



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

ESTUDO COMPARATIVO DOS PRINCIPAIS OSCILADORES FÍSICOS

Acadêmico: Rafael Laras de Souza

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Maringá, 30 de novembro de 2018



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

ESTUDO COMPARATIVO DOS PRINCIPAIS OSCILADORES FÍSICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, sob orientação do professor Dr. Fernando Carlos Messias Freire, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmico: Rafael Laras de Souza

Orientador: Prof. Dr. Fernando Carlos Messias Freire

Maringá, 30 de novembro de 2018

Sumário

Agradecimentos	ii
Epígrafe	iii
Resumo	iv
Introdução	1
1 Introdução Histórica	2
2 Oscilador Mecânico: Sistema Massa-Mola	5
2.1 Oscilador Harmônico Simples	5
2.1.1 Energia no Movimento Harmônico Simples	6
2.2 Osciladores Amortecidos	7
2.2.1 Oscilador Harmônico Subamortecido	8
2.2.2 Oscilador Harmônico Superamortecido	9
2.2.3 Oscilador Criticamente Amortecido	10
2.3 Oscilador Harmônico Amortecido Sujeito A Uma Força Externa	10
2.4 Ressonância	12
3 Outros Modelos de Osciladores	14
3.1 Osciladores Harmônicos Eletromagnéticos	14
3.1.1 Circuito LC	14
3.1.2 Circuito RLC	16
3.2 Oscilador de Lorentz	18
3.3 Pêndulo Simples	20
3.4 Modelo Eletromecânico Para Impedância	21
3.5 Modelo acústico	22
3.6 Modelo de Mason	23
Conclusão	24
Referências Bibliográficas	27

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Aos meus pais Adriana e Wilson pelo esforço que fizeram e ainda fazem para que eu pudesse ter chegado até aqui.

A minha namorada Giseli por todo apoio, incentivo, por sempre acreditar em mim e me dar forças para continuar.

A toda minha família e amigos, pelas conversas e incentivo, em especial, minhas tias Andrea e Alessandra, avó Alice e primo/irmão Ronivaldo.

Aos meus sogros Eliane e Arthur, pelo apoio.

Ao professor Fernando, pela paciência, dedicação e ensinamentos em todos os trabalhos que fizemos juntos.

Ao professor Breno, pelas conversas, ajudas, ensinamentos e por ser exemplo de professor a ser seguido.

Aos demais professores que fizeram parte dessa jornada até aqui, em especial os membros da banca.

Aos colegas e amigos de curso, em especial Maria e Miguel pelos momentos compartilhados de alegrias e tristezas.

Ao amigo e companheiro de laboratório Arthur pelos ensinamentos, risadas e momentos compartilhados.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Epígrafe

-Há uma passagem que eu memorizei, que parece oportuna para esta situação: Ezequiel 25:17. “O caminho do justo está cercado por todos os lados pelas iniquidades dos egoístas e pela tirania dos perversos. Bendito é aquela que, em nome da caridade e da boa vontade, pastoreia os fracos pelo vale das trevas, pois ele é verdadeiramente o protetor de seus irmãos e o salvador dos filhos perdidos. E Eu atacarei com grande vingança e raiva furiosa aqueles que tentam envenenar e destruir meus irmãos. E você saberá que meu nome é o Senhor quando minha vingança cair sobre ti!”

WINNFIELD, JULES. PULP FICTION, 1994.

Resumo

Os osciladores estão presentes abundantemente na física para explicar os fenômenos da natureza. Dentre os modelos mais conhecidos, estão os osciladores do tipo massa-mola, osciladores eletromagnéticos do tipo, RLC, Oscilador de Lorentz, entre outros. A descrição dos fenômenos por meio das equações de osciladores pode revelar características muito importantes e dar informações precisas sobre o sistema estudado. Apesar de representarem sistemas diferentes, as equações que descrevem matematicamente os osciladores tem uma estrutura que segue um certo padrão, podendo estabelecer uma analogia entre eles. Dessa forma, nesse trabalho apresentaremos diferentes tipos de osciladores e estabeleceremos uma relação entre eles.

Palavras chave: Osciladores, Massa-Mola, RLC, Oscilador de Lorentz.

Introdução

O estudo de osciladores é um assunto de extrema importância na física, tendo em vista que movimentos oscilatórios são vistos na vida cotidiana em diversas situações: árvores balançando, movimento das marés, criança em um balanço, o amortecedor de um carro o pêndulo de um relógio, etc. Os ditos movimentos oscilatórios ocorrem se um determinado sistema possui uma posição, ou estado de equilíbrio e caso sofram alguma perturbação, alguma força tende a recolocá- los na posição ou estado mencionado [1].

Nesse trabalho, iniciaremos apresentando um pouco da história, por onde se deu início os estudos de osciladores, quem foram os primeiros a apresentarem ideias de modelos e soluções, etc. Em seguida, mostraremos o modelo mais simples de modelo mecânico: modelo massa-mola, sem atrito, sem força externa, apenas o movimento harmônico. Na sequência, começaremos a introduzir forças: atrito e força externa.

Após estudarmos todo tipo de movimento dos osciladores mecânicos, mostraremos o modelo eletromagnético, ou seja, movimentos oscilatórios em circuitos RL e RLC. O último modelo a ser tratado será o Oscilador de Lorentz. Serão apresentados suas equações, qual a motivação para iniciar esse estudo, etc.

Por fim, estabeleceremos uma analogia entre os modelos elétricos e mecânicos, chamado de correspondência eletromecânica e também entre o modelo mecânico e o Oscilador de Lorentz. Além disso, ainda será feito comentários à respeito de outros modelos de osciladores, nas mais diversas aplicações.

Capítulo 1

Introdução Histórica

Um dos primeiros a estudar matematicamente o Oscilador Harmônico foi o físico e matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), em 1739, ao resolver, por meio do método de quadraturas, a equação [2]

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

e no mesmo trabalho, através do mesmo processo de quadraturas, Euler obteve a solução do oscilador harmônico forçado

$$m\ddot{x} + kx = F\text{sen}(\omega_\alpha t) \quad (1.2)$$

Observando que, quando a frequência natural do oscilador $\omega = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$ se aproxima da frequência externa ω_α , as oscilações forçadas tornam-se cada vez maiores e as amplitudes tentem ao infinito.

O problema de encontrar a equação de movimento a partir do Lagrangeano também está ligada ao Oscilador Harmônico. Euler e o matemático francês Joseph-Louis, Conde de Lagrange (1736-1813), buscavam encontrar a equação de movimento de um sistema qualquer a partir de um Princípio de Mínima Ação. Para que se chegasse nesse ponto, o matemático francês Pierre Fermat (1601 – 1665) formulou o Princípio do Tempo Mínimo entre 1657 e 1662, onde dizia que: a luz ao se propagar entre dois pontos, escolhia o caminho que levaria menos tempo.

No início do século XVIII, os matemáticos possuíam diversos exemplos de que a natureza tentava maximizar ou minimizar diversas grandezas. Assim, em 1744, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, matemático francês que viveu entre 1698 e 1759, trabalhando com a teoria da luz e embasado pelo Princípio de Fermat, enunciou o Princípio da Mínima Ação. Na época, havia uma controvérsia a respeito da velocidade da luz: René du Perron Descartes (1596-1650) e Sir Isaac Newton (1642-1727) acreditavam que a velocidade da luz era diretamente proporcional ao índice de refração enquanto Fermat acreditava que era inversamente proporcional. Sendo assim, Maupertuis abandonou a ideia de tempo

mínimo e tomou outra grandeza como mínima: a Ação, sendo essa definida como produto da massa, da velocidade e da distância percorrida por uma partícula¹.

No mesmo ano de 1744, Euler, considerando a massa constante, enunciou o Princípio da Mínima Ação de Maupertius de uma forma diferente, dizendo que a Ação era mínima para movimentos de partículas ao longo de curvas planas.

Embora Euler tenha sido o primeiro a esboçar essa interpretação dinâmica do Princípio de Maupertius, quem ficou famoso pelo uso do Princípio da Mínima Ação foi Lagrange, que, partindo do Princípio da Mínima ação de Euler, formulou seu próprio princípio da mínima ação e o aplicou a um sistema de partículas, sendo definido por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 \quad (1.3)$$

onde δ é uma notação que descreve uma variação e T é o que chamamos hoje de energia cinética² e é dado por

$$T = \sum_i \left(\frac{1}{2} \right) m_i v_i^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2} \right) m_i \dot{x}_i^2 \quad (1.4)$$

Ao aplicar o cálculo das variações, desenvolvido entre 1750 e 1755, e a condição de que a energia total (soma da energia cinética e energia potencial) de um sistema de partículas é constante em caminhos próximos, Lagrange demonstrou a Segunda Lei de Newton

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \quad (1.5)$$

Tempos depois, Lagrange obteve a Equação de Euler-Lagrange, utilizando seu Princípio, Cálculo das Variações e introduzindo as coordenadas generalizadas, que nada mais é do que qualquer conjunto de coordenadas que pode definir a configuração de um sistema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (1.6)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Introduzindo a função $L = T - V$, Simeón-Denis Poisson (1781-1842) também fez uma grande contribuição ao estudo do Princípio da Mínima ação, em 1809, alterando a Equação de Euler-Lagrange para

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (1.7)$$

¹Além das razões físicas, Maupertius e Euler alegavam razões teológicas para seu Princípio. Maupertius dizia: “as leis do comportamento da Natureza possuem a perfeição digna da criação de Deus”.

²Na época de Lagrange, não tinha o fator $\frac{1}{2}$ na “energia cinética” e era chamado de força-viva. Esse conceito de força-viva foi introduzido em 1686 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). No entanto, em 1829, o engenheiro francês Gustav-Gaspard Coriolis (1792-1843) observou que era importante a metade da força-viva de Leibniz no movimento de um corpo e passou a chamar de energia cinética.

A última grande alteração feita no Princípio da Mínima ação que será mencionada neste capítulo foi proposta por Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865). Hamilton objetivava construir uma estrutura matemática para a óptica da maneira que Lagrange fez com a mecânica. Algumas contribuições foram as seguintes:

- (i) Observando que alguns fenômenos na natureza maximizavam a Ação em vez de minimizar, ele preferiu se referir a um Princípio de Ação Estacionária.
- (ii) Outra alteração foi introduzir sistemas não-conservativos, visto que o Princípio de Euler-Lagrange-Poisson considerava apenas sistemas conservativos, enunciando que conhecemos como Princípio de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (1.8)$$

onde $L = T - V$, é a chamada função lagrangeana.

O Lagrangeano para o caso do oscilador harmônico simples unidimensional é

$$L = T - V = \left(\frac{1}{2}\right) m\dot{q}^2 - \left(\frac{1}{2}\right) m\omega_0^2 q^2 \quad (1.9)$$

Desse modo, a equação de Euler-Lagrange para esse lagrangeano leva à equação

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1.10)$$

que é, justamente, a equação de movimento do Oscilador Harmônico [2].

Capítulo 2

Oscilador Mecânico: Sistema Massa-Mola

2.1 Oscilador Harmônico Simples

Após uma breve apresentação de alguns fatos históricos a respeito da contribuição de importantes cientistas para a formulação matemática da equação de movimento de um oscilador harmônico, vamos nos aprofundar um pouco mais em alguns exemplos de osciladores.

O primeiro caso que será apresentado é o mais importante do movimento em uma dimensão e também o mais simples de ser resolvido: o oscilador harmônico simples.

Para ilustrar esse caso, vamos utilizar o exemplo de um sistema massa-mola: um corpo de massa m , presa a uma parede fixa por uma mola de constante elástica k , oscilando sob uma superfície livre de atrito.

Sendo x_0 a posição inicial de equilíbrio do sistema, quando deslocamos o sistema para uma posição x , medida a partir de x_0 , a mola exerce uma força restauradora $F = -kx$ sobre o corpo. A Figura 2.1 ilustra exatamente isso: acima, o bloco de massa m está na posição de equilíbrio; abaixo, está deslocado de x a partir da posição inicial.

A Segunda Lei de Newton nos diz que

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.1)$$

Admitindo que nenhuma outra força atue sobre o sistema, temos, substituindo a força na equação 2.1

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (2.2)$$

Fazendo algumas manipulações algébricas, podemos reescrever a equação 2.2 da seguinte forma

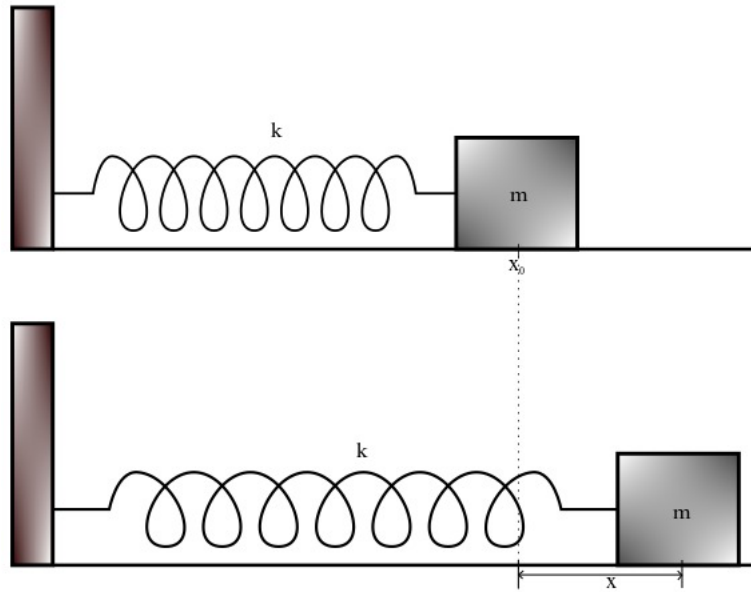


Figura 2.1: Esquema de um sistema massa-mola.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.3)$$

Essa é a equação diferencial que descreve o movimento harmônico simples do sistema massa-mola, onde o $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$ e é chamado frequência natural de oscilação.

Como o intuito do trabalho não é apresentar formas matemáticas de resolver equações diferenciais, e sim, discutir seus resultados, vamos apenas apresentar os mesmos. A solução para a equação 2.3 pode ser dada como

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.4)$$

Nessa solução, o A representa a amplitude do sistema, isso é, o x máximo. Como o sistema oscila, necessitamos de uma solução oscilante, como é o caso do *seno*¹.

O ϕ é a constante de fase. É uma constante que depende das condições iniciais do sistema.

2.1.1 Energia no Movimento Harmônico Simples

Quando um sistema massa-mola realiza um movimento harmônico simples, a energia cinética e potencial variam com o tempo. A energia mecânica total é a soma da cinética com a potencial: $E = T + U$.

A energia potencial associada ao sistema descrito anteriormente é dada por

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.5)$$

¹O *coseno* também pode ser utilizado, isso depende apenas da fase de oscilação em $t = 0$.

Substituindo a equação 2.4 na 2.5, obtemos a seguinte equação

$$U = \frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2(\omega_0t + \phi) \quad (2.6)$$

que é a equação da Energia Potencial no Movimento Harmônico Simples.

Quanto a energia cinética do sistema, temos

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.7)$$

Como v é a derivada temporal de x , temos, derivando 2.4

$$v(t) = \omega_0A \cos(\omega_0t + \phi) \quad (2.8)$$

Substituindo esse resultado em 2.7 e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$T = \frac{1}{2}KA^2 \cos^2(\omega_0t + \phi) \quad (2.9)$$

que é a equação da Energia Cinética no Movimento Harmônico Simples.

Por fim, somando 2.6 e 2.9, temos

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (2.10)$$

que é a Energia Mecânica Total no Movimento Harmônico Simples.

Fazendo algumas análises e considerações a respeito das energias do movimento harmônico, podemos destacar algumas propriedades desse movimento estudado.

Como foi possível observar, a energia mecânica total no movimento é proporcional ao quadrado da amplitude. Quando o corpo se encontra na posição de deslocamento máximo, a energia do sistema é toda potencial. Conforme o corpo vai se deslocando em direção a posição de equilíbrio, a energia potencial vai diminuindo, enquanto que a cinética vai aumentando. Ao passar pela posição de equilíbrio, temos o caso onde a energia cinética é máxima e a energia potencial é zero. Após passar por esse ponto, a energia cinética começa a diminuir e a potencial vai aumentando. Em qualquer momento do movimento, a soma da energia cinética com a energia potencial é constante [3].

2.2 Osciladores Amortecidos

Como é de conhecimento, todos os casos físicos tem uma força de atrito que age sobre o corpo [3].

Pode-se supor que o atrito é proporcional a velocidade e em certos intervalos de velocidade, a força de atrito pode ser escrita como

$$F = \pm bv^n \quad (2.11)$$

onde b é uma constante.

Se considerarmos $n = 1$, a equação do movimento para partículas submetidas a uma força linear restauradora e a uma força de atrito proporcional a velocidade é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.12)$$

Essa equação descreve o Oscilador Harmônico Amortecido.

Para resolver essa equação, podemos propor uma solução do tipo: $x = e^{pt}$ e, quando substituirmos em 2.12, obtemos

$$mp^2 + bp + k = 0 \quad (2.13)$$

e a solução para essa equação será

$$p = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}\right]} \quad (2.14)$$

Conforme visto na equação 2.3, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ e se considerarmos $\frac{b}{2m} = \gamma$ podemos reescrever 2.12 da seguinte forma

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.15)$$

A partir da equação 2.15 temos três casos diferentes de solução: (i) $\gamma^2 < \omega_0^2$, (ii) $\gamma^2 > \omega_0^2$, (iii) $\gamma^2 = \omega_0^2$.

2.2.1 Oscilador Harmônico Subamortecido

No primeiro caso a ser analisado, $\gamma^2 < \omega_0^2$, isso caracteriza o que conhecemos como Oscilador Subamortecido.

Nesse tipo de amortecimento, as soluções para a equação 2.15 são

$$p = -\gamma \pm i\omega_1 \quad (2.16)$$

onde

$$\omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} \quad (2.17)$$

tendo γ conhecido como coeficiente de amortecimento.

Assim, a solução da equação 2.12 fica

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (2.18)$$

Essa solução corresponde a uma oscilação de frequência $(\omega_1/2\pi)$ decrescendo exponencialmente com o tempo, conforme é mostrado no gráfico

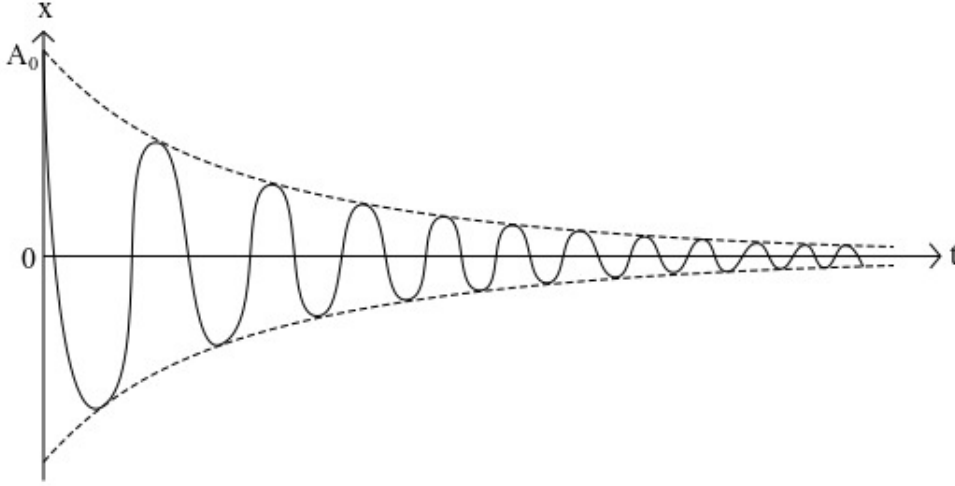


Figura 2.2: Curva de oscilação do movimento harmônico subamortecido.

Na Figura 2.2, as curvas tracejadas correspondem a $x = \pm Ae^{-\gamma t}$.

Como a energia de um oscilador é proporcional ao quadrado da amplitude, no caso do oscilador subamortecido a energia também diminui exponencialmente com o tempo e pode ser aproximada por

$$E = \frac{1}{2}KA^2e^{-2\gamma t} = E_0e^{-2\gamma t} \quad (2.19)$$

2.2.2 Oscilador Harmônico Superamortecido

No caso onde $\gamma^2 > \omega_0^2$, temos o que chamamos de movimento superamortecido, então, a solução para a equação 2.15 fica

$$p = -\gamma_{1,2} = -\gamma \mp (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (2.20)$$

Portanto, a solução para 2.12 pode ser escrita como

$$x = C_1e^{-\gamma_1 t} + C_2e^{-\gamma_2 t} \quad (2.21)$$

Ambos os termos da equação 2.20 decrescem exponencialmente com o tempo, um com taxa de decrescimento maior que o outro. As constantes C_1 e C_2 podem ser escolhidas de modo a satisfazer as condições iniciais do problema.

2.2.3 Oscilador Criticamente Amortecido

No último caso de osciladores amortecidos, temos a situação onde $\gamma^2 = \omega_0^2$, problema conhecido como movimento criticamente amortecido, que deixa a solução da equação 2.15 da seguinte forma

$$p = -\gamma \quad (2.22)$$

e a solução geral para x pode ser escrita como

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \quad (2.23)$$

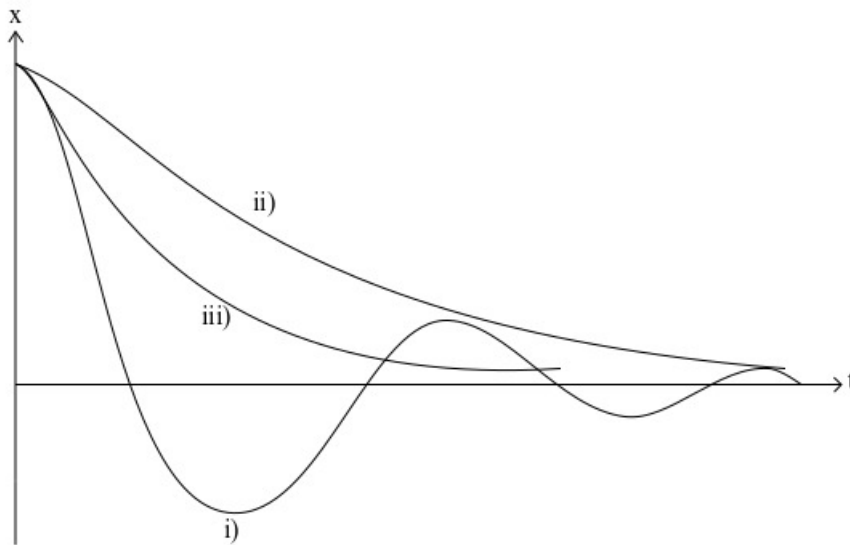


Figura 2.3: Retorno de um oscilador para o equilíbrio.

Conforme mostrado na Figura 2.3, esse é o gráfico que mostra o movimento dos osciladores até voltarem para a posição de equilíbrio para os casos: (i) subamortecido, (ii) superamortecido e (iii) criticamente amortecido.

2.3 Oscilador Harmônico Amortecido Sujeito A Uma Força Externa

Quando deixa-se um oscilador amortecido oscilando, após um período de tempo ele estará em sua posição de repouso, devido ao efeito da força de atrito que subtrai a energia, cedendo a mesma para o meio.

Para evitar que o movimento oscilatório cesse, deve-se aplicar uma força externa [1].

A equação de um Oscilador Harmônico Amortecido submetido a uma força externa tem a seguinte forma

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.24)$$

Apesar de não detalhar todos os passos para a obtenção da solução, há um teorema que será importante na explicação das soluções das equações diferenciais.

“Se $x_p(t)$ (solução particular) é uma solução de uma equação diferencial não homogênea e $x_h(t)$ é uma solução da equação homogênea associada, então a solução geral é dada pela soma das duas: $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$ ”.

O caso mais importante é o da força $F(t)$ que varia periodicamente no tempo com frequência angular ω , que pode ser escrito da seguinte forma

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.25)$$

Escrevendo essa equação na forma padrão

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

Substituindo pelas relações já determinadas anteriormente

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

Quando a frequência da força aplicada se iguala a frequência natural de oscilação, ocorre o que é conhecido como fenômeno de ressonância, que torna a amplitude muito grande. Mais comentários sobre o fenômeno será feito mais a frente.

A solução da equação homogênea já foi apresentada 2.15 e dependendo do γ e ω_0 , temos um dos casos citados anteriormente: Subamortecido, Superamortecido, Criticamente Amortecido.

Para a solução particular, vamos supor uma solução do tipo

$$x_p(t) = D \cos(\omega t + \delta) \quad (2.28)$$

Fazendo diversos cálculos, podemos chegar, a uma forma final para a solução particular, dada por

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (2.29)$$

portanto, a solução geral é a soma de $x_h(t)$ e $x_p(t)$

$$x(t) = x_h(t) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (2.30)$$

Como $x_h(t)$ depende do tipo de amortecimento, pode assumir uma das seguintes formas

$$x_h(t) = \begin{cases} Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) & [\textit{subamortecido}] \\ C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} & [\textit{superamortecido}] \\ (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} & [\textit{criticamente amortecido}] \end{cases} \quad (2.31)$$

Anteriormente foi dito que, ao deixar um oscilador harmônico amortecido oscilando sem interferências externas, ele entrará em repouso. Isso quer dizer que, passado um determinado tempo, qualquer uma das soluções de $x_h(t)$ vai a zero.

A condição que determina esse tempo é dada por

$$e^{-\gamma t} \rightarrow 0 \quad \therefore \quad \gamma t \gg 1 \quad \text{ou} \quad t \gg 1/\gamma \quad (2.32)$$

portanto, $x_h(t)$ é chamada de solução transiente.

Quando o efeito de $x_h(t)$ não tiver mais influência na solução geral $x(t)$, o oscilador passa a ter o comportamento gerido de acordo com a frequência externa da fonte ω , resultando na solução estacionária

$$x(t \gg 1/\gamma) \rightarrow x_p(t) \quad (2.33)$$

2.4 Ressonância

O fenômeno de ressonância ocorre nos mais diversos sistemas físicos, sendo benéfico em determinadas situações, porém, também pode ser catastrófico.

Quando esse fenômeno atua na amplitude, entende-se como uma frequência que faz com que a amplitude de oscilação aumente consideravelmente, já no caso onde atua na energia cinética, temos uma frequência que faz com que o valor da energia cinética seja máximo.

Alguns exemplos da presença da ressonância são: recepção de ondas eletromagnéticas de sinais de rádio (varia-se o valor do capacitor para oscilar em ressonância com o emissor, conseguindo, assim, sintonia.). Outro exemplo é quando empurramos uma criança no balanço. Isso deve ser feito muito próximo a frequência de oscilação natural, aumentando a amplitude, ou seja, a criança irá mais alto. Um caso onde esse fenômeno causou um grande desastre foi a ponte de Tacoma, nos EUA, onde o vento, oscilando na frequência da ponte, fez com que a mesma colapsasse [1].

Fazendo algumas considerações matemáticas a respeito da ressonância, temos que a solução da parte estacionária da equação 2.27 pode ser escrita como

$$x = D \cos(\omega t - \delta) \quad (2.34)$$

onde a constante D já foi mostrada na equação 2.29 e a constante de fase δ é dada por

$$\tan \delta = \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.35)$$

Como é possível observar na equação 2.35, quando a frequência da fonte externa ω se aproxima de zero, δ se aproxima de zero. Quando ω é muito maior que ω_0 , δ se aproxima de 180° e, na ressonância, quando $\omega = \omega_0$, $\delta = 90^\circ$. A equação 2.28 é igual à equação 2.34, exceto pelo sinal da constante de fase. A fase de uma oscilação forçada está sempre atrasada em relação à fase da força externa aplicada e o sinal negativo em 2.34 assegura que o δ seja sempre positivo.

Na ressonância, o corpo está sempre se movendo no sentido da força aplicada. Podemos mostrar isso calculando a velocidade do corpo no estado estacionário, ou seja, calculando a derivada temporal da equação 2.34

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega D \text{sen}(\omega t - \delta) \quad (2.36)$$

e como na ressonância temos que $\delta = (\pi/2)$, ficamos com a combinação

$$v_x = +\omega D \cos(\omega t) \quad (2.37)$$

ou seja, o sinal positivo nos mostra o que havia sido dito.

Capítulo 3

Outros Modelos de Osciladores

3.1 Osciladores Harmônicos Eletromagnéticos

3.1.1 Circuito LC

O capítulo anterior foi dedicado especialmente aos Osciladores Mecânicos. Daqui para frente, será apresentado outros tipos de osciladores, começando com Osciladores Harmônicos Eletromagnéticos, para fazer analogia com os osciladores mecânicos.

Ao ligar um circuito LC (sistema formado por um indutor de indutância L , responsável por armazenar energia magnética e um capacitor de capacitância C , responsável por armazenar energia elétrica) a uma fonte externa, as placas do capacitor começarão a acumular energia elétrica [4].

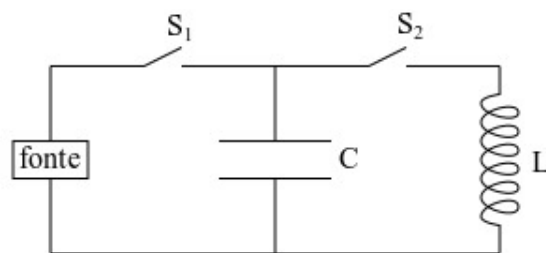


Figura 3.1: Esquema de um circuito LC.

A Figura 3.1 representa o circuito LC. O papel da fonte externa é carregar o capacitor. O circuito LC para o qual as equações seguintes são válidas é representado quando S_1 está aberta e S_2 fechada. O funcionamento do circuito se dá da seguinte forma: fechando-se a chave S_1 e deixando-se S_2 aberta, carrega-se o capacitor até possuir uma diferença de potencial (ddp) igual à da fonte. Após isso, abrindo-se S_1 e fechando S_2 , a energia elétrica acumulada no sistema oscilará entre energia elétrica e energia magnética.

O trabalho executado por uma força eletromotriz (fem) para carregar as placas de um capacitor é igual a energia fornecida para o mesmo.

Essa energia, armazenada como energia potencial elétrica (U_C) é dada pela seguinte equação

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (3.1)$$

em que q é a carga do capacitor, C a capacitância e V a ddp entre as placas.

Há um limite na energia para carregar o capacitor: quando a ddp das placas for igual a ddp da fonte que está conectada ao capacitor, não haverá mais carregamento das placas.

Ao desligar S_1 e ligar S_2 , as cargas fluirão pelo circuito, gerando uma corrente elétrica i que passa pelo indutor de indutância L e o mesmo, quando atravessado pela corrente i , armazena energia magnética (U_B), dada pela equação

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 \quad (3.2)$$

Como não há um elemento resistivo que dissipe a energia do sistema na forma de calor para o ambiente, que é o caso do circuito ideal, essa energia ficará oscilando entre elétrica e magnética, funcionando da seguinte forma: o capacitor começa a descarregar, gerando uma corrente i que fornece energia magnética para o indutor, até que a energia elétrica do capacitor seja nula, ou seja, toda a energia do sistema está armazenada no campo magnético do indutor. Isso ocorre, de acordo com a equação 3.2, quando a corrente é máxima. Então, a quantidade de carga responsável pela corrente começa a diminuir, ou seja, diminui i , pois as cargas estão se acumulando nas placas do capacitor, transferindo a energia magnética para energia elétrica. Quando não houver mais corrente, toda a energia estará armazenada no capacitor. Na sequência, inicia-se o processo de descarregamento do capacitor novamente e o ciclo se repete [4].

A equação diferencial que descreve o comportamento em um circuito LC é dado por

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \quad (3.3)$$

cujas soluções, onde mostra a carga do capacitor em função do tempo é

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (3.4)$$

onde Q_0 é a carga máxima no capacitor, ω é a frequência angular das oscilações eletromagnéticas e ϕ a constante de fase, que depende da carga contida no capacitor no tempo inicial.

A derivada temporal de q fornece a corrente em função do tempo

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -I_0 \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (3.5)$$

em que $I_0 = \omega Q_0$ é a amplitude da corrente e a equação que expressa a frequência angular no circuito LC é

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.6)$$

Quanto às equações oscilatórias para as energias elétrica e magnética, tem-se

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi) \quad (3.7)$$

e

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = L\omega^2 Q^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi) \quad (3.8)$$

3.1.2 Circuito RLC

Quando adicionamos ao sistema um elemento resistivo, o mesmo dissipará energia na forma de calor para o ambiente. Esse tipo de circuito recebe o nome de circuito RLC.

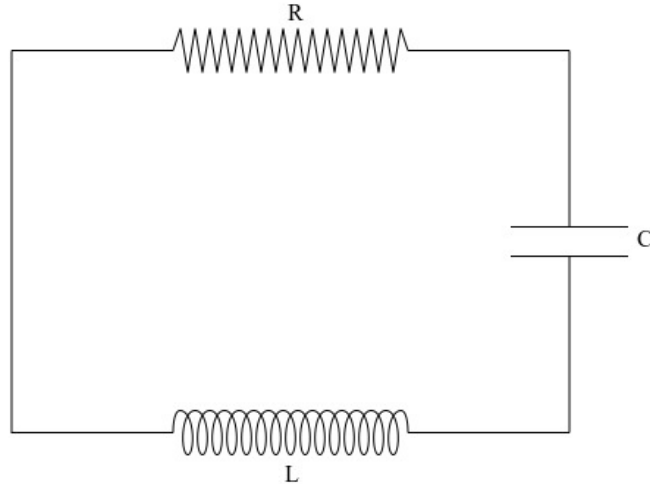


Figura 3.2: Circuito RLC.

A Figura 3.2 representa um circuito RLC em série sem a presença de uma fonte externa. Consideremos inicialmente que o capacitor esteja carregado com carga Q_0 . A energia eletromagnética total (U) em um circuito RLC é dada pela soma das energias elétrica e magnética, tendo em vista que o resistor não armazena energia, portanto, temos

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad (3.9)$$

A taxa com que o resistor dissipa a energia para o ambiente é dada por

$$\frac{dU}{dt} = -Ri^2 \quad (3.10)$$

Se fizermos a derivada temporal da equação 3.9, temos que

$$\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} \quad (3.11)$$

Igualando as equações 3.10 e 3.11, temos a relação

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = Ri^2 \quad (3.12)$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$, $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, portanto, substituindo em 3.12 temos a seguinte equação diferencial

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (3.13)$$

que possui uma solução do tipo

$$q(t) = Q e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega' t + \phi) \quad (3.14)$$

em que

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (3.15)$$

Fazendo a combinação das equações 3.14 e 3.7, temos que:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \quad \therefore \quad U_E = \frac{Q^2}{2C} e^{-\frac{R}{2L}t} \cos^2(\omega' t + \phi) \quad (3.16)$$

ou seja, a energia do sistema diminui exponencialmente com o tempo.

Para que o sistema oscile indefinidamente, é necessário “alimentar” o mesmo. Uma forma disso ser feito é utilizando uma fonte de força eletromotriz (*fem*) alternada, caracterizando o sistema como um oscilador amortecido e forçado.

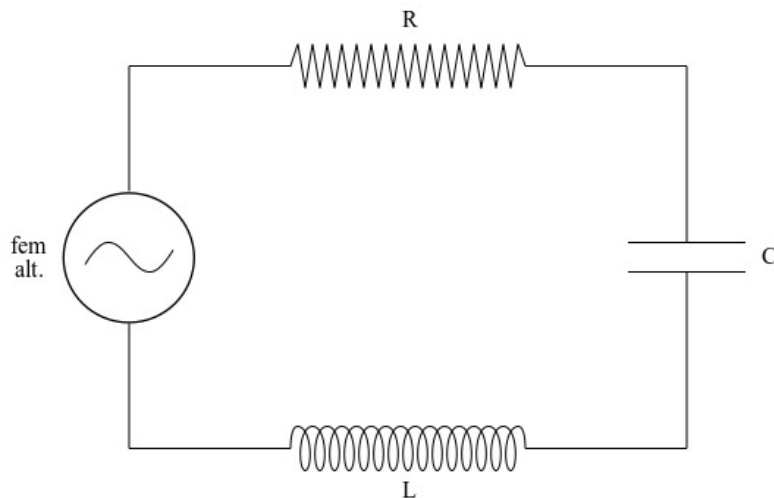


Figura 3.3: Circuito RLC com uma fonte externa.

A figura 3.3 representa um circuito RLC alimentado por uma fonte externa. Se a energia fornecida por uma fem alternada for maior ou igual a energia dissipada pelo resistor, esse sistema oscilará interminavelmente e a equação que descreve esse sistema é dado por

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \text{sen}(\omega_d t) \quad (3.17)$$

onde E_0 é o valor máximo de E .

Quando a frequência angular de oscilação da fem (ω_d) for igual à frequência angular natural de oscilação do circuito RLC (ω), temos o fenômeno de ressonância. Nessa condição, a amplitude de carga no capacitor e a corrente no circuito serão máximas.

Um exemplo da importância da análise da frequência de ressonância em circuitos elétricos é quando se trabalha com técnicas eletrogravimétricas. Gravimetria é um conjunto de técnicas que permite a quantificação de massa em uma reação química. Na eletrogravimetria, utiliza-se uma fem de corrente alternada para gerar um impulso elétrico em um cristal de quartzo, fazendo o mesmo oscilar (oscilação forçada). Desse modo, o mesmo se comporta como um conjunto de componentes de um circuito RLC [4].

3.2 Oscilador de Lorentz

Com o advento da mecânica quântica, por volta de 1900, uma das mais famosas e importantes tentativas de descrever a interação entre luz e matéria por um “físico clássico” foi feita por Hendrik Lorentz. Apesar de ser uma descrição clássica, o modelo de Oscilador de Lorentz foi adaptado da mecânica quântica e ainda pode ser utilizado nos dias de hoje [5].

A ideia do modelo partiu da tentativa de descrever a interação entre átomos e um campo elétrico, feito em termos clássicos. Lorentz propôs que o elétron (partícula de massa pequena) está ligado ao núcleo do átomo (massa muito maior) por uma força que se comporta como a Lei de Hooke, ou seja, algo parecido com uma mola.

Aplicando um campo elétrico, ele interage com a carga do elétron, esticando ou comprimindo a mola, causando assim, um movimento oscilatório no elétron.

O termo de amortecimento pode ser introduzido considerando as colisões internas entre partículas vizinhas e a radiação emitida pelo elétron.

O que falta para descrever o Oscilador de Lorentz é a força externa motriz.

Para o caso de um sólido que está localizado em um campo elétrico que varia no tempo com uma frequência angular ω , porém, independente do deslocamento em y , tem-se que

$$\vec{E}_y(\omega, t) = \vec{E}_{0y} \cos(\omega t) \quad (3.18)$$

com E_{0y} real e independente do tempo. Então, temos que a força é

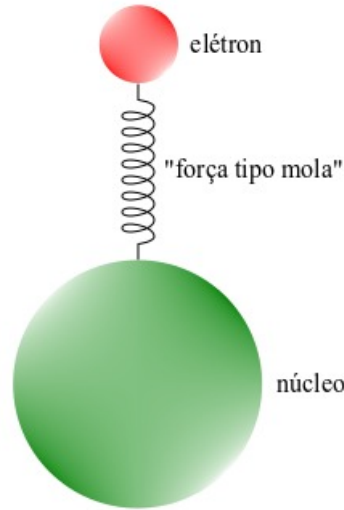


Figura 3.4: Elétron ligado ao núcleo por uma força.

$$\vec{F} = -q\vec{E}_y \quad (3.19)$$

Do ponto de vista da polarização, há duas equações diferentes, porém, equivalentes

$$\vec{P} = -Nq\vec{y} \quad (3.20)$$

e

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \quad (3.21)$$

A equação 3.20 mostra que o vetor polarização é a densidade do momento de dipolo, que por sua vez é definido pelo produto da carga pelo vetor deslocamento que vai do elétron ao núcleo e equação 3.21 diz que a polarização está relacionada com a suscetibilidade elétrica¹.

Daqui em diante, trabalharemos apenas com os módulos das grandezas vetoriais, abandonando a notação vetorial.

Pela equação 3.20 temos que

$$y(t) = \frac{-P(t)}{Nq} \quad (3.22)$$

A equação de um oscilador é dada por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + m\gamma\frac{dy}{dt} + m\omega_0^2y = F \quad (3.23)$$

¹Quando se aplica um campo a uma região de um material, deslocará os elétrons, criando vários dipolos. Quanto maior a suscetibilidade, maior será o deslocamento e o número de dipolos.

Substituindo o y dado na equação 3.23 e reorganizando, ficamos com

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \gamma \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P = \frac{-Nq}{m} F \quad (3.24)$$

Utilizando a F dada em 3.19, temos

$$\frac{d^2 P(\omega, t)}{dt^2} + \gamma \frac{dP(\omega, t)}{dt} + \omega_0^2 P(\omega, t) = \frac{-Nq^2}{m} E_y(\omega, t) \quad (3.25)$$

onde ω é a frequência com que o campo elétrico varia.

Para poder completar o modelo do Oscilador de Lorentz, vamos introduzir um novo termo: a frequência de plasma.

De uma forma simplificada, o plasma é um gás ionizado, de partículas carregadas, condutor, existente sob condições de temperaturas muito altas e baixíssimas densidades de partículas.

O plasma apresenta diversos efeitos que ocorrem, na sua maioria, em conjunto. Um desses efeitos mais importantes é a oscilação do plasma. Toda oscilação ocorre com uma certa frequência, e na oscilação do plasma, a frequência que ocorre efeito de ressonância é chamada *frequência de plasma*, dada pela equação

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}} \quad (3.26)$$

Como é possível observar na equação 3.26, a frequência de plasma é proporcional a densidade de elétrons e pode ser calculada para qualquer material, incluindo não-plasmas.

Voltando à equação 3.24, podemos, enfim, escrever a equação do Oscilador de Lorentz, utilizando a frequência de plasma

$$\frac{d^2 P(\omega, t)}{dt^2} + \gamma \frac{dP(\omega, t)}{dt} + \omega_0^2 P(\omega, t) = \epsilon_0 \omega_p E_y(\omega, t) \quad (3.27)$$

cujas soluções podem ser dadas por

$$P(\omega, t) = P(\omega) \cos(\omega t) \quad (3.28)$$

3.3 Pêndulo Simples

Quando dizemos que o balançar de uma árvore, ou uma criança brincando em um balanço representa movimentos oscilatórios, podemos dizer que são modelos muito próximos de um pêndulo simples.

O pêndulo simples consiste em um fio de comprimento L preso a um peso de massa m (figura 3.5). Quando elevamos o peso a uma certa altura, com um ângulo θ_0 com a vertical e soltamos, ele oscilará, com um período T . Se esse θ_0 for pequeno, de forma que $\sin(\theta) = \theta$, o período é dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.29)$$

A equação que descreve o movimento para pequenas oscilações é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (3.30)$$

onde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.31)$$

A solução para a equação 3.30 é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (3.32)$$

em que θ_0 é o deslocamento angular máximo.

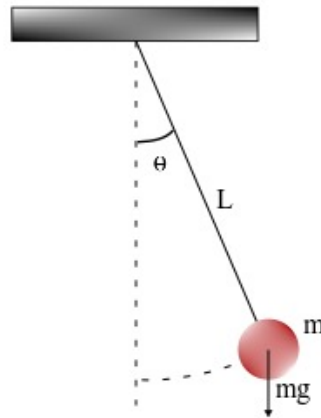


Figura 3.5: Pêndulo Simples.

Um dos inúmeros exemplos de pêndulo simples é o famoso Pêndulo de Foucault, construído em 1851 pelo físico Jean Bernard Leon Foucault. O pêndulo era constituído por uma esfera metálica de 28 kg, sustentada por um fio de 67 m, construído com o objetivo de demonstrar a rotação da Terra. Um experimento simples, porém, espetacular [6].

3.4 Modelo Eletromecânico Para Impedância

Recentemente, trabalhos vem sendo publicados utilizando um modelo eletromecânico de Oscilador Harmônico Amortecido com um termo de viscosidade para interpretar dados experimentais de impedância [7].

O modelo descreve o movimento de um íon de massa m e carga q , na presença de um campo elétrico externo $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$, oscilando próximo a uma parede (eletrodos) e é descrito pela equação

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{q}{m}E(t) \quad (3.33)$$

onde x é o deslocamento do íon, $(k/m)^{1/2}$ é a frequência natural de ressonância ω_0 . c/m está relacionado com o termo de viscosidade ao redor do íon.

A solução para a impedância pode ser escrita como

$$Z_{osc} = \frac{d}{S} \frac{V}{Nq^2} \left[i\omega m + c + \frac{k}{i\omega} \right] \quad (3.34)$$

em que a quantidade $O = i\omega m + c + \frac{k}{i\omega}$ tem a forma de resposta mecânica e está relacionada com a impedância por $Z_{osc} = \phi_N O$, onde $\phi_N = dV/SNq^2$ [6]. Na equação 3.34, d é a distância entre os dois eletrodos, S é a área da superfície dos eletrodos, V é o volume de amostra que será medido no experimento e N o número de íons que contém na amostra.

Esse resultado é análogo a resposta elétrica caracterizada pelo circuito elétrico

$$Z = i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \quad (3.35)$$

Fazendo algumas considerações, os autores mostram que esse modelo ajusta muito bem os dados experimentais de impedância, considerando um fluido contendo íons, como por exemplo $H_2O + KCl$ [7–9].

3.5 Modelo acústico

Os Osciladores também tem aplicações na acústica. Em 1920, Hahnemann e Hecht estabeleceram uma base sistemática para a acústica aplicada. Essa configuração ficou conhecida como Oscilador Mecanoacústico Fundamental e recebeu o nome de *Tonpiliz* [10].

Tonpiliz é um tipo de transdutor. De maneira sucinta, transdutor é um dispositivo que transforma um tipo de energia em outra. Ele converte uma grandeza física, como temperatura, em um sinal elétrico. Isso é muito utilizado em sensores [11].

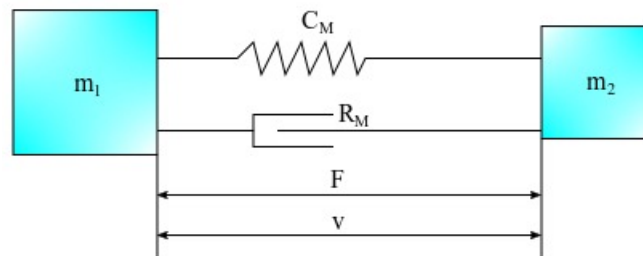


Figura 3.6: Tonpiliz.

A equação que descreve um *Tonpiliz* é

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{dv}{dt} + R_M v + \frac{1}{C_M} \int v dt \quad (3.36)$$

A Figura 3.6 mostra a configuração de um *Tonpilz*. Os componentes m , C_M e R_M estão em paralelo, porém, m_1 e m_2 estão em série.

Há dois tipos de análogos elétricos para o *Tonpilz*. O primeiro tipo consiste de duas indutâncias (m_1 e m_2) em paralelo e em série com a capacitância e a resistência (C_M e R_M). O análogo de segundo tipo apresenta um circuito em série com duas capacitâncias (m_1 e m_2) ligadas em paralelo com uma indutância e uma resistência (C_M e $\frac{1}{R_M}$) [10].

3.6 Modelo de Mason

Conforme estamos tentando estabelecer, existem diversas maneiras de modelar, analisar e estimar o comportamento de um sistema dinâmico. Um método muito comum para isso é utilizando o Modelo de Mason que pode-se dizer que é um equivalente elétrico da equação de movimento incluindo o efeito de piezo [12].

Entende-se por efeito de piezo como o fenômeno do surgimento de dipolos elétricos causado pela deformação da superfície de determinados materiais [13].

Em 1880, Jacques e Pierre Curie descobriram que quando submete-se certos minerais cristalinos a forças mecânicas, observa-se como se polarizam eletricamente. A tensão mecânica e compressão de materiais piezoelétricos geram tensões elétricas de polaridade oposta. Essas tensões elétricas são proporcionais à força aplicada. Quando se expõe esses cristais a um campo elétrico, surgem tensões elásticas no material, alargando ou encolhendo a estrutura do cristal de acordo com a polaridade do campo elétrico. Esses comportamentos recebem o nome de efeito piezoelétrico e efeito piezoelétrico reverso [14].

A equação de movimento pode ser descrita como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{piezo} - F_{ext} \quad (3.37)$$

e o equivalente elétrico é dado por

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U_{piezo} - U_{out} \quad (3.38)$$

Para um sistema operando em um *range* de frequência muito grande, esse modelo pode ser estendido, incluindo mais ressonâncias.

A massa do sistema m é equivalente a indutância L . A dureza k do sistema é equivalente ao inverso da capacitância C e o termo de amortecimento c é relacionado com a resistência R .

Conclusão

Após estudar vários modelos de osciladores, chegamos a conclusão que eles possuem semelhança na estrutura, podendo ser estabelecido uma analogia entre eles.

Primeiramente, vamos relacionar as quantidades dos modelos mecânicos (*mec.*) e eletromagnéticos (*e.m.*), de acordo com o que mostra a tabela:

Tabela 3.1: Quantidades correspondentes entre osciladores

Modelos Mecânicos	Modelos Eletromagnéticos
Força	Tensão
Velocidade	Corrente
Massa	Indutância
Compliância	Capacitância
Resistência Mecânica	Resistência Elétrica

Conforme observado na Tabela 3.1, o que conhecemos por força em um *mec.* tem seu correspondente no *e.m.* a tensão. A velocidade nos modelos mecânicos, corresponde à corrente elétrica nos modelos eletromagnéticos. A massa corresponde à indutância. A compliância, que no caso estudado nesse trabalho quer dizer a constante elástica da mola, corresponde à capacitância e a resistência mecânica, como por exemplo o atrito, corresponde a resistência elétrica.

Estabelecendo uma analogia do modelo mecânico com o Oscilador de Lorentz, temos que a força (*mec.*) corresponde à um campo elétrico, ou seja, o produto do campo pela quantidade de cargas. A massa (*mec.*) pode ter seu análogo como a massa do elétron. A resistência mecânica (*mec.*) é justificado no Modelo de Lorentz pela radiação emitida pelo elétron e pelas colisões internas das partículas.

A Tabela 3.2 nos mostra a frequência correspondente de cada modelo de oscilador, conhecida como frequência natural de oscilação.

A Tabela 3.3 nos mostra as equações de movimento e suas respectivas soluções para os modelos de oscilador que não apresenta um termo de amortecimento. Como é possível

Tabela 3.2: Frequência de oscilação para modelos sem amortecimento

Massa-mola	Pêndulo Simples	LC
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Tabela 3.3: Equações para modelos sem amortecimento

Modelo	Equação de Movimento	Solução
Massa-mola	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$
Pêndulo Simples	$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$	$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$
LC	$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$	$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$

observar, todas as equações apresentam a mesma estrutura, com uma solução senoidal que apresenta uma constante de fase.

Tabela 3.4: Frequência de oscilação para modelos amortecidos

Massa-mola	RLC
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$	$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

Na Tabela 3.4, temos as frequências de oscilação dos movimentos amortecidos. No sistema massa-mola, essa frequência determina qual o tipo de movimento ocorrerá: subamortecido, superamortecido, criticamente amortecido decorrente da análise das raízes, como mostrado na seção 2.2.

Para o modelo de Lorentz, não conseguimos uma equação para determinar a frequência de oscilação, porém, necessita-se calcular algo conhecido como frequência de plasma, que depende de cada material e é calculada pela equação 3.26.

Tabela 3.5: Equações para modelos amortecidos

Modelo	Equação de Movimento	Solução
Massa-mola	$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$	$x(t) = Ae^{\frac{-b}{2m}t} \cos(\omega_1 t + \theta)$
RLC	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$	$q(t) = Qe^{\frac{-R}{2L}t} \cos(\omega' t + \phi)$

Na Tabela 3.6, sintetizamos os modelos amortecidos para o sistema massa-mola e RLC, seguido de suas soluções. É sabido que há 3 tipos de oscilação para o sistema massa-mola,

porém, escolhemos o caso subamortecido para exemplificar na tabela, devido a estrutura da solução ser semelhante ao sistema RLC, apresentando um valor máximo (A para o massa-mola e Q para o RLC), o termo de amortecimento, o termo oscilante e a constante de fase.

Tabela 3.6: Equações para modelos amortecidos e forçados

Modelo	Equações de movimento	Solução
Massa-mola	$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$	$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$
Lorentz	$\ddot{P} + \gamma\dot{P} + \omega_0^2 P = \varepsilon_0 \omega_p^2 E_0 \cos(\omega t)$	$P(t) = P_0 \cos(\omega t + \phi)$
RLC	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t)$	$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$
Impedância	$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{q}{m} E_0 \cos(\omega t)$	$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$

Na Tabela 3.6, apresentamos as equações de movimento dos modelos amortecidos e forçados do sistema massa-mola, Lorentz, RLC e do modelo eletromecânico para impedância.

Não foi apresentado todas as soluções, pois sabe-se que há soluções da parte homogênea e particular, dificultando a praticidade de sintetizar em uma tabela, portanto, optamos por colocar apenas as soluções particulares de cada sistema.

Como é possível observar, a estrutura das soluções particulares é a mesma, contendo uma constante multiplicativa, um termo oscilante que depende do tempo e uma constante de fase.

Ainda que em todas as soluções a constante multiplicativa ser representada por D , não quer dizer que elas sejam iguais. Essa constante dependerá das condições iniciais de cada sistema, porém, a estrutura final será da mesma forma, semelhante à equação 2.29, mostrada no trabalho.

Embora esse trabalho tenha como objetivo um estudo mais detalhado de osciladores mecânicos, eletromagnéticos e do Oscilador de Lorentz, existem diversos outros tipos de osciladores, que representam diversos modelos físicos.

Além de todos os modelos apresentados, ainda vimos que os modelos matemáticos de osciladores estão presentes em diversos campos, como, por exemplo, na análise de dados experimentais, na acústica, modelos piezoelétricos, etc. O Modelo de Lorentz, por exemplo, pode ser utilizado para explicar propriedades ópticas dos materiais [15]. Há estudos sobre osciladores que analisam se a frequência do caminhar de um ser humano gera o mínimo de energia necessária para ser a força externa de um oscilador harmônico forçado [16]. Existe ainda o modelo de Van der Pol, muito utilizado na física e nas ciências biológicas [17].

Referências Bibliográficas

- [1] C. C. Colucci, *Mecânica Clássica*. EDUEM, 2012.
- [2] J. M. F. Bassalo and M. S. D. Cattani, *Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos*. Editora Livraria da Física, 2009.
- [3] P. A. Tipler and G. Mosca, *Física para cientistas e engenheiros. Vol. 1: mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica*. Grupo Gen-LTC, 2013.
- [4] A. M. Watanabe, A. Santos, and P. R. Bueno, “Harmonical oscillator and electro-mechanical analogy: an interdisciplinary experiment to high precision mass variation measurements,” *Eclética Química*, vol. 34, no. 3, pp. 57–75, 2009.
- [5] I. F. Almog, M. S. Bradley, and V. Bulovic, “The lorentz oscillator and its applications,” *Massachusetts Institute of Technology*, 2011.
- [6] “Foucault.” Disponível em: <<https://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/foucault>>. Acesso em: 07 de novembro de 2018.
- [7] A. E. T. Silva, T. M. Andrade, and F. C. M. Freire, “Overdamped oscillator model with a complex viscosity to interpret impedance spectroscopy data,” *The Journal of Physical Chemistry C*, vol. 121, no. 44, pp. 24557–24561, 2017.
- [8] H. S. e J. H. Miller Jr., “Processos de relaxamento devido à interface eletrodo-eletrólito em soluções iônicas,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 5, p. 051505, 2006.
- [9] F. C. M. Freire and T. M. Andrade, “Surface-like over-damped oscillator model to interpret impedance spectroscopy data,” *Journal of Electroanalytical Chemistry*, vol. 778, pp. 74–79, 2016.
- [10] F. A. Fischer, *Fundamentos de Eletroacústica*. Editora Scienza, (2016).
- [11] M. M. Teixeira, “Transdutor.” Disponível em: <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/transdutor.htm>> Acesso em: 07 de novembro de 2018.
- [12] “The mason model, definition and identification of the dynamic parameters.” Disponível em: <<http://www.noliac.com/tutorials/dynamic-actuators/>>

[the-mason-model-definition-and-identification-of-the-dynamic-parameters/](#)>

Acesso em: 31 de outubro de 2018.

- [13] H. Darmstadt, “O efeito-piezo e suas aplicações.” Disponível em: https://www.hbm.com/fileadmin/mediapool/files/technical-articles-technotes-white-papers/2007/id813_piezo_pt.pdf> Acesso em: 07 de novembro de 2018.
- [14] D. C. Andradadas, “Diseño y desarrollo del prototipo de un sensor basado en materiales piezoeléctricos,” (2006).
- [15] C. B. Pedroso *et al.*, “Propriedades ópticas de materiais compostos: modelo de maxwell-garnett e modelo de lorentz,” 1993.
- [16] K. G. Holt, J. Hamill, and R. O. Andres, “The force-driven harmonic oscillator as a model for human locomotion,” *Human Movement Science*, vol. 9, no. 1, pp. 55–68, 1990.
- [17] S. He, “Modelling biological oscillations.” Disponível em: https://www.cs.bham.ac.uk/~szh/teaching/matlabmodeling/Lecture10_body.pdf> Acesso em: 30 de outubro de 2018.