um fator $C_1 e^{-t}$ para $t \rightarrow -\infty$. Para $t \rightarrow 0$, a solução tende a zero. O gráfico da função esta na Figura 1.2.1;

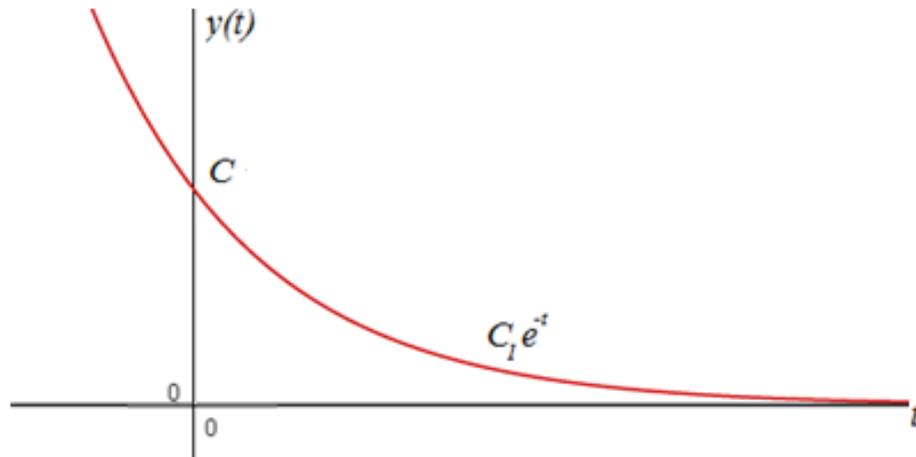


Figura 2.1 – Gráfico da solução, equação 1.2.12;

O método da separação de variáveis é simples, mas exige um pouco de pratica para resolver EDOs lineares e homogêneas; Agora resolvendo uma não homogênea, a equação 1.2.4:

$$y'(t) + ay(t) = b \quad (1.2.13)$$

Onde a e b são constantes; Reescrevendo:

$$\begin{aligned} y'(t) &= b - ay(t) \\ y'(t) &= a \left(y(t) - \frac{b}{a} \right) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Onde, dividindo por $-y(t) + \frac{b}{a}$, e retirando o sinal positivo de $y(t)$;

$$\frac{y'(t)}{-\frac{b}{a} + y(t)} = -a \left(\frac{-\frac{b}{a} + y(t)}{-\frac{b}{a} + y(t)} \right) = -a \quad (1.2.15)$$

Isolamos dy e integrando:

$$\int \frac{dy}{-\frac{b}{a} + ay(t)} = -a \int dt \quad (1.2.16)$$

$$\ln \left(-\frac{b}{a} + y(t) \right) = -at + C \quad (1.2.17)$$

Retirando o logaritmo natural:

$$-\frac{b}{a} + y(t) = e^{-at+C} = e^{-at} e^C \quad (1.2.18)$$

$$ay(t) = e^{-at} e^C + \frac{b}{a} = C_1 e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (1.2.19)$$

$$y(t) = C_1 e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (1.2.20)$$

Esta é a solução da equação diferencial 1.2.13. Um gráfico geral desta solução poderá ser observado na Figura 1.2.2:

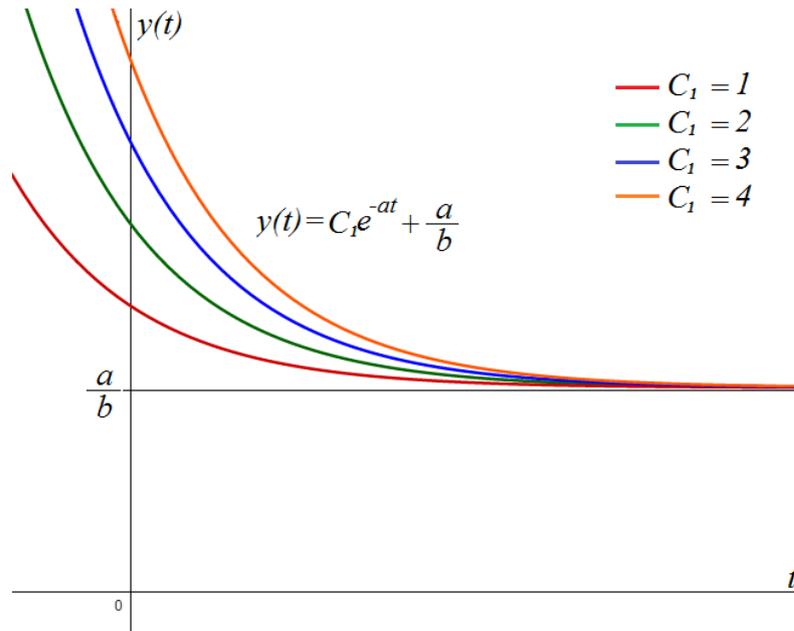


Figura 1.2.2 – Gráfico da solução da equação 1.2.13 para diferentes valores de C_1 ;

Note que, para qualquer valor de C_1 , a solução tende ao valor a/b , este comportamento poderá ser muito importante para analisar a solução de equações diferenciais quando aplicada a sistemas físicos.

Resolvendo um caso de uma equação parecida com a da 1.2.13, neste caso têm-se uma variável junto com a constante b :

$$y'(t) + ay(t) = bt \quad (1.2.21)$$

Neste caso dividi-se esta equação em outras duas equações, uma homogênea e a outra não homogênea:

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = 0 & (1.2.22 a) \\ y'(t) + ay(t) = bt & (1.2.22 b) \end{cases}$$

A 1.2.22 a, é semelhante à equação 1.2.7 e possui solução dada por (1.2.12):

$$y(t) = C_1 e^{-at} \quad (1.2.23)$$

Para a 1.2.22 b, deve-se propor uma solução equivalente a uma constante vezes a variável t , ou seja:

$$y(t) = Dt + E \quad (1.2.24)$$

Desde modo, derivando e substituindo na 1.2.22 b, o problema será reduzido de uma EDO para um sistema linear com duas equações:

$$[D] + a[Dt + E] = bt \quad (1.2.25)$$

$$(aD)t + (D + aE) = bt \quad (1.2.26)$$

Relacionando o lado esquerdo ao direito por um sistema linear:

$$\begin{cases} aD = b \\ D + aE = 0 \end{cases} \quad (1.2.27)$$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} D = \frac{b}{a} \\ E = -\frac{b}{a^2} \end{cases} \quad (1.2.28)$$

Por tanto a solução da 1.2.22 b , será:

$$y(t) = \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2} \quad (1.2.29)$$

A solução geral da equação 1.2.21:

$$y(t) = C_1 e^{-at} + \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2} \quad (1.2.30)$$

A seguir (Figura 1.2.3) o gráfico da solução 1.2.30 para alguns valores da constante C_1 :

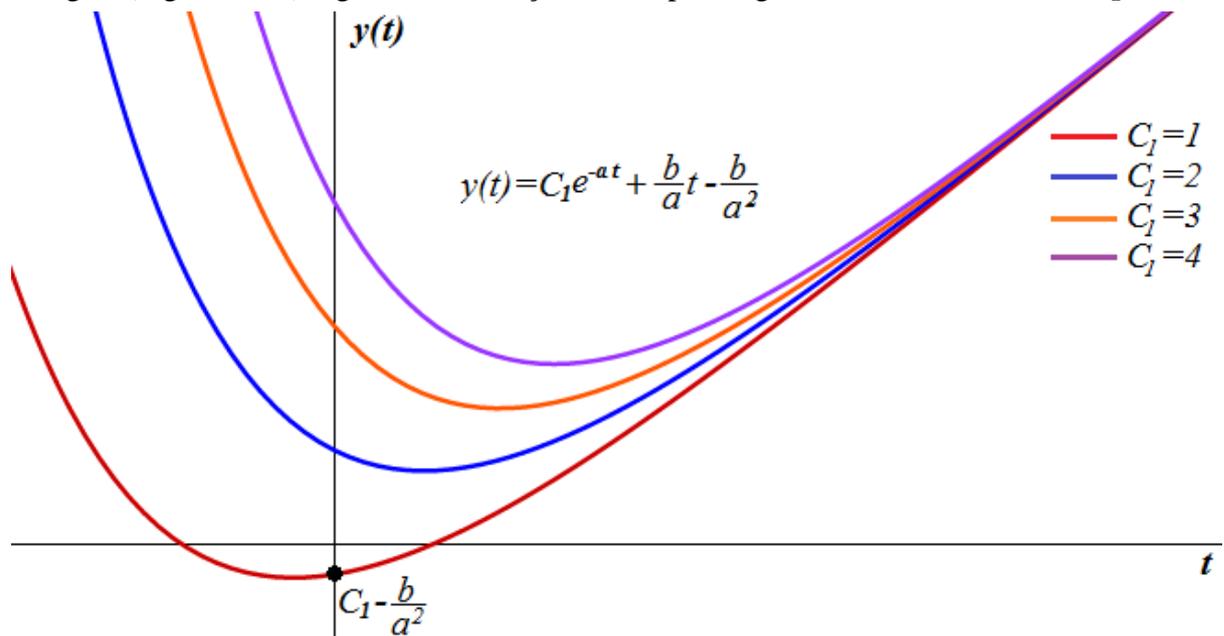


Figura 1.2.3 – Gráfico da solução 1.2.30 com quatro valores para a constante $C_{1,i}$.

Note que a solução tende a função $y(t) = \frac{b}{a}t - \frac{b}{a^2}$ quando o termo da exponencial (com $t > 0$) vai desaparecendo até se transformar na função linear quanto a exponencial é suficientemente pequena. Para valores menores que zero ($t < 0$) a solução tem comportamento totalmente exponencial. Para quaisquer valores de C_1 , o gráfico cruza o eixo dos y (quando $t=0$) com a forma $(C_1 - \frac{b}{a^2})$.

1.2.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas de Segunda Ordem

Dada a equação diferencial de segunda ordem:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \quad (1.2.31)$$

É chamada de equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea, considerando que a e b são constantes (independem de t). Diferentemente das EDOs de primeira ordem pode-se partir do seguinte modelo para resolver tal tipo de equação:

- Supondo um tipo de solução;
- Determinamos as constantes da suposta solução para se adequar como solução da EDO;

Resolvendo a equação diferencial ordinária 1.2.31, onde é feita a suposição que sua solução será da forma:

$$y(t) = Ce^{At} \quad (1.2.32)$$

Esta solução é parecida com as soluções das de primeira ordem, pode-se utilizá-las como base para procurar pelas de segunda ordem. Derivando a 1.2.32 até a segunda ordem:

$$\begin{cases} y'(t) = CAe^{At} \\ y''(t) = CA^2e^{At} \end{cases} \quad (1.2.33)$$

Substituindo na 1.2.31:

$$CA^2e^{At} + aCAe^{At} + bCe^{At} = 0 \quad (1.2.34)$$

$$A^2 + aA + b = 0 \quad (1.2.35)$$

Esta é a conhecida equação característica da equação diferencial. Note que é de segundo grau, têm-se duas soluções para ela. As soluções para A são:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ A_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \quad (1.2.36)$$

Têm-se três casos principais: O caso em que a solução é real, solução é imaginária e soluções repetidas;

1.2.3.1 Soluções Reais Diferentes

Começando pelas soluções reais (não repetidas), então as soluções A_1 e A_2 formam a solução da 1.2.31 da seguinte forma:

$$y(t) = Ce^{-at \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}t} \quad (1.2.37)$$

Sem entrar em muitos detalhes, note que se utilizarmos a solução positiva, têm-se a solução da 1.2.31; Se utilizar a negativa, ainda assim será solução. Portanto pode-se escrever a solução geral como sendo uma soma de ambas as soluções, têm-se, então:

$$y(t) = C_1e^{-at + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}t} + C_2e^{-at - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}t} \quad (1.2.38)$$

Ou, de forma mais simplificada:

$$y(t) = C_1 e^{A_1 t} + C_2 e^{A_2 t} \quad (1.2.39)$$

Esta é a solução geral da equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem 1.2.31 (para raízes reais e não repetidas da 1.2.35).

1.2.3.2 Soluções Complexas

Se caso $a^2 - 4b < 0$, têm-se a ocorrência de números complexos nas soluções da equação característica. Considerando $\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = d$ e $f = -\frac{a}{2}$, as soluções da equação característica serão:

$$\begin{cases} A_1 = f + id \\ A_2 = f - id \end{cases} \quad (1.2.40)$$

Reescrevendo a solução 1.2.39 da seguinte forma:

$$y(t) = C_1 e^{(f+id)t} + C_2 e^{(f-id)t} \quad (1.2.41)$$

Deve-se deixá-la sem o número complexo i , utilizando a equação de Euler 1.1.18 para reescrever as exponenciais:

$$y(t) = (C_1 e^{(id)t} + C_2 e^{(-id)t}) e^f = e^f [C_1 (\cos(td) + i \operatorname{sen}(td)) + C_2 (\cos(td) - i \operatorname{sen}(td))]$$

$$y(t) = e^{ft} [\cos(td) (C_1 + C_2) + i \operatorname{sen}(td) (C_1 - C_2)] \quad (1.2.42)$$

Realizando as substituições $C_1 + C_2 = C$ e $C_1 - C_2 = D$:

$$y(t) = C e^{ft} \cos(td) + D e^{ft} i \operatorname{sen}(td) \quad (1.2.43)$$

Tomando a parte real desta última equação como, também, a parte imaginária:

$$y(t) = C e^{ft} \cos(td) + D e^{ft} \operatorname{sen}(td) \quad (1.2.44)$$

Esta é a solução da EDO de segunda ordem 1.2.31 em termos dos números reais. Em alguns casos $f=0$ e a solução se torna mais simples:

$$y(t) = C \cos(td) + D \operatorname{sen}(td) \quad (1.2.45)$$

1.3 Introdução a Circuitos em Corrente Contínua [11, 12, 13, 14]

No Eletromagnetismo (nome da teoria criada por James Clerk Maxwell) estudam os fenômenos associados (primeiramente) as cargas elétricas em repouso, portanto, a primeira parte desta exuberante teoria volta-se ao caso estático (cargas em repouso) que é denominada de Eletrostática.

Utilizando o campo elétrico, pode-se criar um dispositivo elétrico chamado capacitor, que utiliza o campo elétrico, em seu interior, para armazenar energia. Este será o primeiro dispositivo elétrico a ser analisado.

O segundo será o resistor, na qual, seu principal objetivo é impedir a passagem de corrente elétrica. Ele pode fazer isso simplesmente dissipando a corrente elétrica em forma de calor, o *efeito Joule*. Note que, diferentemente dos capacitores, os resistores não armazenam energia.

O terceiro e último será o Indutor. O indutor é um dispositivo que pode armazenar energia em seu campo magnético (gerado pela corrente elétrica que o percorre, essencialmente é um pequeno solenóide). Quando a corrente elétrica percorre suas espiras, surge um campo magnético (B) e, de certa forma, o campo gerado pode armazenar energia ou interagir com campos B externos.

Estes três dispositivos também recebem o nome de elementos de circuito.

1.3.1 Elementos de Circuito

1.3.1.1 Capacitores

O capacitor tem como finalidade armazenar carga. Usam um material, que está em seu interior, chamado de dielétrico. O dielétrico permite criar capacitores com determinada capacitância, por este motivo encontramos no mercado capacitores para diferentes tensões (voltagem) e capacitâncias.

Pode-se descrever a capacitância como a capacidade do mesmo armazenar carga. Expresso pela seguinte equação:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{L} \quad (1.3.1)$$

Onde C , é a capacitância, ϵ_0 permeabilidade elétrica do vácuo (com o valor dado $8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$), A é a área das placas e L a distância de separação delas. A capacitância depende exclusivamente dos fatores geométricos. Relacionando a capacitância com a voltagem aplicada (ΔV):

$$Q = C \Delta V \quad (1.3.2)$$

Onde a quantidade de carga armazenada (Q) é diretamente proporcional a diferença de potencial (ΔV). Este é o símbolo $\text{—}|$ que representa o capacitor.

1.3.1.2 Os Resistores

Os resistores são comumente utilizados para impedir, que um determinado componente elétrico, receba certa quantidade de energia elétrica. A finalidade do resistor é dissipar corrente elétrica em forma de calor, por este comportamento tem-se utilizado em fornos elétricos, chuveiros, torradeiras, etc.

A descrição da resistência do resistor é dada por:

$$\Delta V = RI \quad (1.3.3)$$

Na qual a quantidade de corrente que passar por este elemento de circuito será diretamente proporcional à diferença de potencial. Essa equação é conhecida como lei de Ohm. Este é o símbolo  que representa o resistor.

1.3.1.3 Os Indutores

O indutor é um elemento de circuito que armazena energia em seu campo magnético. Essencialmente, tem a forma de um pequeno solenóide e a tensão medida em seus terminais:

$$\varepsilon_{\text{FEM}} = L \frac{d}{dt} i \quad (1.3.4)$$

É proporcional a taxa com que a corrente elétrica varia com o tempo que o percorre. A constante L é a indutância do indutor. O símbolo associado aos indutores é .

No próximo tópico, serão analisados circuitos elétricos em corrente contínua.

1.3.2 Circuitos Elétricos em Corrente Contínua

1.3.2.1 As Leis de Kirchhoff [11]

As leis de Kirchhoff são enunciadas a seguir:

A lei dos nós, que diz respeito à soma algébrica de todas as correntes que saem de um nó, sempre será zero:

$$\sum I = 0 \quad (1.3.5)$$

A lei das malhas, diz que a soma algébrica de toda a diferença de potencial através de uma malha, desde dispositivos elétricos (resistores, capacitores, etc) a outras fontes, deve ser zero; Matematicamente escreve-se:

$$\sum V = 0 \quad (1.3.6)$$

Essas duas leis representam a forma de analisar um circuito elétrico.

1.3.3 Associação de Resistores em Série e em Paralelo

Suponha um circuito composto por três resistores em série, como o da Figura 3.1.1.

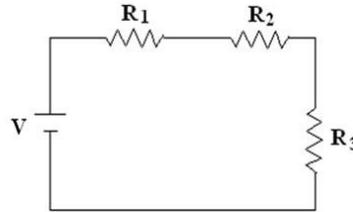


Figura 1.3.1 - Circuito com resistores em série ligados a uma bateria de CC.

Utilizando a lei das malhas (segunda lei de Kirchoff):

$$V = V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} \quad (1.3.7)$$

Da Lei de Ohm (equação 1.3.3):

$$V = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

Dividindo ambos os lados por I :

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{V}{I} \quad (1.3.8)$$

Como V (é a tensão da fonte ou diferença de potencial) é também a tensão total sobre o circuito, a razão tensão da fonte por corrente elétrica total é simplesmente a resistência equivalente; Escrevendo a equação 1.3.8 em termos da resistência equivalente:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (1.3.9)$$

Por tanto, a resistência equivalente (resistores em série) será a soma de todas as resistências.

Supondo, agora, um circuito com três resistores em paralelo, como o da Figura 1.3.2;

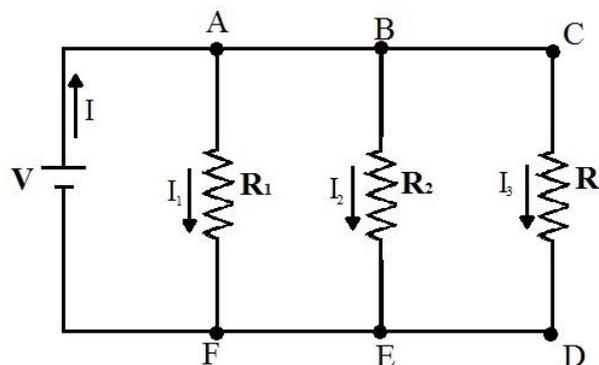


Figura 1.3.2 - Resistores em paralelo;

Note que a corrente elétrica se divide nos pontos A e B, utilizando a lei dos nós (os nós são os pontos onde existem a divisão da corrente elétrica que, neste caso são os pontos A e B) para analisar a corrente elétrica em cada resistor. Utilizando o nó A têm-se:

$$I = i_a + I_1 \quad (1.3.10)$$

Aonde i_a é a corrente dividida em A que segue na direção do nó B. Para o nó B, têm-se :

$$i_a = I_2 + I_3 \quad (1.3.11)$$

Substituindo i_a da equação 1.3.11 na 1.3.10:

$$I = I_2 + I_3 + I_1$$

Utilizando a lei de Ohm (equação 1.3.3):

$$\frac{V}{R} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}$$

Neste caso, o potencial elétrico é idêntico em todos os resistores, portanto:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (1.3.12)$$

Logo a resistência equivalente, é a soma do inverso das resistências em paralelo.

1.3.4 Associação de Capacitores em Série e em Paralelo

Seja um circuito composto por capacitores em série, como o da Figura 1.3.3;

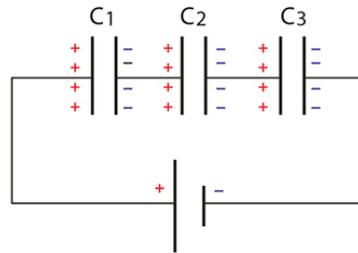


Figura 1.3.3- Capacitores associados em série;

Verifica-se que, com a lei das malhas e com a utilização da equação 1.3.2:

$$V = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad (1.3.13)$$

O armazenamento de carga, quando os capacitores estão em paralelo, são idênticos:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \quad (1.3.14)$$

Portanto, reescrevendo a 1.3.13:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (1.3.15)$$

Que é a equação da capacitância equivalente para capacitores em série.

Seja o circuito com três capacitores em paralelo, como mostrado na Figura 1.3.4, utilizando a lei dos nós, logo, escreve-se a carga equivalente Q da seguinte forma:

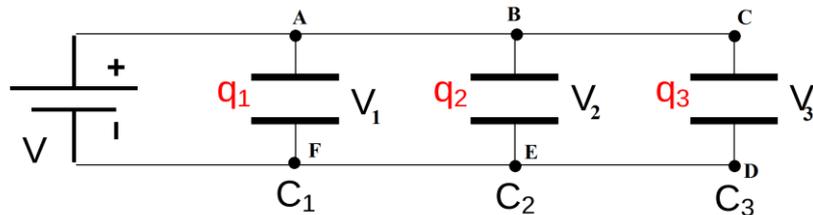


Figura 1.3.4 - três capacitores em paralelo.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\begin{aligned}
 Q &= (C_1 + C_2 + C_3)V \\
 \frac{Q}{V} &= C_1 + C_2 + C_3 \\
 C &= C_1 + C_2 + C_3
 \end{aligned}
 \tag{1.3.16}$$

Esta é a equação da capacitância equivalente para um circuito com capacitores em paralelo.

1.3.5 Circuito RC em Série

Suponha o circuito com um resistor e um capacitor ligados em série, como os da Figura 1.3.5:

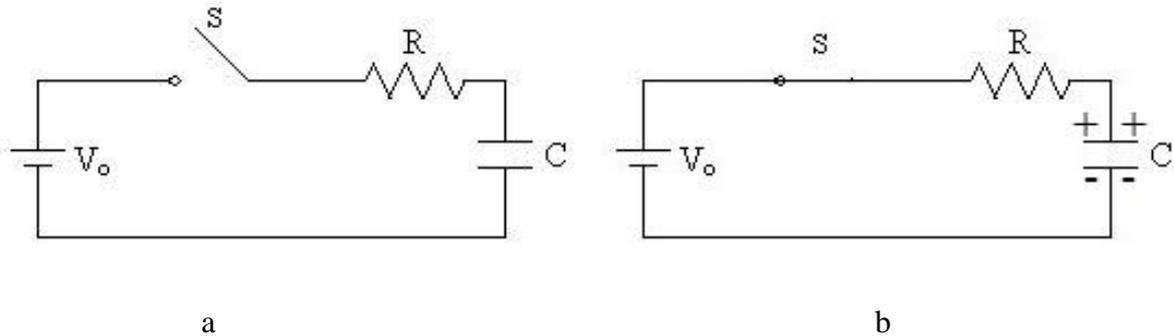


Figura 1.3.5 – Circuito com Resistor e capacitor em série (RC), V_0 é a fonte (corrente contínua), R um resistor, C é o capacitor e S é a chave do circuito. Na figura *a* chave esta aberta e na *b* a chave esta fechada.

Note que (figura 1.3.5a), com a chave aberta não flui corrente elétrica no circuito de modo que a diferença de potencial elétrico em cada dispositivo é zero. Quando a chave é fechada (1.3.5b), começa a fluir uma corrente elétrica pelo circuito de modo que o capacitor é carregado. Como o capacitor é carregado?

Uma forma de fazer isto é determinar a equação para estudar este processo de carga, utilizando a lei das malhas (eq. 1.3.6):

$$V_0 = V_R + V_C \tag{1.3.17}$$

Utilizando as equações do potencial no resistor (eq. 1.3.3) e capacitor (1.3.2):

$$V_0 = I_R R + \frac{Q_C}{C} \tag{1.3.18}$$

Utilizando a definição de corrente elétrica:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{d}{dt} Q \\
 V_0 &= R \frac{d}{dt} Q + \frac{Q_C}{C}
 \end{aligned}
 \tag{1.3.19}$$

Dividindo ambos os lados por R :

$$\frac{d}{dt} Q + \frac{Q}{RC} - \frac{V_0}{R} = 0 \tag{1.3.20}$$

Esta última, é uma equação diferencial de primeira ordem para Q . Esta equação também descreve a forma com que o capacitor armazena carga ao longo de um tempo t . Utilizando os

mesmos métodos que os da seção 1.2 para resolvê-la, assim, deve-se modificar a equação 1.3.20 para ficar da forma 1.2.13 e utilizando a solução 1.2.20.

$$\begin{cases} y'(t) = Q'(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases} \begin{cases} a = \frac{1}{RC} \\ b = \frac{V_0}{R} \end{cases}$$

Que é a solução da equação 1.2.13 e também da equação 1.3.20:

$$y(t) = C_1 e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Fazendo as substituições, têm-se:

$$Q(t) = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} + CV_0 \quad (1.3.21)$$

Utilizando as condições iniciais para determinar o valor da constante C_1 : No instante inicial ($t=0$) o capacitor terá carga nula ($Q=0$); Para um tempo muito grande, depois do capacitor começar a carregar, sua carga será basicamente máxima ($Q_{max} = Q(t \rightarrow \infty)$); Portanto:

$$\begin{cases} C_1 = -CV_0 \\ Q_{max} = -CV_0 \end{cases}$$

Que nos leva à:

$$C_1 = -Q_f$$

E, reescrevendo a 1.3.21:

$$Q(t) = Q_{max} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (1.3.22)$$

Que é a solução da equação 1.3.20, esta é a equação da carga do capacitor. Derivando-a em função do tempo, têm-se:

$$I(t) = I_{max} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.3.23)$$

Que expressa a corrente elétrica no capacitor no instante t .

Para o processo de descarga do capacitor, basta retirar a bateria, ligar os fios as extremidades da chave e fechá-la (Figura 1.3.5b). Desta forma, a única diferença será a equação 1.3.18 ser igual a zero:

$$0 = I_R R + \frac{Q_C}{C} \quad (1.3.24)$$

Neste caso a solução será:

$$Q(t) = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.3.25)$$

E determinando o valor da constante C_1 : Sabendo que no instante inicial ($t=0$) a carga no capacitor será máxima (Q_{max}); E no instante de tempo muito grande ($t \rightarrow \infty$) a carga no capacitor será praticamente zero, têm-se:

$$Q(t) = Q_{max} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.3.26)$$

Note que, para ($t \rightarrow \infty$), a carga restante no capacitor será nula. Se derivarmos esta última:

$$I(t) = I_{max} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.3.27)$$

Têm-se o comportamento da corrente em função do tempo.

1.3.6 Circuito RL em série

Seja o circuito, contendo um resistor e um indutor em série, da Figura 1.3.6:

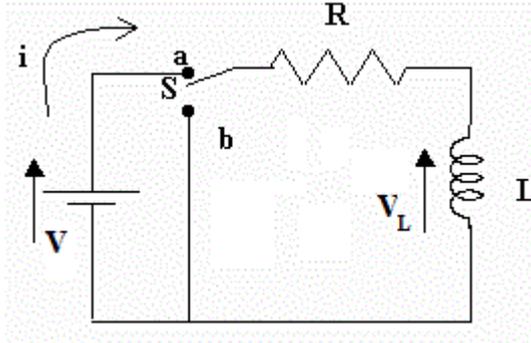


Figura 1.3.6 – circuito em série entre resistor (R) e indutor (L).

No momento que a chave é fechada na posição *a*, flui uma corrente elétrica pelo resistor e depois pelo indutor. Aplicando a lei das malhas a este circuito obtêm-se:

$$V = V_R + V_L$$

O potencial no indutor é dado pela equação 1.3.4:

$$V = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Dividindo toda a equação por *L*, têm-se:

$$\frac{d}{dt}I(t) + \frac{R}{L}I(t) - \frac{V}{L} = 0$$

Que possui a forma da equação 2.13, sua solução será da forma 2.20:

$$y(t) = C_1 e^{-at} + \frac{b}{a}; \begin{cases} y(t) = I(t) \\ a = \frac{R}{L}; b = -\frac{V}{L} \end{cases} \quad (1.3.28)$$

$$I(t) = C_1 e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{V}{R} \quad (1.3.29)$$

Determinando o valor da constante C_1 , utilizando a condição inicial e final; Sabendo que no instante $t=0$ a corrente elétrica no circuito é mínima ($I=0$), e para um tempo muito grande, a corrente no circuito tende á seu valor máximo, então têm-se:

$$\begin{cases} I(t=0) = C_1 - \frac{V}{R} = 0 \\ I(t \rightarrow \infty) = -\frac{V}{R} = I_{max} \end{cases} \quad (1.3.30)$$

Portanto:

$$I(t) = -I_{max} e^{-\frac{R}{L}t} + I_{max} \quad (1.3.31)$$

$$I(t) = I_{max} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (1.3.32)$$

1.3.7 Circuito LC em Série

Seja o circuito, contendo um capacitor e um indutor (L), com o capacitor carregado e ligados em série, da figura 1.3.7:

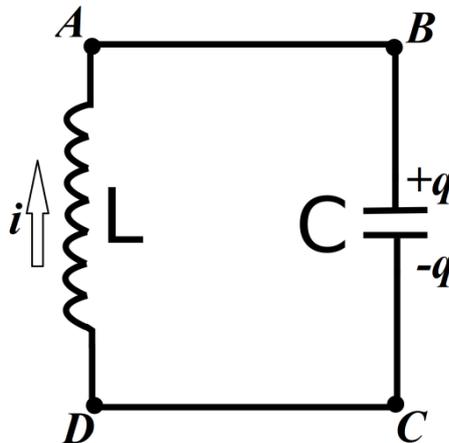


Figura 1.3.7 – Circuito com um capacitor (C) e um indutor (L) ligados em série. O capacitor está carregado com uma carga (total) q .

Utilizando a lei das Malhas pelos pontos $DABCD$:

$$L \frac{d}{dt} i + \frac{q}{C} = 0 \quad (1.3.33)$$

Da definição de corrente elétrica:

$$I = \frac{d}{dt} Q$$

$$\frac{d^2}{dt^2} q + \frac{q}{LC} = 0 \quad (1.3.34)$$

Que é uma EDO linear homogênea de segunda ordem. Esta equação está da forma 1.2.31 (exceto pela ausência do termo de derivada primeira), seu polinômio característico é:

$$A^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.3.35)$$

A solução deste polinômio é:

$$A = \mp i \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.3.36)$$

Note que, a solução será em termos de seno e cosseno (com a forma da equação 1.2.45):

$$y(t) = C \cos(td) + D \operatorname{sen}(td)$$

Portanto:

$$q(t) = C \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + D \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) \quad (1.3.37)$$

Desprezando o termo com a função trigonométrica seno e adicionar uma constante dentro do argumento da função cosseno (ainda assim ela será solução da equação 1.3.33);

$$q(t) = C \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \phi\right) \quad (1.3.38)$$

A constante adicionada ϕ é a constante de fase, representa a defasagem em relação a uma fonte (como veremos mais adiante). Para determinar a constante C , foram utilizadas as condições iniciais; Em $t=0$ a carga no capacitor é máxima (Q) e que a constante de fase é zero neste momento:

$$q(t) = Q \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \phi\right) \quad (1.3.39)$$

Que é a solução da EDO 1.3.33. Se derivarmos, obtêm-se a corrente elétrica:

$$I(t) = -\frac{Q}{\sqrt{LC}} \text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \phi\right) \quad (1.3.40)$$

Note que $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ frequência angular de oscilação do circuito LC:

$$I(t) = -Q\omega \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (1.3.41)$$

Que mostra que tanto a corrente elétrica quanto a carga elétrica mudam periodicamente com o tempo e sua frequência de oscilação depende dos valores de L e C .

1.3.8 Circuito RLC em Série

Seja o circuito da Figura 1.3.8:

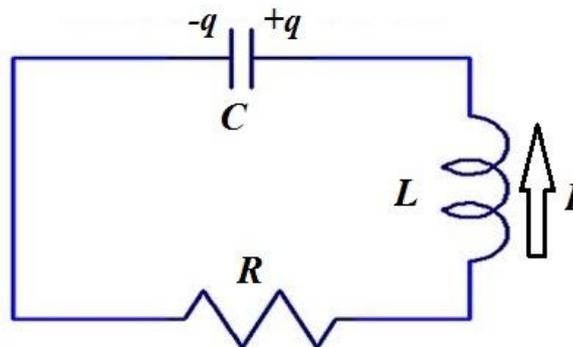


Figura 1.3.8 – Esquema de um circuito em série com um resistor (R), indutor (L) e um capacitor (C). O capacitor já está carregado.

Note que, foi conectado uma bateria (ou fonte) ao circuito, na qual carregou o capacitor, logo em seguida, a bateria foi removida e conectou-se todos os componentes eletrônicos. Utilizando a lei das malhas:

$$\begin{aligned} -V_L - V_R - V_C &= 0 \\ L \frac{d}{dt}I + RI + \frac{q}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q + \frac{R}{L} \frac{d}{dt}q + \frac{q}{CL} = 0 \quad (1.3.43)$$

Esta é uma EDO homogênea linear de segunda ordem da forma 1.2.31. Resolvendo o polinômio característico, têm-se:

$$A = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{CL}} \quad (1.3.44)$$

Onde A pode ser complexo ou real, nestes casos R determina como será a solução: têm-se uma oscilação subamortecido se R pequeno:

Para o este caso, a resistência elétrica será pequena, têm-se a oscilação subamortecida, a equação 1.3.44 fica:

$$A = -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (1.3.45)$$

A solução pode ser escrita na forma da equação 1.2.44 (omitindo o termo em seno):

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t + \phi\right) \quad (1.3.46)$$

Onde Q_0 é a carga inicial. E a frequência de Oscilação, do circuito RLC, pode ser escrita como:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (1.3.47)$$

1.4 Circuitos em Corrente Alternada [13]

Circuitos em corrente alternada (CA) diferem dos de corrente contínua (CC) pelo simples fato da forma que a fonte de energia fornece energia ao circuito. No caso da CC a fonte fornece energia de forma contínua, ou seja, não existe variação da corrente elétrica fornecida pela fonte, no caso CA a fonte fornece uma corrente elétrica que muda com o tempo, ela muda periodicamente com o tempo como uma função senoidal, ou seja, pode ser descrito pela seguinte equação:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.4.1)$$

Observe, na Figura 1.4.1, que o potencial fornecido hora é positivo e hora negativa. Desta forma o comportamento dos dispositivos eletrônicos sofrem modificações que valem ser ressaltadas.

1.4.1 Resistores, Capacitores e Indutores em Corrente Alternada [11, 12, 13]

Supondo um pequeno circuito com apenas uma fonte e um resistor ligados. O potencial elétrico no resistor é dado pela lei de Ohm (1.3.14):

$$V = RI$$

Utilizando a equação 1.4.1:

$$V_0 \cos(\omega t + \phi) = RI \quad (1.4.2)$$

E, por fim, a expressão da corrente elétrica no resistor:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.4.3)$$

Note que, a corrente elétrica no resistor depende do tempo e, também, da mesma forma que a do potencial da fonte, depende com uma função trigonométrica.

Semelhante ao caso do resistor, o potencial em um indutor é descrito pela equação 1.3.4

$$V_L = L \frac{d}{dt} I$$

Utilizando a equação 1.4.3 como sendo a corrente elétrica que passa pelo indutor:

$$V_L = L \frac{d}{dt} (I_0 \cos(\omega t + \phi)) = -L\omega I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (1.4.4)$$

Este é o potencial no indutor em corrente alternada. Desta equação tiramos uma relação muito importante (lembrando da equação 1.4.3), note que os parâmetros constantes ($L\omega$) são chamamos de **Reatância Indutiva** (X_L):

$$X_L = L\omega \quad (1.4.5)$$

Reescrevendo a equação 1.4.4:

$$V_L = X_L I \quad (1.4.6)$$

Que representa a voltagem em um indutor. Seu significado se baseia no princípio do indutor, ela nada mais é que o potencial auto induzido que se opõe a qualquer mudança da corrente elétrica no indutor (vinda de uma fonte, por exemplo).

Quando têm-se um capacitor em corrente alternada, vale salientar a definição de corrente elétrica juntamente com a equação 1.4.3:

$$I = \frac{d}{dt} Q = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.4.7)$$

Integrando ambos os lados em relação ao tempo:

$$Q(t) = \frac{I_0}{\omega} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (1.4.8)$$

Substituindo na equação do potencial do capacitor:

$$V_L = \frac{Q}{C} = \frac{I_0}{C\omega} \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Obtendo:

$$V_L = \frac{I}{C\omega} = X_C I \quad (1.4.9)$$

(vtagem entre as placas do capacitor em CA) Onde denominamos de **Reatância capacitiva** (X_C), que é definida por:

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \quad (1.4.10)$$

Sua unidade é o ohm, a mesma utilizada para a resistência elétrica e reatância indutiva, pois é a divisão da vtagem por uma corrente.

Por fim, pode-se expressar a representação complexa (que será mais abordada no próximo item) de \hat{V} e \hat{I} :

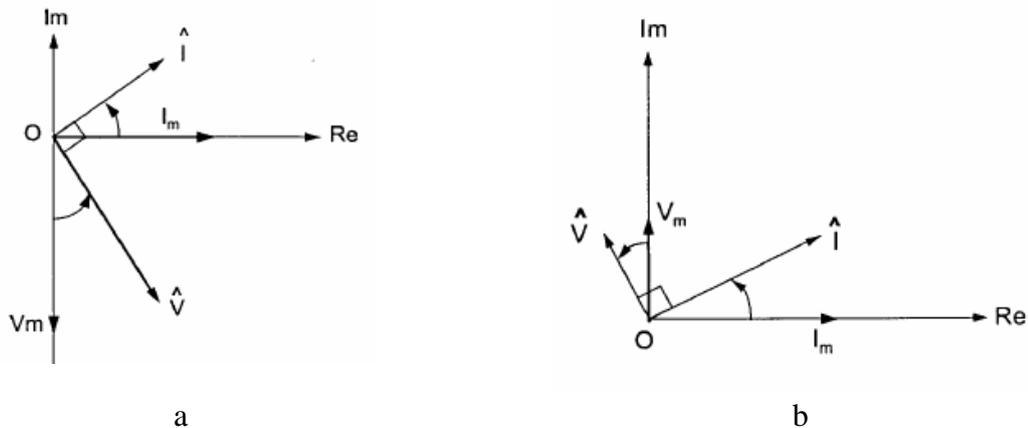


Figura 1.4.1 – Representações complexas de \hat{V} e \hat{I} para: a) um Capacitor e b) um Indutor [13].

Os vetores (Figura 1.4.1 a) e b)) \hat{V} e \hat{I} giram no sentido anti-horário com velocidade angular ω (um dos motivos para utilizarmos, em breve, o fator $e^{i\omega t}$). Note que o vetor \hat{V} sempre estará perpendicular a \hat{I} . Da Figura 1.4.1 a) notamos que \hat{V} está adiantado $\pi/2$ em relação a \hat{I} . Para b) a corrente \hat{I} está adiantada $\pi/2$ em relação a \hat{V} [13].

1.4.2 Impedância de um circuito RL em Série [13]

Seja o circuito R-L da Figura 1.4.2:

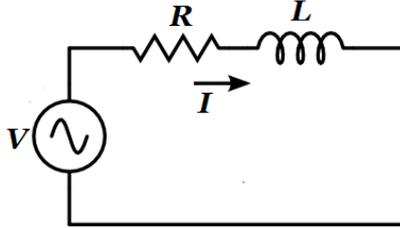


Figura 1.4.2 – Circuito R-L em série ligado em uma fonte CA.

Aplicando a lei das malhas:

$$V = RI + L \frac{d}{dt} I \quad (1.4.11)$$

Neste ponto introduzindo a seguinte função para o potencial da fonte:

$$\hat{V} = \bar{V} e^{i\omega t} \quad (1.4.12)$$

Onde \bar{V} é a função do potencial da fonte, note que é uma função complexa. Substituiremos a 1.4.11 na 1.4.12 fazendo com que a corrente elétrica se torne uma função complexa:

$$\hat{V} = \left(R\bar{I} + L \frac{d}{dt} \bar{I} \right) e^{i\omega t} = \left(R\bar{I} e^{i\omega t} + L \frac{d}{dt} \bar{I} e^{i\omega t} \right)$$

Deixando \bar{I} ser uma constante e derivando somente a exponencial:

$$\hat{V} = (R\bar{I} e^{i\omega t} + Li\omega \bar{I} e^{i\omega t}) = (R + i\omega L) \bar{I} e^{i\omega t} \quad (1.4.13)$$

Um análogo da equação 1.4.12 é:

$$\hat{I} = \bar{I} e^{i\omega t} \quad (1.4.14)$$

Substituindo 1.4.14 na 1.4.13, têm-se:

$$\hat{V} = (R + i\omega L) \bar{I} e^{i\omega t} = (R + i\omega L) \hat{I} \quad (1.4.15)$$

Dividindo ambos os lados por \hat{I} :

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \equiv \bar{Z} = (R + i\omega L)$$

Utilizando a equação 1.4.5:

$$\bar{Z} = R + iX_L \quad (1.4.16)$$

Que recebe o nome de *impedância complexa*, note que a parte real nada mais é que a resistência elétrica a parte imaginária, a reatância indutiva. Reescrevendo a lei de ohm:

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \text{ ou } \hat{V} = \bar{Z} \hat{I} \quad (1.4.17)$$

Uma *generalização complexa da lei de ohm*. O modulo da impedância complexa é:

$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (1.4.18)$$

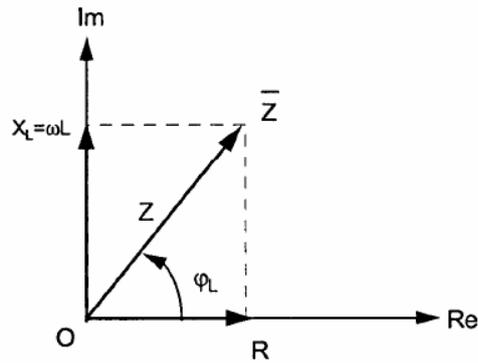


Figura 1.4.3 – Impedância complexa do circuito R-L [13];

De acordo com a Figura 1.4.3, pode-se determinar o ângulo da impedância complexa em relação ao eixo real, para isso basta tomar a tangente do ângulo entre a impedância e o eixo real:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_L) &= \frac{\omega L}{R} \\ \varphi_L &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Descrevendo a parte real da corrente elétrica utilizando equação 1.4.17:

$$\hat{I} = \operatorname{Re}\left(\frac{\hat{V}}{\bar{Z}}\right)$$

Usando que e, também, da equação 1.4.12:

$$\bar{V} = V_m e^{-i\varphi_L} \text{ e } \hat{V} = \bar{V} e^{i\omega t}$$

Têm-se:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re}\left(\frac{V_m}{\bar{Z}} e^{-i\varphi_L} e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{V_m}{\bar{Z}} e^{i\omega t - i\varphi_L}\right) \\ I(t) &= \frac{V_m}{\bar{Z}} \cos(\omega t - \varphi_L) \\ I(t) &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi_L) \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

$$I(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right) \quad (1.4.21)$$

O termo que multiplica a função trigonométrica é o valor máximo da corrente elétrica, note que, a corrente elétrica está atrasada por φ_L em relação à voltagem.

1.4.3 Circuito RC Serie em CA

Para um circuito R-C, analogamente ao caso do circuito R-L:

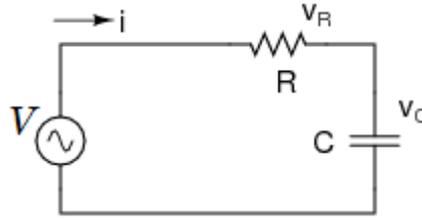


Figura 1.4.4 - Circuito R-C em corrente alternada.

$$\hat{V} = R\hat{I} + \frac{\hat{Q}}{C}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{V} = R\frac{d}{dt}\hat{I} + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}\hat{Q} \quad (1.4.22)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{I} = \frac{d}{dt}(\bar{I}e^{i\omega t}) = i\omega\bar{I}e^{i\omega t} = i\omega\hat{I} \quad (1.4.23)$$

Substituindo a 1.4.23 na 1.4.22:

$$\frac{d}{dt}\hat{V} = Ri\omega\hat{I} + \frac{1}{C}\hat{I} = i\omega\hat{V} \quad (1.4.24)$$

Isolando \hat{V} :

$$\hat{V} = \hat{I}\left(R + \frac{1}{i\omega C}\right) = \hat{I}\left(R - \frac{i}{\omega C}\right) \quad (1.4.25)$$

$$\frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \bar{Z} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Utilizando a equação da reatância capacitiva, equação 1.4.10:

$$\bar{Z} = R - iX_C \quad (1.4.26)$$

Que é a *Impedância capacitiva*, seu módulo:

$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1.4.27)$$

Pode-se reescrever a 1.4.26 da seguinte forma:

$$R - iX_C = Ze^{-i\varphi_C} \quad (1.4.28)$$

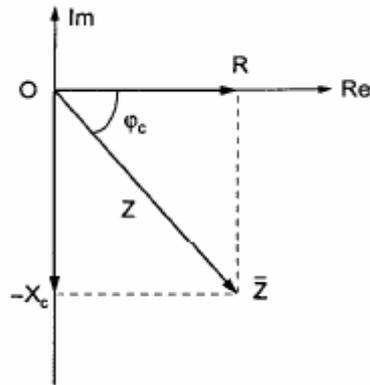


Figura 1.4.5 – Impedância capacitiva complexa do circuito R-C [13].

Tomando a tangente do ângulo φ_c , o obtêm-se:

$$\varphi_c = \arctg\left(\frac{X_C}{R}\right) = \arctg\left(\frac{1}{RC\omega}\right) \quad (1.4.29)$$

A corrente elétrica é a parte real da equação:

$$I(t) = \frac{V_m}{Z} e^{i(\varphi_c + \omega t)} \quad (1.4.30)$$

Portanto, têm-se:

$$I(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \arctg\left(\frac{1}{RC\omega}\right)\right) \quad (1.4.31)$$

1.4.4 Circuito RLC Série em CA

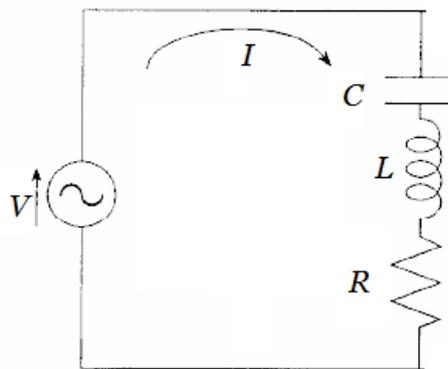


Figura 1.4.6 – Circuito R-L-C em CA. R resistor, L indutor e C capacitor.

Analisando o circuito com base nas reatâncias de cada dispositivo:

$$Z = R + iX_L - iX_C \quad (1.4.32)$$

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1.4.33)$$

Utilizando que:

$$\bar{Z} = Z e^{i\varphi} \quad (1.4.34)$$

Que $Z = |\bar{Z}|$ e utilizando

$$V = V_m \cos(\omega t) \quad (1.4.35)$$

$$I = \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{V}}{Z} e^{i\omega t} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{V_m}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)} \right) = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.4.36)$$

Assim definindo:

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (1.4.37)$$

1.4.5 Circuito RC, CC e CL Paralelo [15]

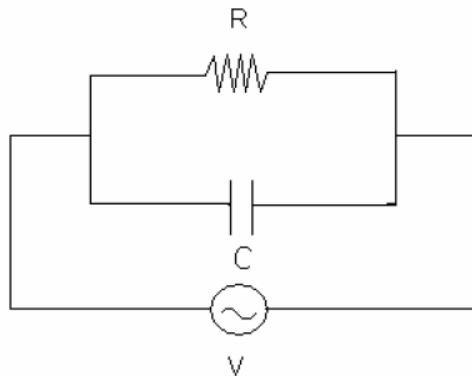


Figura 1.4.7 – Circuito R-C em paralelo. R é o resistor, C o capacitor e V a fonte em corrente alternada (CA) [15].

Na Figura 1.4.7, apresentando um circuito R-C em paralelo. Pode-se obter a impedância deste circuito utilizando a impedância de cada dispositivo eletrônico. Neste caso:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} \quad (1.4.38)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{R} + i\omega C = \frac{1 + iR\omega C}{R}$$

$$Z = \frac{R}{1 + iR\omega C} \quad (1.4.39)$$

Multiplicando denominador e numerador pelo complexo conjugado do número complexo:

$$Z = \frac{R}{1 + iR\omega C} \cdot \frac{1 - iR\omega C}{1 - iR\omega C} = \frac{R - i\omega CR^2}{1 + (R\omega C)^2}$$

De modo que é possível separar a parte real da imaginária:

$$Z = \frac{R}{1 + (R\omega C)^2} - \frac{\omega CR^2}{1 + (R\omega C)^2} i \quad (1.4.40)$$

O primeiro termo do lado esquerdo é a parte real da impedância enquanto que o segundo é a parte imaginária. Será inserido a seguinte notação para a parte real e complexa:

$$Z' = \frac{R}{1 + (R\omega C)^2} \quad (1.4.41)$$

$$Z'' = -\frac{\omega CR^2}{1 + (R\omega C)^2} \quad (1.4.42)$$

O módulo de Z será:

$$|Z| = \sqrt{Z'^2 + Z''^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{1 + (R\omega C)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega CR^2}{1 + (R\omega C)^2}\right)^2}$$

$$|Z| = \frac{1}{1 + (R\omega C)^2} \sqrt{R^2 + (\omega CR^2)^2} = \frac{R}{1 + (R\omega C)^2} \sqrt{1 + (\omega CR)^2}$$

Que resulta em:

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} \quad (1.4.43)$$

Que é o módulo da impedância elétrica deste circuito (Figura 1.4.7). O gráfico para o módulo da impedância esta na Figura 1.4.9:

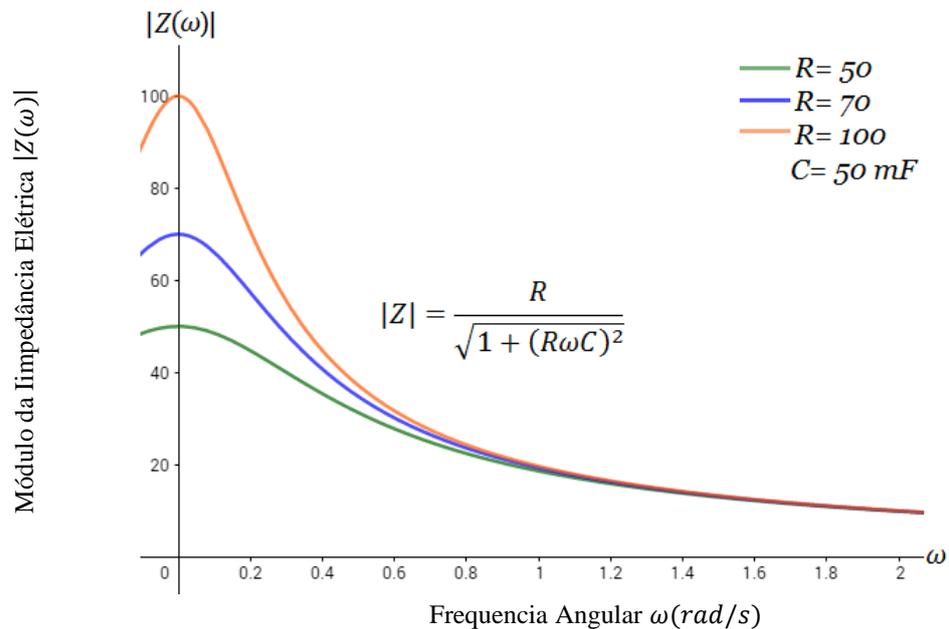


Figura 1.4.8 – Gráfico do módulo da impedância elétrica do circuito RC em paralelo.

Quando a frequência angular tende ao infinito $\omega \rightarrow \infty$ então $|Z(\omega \rightarrow \infty)| \rightarrow 0$, isso explica a forma que a função decai conforme a frequência angular aumenta. Note que se $\omega \rightarrow 0$ fazendo com que $|Z(\omega \rightarrow 0)| \rightarrow R$, que também é o valor máximo do módulo da impedância elétrica.

De forma bem simplificada, pode-se determinar a impedância de um circuito com dois capacitores em paralelo (tal determinação será muito importante futuramente).

Seja a Figura 1.4.9, onde C_2 é o capacitor 2 e C_1 o capacitor 1.1. Escrevendo a impedância deste circuito como e equação 1.4.38:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} = \frac{1}{\frac{1}{i\omega C_1}} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C_2}} = i\omega C_1 + i\omega C_2$$

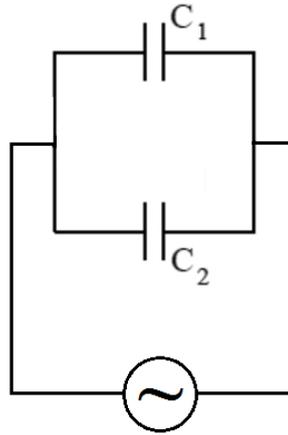


Figura 1.4.9 – Dois capacitores (C_1 e C_2), em paralelo, ligados a uma fonte de corrente alternada (CA).

$$Z = \frac{1}{i\omega C_1 + i\omega C_2} \cdot \frac{-i\omega C_1 - i\omega C_2}{-i\omega C_1 - i\omega C_2} = \frac{-i\omega C_1 - i\omega C_2}{(\omega C_1)^2 + (\omega C_2)^2 + 2\omega^2 C_1 C_2}$$

Evidenciando ω no numerador e denominador e simplificando:

$$Z = \frac{-i(C_1 + C_2)}{\omega(C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2)} = \frac{-i(C_1 + C_2)}{\omega(C_1 + C_2)^2}$$

Portanto, têm-se:

$$Z = \frac{-i}{\omega(C_1 + C_2)} \quad (1.4.44)$$

Que é a impedância elétrica de um circuito constituído de dois capacitores em paralelo. Note que, possui somente parte imaginária.

Determinando a impedância elétrica do circuito C-L paralelo, este circuito esta representado na Figura 1.4.10.

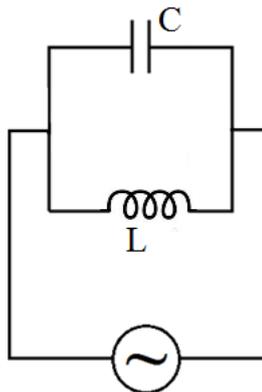


Figura 1.4.10 – Capacitor (C) ligado em paralelo com um indutor (L) em CA.

A impedância pode ser determinada, analogamente aos dois últimos casos:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_c} + \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} + \frac{1}{i\omega L} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

$$\frac{1}{Z} = i\omega C \cdot \frac{i\omega L}{i\omega L} + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1 - \omega^2 CL}{i\omega L}$$

Onde têm-se

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL} \quad (1.4.45)$$

Que é a impedância de um circuito C-L em paralelo. Onde L é a indutância. Note que, a impedância obtida possui somente parte imaginária.

As impedâncias obtidas, circuito CC e CL paralelo, possuem somente a parte real. Isso ocorre ao juntar somente circuitos que possuem a reatância.

1.4.6 O Dispositivo CPE

O dispositivo CPE (*Constant Phase Element* ou, em tradução livre, elemento de fase constante) não existe fisicamente, utilizado apenas para ajustar curvas e realizar análises de alguns circuitos elétricos de forma teórica.



Figura 1.4.12 - Símbolo do dispositivo CPE;

O CPE possui impedância dada por:

$$Z_{CPE} = \frac{A}{(i\omega)^\alpha} \quad (1.4.46)$$

onde i é um número complexo. Note que, fisicamente, a constante real α está definida $-1 \leq \alpha \leq 1$, assim, é possível verificar que têm-se um resistor para $\alpha = 0$, capacitor para $\alpha = 1$ e um indutor para $\alpha = -1$ [4, 16].

1.4.7 Circuito Proposto [4]

Utilizaremos o dispositivo CPE em um circuito elétrico, proposto pela literatura [4], para estudar o comportamento da impedância de um cristal líquido, veja a Figura 1.4.13 que amostra o arranjo do circuito elétrico.

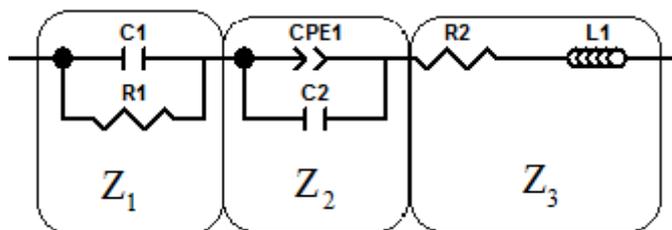


Figura 1.4.13 – Circuito elétrico composto por Capacitores (C_1 e C_2), Resistores (R_1 e R_2), Indutor (L_1) e um dispositivo CPE (CPE_1) [4].

Este circuito (Figura 1.4.13) pode ser separado em três circuitos menores denominados como Z_1, Z_2 e Z_3 , onde Z representa a impedância. O circuito Z_1 possui um capacitor C_1 , associado à capacitância do *Bulk*, em paralelo a um resistor R_1 , que é associado à condutividade iônica do mesmo; A equação 1.4.40 é sua representação matemática. A segunda parte do circuito Z_2 possui um capacitor C_2 em paralelo com um elemento de fase

constante CPE_1 (equação 1.4.46). Ou seja, esta parte do circuito esta associado à polarização e ao seu não-bloqueio dos eletrodos. Em outras palavras: este parte do circuito esta associada ao efeito de parede, interface da amostra e as placas do capacitor (porta amostra); A terceira parte, Z_3 , é composta por um resistor R_2 com um indutor L_1 em série, onde, sua impedância está associada com os fios que ligam o equipamento *Solartron* 1260 ao porta amostra [4]. Pode-se determinar a impedância deste circuito realizando a soma das impedâncias:

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

Onde

$$Z_1 = \frac{R_1 - i\omega R_1^2 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} \quad (1.4.47)$$

Que é de certa forma, idêntica a equação 1.4.40;

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{\left(\frac{A}{(i\omega)^\alpha}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{i\omega C_2}\right)} = \frac{(i\omega)^\alpha}{A} + \frac{i\omega C_2}{1} = \frac{(i\omega)^\alpha + i\omega C_2 A}{A} \quad (1.4.48)$$

Invertendo a expressão:

$$Z_2 = \frac{A}{(i\omega)^\alpha + i\omega C_2 A} \quad (1.4.49)$$

Será necessário tirar qualquer número complexo do denominador (esse processo facilitará no cálculo da impedância do circuito), isso será feito após estudar o termo $(i\omega)^\alpha$. Utilizando a equação de Moivre (equação 1.1.23);

$$(i\omega)^\alpha = (\omega)^\alpha (i)^\alpha = (\omega)^\alpha (-1 + 0i)^{\frac{\alpha}{2}} = (\omega)^\alpha |1| \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right) \quad (1.4.50)$$

Obtendo:

$$(i)^\alpha = |1| \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right) \quad (1.4.51)$$

Substituindo na 1.4.52:

$$Z_2 = \frac{A}{(\omega)^\alpha \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right) + i\omega C_2 A} \quad (1.4.52)$$

$$Z_2 = \frac{A}{(\omega)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + i \left(\omega C_2 A + \omega^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right)} \quad (1.4.53)$$

Multiplicando numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador:

$Z_2 =$

$$= \frac{A}{(\omega)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + i \left(\omega C_2 A + \omega^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right)} \cdot \frac{(\omega)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) - i \left(\omega C_2 A + \omega^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right)}{(\omega)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) - i \left(\omega C_2 A + \omega^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \right)}$$

Obtêm-se:

$$Z_2 = \frac{A\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) - i\left(\omega C_2 A^2 + A\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)}{\omega^{2\alpha} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \left(\omega C_2 A + \omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)^2}$$

Desenvolvendo o denominador:

$$\begin{aligned} & \omega^{2\alpha} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + \left(\omega C_2 A + \omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)^2 \\ &= \omega^{2\alpha} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) + (\omega C_2 A)^2 + \left(\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)^2 + 2\omega C_2 A \omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \\ &= \omega^{2\alpha} + (\omega C_2 A)^2 + 2C_2 A \omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

Portanto, a forma final da impedância da segunda parte do circuito será:

$$Z_2 = \frac{A\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) - i\left(\omega C_2 A^2 + A\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)}{\omega^{2\alpha} + (\omega C_2 A)^2 + 2C_2 A \omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)} \quad (1.4.54)$$

Onde é possível verificar que a parte real e imaginária estão completamente separadas.

Por fim, testando esta equação para as condições da constante α :

$$-1 \leq \alpha \leq 1$$

É fácil verificar que, fazendo $\alpha = 0$, iremos obter a equação equivalente ao circuito C-R paralelo (equação 1.4.40) com $A = R_1$

$$Z_2 = \frac{A - i(\omega C_2 A^2)}{1 + (\omega C_2 A)^2}$$

Com $\alpha = 1$, têm-se o equivalente ao circuito C-C paralelo (equação 5.44) com $A = \frac{1}{C_1}$:

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{0 - i(\omega C_2 A^2 + A\omega)}{\omega^2 + (\omega C_2 A)^2 + 2C_2 A \omega^2} = \frac{-iA\omega(C_2 A + 1)}{\omega^2 C_2^2 \left(A + \frac{1}{C_2}\right)^2} = \frac{-iAC_2 \left(A + \frac{1}{C_2}\right)}{\omega C_2^2 \left(A + \frac{1}{C_2}\right)^2} = \frac{-iAC_2}{\omega C_2^2 \left(A + \frac{1}{C_2}\right)} \\ &= \frac{-iAC_2}{\frac{\omega C_2^2}{C_2} (C_2 A + 1)} = \frac{-iA}{\omega (C_2 A + 1)} \end{aligned}$$

Para $\alpha = -1$, têm-se o equivalente C-L com $A = L_1$ (equação 1.4.45):

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{0 - i(\omega C_2 A^2 - A\omega^{-1})}{\frac{1}{\omega^2} + (\omega C_2 A)^2 - 2C_2 A} = \frac{i\left(-\omega C_2 A^2 + \frac{A}{\omega}\right)}{\frac{1}{\omega^2} (1 + \omega^2 (\omega C_2 A)^2 - 2\omega^2 C_2 A)} \\ &= \frac{\frac{i}{\omega} (A - \omega^2 C_2 A^2)}{\frac{1}{\omega^2} (1 + \omega^2 (\omega C_2 A)^2 - 2\omega^2 C_2 A)} = \frac{\frac{iA}{\omega} (1 - \omega^2 C_2 A)}{\frac{1}{\omega^2 A^2} \left(\omega^2 C_2 - \frac{1}{A}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{iA}{\omega} (1 - \omega^2 C_2 A)}{\frac{A^2}{\omega^2 A^2} (\omega^2 C_2 A - 1)^2} = \frac{-\frac{iA}{\omega} (\omega^2 C_2 A - 1)}{\frac{A^2}{\omega^2 A^2} (\omega^2 C_2 A - 1)^2} = \frac{-\frac{iA}{\omega}}{\frac{1}{\omega^2} (\omega^2 C_2 A - 1)^2} \\ &= \frac{-\frac{iA}{\omega}}{\frac{1}{\omega^2} (\omega^2 C_2 A - 1)} = -\frac{i\omega A}{(\omega^2 C_2 A - 1)} = \frac{i\omega A}{(1 - \omega^2 C_2 A)} \end{aligned}$$

Dando continuidade; A impedância Z_3 é dada por:

$$Z_3 = R_2 + i\omega L_1 \quad (1.4.55)$$

Agora poderemos escrever a impedância geral do circuito proposto (Figura 1.4.13):

$$Z_T = \frac{R_1 - i\omega R_1^2 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} + \frac{A\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) - i\left(\omega C_2 A^2 + A\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)}{\omega^{2\alpha} + (\omega C_2 A)^2 + 2C_2 A\omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)} + R_2 + i\omega L_1$$

Separando a parte real e imaginária:

$$Z'_T = \frac{R_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} + \frac{A\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)}{\omega^{2\alpha} + (\omega C_2 A)^2 + 2C_2 A\omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)} + R_2 \quad (1.4.56)$$

Que é a parte real da impedância total.

$$Z''_T = \frac{-\omega R_1^2 C_1}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} + \frac{-\left(\omega C_2 A^2 + A\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)\right)}{\omega^{2\alpha} + (\omega C_2 A)^2 + 2C_2 A\omega^{1+\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right)} + \omega L_1 \quad (1.4.57)$$

A parte imaginária.

No Capítulo 3, estas equações serão utilizadas para ajustar dados experimentais.

No próximo capítulo será feita uma breve introdução aos cristais líquidos.

1.5 Introdução a Cristais Líquidos

Um cristal líquido é um tipo especial de estado da matéria, onde é possível encontrar características peculiares como a birrefringência de um sólido cristalino e a fluidez de um líquido ordinário. Existem dois tipos de cristais líquidos, os Cristais Líquidos Liotrópicos (CLLs) e os Cristais Líquidos Termotrópicos (CLTs). Os CLLs possuem micelas como os constituintes básicos (suas estruturas são formadas por micelas devido as substâncias utilizadas em sua produção), a produção deste tipo de Cristal Líquido (CL) envolve a mistura de (neste caso do trabalho) três componentes: água (H_2O), decanol (DeOH) e Laurato de Potássio (*Potassium Laurate*, em inglês conhecido, também, pela abreviação KL), note que possuímos uma mistura de três componente. Os CLTs possuem moléculas, diferentemente dos CLLs que possuem micelas como constituintes básicos; Possuem solução pura, ou seja, não são compostos por uma mistura de componentes (outra diferença em relação aos CLLs) [2].

Agora será feita uma breve introdução a fases dos dois tipos de CLs, visto que será necessário tal conhecimento para análise dos resultados futuros.

1.5.1 Cristais Líquidos Termotrópicos (CLTs)

O CLT pode transitar de fase exclusivamente com alterações na temperatura e pressão a qual é submetido. O constituinte básico do CLT é uma molécula orgânica relativamente grande onde, geralmente, possui mais de 17 carbonos em sua cadeia e possuem algum grau de anisotropia. Para entender melhor esta idéia, por exemplo: Suponha moléculas no formato de pãozinho francês, se um tipo de CL possui esse tipo de molécula então ela deve apresentar (entre os estados sólido cristalino e um líquido isotrópico) um estado líquido cristalino [16].

Este CL possui diversas fases, como por exemplo:

Fase Nemática: Existem algumas variações desta fase como a uniaxial (N), biaxial (N_B) e a quiral ou colestérica (N^*); Na fase uniaxial, o CL apresenta a fluidez de um líquido, o arranjo das moléculas impede com que ocorra ordenamento de longo alcance, neste caso pode-se determinar um ordenamento médio de pequenos grupos de moléculas. Esta fase também é conhecida por possuir um único eixo ótico, neste caso a amostra pode polarizar a luz. Se as moléculas desta fase nemática forem alongadas têm-se a ocorrência da fase *nemática calamítica* (N_C) pode-se definir um vetor diretor médio destas moléculas na qual aponta na direção do eixo ótico. Se as moléculas forem achatadas na forma de disco, têm-se a *nemática discótica* (N_D), onde ocorre um alinhamento médio das moléculas e o vetor diretor é perpendicular à superfície da molécula.

A fase nemática biaxial possui dois eixos óticos, ou seja, a luz que incide no CL que esta nesta fase pode ser polarizada em duas direções diferentes. Esta fase é muito rara de ser observada.

A fase quiral ou colestérica (N^*), as moléculas desta fase possuem um carbono quiral de tal forma que induz que as moléculas possuem uma direção média (vetor diretor), cada conjunto de molécula esta em um plano, nos planos consecutivos a direção média das

moléculas mudam suavemente se observarmos muitos planos notaremos uma “torção” (*twist*), a Figura 1.5.1 ilustra este fato.

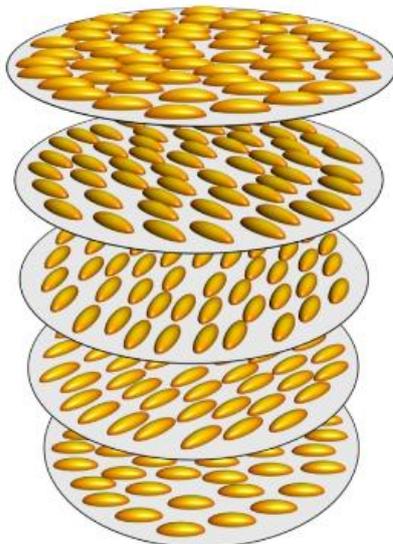


Figura 1.5.1 – Representação do twist da fase nemática quiral ou colestérica [16].

Fase Esmética: Esta fase possui as moléculas arranjadas em camadas, tem-se varias camadas espaçadas por distancias bem definidas, esta fase também possui um ordenamento, na qual é maior que a da fase nemática. Outro detalhe, esta fase aparece em temperaturas inferiores a que é encontrada a nemática.

Fase Colunar: Nesta fase as moléculas ficam dispostas umas sobre as outras (empilhadas), de tal modo a não possuírem distancias bem definidas umas das outras, em outras palavras, esta fase possui desordem em uma direção.

Fase Azul: As moléculas se arranjam em forma de cilindro sofrendo uma torção em torno de um eixo (o cilindro é concêntrico com o eixo em questão, logo existem vários cilindros concêntricos com diferentes níveis de torção), quanto mais próximo do eixo mais as moléculas possuem sua direção modificada em relação às moléculas do cilindro mais distante; A Figura 1.5.2 ilustra este fato.

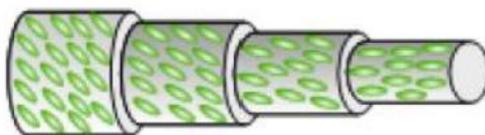


Figura 1.5.2 – Representando a fase azul; Note que os cilindros são concêntricos uns com os outros [18].

Fase Isotrópica: Esta fase não possui ordenamento (nem curto e longo alcance), ou seja, é caracterizada pela desordem total das moléculas. A Figura 1.5.3 ilustra este caso;



Figura 1.5.3 – Ilustra a fase Isotrópica do CL [17].

1.5.2 Cristais Líquidos Liotrópicos (CLLs)

Como já comentado, os CLLs são resultado de uma mistura de três componentes constituindo uma mistura ternária, onde foi utilizado um solvente (água destilada), um sal (KL) e um surfactante (Decanol). Os constituintes básicos, deste cristal líquido, são micelas: formadas por moléculas anfifílicas que possuem duas partes uma polar (hidrofílica, que possui afinidade com água) e outra apolar (hidrofóbica, que não possui afinidade com a água). As micelas acabam por constituir estruturas micelares que definem as fases deste CL.

Fase Nemática: Esta fase (no CLL) é composta por micelas (e não moléculas). Estas micelas podem possuir diversas formas como: Cilindro que caracteriza a fase *nemática calamítica*, disco têm-se a fase *nemática discótica*, se forem do formato de paralelepípedo a fase será *nemática biaxial*, ainda existe a *nemática colestérica* que possuem carbonos quirais as micelas [19].

Fase Lamelar: Nesta fase as micelas se desfazem criando camadas de moléculas anfifílicas na qual a parte hidrofílica (em contato com a água) para fora e a hidrofóbica voltada para dentro. A Figura 1.5.4 ilustra esta fase.

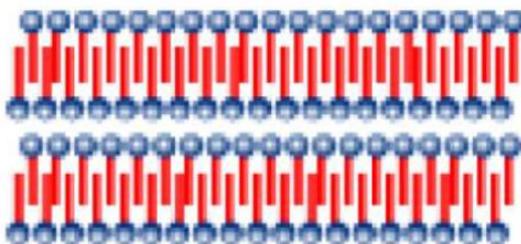


Figura 1.5.4 – Ilustrando a fase Lamelar, note que a cabeça da molécula é a parte hidrofílica e a calda hidrofóbica [18].

Fase Isotrópica: Nesta fase e, da mesma forma que no CLT, as micelas não possuem nenhum tipo de ordem, tendo assim a desordem total.

Fase Hexagonal: As micelas se agrupam formando estruturas micelares na forma de tubos, nas quais ficam empilhados, ainda formando uma estrutura de empacotamento hexagonal. Os tubos possuem suas micelas com a parte hidrofóbica (calda) voltadas para seu interior e a hidrofílica (cabeça) para o lado de fora.

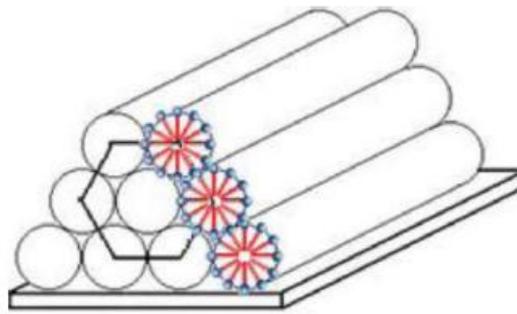


Figura 1.5.5 – Representação da fase Hexagonal [19].

Fase cúbica ou **Fase cúbica de corpo centrado (CCC)**: As micelas se arranjam a formarem estruturas micelares esféricas de tal forma a se arranjam formando uma estrutura cúbica de corpo centrado (os vértices são onde se localiza as estruturas micelares). A Figura 1.5.6 ilustra essa fase.

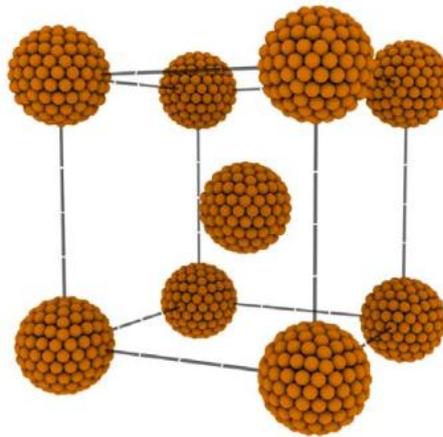


Figura 1.5.6 – Representação esquemática da fase cúbica note que as micelas localizam-se nos vértices do cubo [16].

Ter conhecimento do tipo de estrutura que iremos encontrar no CLL é muito importante, uma vez que poderemos explicar os resultados do experimento, de espectroscopia de impedância, com base na estrutura micelar e fase do CLL.

2 Técnica Experimental e Amostras

2.1 Introdução à Espectroscopia de Impedância Elétrica

A técnica de espectroscopia de impedância nos permite associar um circuito elétrico (constituído de resistores, capacitores e indutores se necessário) a uma junção desconhecida. Como exemplo, veja a Figura 2.1;

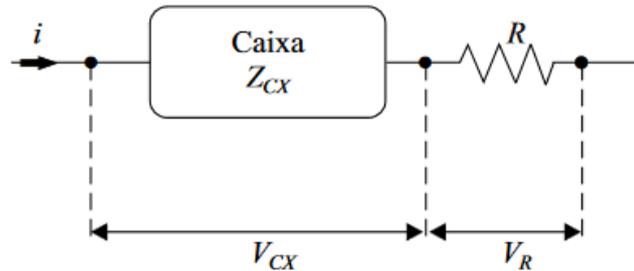


Figura 2.1 - Circuito contendo uma caixa Z_{CX} associada em série com um resistor R [20].

Note que, na Figura 2.1, existe uma caixa com um circuito elétrico desconhecido, estudando o comportamento da tensão entre as extremidades do circuito poderemos obter (experimentalmente) o gráfico das partes real e imaginária e concluiremos qual o circuito exista na caixa.

Neste trabalho será feito algo similar, têm-se a amostra de um CLL que será tratado como a caixa da Figura 2.1; O objetivo é verificar se um determinado circuito elétrico (que será discutido no capítulo 3) é suficiente para ser associado à amostra de CL. Vale salientar que, esta técnica permite obter informações sobre condutividade e resistência de determinada substância.

2.2 Materiais Utilizados

Foram utilizados:

- Ponte de impedância *Solartron SI 1260* ($1\mu\text{Hz} < f < 32\text{MHz}$), do laboratório de fluidos complexos (DFI-UEM);
- Computador para a coleta de dados;
- Contato de aço inox (o “capacitor”), pois este permite a obtenção de dados de melhor qualidade³;
- Compostos para a produção de amostra de Cristal Líquido: Laurato de Potássio (KL), Decanol (DeOH) e água destilada (H_2O);
- Seringas com agulha, luvas e espátula para manusear os compostos;
- Balança de precisão (modelo AT201 da *Mettler Toledo*) com aferição de 0.001g;
- Agitador (*Vortex*);
- Centrífuga (modelo Q-222T28 da *Quimis*);

³ Ao utilizar contatos de Latão (matéria constituído de cobre e zinco), foram obtidos resultados desagradáveis para água destilada e decanol. Logo a decisão de não utilizá-lo surgiu devido à observação dos resultados preliminares.

- Estufa (modelo EL, Odontobrás) até 250 °C;
- Termômetro digital (*Gulterm 700*), com resolução de 0,1 °C
- Tubos de ensaio;
- *Software ZView®* do *Solartron Analytical®*.

2.3 Preparação de Amostra de Cristal Líquido

A amostra de Cristal Líquido a ser produzida é do tipo Liotrópico, formado pela mistura dos compostos KL/DeOH/H₂O (mistura ternária).

Antes de tudo, deve-se manter limpos e secos os tubos de ensaio (estes podem contaminar a amostra) onde serão depositados os compostos. Os tubos de ensaio devem ser lavados com sabão líquido entre 3 e 5 vezes e depois enxaguados com água destilada ao final e colocados para secagem em uma estufa por duas horas a 70 °C, depois a estufa deve ser desligada e o tubo de ensaio deve ser mantido em seu interior por aproximadamente 22 horas para terminar o processo de secagem e descontaminação. Note que a tampa deve ser lavada com o mesmo rigor, porém não poderá ir à estufa. Este processo precisa ser executado no mínimo de 24 horas antes de ser iniciada a produção do CL.

A balança de precisão precisa ser verificada e limpa, com um pincel, sempre antes de iniciar a pesagem. A espátula utilizada precisa ser lavada e secada no início.

É necessário respeitar a ordem na qual devem ser inseridos, no tubo de ensaio, os compostos: primeiro KL, segundo DeOH e por fim H₂O. Após serem adicionados os compostos é preciso iniciar o processo de homogeneização: o tubo de ensaio (já lacrado) é levado para o agitador *vortex* (por aproximadamente 5 minutos), em seguida, o mesmo é levado à centrífuga de laboratório, por aproximadamente 40 minutos em velocidade média, para terminar o processo de homogeneização. A amostra, quando homogênea, estará sem qualquer acúmulo de KL no interior do tubo, neste caso, a amostra será colocada em repouso por um período de 24 horas antes de realizar qualquer experimento, caso contrário, deve-se reiniciar o processo de homogeneização.

Produzimos as amostras com base no guia presente na Figura 2.2;

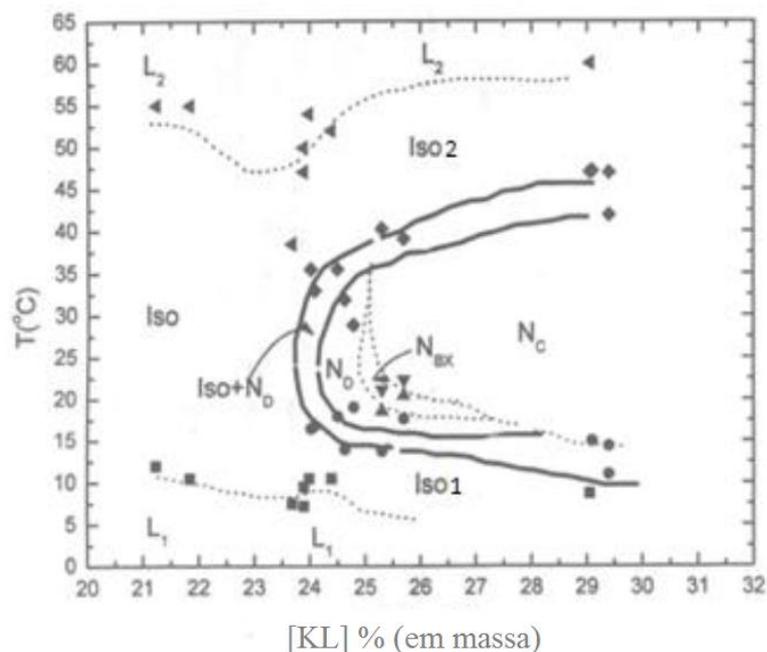


Figura 2.2 – Guia de fases [1] para as amostras de KL/DeOH/H₂O.

Produzimos duas amostras que se destacaram pelos dados obtidos, estas amostras estão na Tabela 2.1:

Tabela 2.1 – Amostras (S - Sample) em concentrações e pesos relativos;							
Amostras	KL	DeOH	H ₂ O	KL	DeOH	H ₂ O	Massa total
	(%)			(g)			
S1	22,98	6,24	70,78	1,0355	0,2812	3,1892	4,5059
S2	26,86	6,22	66,92	1,2150	0,2808	3,0042	4,5000

A diferença entre as duas amostras (Tabela 2.1) se faz na concentração de KL utilizada. Apesar de a diferença ser pequena (em questão de massa ou concentração) entre S1 e S2, seus comportamentos, de acordo com o guia de fase, são diferentes.

Na Tabela 2.2, encontra-se as temperaturas de transições de fase; Note que, a S1 possui somente uma fase Isotrópica entre as fases Lamelares, enquanto que a S2 possui duas Isotrópicas (Iso1 e Iso2) e uma fase Nemática (N) entre as fases Lamelares (L1 e L2). Os dados da tabela 2.2 foram obtidos por meio da microscopia ótica de luz polarizada, onde foi feito em paralelo com experimento principal ao segundo dia de tomada de dados.

Tabela 2.2 – Temperaturas de transição das amostras S1 e S2;	
Amostras	Transições
S1	L1 → 8°C → Iso → 51°C → L2
S2	L1 → 8°C → Iso1 → 16°C → N → 45°C → Iso2 → 56°C → L2

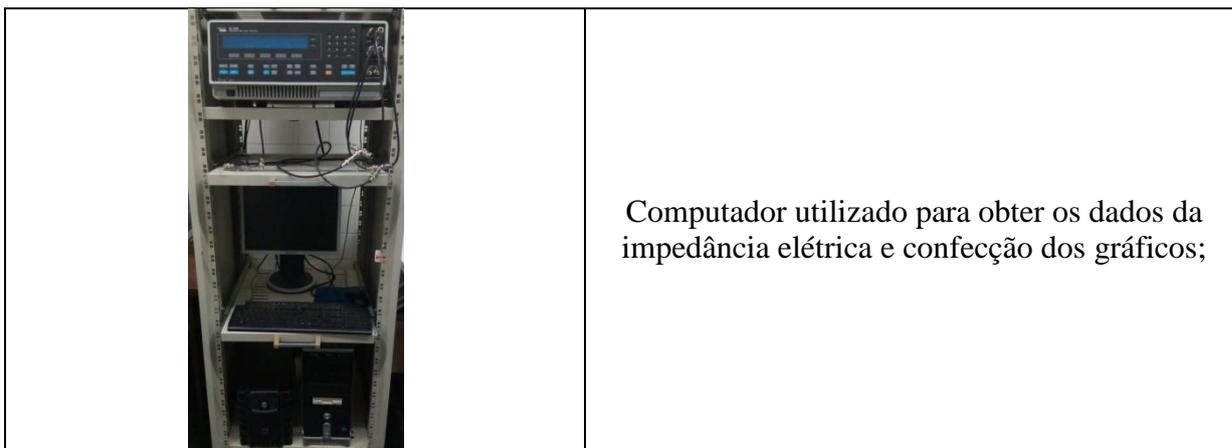
Neste caso (de acordo com a amostra S1) a fase L1 (Lamellar 1) está abaixo da temperatura de 8°C e transita para a Isotrópica acima dos 8°C e volta a sofrer outra transição

na temperatura de 51°C. Da mesma forma, para a amostra S2, note que há uma região de fase nemática entre duas fases isotrópicas.

2.4 Equipamentos, Montagem Experimental e Método Experimental

Na Tabela 2.3, encontra-se os materiais utilizados para a espectroscopia de impedância e suas descrições:

Tabela 2.3 – Equipamento utilizado na montagem e no experimento de impedância elétrica	
	<p>Capacitor de aço Inox, placa superior e inferior (disco maior e menor), vedações de plástico (peças brancas);</p>
	<p>Porta amostra com regulador de ajuste da espessura do capacitor;</p>
	<p>Ponte de impedância <i>solartron</i> SI 1260;</p>



Após a montagem do capacitor, deve-se prendê-lo dentro do porta amostra (como listado no quadro acima). Note que, a montagem do capacitor deve ser feito usando luvas de látex (para evitar sujeira da pele como gordura e sal, pois, podem contaminar a amostra de CL e influenciar os resultados).

Em seguida, utilizando o controlador de espessura do porta amostra (utilizado para controlar a distância entre as placas do capacitor) para descer completamente a placa superior (sem utilizar grande esforço para não danificar o equipamento), quando ocorrer o contato de uma placa com a outra (do capacitor) um pequeno efeito sonoro pode ser ouvido pelo controlador de espessura, deste modo, é feito a “tara” do medidor pressionando a tecla “Reset”. Agora deve-se levantar a placa superior para introduzir a amostra de CL.

Na introdução da amostra não deve ser utilizado seringas, pois, ocorrem o surgimento de bolhas na amostra, tais bolhas afetam a medida de espectroscopia de impedância. Realizando o seguinte procedimento para inserir a amostra: inclina-se o tubo de ensaio, próximo da abertura do capacitor, deixando a amostra escorrer diretamente ao interior do capacitor.

Utilizando o controlador de espessura do porta amostra para descer a placa superior até que seja atingida a espessura de aproximadamente 1.0 mm. Esta é a distância utilizada por padrão para as medidas de espectroscopia de impedância (neste trabalho). Note que, caso ocorra o controle incorreto do controlador de espessura e passar para menos de 1,0 mm, não retorne a placa superior do capacitor para à espessura de 1,0 mm, este movimento pode gerar sucção de ar provocando o surgimento de bolhas sem seu interior.

Por fim, é feita as conexões dos cabos da ponte de impedância e do banho termostático ao porta amostra.

Vale salientar que a amostra deve estabilizar dentro do porta amostras, tanto pela estabilização química quanto pela termodinâmica (pois, foi acionado o banho termostático), esse tempo de estabilização será de uma hora (em média) antes de iniciar as tomadas de medidas. Após o tempo de estabilização, foram feitas três medidas com intervalos de vinte e cinco minutos (25 minutos) entre elas. Após a terceira medida e, acionando o banho termostático, eleva-se a temperatura no porta amostras e esperamos a nova estabilização térmica por aproximadamente quarenta minutos. É necessário aguardar a estabilização térmica

antes de retomar as tomadas de medidas (tempo de aproximadamente 45 minutos). Repete-se este ciclo até o fim das medidas em temperaturas desejadas.

Ao término da última tomada de dados do dia, é feita as desconexões dos cabos (tendo certeza de que todo o equipamento foi desligado) da ponte de impedância e do banho termostático, da porta amostras para realizar a limpeza; É feito o descarte da porção da amostra utilizada (este último passo deve ser realizado devido ao processo de enrijecimento da amostra provocado pelas temperaturas do banho termostátizado, ou seja, a porção da amostra utilizada será descartada e, na próxima sequência de medidas, será utilizada mais uma porção da amostra que esta em repouso no tubo de ensaio). Essa é a razão da produção de ~ 4,5g de amostra do CLL. Depois de realizada a limpeza da porta amostra, foi deixado em repouso, em ambiente fechado e livre de qualquer umidade (para evitar o surgimento de fungos). Todo o processo será repetido necessariamente no dia seguinte. Este procedimento foi repetido por três dias consecutivos.

Será feita a investigação por meio da técnica de espectroscopia de impedância elétrica da mistura KL/DeOH/H₂O na fase Isotrópica para duas concentrações diferentes de KL e em diferentes temperaturas. Na próxima seção, serão exibidos os resultados experimentais e suas análises.

3 Resultados e Análises

Esta seção será fracionada em algumas partes, onde será analisado a amostra S1 (exibindo os gráficos, realizando as observações e, logo em seguida, será feita a análise para o ajuste do circuito proposto) e, logo em seguida, será feito o mesmo para a amostra S2. Também será exibido o resultado para a impedância elétrica da água destilada e do decanol (na qual, ambos são utilizados para a produção dos CLLs utilizados).

3.1 Resultados da Espectroscopia de Impedância Elétrica da Água e Decanol e seus Ajustes Teóricos

Os dados experimentais das partes real e imaginária da impedância complexa da água destilada e de decanol foram ajustados, respectivamente, com as equações 1.4.56 (que é a parte real) e 1.4.57 (parte imaginária da impedância elétrica do circuito proposto). Foi utilizadas essas equações visto que para utilizá-las juntas deve-se calcular o módulo da impedância total. As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram o melhor ajuste obtido para a água e decanol, respectivamente.

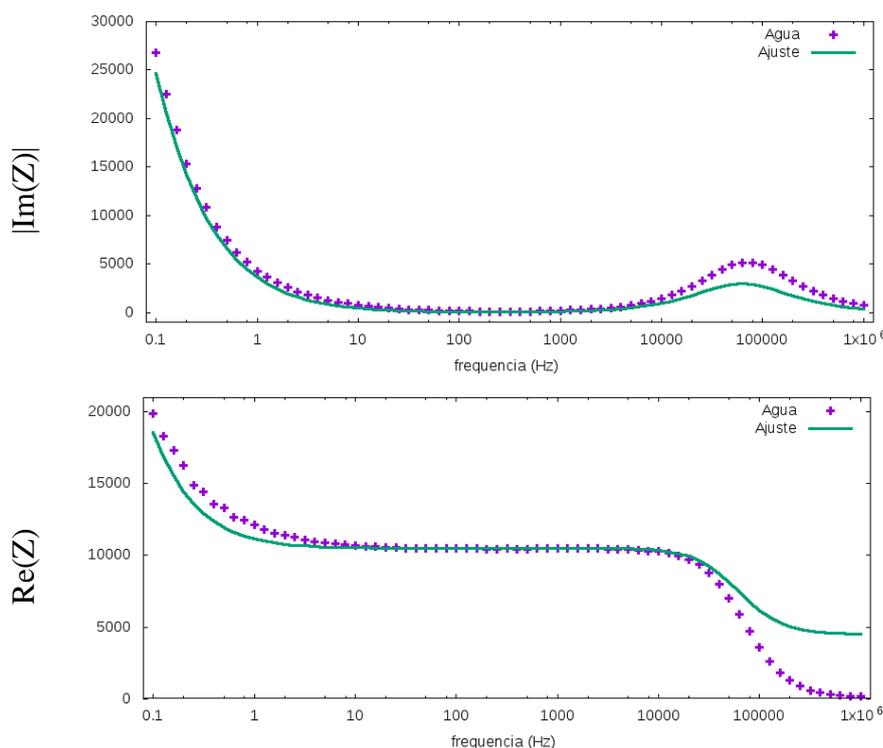


Figura 3.1 - Ajuste da impedância da água destilada em temperatura ambiente. Gráficos do Módulo da parte imaginária e parte real onde, o ajuste (Equações 1.4.57 e 1.4.56) é representado pela linha verde e os pontos, são os dados experimentais;

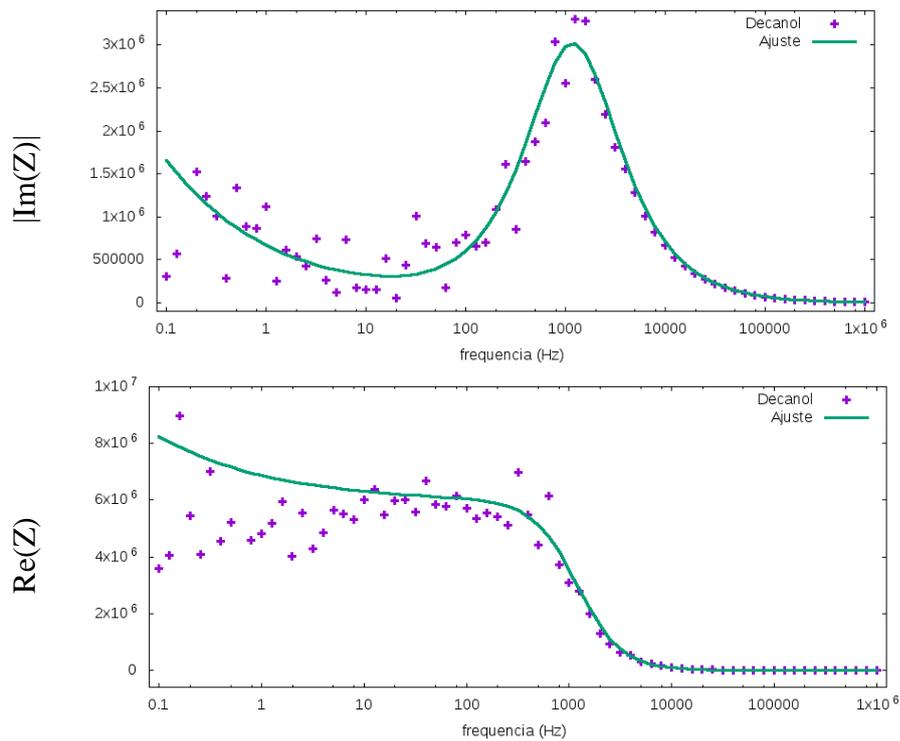


Figura 3.2 - Ajuste da impedância do decanol em temperatura ambiente. Gráficos do Módulo da parte imaginária e parte real onde, o ajuste é representado pela linha verde e os pontos são os dados experimentais;

Na próxima parte, serão expostos os resultados das medidas experimentais dos CLLs.

3.2 Resultados da Espectroscopia de Impedância Elétrica da Amostra S1

Obteve-se os seguintes gráficos experimentais para a amostra S1. Salientando que a impedância imaginária é negativa, portanto, os gráficos foram feitos com base em seu módulo:

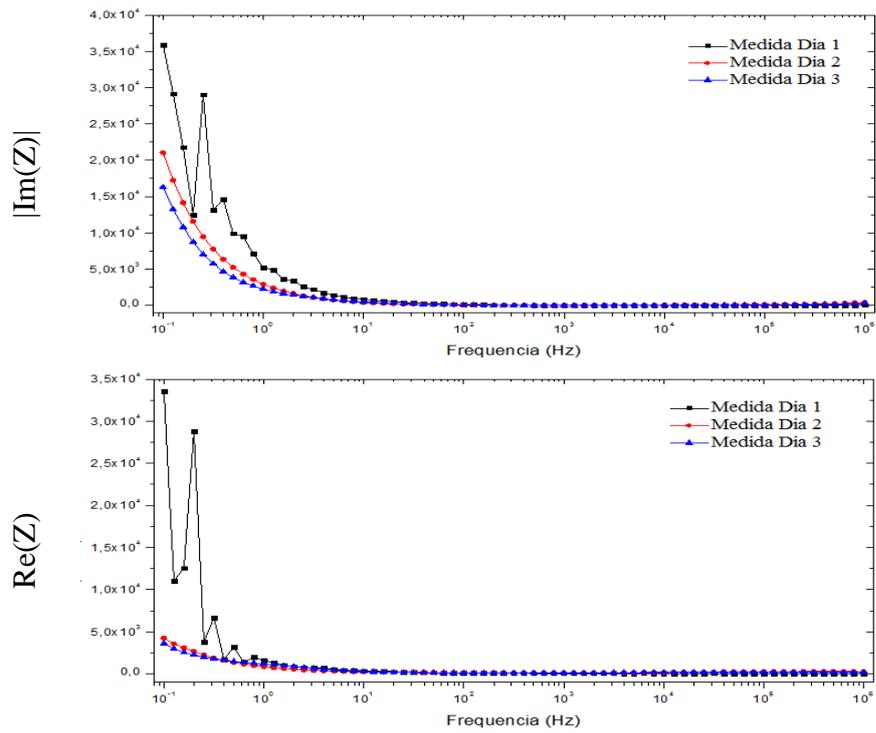


Figura 3.3 - Medidas (experimentais) de Impedância (módulo da parte imaginária e parte real, de cima para baixo) da amostra S1. Os pontos quadrados, bolinhas e triângulos são as medidas do dia 1, dia 2 e dia 3, respectivamente, para a temperatura de 20°C. Note que, a medida do Dia 1 foi diminuída em 200 vezes;

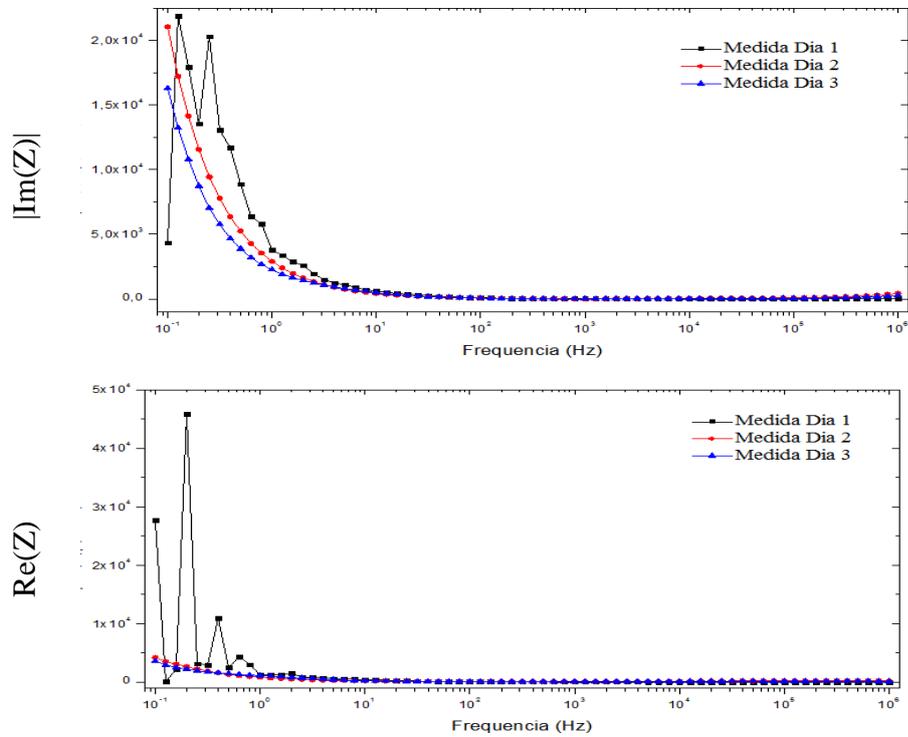


Figura 3.4 - Medidas (experimentais) de Impedância (módulo da parte imaginária e parte real, de cima para baixo) da amostra S1. Os pontos quadrados, bolinhas e triângulos são as medidas do dia 1, dia 2 e dia 3, respectivamente, para a temperatura de 30°C. Note que, a medida do Dia 1 foi diminuída em 200 vezes;

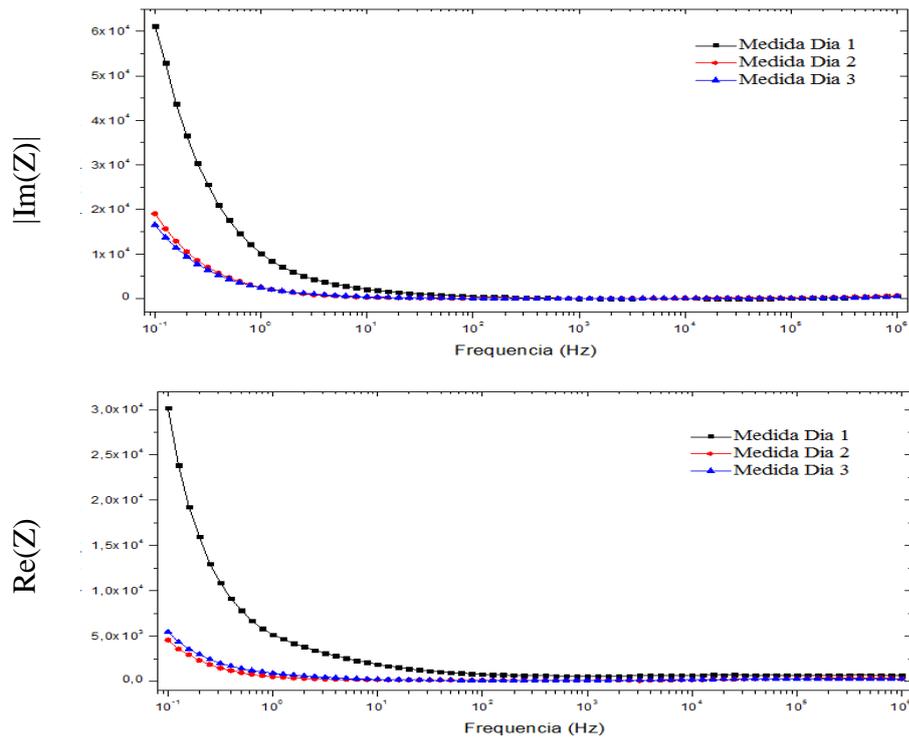


Figura 3.5 - Medidas (experimentais) de Impedância (módulo da parte imaginária e parte real, de cima para baixo) da amostra S1. Os pontos quadrados, bolinhas e triângulos são as medidas do dia 1, dia 2 e dia 3, respectivamente, para a temperatura de 40°C.

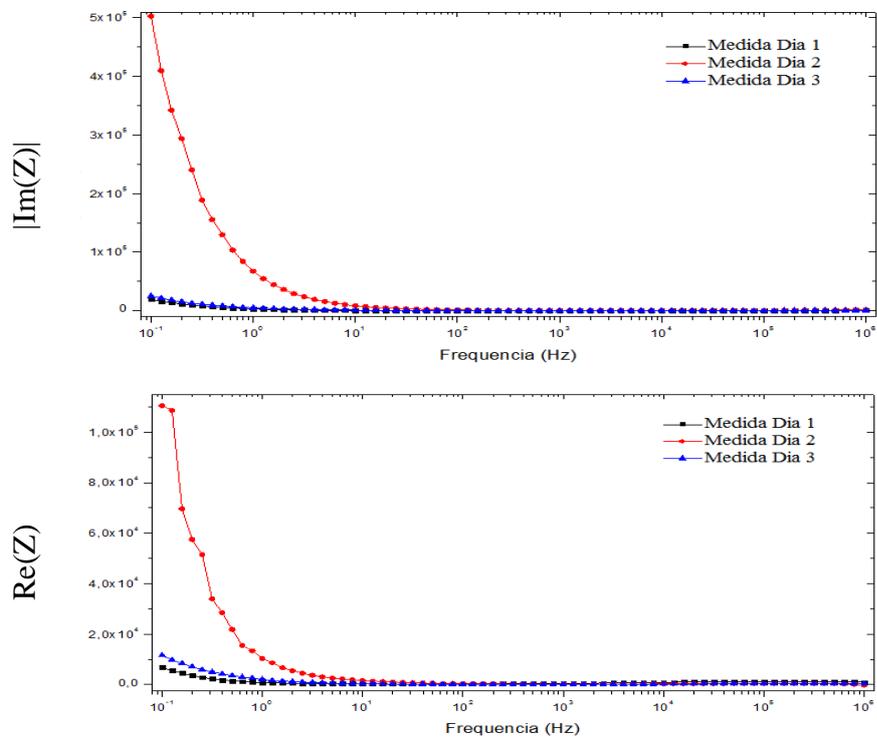


Figura 3.6 - Medidas (experimentais) de Impedância (módulo da parte imaginária e parte real, de cima para baixo) da amostra S1. Os pontos quadrados, bolinhas e triângulos são as medidas do dia 1, dia 2 e dia 3, respectivamente, para a temperatura de 50°C.

3.3 Ajustes dos Resultados para a Amostra S1

Os gráficos com ajuste experimental (para a amostra S1) das medidas são mostrados a seguir. Vale lembrar que as medidas de impedância imaginária são negativas, portanto, os gráficos são baseados em seu módulo.

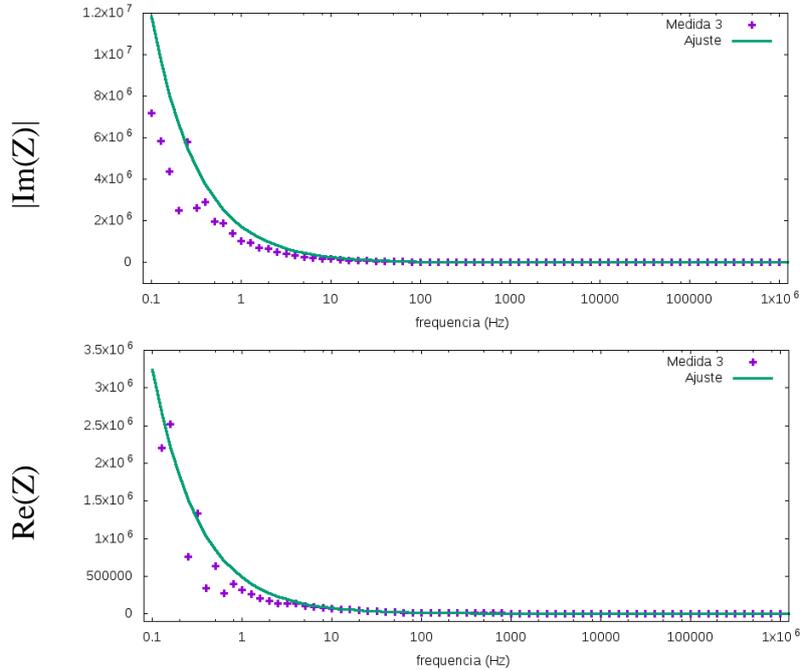


Figura 3.7 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do primeiro dia à temperatura de 20°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

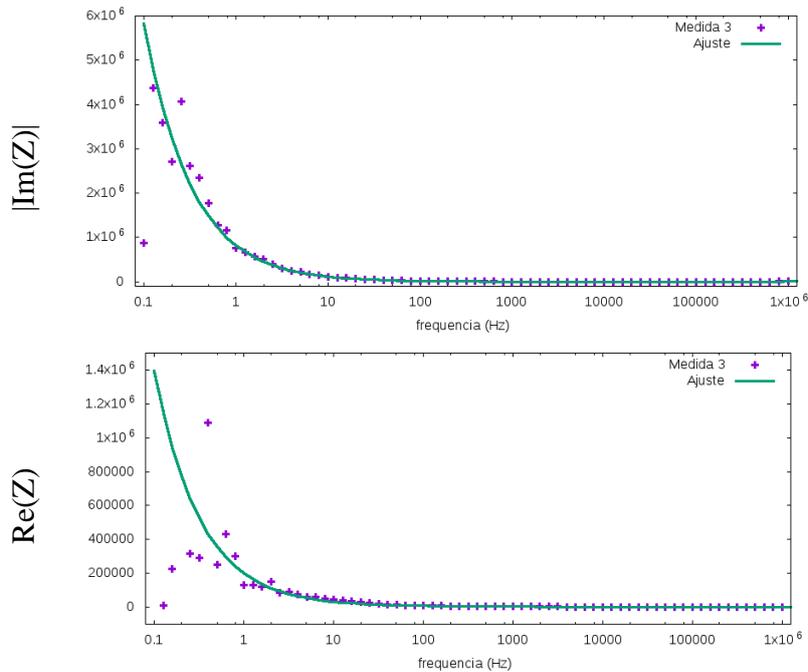


Figura 3.8 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do primeiro dia à temperatura de 30°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

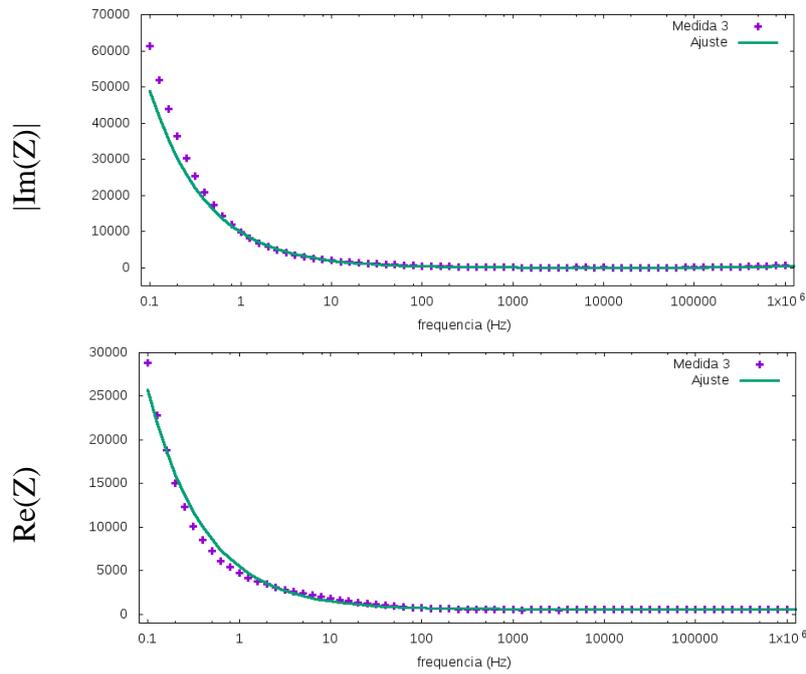


Figura 3.9 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do primeiro dia à temperatura de 40°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

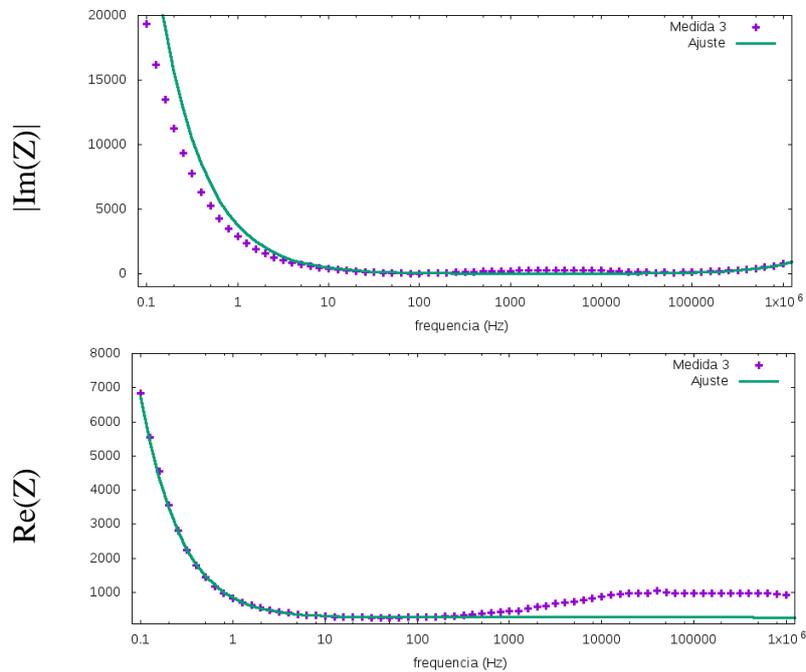


Figura 3.10 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do primeiro dia à temperatura de 50°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

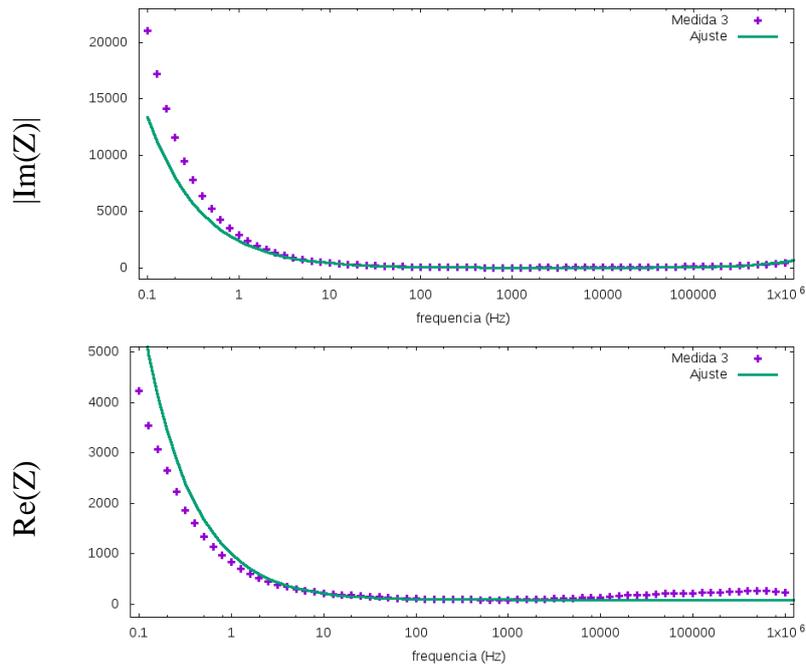


Figura 3.11 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do segundo dia à temperatura de 20°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

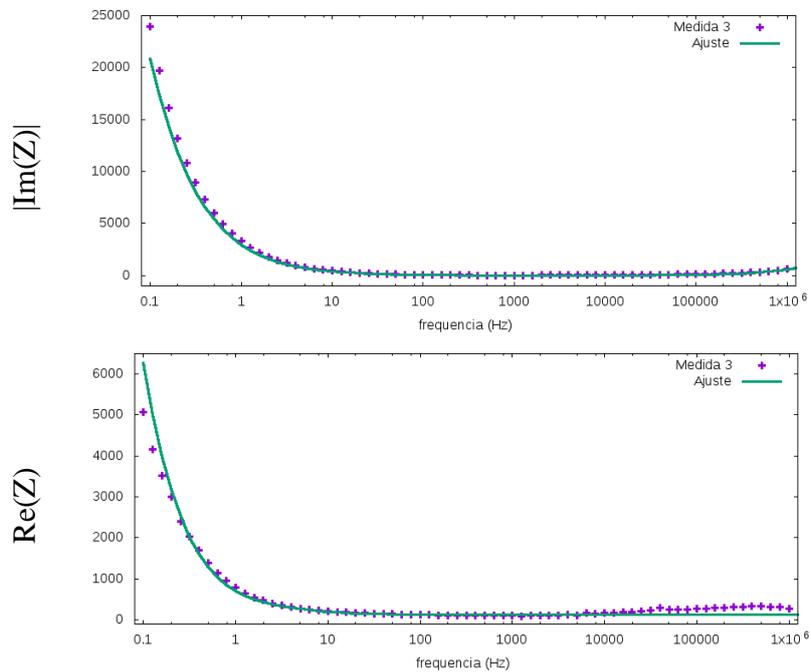


Figura 3.12 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do segundo dia à temperatura de 30°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

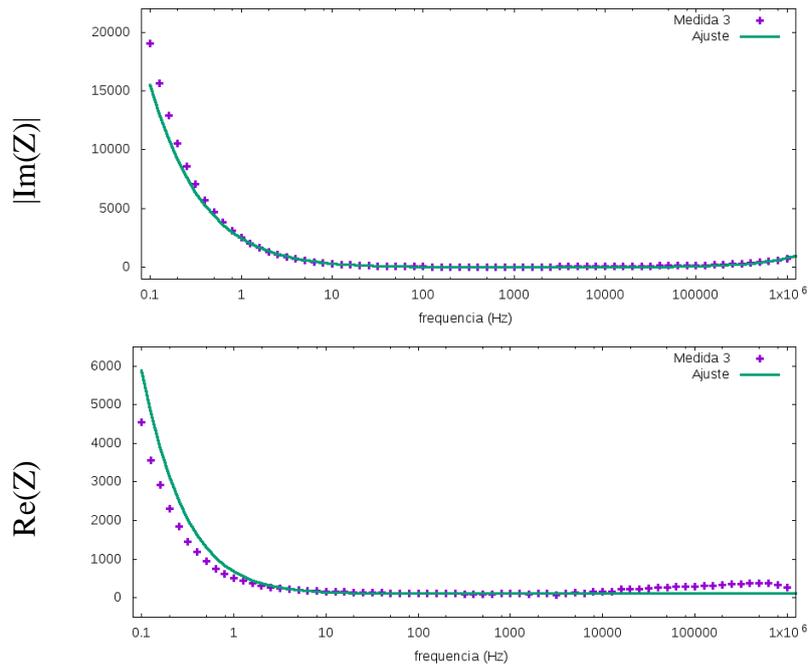


Figura 3.13– Ajuste da medida experimental da amostra S1 do segundo dia à temperatura de 40°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

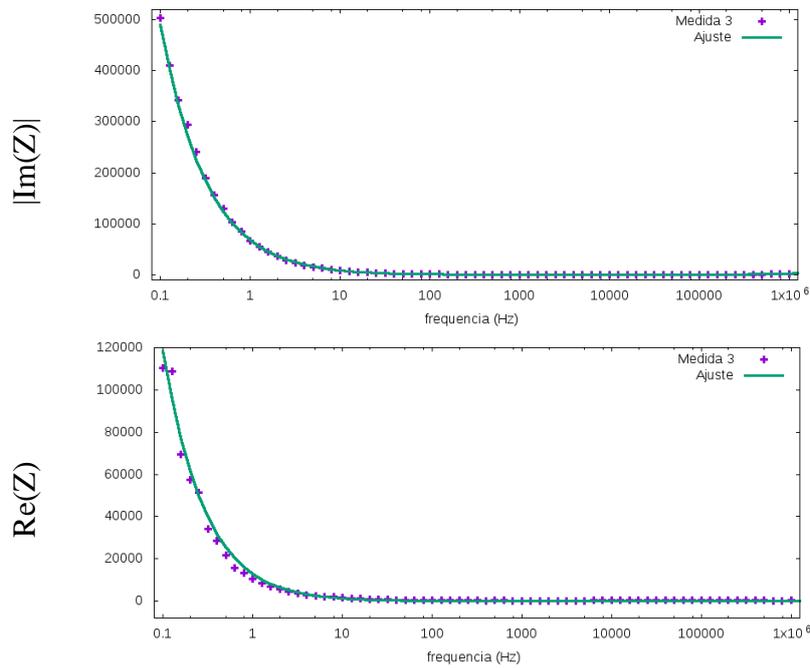


Figura 3.14 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do segundo dia à temperatura de 50°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

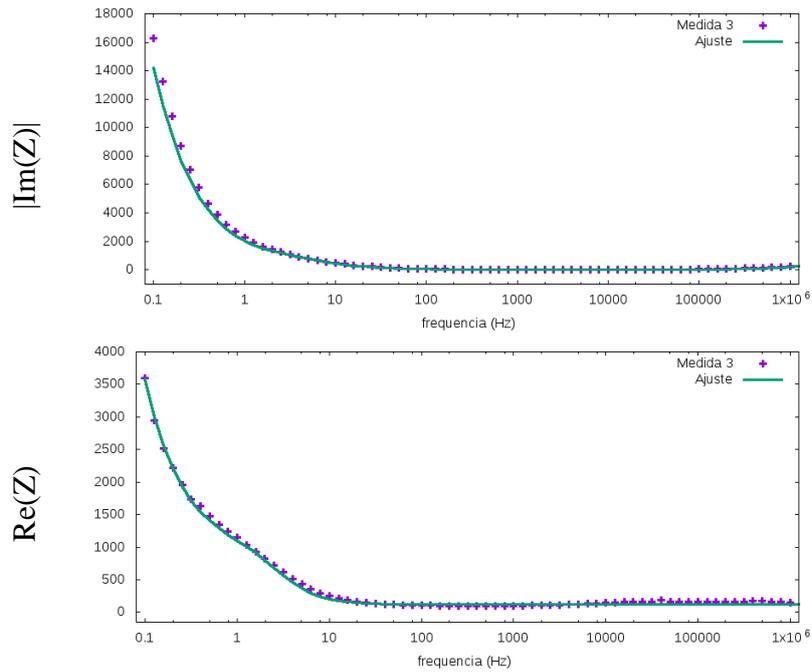


Figura 3.15 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do terceiro dia à temperatura de 20°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

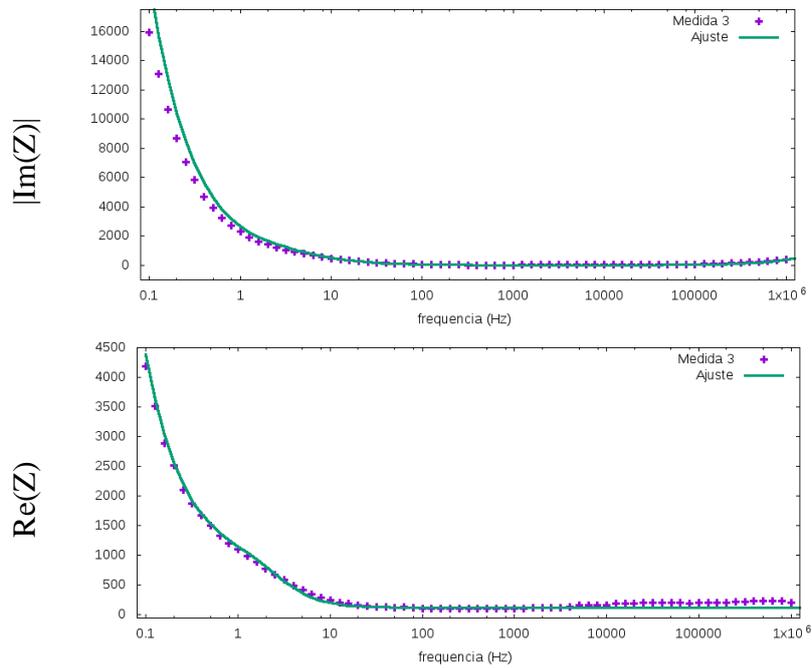


Figura 3.16 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do terceiro dia à temperatura de 30°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

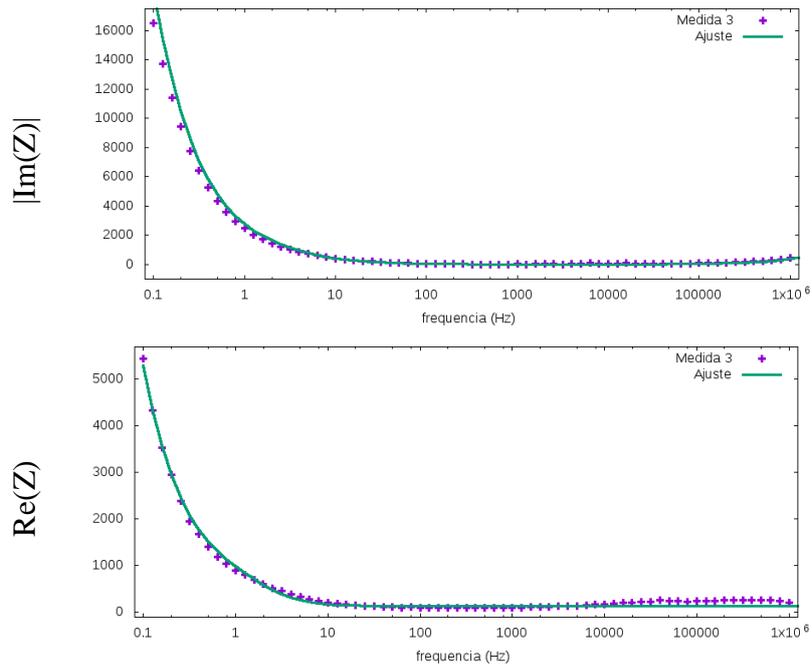


Figura 3.17 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do terceiro dia à temperatura de 40°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

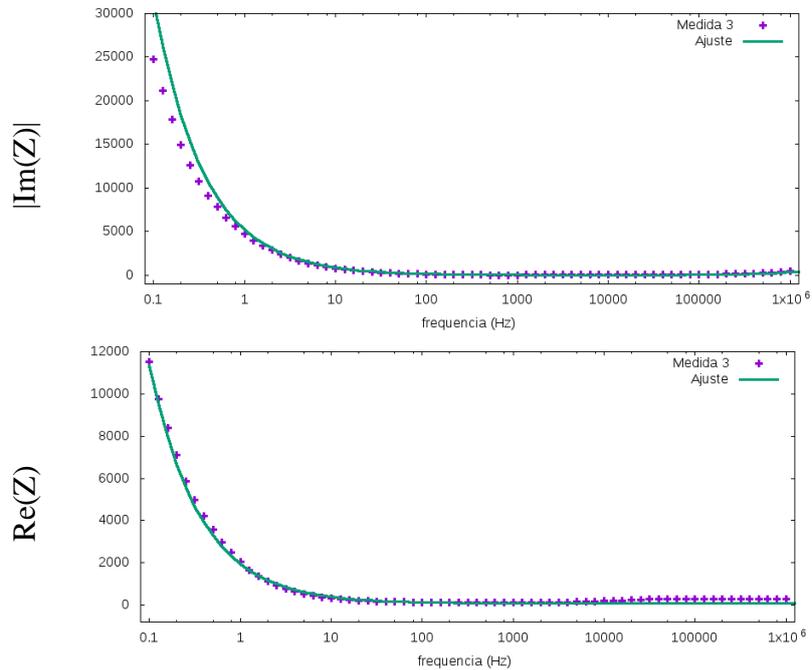


Figura 3.18 – Ajuste da medida experimental da amostra S1 do terceiro dia à temperatura de 50°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

3.4 Resultados da Espectroscopia de Impedância Elétrica da Amostra S2

Agora serão apresentados os gráficos experimentais obtidos para a amostra S2. Salientando que a impedância imaginária é negativa, portanto, os gráficos foram feitos com base em seu módulo:

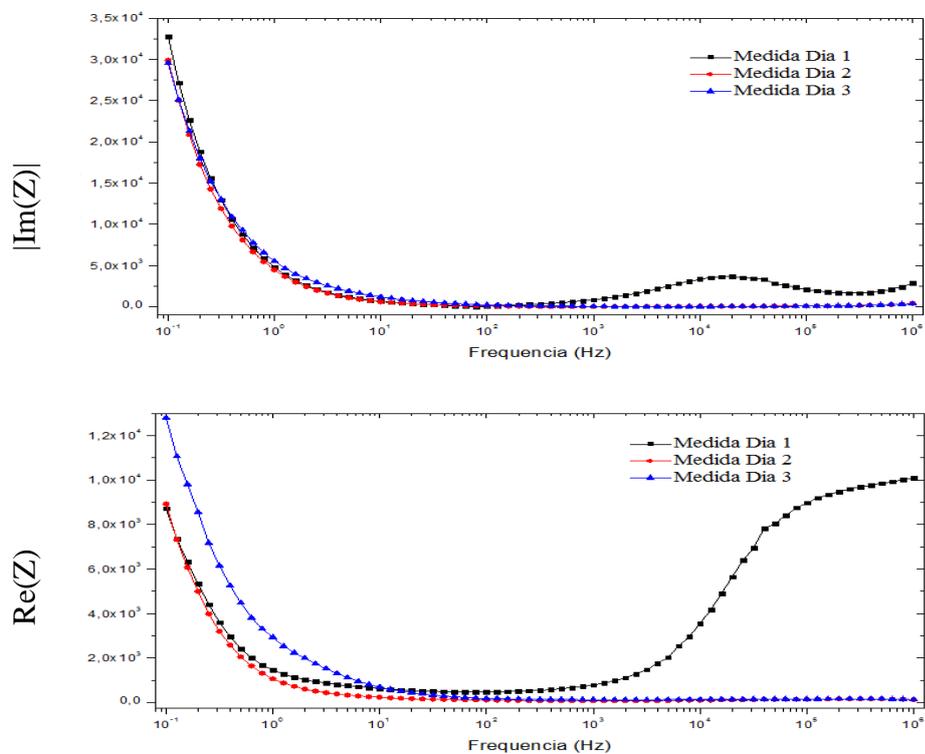


Figura 3.19- Medidas (experimentais) de Impedância (módulo da parte imaginária e parte real, de cima para baixo) da amostra S2. Os dados representados por quadrados, bolinhas e triângulos correspondem às medidas do dia 1, dia 2 e dia 3, respectivamente, para 12°C .

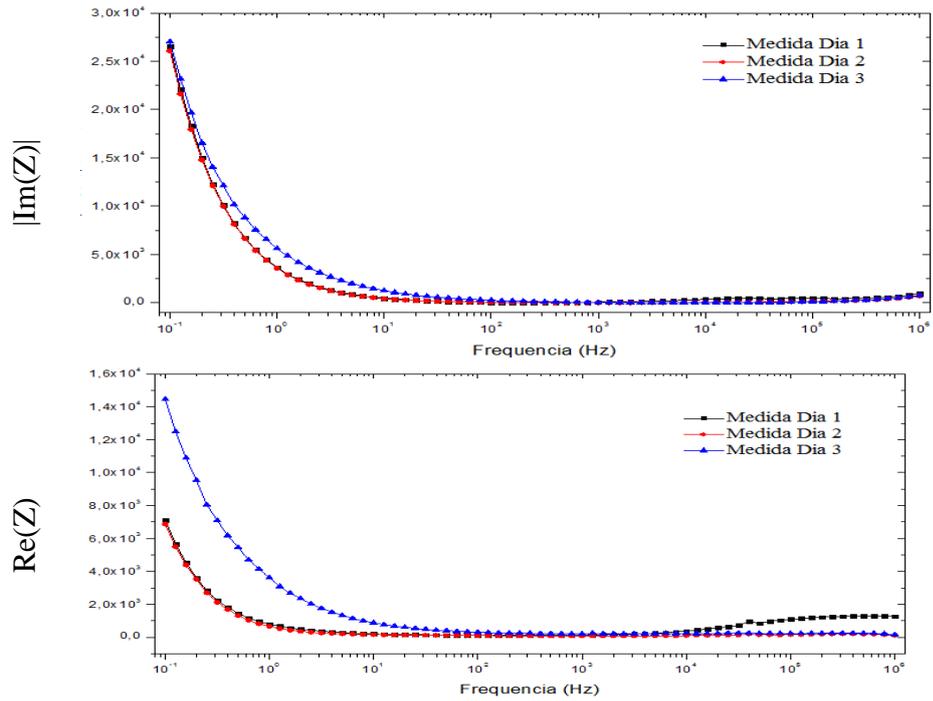


Figura 3.20 - Medidas (experimentais) de Impedância (módulo da parte imaginária e parte real, de cima para baixo) da amostra S2. Os dados representados por quadrados, bolinhas e triângulos correspondem às medidas do dia 1, dia 2 e dia 3, respectivamente, para 51°C.

3.5 Ajuste dos Resultados para a Amostra S2

Os gráficos com ajuste experimental (para a amostra S2) das medidas são mostrados a seguir. Vale lembrar que as medidas de impedância imaginária são negativas, portanto, os gráficos são baseados em seu módulo.

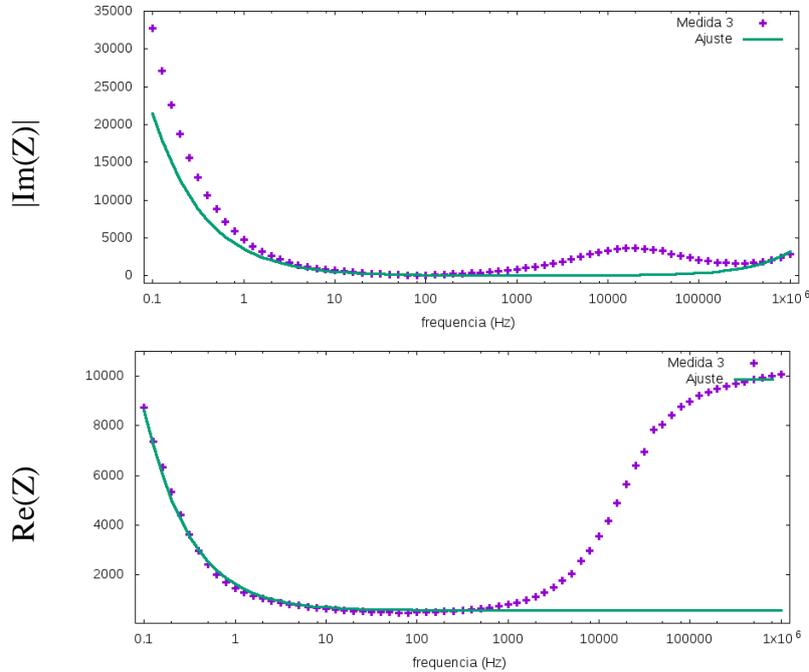


Figura 3.21 - Ajuste da medida experimental da amostra S2 do primeiro dia à temperatura de 12°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

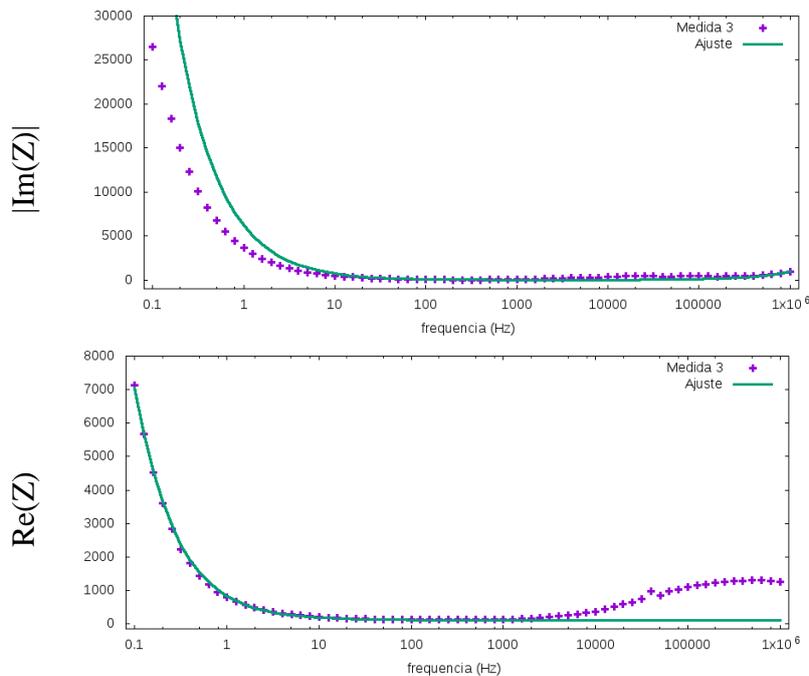


Figura 3.22 - Ajuste da medida experimental da amostra S2 do primeiro dia à temperatura de 51°C. cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

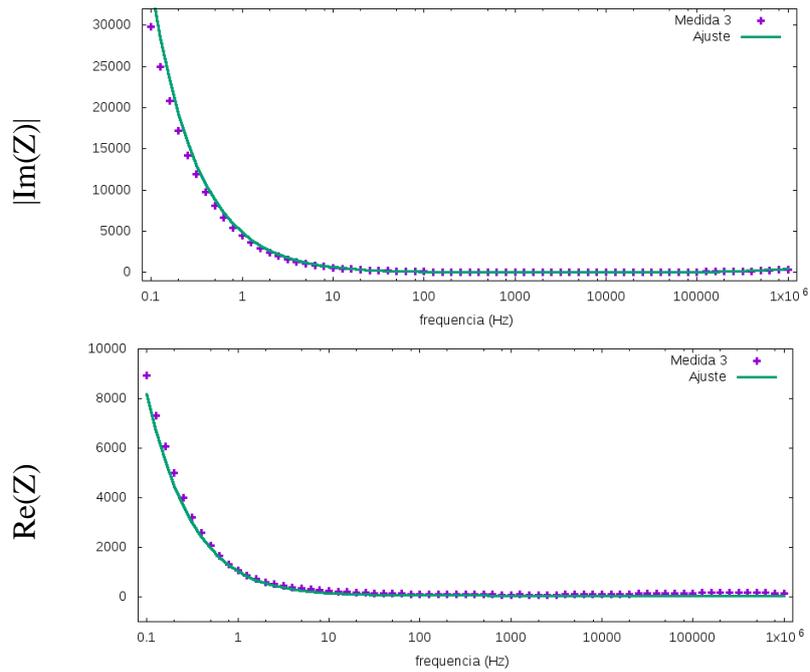


Figura 3.23 - Ajuste da medida experimental da amostra S2 do segundo dia à temperatura de 12°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

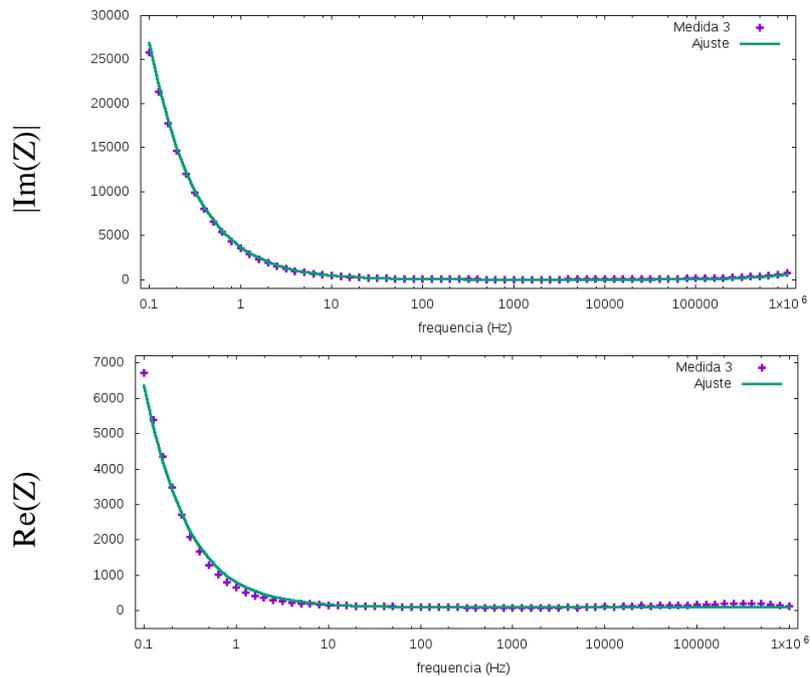


Figura 3.24 - Ajuste da medida experimental da amostra S2 do segundo dia à temperatura de 51°C. As cruces em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

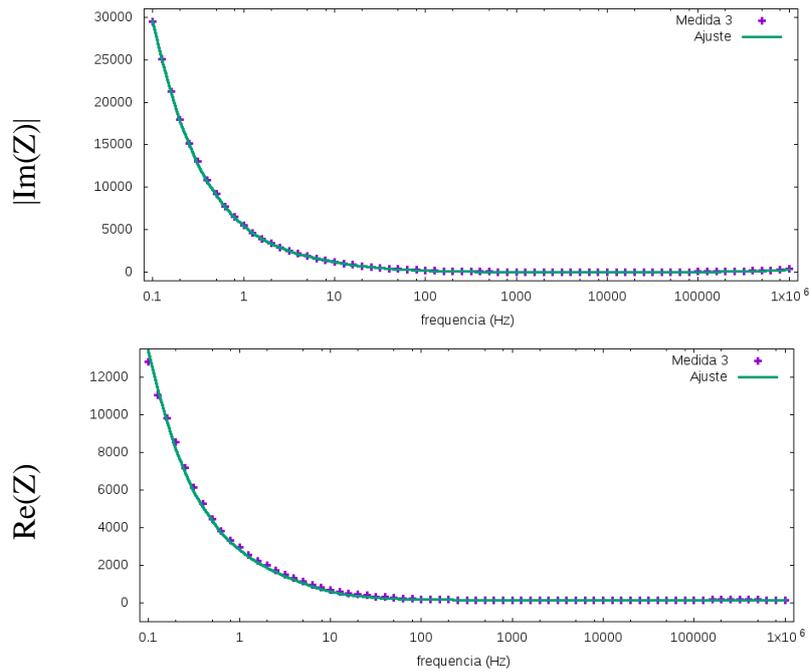


Figura 3.25 - Ajuste da medida experimental da amostra S2 do terceiro dia à temperatura de 12°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

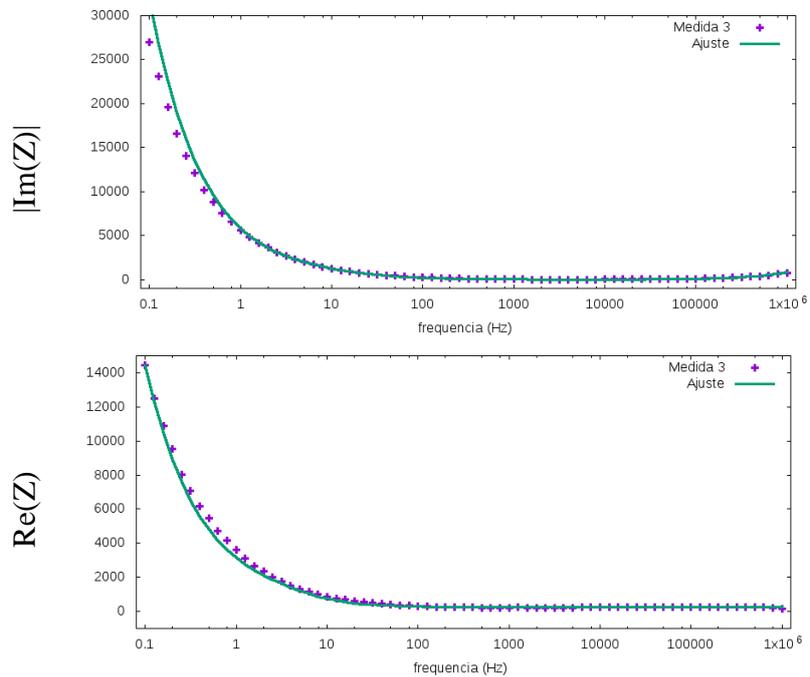


Figura 3.26 - Ajuste da medida experimental da amostra S2 do terceiro dia à temperatura de 51°C. As cruzes em lilás correspondem aos dados experimentais e a curva em verde ao ajuste teórico das partes imaginária (Eq.1.4.57) e real (Eq. 1.4.56) do circuito elétrico equivalente.

3.6 Parâmetros de ajuste obtidos com o circuito elétrico equivalente proposto para a água, decanol e as amostra S1 e S2

Dispositivos	Medidas experimentais
R ₁ (Ω)	6000
R ₂ (Ω)	4500
C ₁ (μF)	4,288·10 ⁻⁴
C ₂ (μF)	31,20
L ₁ (μH)	7,50·10 ⁻¹²
A (μ)	0,270
α	0,6001

Dispositivos	Medidas experimentais
R ₁ (Ω)	6,0·10 ⁶
R ₂ (Ω)	750
C ₁ (μF)	2,222·10 ⁻⁵
C ₂ (μF)	4,50·10 ⁻³
L ₁ (μH)	75,00
A (μ)	0,43
α	0,40

A seguir, os dados numéricos referente ao circuito proposto (Figura 1.4.13) para a amostra S1 (Tabela a seguir) e amostra S2 (Tabela 3.4).

Dispositivos/Temperatura	Dia 1				Dia 2			
	20°C	30°C	40°C	50°C	20°C	30°C	40°C	50°C
R ₁ (Ω)	1000	2681	572,5	250,5	8531	100	0,003523	260
R ₂ (Ω)	3500	1650	162,16·10 ⁻⁶	12,216	92,99	130	104,2	1,555·10 ⁻⁵
C ₁ (μF)	4,00	4,43·10 ⁻²	6,93·10 ⁻⁵		816,81	188,53	18,853	19,65·10 ⁻³
C ₂ (μF)	3,392·10 ⁻⁸		0,771	28,472	15,487	40,01		1,158
L ₁ (μH)	0,00	915,45	80,14	118,90	80,15	90,00	124,58	345,81
A (μ)	0,120	0,248	24,453		95,837	30,72	50,72	1,839
α	0,830	0,851	0,689	0,710	0,680	0,624		0,764

Dispositivos/Temperatura	Dia 3							
	20°C	30°C	40°C	50°C				
R ₁ (Ω)	900		600	120				
R ₂ (Ω)	122,50		130	75				
C ₁ (μF)	62,456	64,00	138,00	7,22·10 ⁻⁴				
C ₂ (μF)	73,43	55,00	45,00	0,045				
L ₁ (μH)	32,14	57,86	58,50	50,00				
A (μ)	34,837	24,837	34,84	43,00				
α	0,677			0,78				

Dispositivos/Temperatura	Dia 1		Dia 2		Dia 3	
	12°C	51°C	12°C	51°C	12°C	51°C
R ₁ (Ω)	613,70	700	450,7	632,7		
R ₂ (Ω)	569,50	110	50	100	141,8	230,5
C ₁ (μF)	1865,40	2000,00	1031,00	2000,00	45,00	
C ₂ (μF)	15,355	10,00	11,53	15,355	5,347	3,081
L ₁ (μH)	509,821	150,50	76,51	89,50	42,84	129,4
A (μ)	49,682	20,23	31,00	39,94	38,97	38,20
α	0,72	0,88	0,8131		0,7128	0,7234

3.7 Análises

3.7.1 Análises das medidas da amostra S1

Como foi dito (no final) da seção 2.4: Foram realizadas três medidas para cada temperatura da mistura. Decidimos, por meio de comparação das medidas, desprezar as duas primeiras medidas devido a sua instabilidade. Notamos que, o comportamento das medidas sempre tenderam a uma atenuação, tal atenuação das medidas ficou evidente na terceira. Logo, foi utilizada a terceira como a principal medida, seja para obter os parâmetros de ajuste como também serem feitas as análises.

Foram feitos gráficos entre medidas de mesma temperatura de cada dia com a intenção de verificarmos como cada dia afetou na tomada de dados. Tais gráficos estão presentes nas Figuras das seções 3.1 até 3.5.

Para ser feita uma análise um pouco mais geral, foram feitas medidas de água destilada e decanol (Seção 3.1) com intenção de comparar com os resultados obtidos para as duas misturas (amostras S1 e S2) de CLL.

Observando, inicialmente as Figuras 3.3 até a Figura 3.6, para a amostra S1: As medidas do primeiro dia (parte real e imaginária) foram superiores as dos outros dias (com ênfase na medida, parte real ou imaginária, para 20°C e 30°C que tiveram de ser reduzida cerca de 200 vezes para serem comparadas), com exceção ao que se refere a medidas de 50°C, na qual a medida do segundo dia foi muito superior as demais.

Esse resultado totalmente inesperado pode estar associado a não estabilidade química da mistura. Após a homogeneização da mistura e do período de repouso, que se estendeu por aproximadamente vinte e quatro horas antes de iniciarmos o experimento, a mistura pode não ter se estabilizado. Observando os gráficos, notamos que as medidas realizadas no segundo dia já apresentam melhor semelhança com as do terceiro dia. Ou seja, o período em que a mistura, que ficou no tubo de ensaio, ficou em repouso favoreceu a sua estabilização química nos permitindo obter melhores medidas para o segundo e terceiro dia.

Para a temperatura de 50°C, onde a medida do segundo dia como sendo a maior impedância, na qual não era esperado e que não foi compreendido por qual motivo sua impedância foi tão grande.

Realizando a análise por comparação das medidas de mesma temperatura por dias diferente, que possibilitou uma melhor observação do comportamento das medidas, isso permitiu ter maior confiança nas medidas do terceiro dia. As medidas do terceiro dia são as principais, pois não possuem grande quantidade de flutuações; Este último argumento pode ser observado nos parâmetro de ajuste, Tabela 3.3, onde pode ser observado grande flutuações nos parâmetros obtidos dos dados do primeiro dia. Quando comparados com os do segundo e terceiro, foi observado que o terceiro possui mais estabilidade e menores flutuações.

Nas Figuras 3.7 até 3.18, pode-se observar os ajustes experimentais das medidas da amostra S1. Nota-se um problema nos ajustes experimentais: uma deformação, em alguns gráficos de medidas, em alta frequência não puderam ser ajustados (Parte real da Figura 3.10). Nas medidas do terceiro dia (Figuras 3.15 até 3.18) que, com base em observações dos parâmetros e semelhanças de comportamento, como sendo as melhores medidas, foi obtido

bons ajustes experimentais. Observa-se, no geral, que o circuito proposto (Figura 1.4.13) pode ser de fato, utilizado para ajustar a amostra S1. Indicando que, o significado físico associado a cada conjunto dos componentes (veja seção 1.4.7) pode ser visto como representação equivalente. Nossos resultados estão afirmando tal possibilidade.

De forma análoga, foi realizado as mesmas análises para a amostra S2.

3.7.2 Análises das medidas da amostra S2

Nesta mistura especificamente, existe uma fase nemática separando a fase isotrópica em duas regiões: A região isotrópica de baixa temperatura e uma de alta temperatura (Tabela 2.2). Neste caso, as medidas experimentais foram feitas somente nestas duas regiões isotrópicas. Deste modo obteve-se menos dados que as da amostra S1, mas que são igualmente importantes.

Observando a Figura 3.19, observa-se claramente que a medida com respeito ao primeiro dia é bem diferente das demais (quando se refere à alta frequência tanto para a parte real quanto imaginária) à 12°C. A Figura 3.20 (medidas para 51°C) nota-se que, as medidas se assemelham (medida do primeiro e segundo dia) diferenciando um pouco da terceira (principalmente na parte real). Por mais que a terceira medida fique com comportamento maior que as demais (nas medidas de 12°C e 51°C), ainda assim aparenta ser mais estável que as demais. Deste modo, analisando os valores obtidos dos parâmetros de ajuste experimental, a medida do terceiro dia parece ser mais estável que as demais, sem grandes flutuações. Este fato reforça a necessidade de se utilizar a medida do terceiro dia como sendo a mais importante, devido a sua estabilização química.

Observando os ajustes experimentais, Figuras 3.21 até 3.26, pode-se constatar que as medidas do primeiro dia ficam mal ajustadas deixando grande erro entre a medida experimental e o ajuste. Para os demais dias, têm-se um ajuste muito bom. De certa forma, os ajustes parecem competir entre si. Novamente, como afirmado para a amostra S1, os ajustes representam uma boa aplicação do circuito proposto a ajuste dos dados.

3.7.3 Análises dos módulos das Impedâncias Elétricas

Realizando observações mais cuidadosas a respeito da impedância elétrica de cada conjunto de medidas, surge a necessidade de compararmos seus módulos. Portanto, foi confeccionados gráficos do logaritmos dos módulo da impedância elétrica por logaritmos da frequência da amostra S1, onde pode-se observar as medidas de 20 °C, 30 °C, 40 °C e 50 °C presentes nos mesmos gráficos. Tais gráficos estão presentes nas Figuras 3.27 até 3.29;

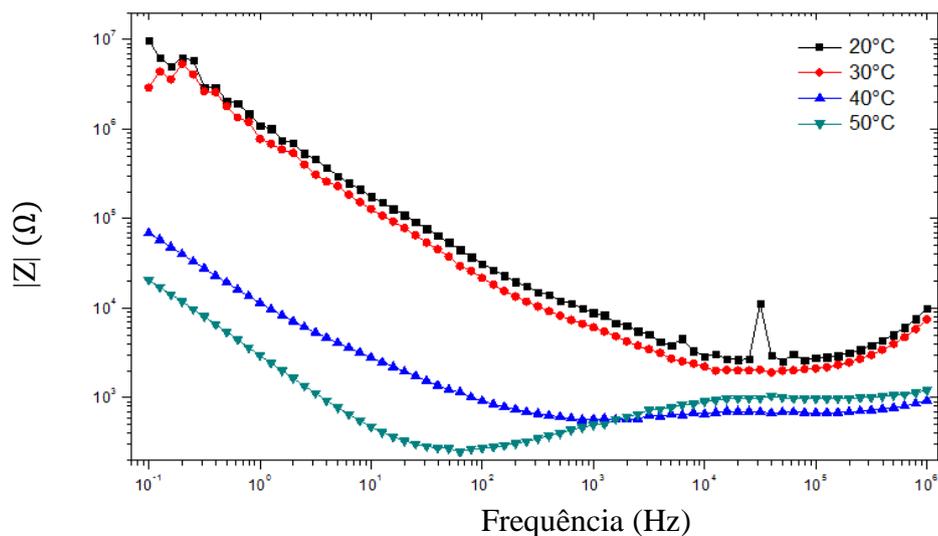


Figura 3.27 - Módulos das medidas do primeiro dia. Na figura, foi utilizado a seguinte notação: pontos quadrados para medidas à 20°C; bolinhas para 30°C, triângulos para 40°C e triângulos invertidos para 50°C.

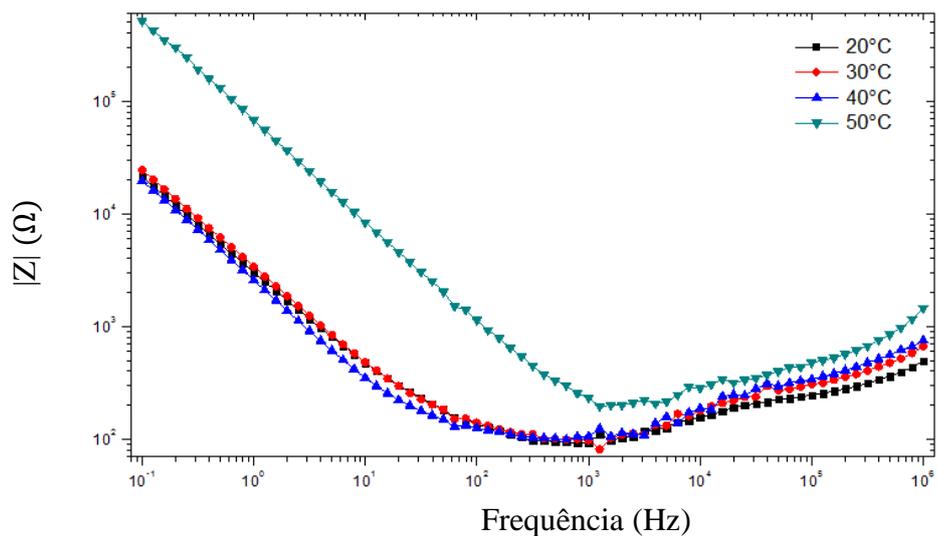


Figura 3.28 - Módulos das medidas do segundo dia. Na figura, foi utilizado a seguinte notação: pontos quadrados para medidas à 20°C; bolinhas para 30°C, triângulos para 40°C e triângulos invertidos para 50°C.

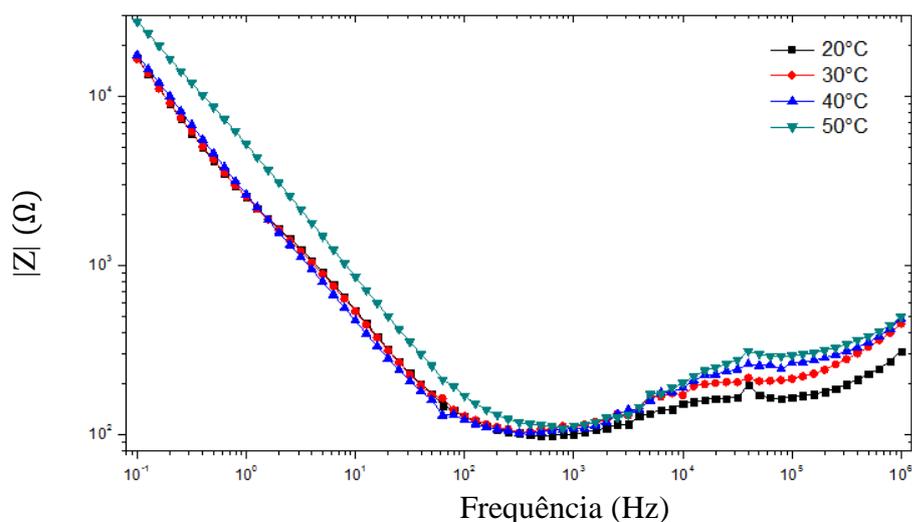


Figura 3.29 - Módulos das medidas do terceiro dia em que os quadrados correspondem às medidas em 20°C, as bolinhas 30°C, triângulos 40°C e triângulos invertidos, 50°C.

Os gráficos foram feitos em escala logarítmica devido à possibilidade de se notar as curvas. Tais gráficos são muito importante para a análise.

Pode-se observar que os módulos da impedância do primeiro dia (Figura 3.27) apresentam sempre grandes diferenças entre cada medida. Tais diferenças podem ser associadas à instabilidade química da amostra. Essa instabilidade é atenuada a partir do segundo dia, produzindo medidas mais estáveis (Figura 3.28). Observando a Figura 3.29, o valor de $|Z|$, na região de baixa frequência ($f < 100\text{Hz}$), tem comportamento semelhante entre as temperaturas de 20°, 30° e 40° C; Ao observar a medida $|Z|$ na temperatura de 50°C, apesar do comportamento semelhante com os da demais temperaturas, a medida em questão é superior em grande faixa de frequência; Tal comportamento pode ser explicado se considerarmos que o CLL transitou para outra fase (potencialmente a lamelar (L2)). Não houve observação da fase lamelar em baixa temperatura (L₁), pois trabalhamos com a temperatura de 20°C, a temperatura de transição da Lamelar (L1) para a Isotrópica é de ~8°C.

Para a amostra S2, foram feitos os gráficos dos módulos das impedâncias elétricas da mesma forma que os da amostra S1. Tais gráficos estão presentes nas Figuras 3.30 até a Figura 3.32;

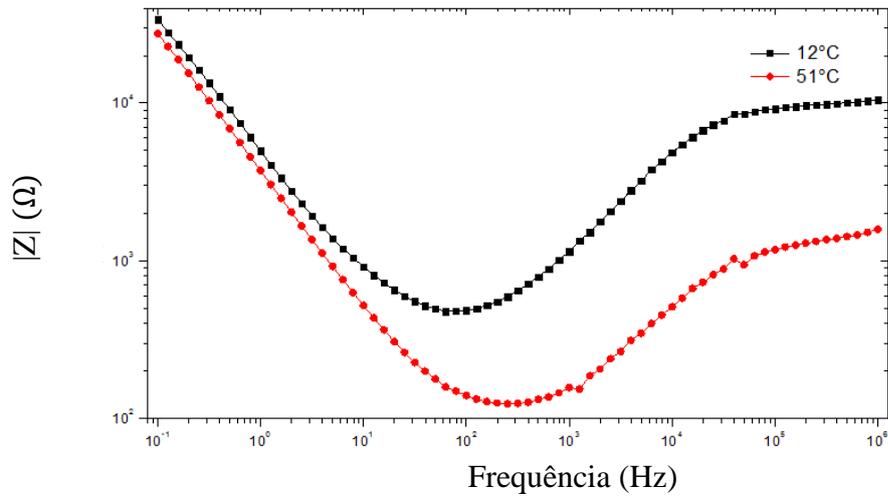


Figura 3.30 - Módulos das medidas do primeiro dia da amostra S2, em que pontos quadrado é a medida a 12°C e bolinhas 51°C.

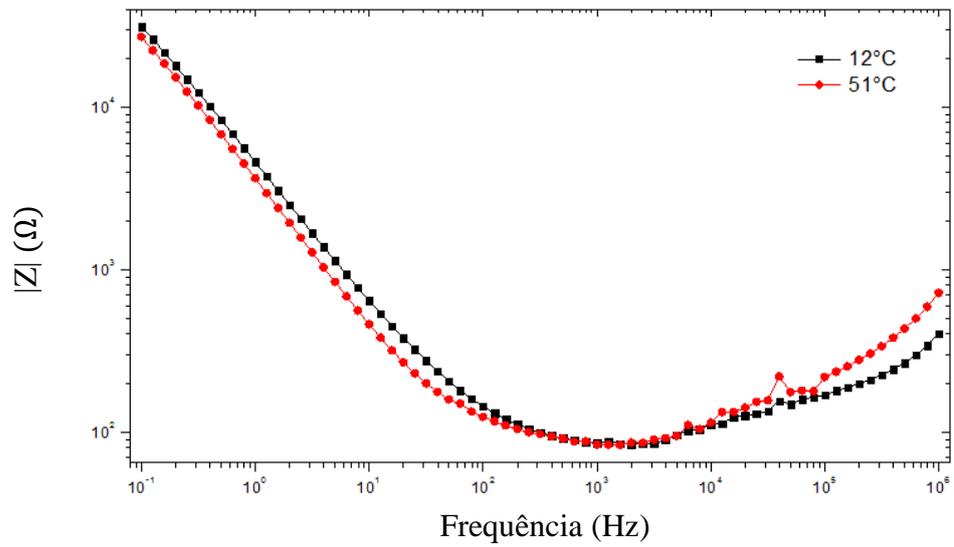


Figura 3.31 - Módulos das medidas do segundo dia da amostra S2, em que pontos quadrado é a medida a 12°C e bolinhas 51°C.

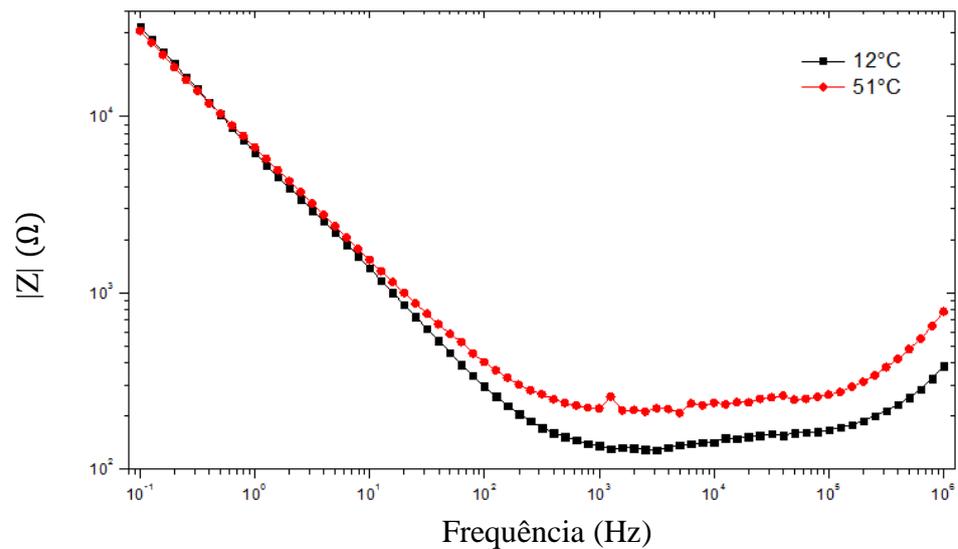


Figura 3.32 - Módulos das medidas do terceiro dia da amostra S2, em que pontos quadrado é a medida a 12°C e bolinhas 51°C.

Novamente, semelhantemente ao que ocorre na amostra S1, a amostra S2 não produz resultados semelhantes no primeiro dia de medidas. Tais medidas são consideradas inadequadas para serem analisadas (Figura 3.30). Ou seja, a medida de impedância de 12 °C é superior a de 51 °C. Tal diferença não era esperada.

No segundo dia de medidas, Figura 3.31, nota-se grande diferença do comportamento do módulo da impedância elétrica, ambas as medidas em diferentes temperaturas ficam mais próximas e semelhantes. Infelizmente a medida à 12 °C é superior a de 51 °C para as frequências inferiores a $\sim 10^3$ Hz.

As medidas do terceiro dia (Figura 3.32), pode-se notar grande semelhança entre as medidas (mesmo comportamento), sendo a medida de 51°C a maior medida de impedância (em módulo). Observando a diferença entre as medidas dos outros dias com a deste, nota-se um resultado expressivo: A medida do terceiro dia é mais estável que as dos demais. Repetindo o que ocorreu com as da amostra S1.

Por fim, conclui-se que pode não ter ocorrido evaporação da água nas medidas experimentais. Tendo certeza que foi mantido as mesmas condições em cada dia, seja a temperatura ambiente do laboratório e os passos a serem utilizados para cada tomada de dados: Pode-se notar que, como acreditamos que seja, a principal fonte de erros do experimento esteja justamente no equilíbrio químico da amostra, caso contrário, como poderia ter surgido tais diferenças de medidas ao longo dos dias culminando para medidas mais estáveis que são características do terceiro dia?

Essa pergunta claramente não pode ser respondida somente observando os dados e julgando ser somente o equilíbrio químico, deve-se considerar o equilíbrio termodinâmico.

As medidas (somente terceiro dia), de ambas as amostras (S1 e S2), e comparando com as medidas de água e decanol (que foram feitas somente em temperatura ambiente); Nota-se, no geral que, o comportamento da impedância do decanol (parte real ou imaginária) somente se assemelha as amostras S1 e S2 em alta frequência. Este comportamento é análogo para a água. Onde ocorre o valor mínimo de impedância para a alta frequência.

A impedância da água (em baixa frequência) é inferior à do álcool (decanol). Este comportamento é notável: água esta presente nas amostras em maior quantidade que o decanol, logo o predomínio do mesmo já poderia ser esperado.

3.8 Conclusões Finais

No caso do ajuste experimental para a água destilada em alta frequência, os dados experimentais não foram bem ajustados, visto que, nesta faixa de frequência, os dados experimentais divergem do ajuste (mais explicitamente na parte real).

Os dados experimentais do decanol em baixa frequência ficam dispersos, essa dispersão não pode ser ajustada. Logo, em baixa frequência, o ajuste falha devido á dispersão dos dados experimentais (principalmente na parte real, pois, na imaginária o ajuste pode ser comparado – a grosso modo - a um valor médio dos dados experimentais).

Sem duvida, um dos resultados mais importantes e expressivos se da pelo fato das amostras (ambas baseadas nas mesmas misturas, KL/DeOH/H₂O) terem resultados tão estáveis, quanto comparados aos demais dias. Nota-se desta forma que, para futuros experimentos com CLLs desta mistura (especificamente), se faz necessário aguardar até o terceiro dia após sua homogeneização, para realizar qualquer que seja o experimento. Visto que o mesmo estará mais próximo do equilíbrio químico adequado.

A tentativa de utilizar o circuito proposto como modelo para a impedância elétrica do CLL em questão, apesar de não ser ainda considerado como modelo, funcionou com relativa precisão. Tal precisão deve ser avaliada em trabalhos e investigações posteriores, mas se torna um bom candidato a modelo. Visto que, se torna necessário o elemento de fase constante (CPE) adicionado ao circuito para auxiliar no ajuste. Desta forma, no geral, o valor da constante (α) é tal que, predominantemente o CPE assume características de um capacitor ($\alpha \rightarrow 1$). Logo o efeito de parede, tende a “reter mais cargas elétricas ou íons” (os contatos dos eletrodos com a amostra de CLL).

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo Neto A.M., Libert L., Galeme Y., J. Phys. Chem. 89, 3737 (1985).
- [2] Figueiredo Neto, A. M.; Salinas, S.R.A. The Physics of Lyotropic Liquid Crystals: Phase Transitions and Structural Properties. Oxford University, 2005.
- [3] Machado, Kleber Daum. Teoria do Eletromagnetismo. Ponta grossa: UEPG, 2006. Volume 3.
- [4] Lisandra F. Lima, Admilson L. Vieira, Hatsumi Mukai, Cid M. G. Andrade, Paulo R. G. Fernandes, *Electric impedance of aqueous KCL and NaCL solutions: salt concentration dependence on components of the equivalent electric circuit*, journal of Molecular Liquids, 241, (2017), 530-539.
- [5] E.K. Lenzi, P.R.G. Fernandes, T. Petrucci, H. Mukai, H.V. Ribeiro, *Anomalous-diffusion approach applied to the electrical response of water*, Phys. Review 84 (2011) 0411281-0411284.
- [6] D.S. Vieira, M. Menezes, G. Goncalves, H. Mukai, E.K. Lenzi, N.C. Pereira, P.R.G. Fernandes, *Temperature Dependence of Refractive Index and of Electrical Impedance of Grape Seed (Vitis vinifera, Vitis labrusca) Oils extracted by Soxhlet and Mechanical pressing*, Grasas y Aceites (2015) DOI: 10.3989/gya.0954142.
- [7] P.R.G. Fernandes, K.A. Silva, H. Mukai, E.C. Muniz, *Optical, morphological and dielectric characterization of MBBA liquid Crystal-doped hydrogels*, Journal of Molecular Liquids 229 (2017) 319-329.
- [8] E.K. Lenzi, P.R.G. Fernandes, T. Petrucci, H. Mukai, H.V. Ribeiro, M.K. Lenzi, G. Gonçalves, *Anomalous Diffusion and Electrical Response of Ionic Solutions*, Int. J. Electrochem. Sci. 8 (2013) 2849- 2862.
- [9] Boyce W.E. & DiPrima R.C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Editora LTC, 8ª Edição.
- [10] SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Fórmulas de Moivre"; Brasil Escola. Disponível em: <http://brasilecola.uol.com.br/matematica/formulas-de-moivre.htm> . Acesso em 14 de novembro de 2017.
- [11] Young, Hugh D. Física 3 Eletromagnetismo. 12ª edição. PEARSON, Addison Wesley: São Paulo, 2009.
- [12] Machado, Kleber D. Teoria do Eletromagnetismo. Ponta grossa: UEPG, 2002.
- [13] Nussenzveig, Herch M. Curso de física básica 3 eletromagnetismo. - 2ª ed., São Paulo, BLUCHER, 2015.
- [14] Griffiths D.J. , Eletrodinâmica, 3ª Edição, São Paulo: Pearson, 2010.

- [15] Thiago Petrucci. Investigações Teóricas e experimental de medidas de impedância elétrica em Cristal Líquido Termotrópico (MBBA). 2010. 55 folhas. Dissertação. Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR.
- [16] Figueiredo Neto, A.M., Os Cristais Líquidos, disponível em: http://portal.if.usp.br/gfcx/sites/portal.if.usp.br.ifusp/files/os_cristais_liquidos.pdf. Acesso em: 20/08/2018.
- [17] E.L. Duarte, *Estudo de Fases Termotrópicas por Microscopia Óptica, Medidas de Densidade, Entálpicas e Espalhamento de Raios X*, Dissertação de Mestrado, IFUSP/USP, São Paulo, 2000.
- [18] B.F. de Oliveira, *Estudos numéricos da formação e dinâmica de defeitos topológicos em cristais líquidos nemáticos*, Tese de Doutorado, UFPB, João Pessoa, 2012.
- [19] Gonçalves, Lucas Belo, Indução de ordem em Fase isotrópica de Cristais Líquidos Liotrópicos: um Estudo Experimental. 2012. 75 folhas. Dissertação. Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR.
- [20] Chinaglia, D.L.; Gozzi, G.; Alfaro, R.A.M.; Hessel R., Espectroscopia de impedância no laboratório de ensino, Revista Brasileira de Ensino de Física, Rio Claro, SP, Brasil, v. 30, n. 4, 4504, (03/2008).