



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO COM APLICAÇÃO EM SISTEMAS FÍSICOS

Acadêmica: Milena Camila Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Cesar Canesin Colucci

Maringá, 29 de novembro de 2018



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO COM APLICAÇÃO EM SISTEMAS FÍSICOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Estadual de Maringá, como parte dos pré-requisitos necessários para a obtenção do Grau de Bacharel em Física sob a orientação do Prof. Dr. Cesar Canesin Colucci.

Acadêmica: Milena Camila Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Cesar Canesin Colucci

Maringá, 29 de novembro de 2018

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Introdução	1
1 Dinâmica de Lagrange	4
1.1 Vínculos	4
1.1.1 Vínculos Holônomos	4
1.1.2 Deslocamento e Trabalho Virtual: Vínculos Ideais	5
1.2 Princípio de d'Alembert	7
1.3 Equações de Lagrange	8
1.4 Cálculo de Variações	10
1.5 As Equações de Euler	11
1.6 Princípio de Hamilton	13
2 Dinâmica de Hamilton	15
2.1 Equações canônicas do movimento	15
2.2 Equações de Hamilton: Formulação Variacional	17
2.3 Transformações Canônicas	18
2.3.1 Transformações canônicas e Funções Geradoras	18
2.3.2 Colchetes de Poisson	20
2.3.3 Transformações Canônicas Infinitesimais	21
2.4 Teoria de Hamilton-Jacobi	24
2.4.1 Integral completa da Equação de Hamilton-Jacobi	24
2.4.2 Separação de Variáveis	25
2.4.3 Relação Entre a Integral Completa e a Ação	26
3 Aplicações	29
3.1 Mecânica Clássica: A Corda Vibrante	29
3.2 Eletromagnetismo: Partícula em um Campo Eletromagnético Externo	33
3.2.1 Potenciais Generalizados	33
3.2.2 Partícula em um Campo Eletromagnético Externo	33
3.3 Mecânica Quântica: A Teoria de Hamilton-Jacobi e a Equação de Schrödinger	36
Considerações Finais	40
A Coordenadas Generalizadas	42

B Espaço de Configuração e Espaço de Fase	44
B.1 Espaço de Configuração	44
B.2 Espaço de Fase	45
Referências Bibliográficas	46

Agradecimentos

À minha família, avó, mãe e irmão. Pelo apoio diário desde o começo da vida e em especial ao longo da graduação.

Aos meus amigos, em especial aos que a universidade me permitiu conhecer e compartilhar as alegrias e tristezas durante essa etapa. Cito aqui Farinha, João, Marcos, Rodrigo, Gabriel, Fernando, Mari e Patrick.

À todos os professores que tive a honra de conhecer e receber conhecimento dentro e fora da sala de aula. Aos professores do ensino fundamental, médio, de graduação e em específico aos do Departamento de Física. O meu muito obrigado pela oportunidade de poder estar sempre perto dessa profissão tão nobre.

Ao meu orientador, Cane. Muito obrigado pela paciência e por todo o apoio ao longo deste trabalho.

Ao meu companheiro de vida, Rafael.

Resumo

A Mecânica Clássica é capaz de descrever as principais leis da física em sua formulação. Neste presente trabalho estudamos a Mecânica Clássica proposta por Lagrange e Hamilton para a descrição da evolução de sistemas físicos. Iniciamos o estudo com a dinâmica de Lagrange, com o principal objetivo de chegarmos nas equações de Euler-Lagrange. Para isto, trabalhamos conceitos fundamentais, como os vínculos e as coordenadas generalizadas. Além disso, as equações de Euler-Lagrange foram expressas com base no Cálculo Variacional e por meio de um princípio variacional, o princípio de Hamilton. Ainda, construímos também a dinâmica de Hamilton, com o objetivo de expressar as equações de Hamilton, isto é, equações de movimento de um sistema. A partir da dinâmica de Hamilton, estudamos a teoria de Hamilton-Jacobi, sendo essa a base para a teoria Quântica, proposta posteriormente. Conceitos básicos para o entendimento desta parte do trabalho, como transformações canônicas e os colchetes de Poisson foram estudados e, após, foi possível iniciar a teoria de Hamilton-Jacobi. Por fim, todos os conceitos vistos anteriormente serviram de base para o objetivo principal deste trabalho, que foi mostrar como a Mecânica Clássica é capaz de descrever diferentes sistemas, estudados amplamente na física. Foram eles: a corda vibrante, uma partícula sujeita à um campo eletromagnético externo e um exemplo de como a teoria de Hamilton-Jacobi influenciou a Mecânica Quântica de Schrödinger.

Palavras-chave: Cálculo Variacional, Mecânica Lagrangiana, Mecânica Hamiltoniana, Teoria de Hamilton-Jacobi.

Introdução

O cálculo de variações é um problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos (ou, mais geralmente, extremos relativos) de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional. Pela lenda, a Rainha Dido de Cartago foi a primeira pessoa a atacar brilhantemente um desses problemas. Foi prometido à Dido a extensão de terra que ela pudesse cercar com um couro de boi. Ela preparou uma extensa correia com o couro de um boi e cercou um terreno semi-circular, beirando o Mar Mediterrâneo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago, contada por Virgílio (70-19) a.C. no livro *Eneida*⁽¹⁾. Os primeiros indícios de problemas típicos do cálculo de variações datam da Grécia antiga. Ideias primordiais como o conceito de velocidades virtuais foram abordadas por Aristóteles (384-322) a.C. e pode-se afirmar que a primeira aplicação de um conceito variacional foi feito por Herão de Alexandria (62-20) a.C., onde postulou que na reflexão por um espelho plano a luz seguiria um caminho mais curto entre dois pontos ⁽²⁾ [1].

Outras abordagens a respeito do cálculo variacional surgiram no século XVII, onde Pierre Fermat (1607-1665) resolve um problema intitulado **Princípio de Fermat**, onde afirmava que a trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é um mínimo. Em 1630, Galileu Galilei (1564-1642) formulou parcialmente o problema da braquistócrona quando comparou o tempo de descida por um segmento circular com os tempos correspondentes à descidas por polígonos inscritos e por outros arcos unindo os pontos dados. Em 1686, Isaac Newton (1643-1727) propôs o problema da superfície de revolução com resistência mínima: calcular a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de líquido sofrendo mínima resistência, um problema típico do cálculo variacional.

Pode-se afirmar que o cálculo variacional iniciou-se de fato com Johann Bernoulli (1677-1748), em 1696, ao propor o **problema da Braquistócrona**: consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força gravitacional. O problema foi inicialmente abordado por Jakob Bernoulli (1654-1705), também em 1696, e posteriormente, em 1744 Leonhard Euler (1707-1783) publica *A method for discovering curved lines havin a maximum or minimum property or the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*, apresentando assim a **Equação de Euler**, abordada com mais detalhes ao longo do trabalho ⁽³⁾ [2].

A primeira aplicação de um princípio mínimo em Mecânica foi feita em 1747 por Maupertuis (1698-1759), introduzindo o **Princípio da Mínima Ação**, onde afirmou que o movimento dinâmico acontece com ação mínima e, somente mais tarde uma base ma-

⁽¹⁾O problema de Dido é datado de 850 a.C.

⁽²⁾Problemas extremos aparecem ainda na geometria grega de Euclides, Arquimedes e Apolônio.

⁽³⁾Outros matemáticos tais como: Carl Gustav Jacobi (1804-1851) e David Hilbert (1862-1943), Adrien Marie Legendre (1752-1833), Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) e Carl Frendrich Gauss (1777-1855) também contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo de Variações.

temática sólida do princípio foi dada por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), em 1760. Posteriormente, em dois artigos publicados em 1834 e 1835, William Rowan Hamilton (1805-1865) anunciou o princípio dinâmico no qual é possível basear toda a mecânica, o chamado **Princípio de Hamilton**, e enunciado ao longo deste trabalho. Tal princípio leva-nos às **Equações de movimento de Lagrange**, utilizadas como base para as aplicações que serão feitas neste trabalho. A partir da formulação das equações de movimento de Lagrange, podemos inserir sistemas sujeitos à vínculos, onde vínculo é uma restrição na liberdade do movimento de um sistema de partículas sob uma condição que deve ser satisfeita por suas coordenadas, ou por variações permitidas em suas coordenadas. A máquina de Atwood ou um cilindro rolando sobre outro são exemplos desses sistemas.

Em problemas que envolvem o movimento de uma partícula em um referencial inercial, a dinâmica de Newton através da equação $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ é suficiente para descrever todo o sistema. Essa descrição torna-se relativamente simples quando o problema utilizar as coordenadas retangulares e quando não houver algum tipo de limitação quanto ao movimento da partícula, como um objeto restrito à uma superfície cilíndrica, o que leva a uma projeção da equação vetorial newtoniana naquela superfície e, conseqüentemente, forças de restrição devem existir e ser consideradas nos cálculos, já que são necessárias para manter o movimento do objeto. A dificuldade ao utilizar a dinâmica newtoniana também vem do fato de que devemos conhecer todas as forças agindo sobre o corpo para assim utilizar a equação $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ [3].

Para evitar algumas das dificuldades práticas que aparecem nas tentativas de aplicação das equações de Newton para problemas específicos, procedimentos alternativos podem ser desenvolvidos. Para isto, não é preciso criar uma nova teoria da mecânica, mas somente criar um método alternativo de lidar com os problemas complexos de modo geral e o Princípio de Hamilton surge com essa justificativa. As equações de Lagrange não somente constituem uma descrição apropriada da dinâmica de partículas mas também podem ser aplicadas a uma faixa ampla de fenômenos físicos, sendo essa a principal motivação para a realização deste trabalho.

A essência da dinâmica de Lagrange está em lidar somente com as quantidades associadas com o corpo (as energias cinética e potencial). Tal fato torna o Princípio de Hamilton útil para vários sistemas. Por exemplo, em sistemas mecânicos quânticos onde normalmente conhecemos as energias, mas não as forças ou até mesmo quando existem forças dependentes da velocidade, como no caso da força magnética. Assim, as equações de movimento de um sistema qualquer de partículas podem sempre ser expressas na forma lagrangiana e, além disso, uma propriedade importante destas equações é que elas permanecerão com a mesma forma, caso se substituam um conjunto de coordenadas por um novo conjunto qualquer [4].

Desta maneira, o trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 1 - Estudos sobre a Dinâmica Lagrangiana, sua formulação a partir de um princípio diferencial e a partir de um princípio integral, que tem como fundamento o cálculo variacional.
- Capítulo 2 - Estudos sobre a Dinâmica Hamiltoniana, partindo das equações de Hamilton e introduzindo a teoria de Hamilton-Jacobi.
- Capítulo 3 - Aplicações da teoria vista anteriormente em três diferentes problemas que a Física estuda. Primeiramente, a Mecânica Clássica com a corda vibrante. Após, foi analisado a dinâmica de uma partícula em um campo eletromagnético

externo, problema abordado pelo Eletromagnetismo. Por fim, um exemplo de como a teoria clássica de Lagrange e Hamilton-Jacobi pode ser aplicada em Mecânica Quântica e na interpretação da Equação de Schrödinger.

Capítulo 1

Dinâmica de Lagrange

Este capítulo tem como objetivo introduzir a Dinâmica Lagrangiana. Para isto, partindo do conceito de vínculos e utilizando a segunda lei de Newton, chegamos ao Princípio de d'Alembert. A partir daí, utilizando as coordenadas generalizadas e introduzindo o conceito de força generalizada, através de uma análise matemática, chega-se às equações de Lagrange, válidas para a descrição de sistemas físicos mais relevantes na física fundamental. A segunda parte do capítulo tem como objetivo uma breve discussão sobre o Cálculo Variacional, envolvendo as motivações que levaram ao seu desenvolvimento e a apresentação do problema fundamental que o Cálculo Variacional investiga, bem como a apresentação do Princípio de Hamilton e as equações de movimento que resultam da aplicação deste princípio, as chamadas equações de Euler-Lagrange.

1.1 Vínculos

1.1.1 Vínculos Holônomos

Vínculos são limitações à possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento. É fundamental ressaltar que vínculos são de natureza cinemática e devem ser considerados na formulação das equações de movimento, e não dinâmica, que surgem em consequência das equações de movimento. Por exemplo, uma partícula restrita a uma superfície fixa tem seu vetor posição $\vec{r} = r(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, relativamente à um sistema de eixos no qual a superfície permanece fixa. Neste caso x, y e z não são variáveis independentes, mas devem satisfazer

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) = 0,$$

onde $f(\vec{r})$ é a equação da superfície. Agora, caso a partícula esteja restrita a uma superfície móvel ou deformável, x, y, z obedecem a equação

$$f(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t) = 0.$$

A dependência temporal explícita indica a mudança da forma ou localização da superfície no decorrer do tempo [5].

Um vínculo é chamado de **holônomo** quando pode ser expresso por uma equação que dependa das coordenadas de posição, podendo depender explicitamente ou não do tempo. Se r_1, \dots, r_M são coordenadas arbitrárias usadas para descrever a configuração⁽¹⁾ de um

⁽¹⁾A posição de cada uma das partículas de um sistema mecânico num dado instante define a configuração do sistema no referido instante.

sistema mecânico, um vínculo holônomo é descrito da forma

$$f(r_1, \dots, r_M, t) = 0, \quad (1.1)$$

expresso por um funcional que também pode depender explicitamente do tempo. Um exemplo de vínculo holônomo pode ser expresso considerando um sistema de duas partículas que movem-se no espaço sempre unidas por uma haste rígida. O vínculo tem a forma

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - l^2 = 0,$$

ou, de modo equivalente

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0,$$

sendo l o comprimento invariável da haste.

Vínculos que não obedecem à Eq. (1.1) são chamados de **não-holônomo**, por exemplo quando dependem também das velocidades, além das posições e do tempo. Um exemplo de um vínculo não-holônomo é um cilindro que rola sem deslizar ao longo de uma linha reta, sendo x a posição do centro de massa do cilindro e ϕ o ângulo de rotação em torno do centro de massa. A condição de rolar sem deslizar, ou seja, o vínculo, representa-se por

$$\dot{x} = R\dot{\phi},$$

em que R é o raio do cilindro [5].

1.1.2 Deslocamento e Trabalho Virtual: Vínculos Ideais

Deslocamentos virtuais são caracterizados por deslocamentos infinitesimais de cada partícula que levam de uma configuração possível a outra configuração também possível e infinitesimalmente próxima no mesmo instante de tempo. Nos casos em que todos os vínculos são independentes do tempo, os deslocamentos virtuais coincidem com os deslocamentos reais [5]. Uma representação de um deslocamento virtual é feita na Figura 1.1.

Em resumo, deslocamentos virtuais seguem as seguintes definições [6]:

- São infinitesimais.
- O instante de tempo é fixo durante o deslocamento.
- Não descumprem as condições impostas pelos vínculos.

A partir do conceito de deslocamento virtual, é possível definir o **trabalho virtual**, que provém de um deslocamento virtual provocado pela partícula sujeita à uma força de vínculo. Na maioria dos casos fisicamente interessantes, o trabalho virtual total das forças de vínculo se anula, isso por que a componente tangencial da força é nula e resta-nos apenas a componente normal da força e, uma vez que ela é perpendicular ao deslocamento, o trabalho é zero [4]. Portanto, para uma ampla gama de situações fisicamente relevantes o trabalho virtual total das forças de vínculo é nulo⁽²⁾. Desta forma, vínculos cujas forças associadas não realizam trabalho durante deslocamentos virtuais são chamados **vínculos ideais** [6].

⁽²⁾É importante ressaltar que em casos onde a força de vínculo tem componente tangencial, o trabalho não será nulo e isso constitui uma exceção.

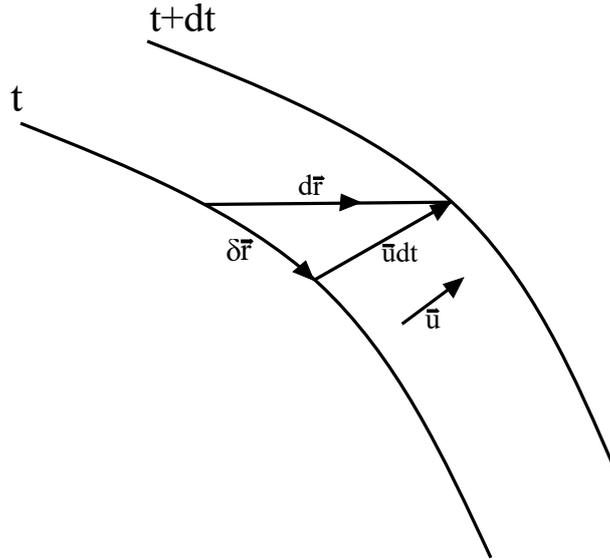


Figura 1.1: Uma superfície num instante de tempo t com um deslocamento virtual dado por $\delta\vec{r}$. O deslocamento real é representado por $d\vec{r}$ e vai da superfície em t para uma outra num instante acrescido $t + dt$.

A análise feita acima para os trabalhos virtuais devido às forças de vínculo permitem deduzir o **Princípio dos Trabalhos Virtuais**. Dada a segunda lei de Newton, da forma [3]

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

onde \vec{F}_i é a força total resultante da i -ésima partícula. Ela pode ser dividida em duas forças, a primeira como as forças aplicadas sobre o sistema e a segunda como forças de vínculo, respectivamente, como segue

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i.$$

Em uma situação estática, $\vec{F}_i = 0$, e para quaisquer deslocamentos $\delta\vec{r}_i$, temos

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (1.2)$$

decompondo a força total em termos das forças aplicadas e de vínculo, a Eq. (1.2) será

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Considerando agora apenas trabalhos virtuais realizados por forças cujos vínculos são ideais, o segundo termo da soma é zero, resultando em

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Este princípio permite escrever a condição de equilíbrio estático para sistemas vinculados em termos somente das forças aplicadas, formulado por Johann Bernoulli em 1717.

Com o conceito de trabalho e deslocamento virtual, é possível retomar o problema do cilindro que rola sem deslizar, citado anteriormente. Vemos que, de modo geral, para que não haja deslizamento é preciso que exista uma força de atrito entre o corpo e a

superfície, isto é, as superfícies em contato devem ser ásperas. Mas, ao rolar sem deslizar, em cada instante as partículas do corpo giram em torno de um eixo que passa pelo ponto de contato do corpo com a superfície. Assim, a força de atrito atua sobre um ponto do corpo que, em cada instante de tempo, possui uma velocidade nula, pois encontra-se sobre o eixo instantâneo de rotação. Uma vez que qualquer deslocamento virtual do corpo não pode mover o seu ponto de contato com a superfície, senão haveria deslizamento com a consequente violação do vínculo. O trabalho virtual da força de vínculo será

$$\delta W = \vec{f} \cdot \delta \vec{r} = 0,$$

pois $\delta \vec{r} = 0$, embora $\vec{f} \neq 0$ [5].

1.2 Princípio de d'Alembert

Vimos que vínculos ideais são aqueles nos quais o trabalho total realizado pela força de vínculo, num deslocamento virtual, é nulo. De modo que

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.3)$$

Partindo deste ponto é possível chegarmos ao Princípio de d'Alembert, que resulta da condição imposta pela Eq. (1.3). A segunda lei de Newton é da forma

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i, \quad (1.4)$$

onde a força total do sistema foi dividida entre as forças aplicadas, $\vec{F}_i^{(a)}$, e as forças de vínculo, \vec{f}_i . Isolando \vec{f}_i na Eq. (1.4), temos

$$\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)} = \vec{f}_i.$$

Multiplicando ambos os lados na equação acima por um deslocamento virtual $\delta \vec{r}_i$ e somando através de todos os possíveis deslocamentos, vem que

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i,$$

o termo à direita da igualdade anula-se devido à Eq. (1.3), resultando em

$$\sum (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.5)$$

A Eq. (1.5) é conhecida como o **Princípio de d'Alembert**⁽³⁾ [6]. Note que a Eq. (1.4) exige que as forças de vínculo sejam consideradas e, além disso, num sistema de N partículas, serão necessárias $3N$ equações para descrevê-lo, mesmo que as forças de vínculo aplicadas faça com que algumas coordenadas sejam redundantes, uma vez que o sistema precisará de um número menor de coordenadas. O que buscamos a partir de agora é uma formulação das equações de movimento que não sofra dessas duas desvantagens, ou seja, buscamos por equações de movimento onde:

- Não portem as forças de vínculo em sua formulação.
- Exija apenas o número mínimo de coordenadas para descrevê-lo, mutuamente independentes.

O objetivo agora é descrever de que modo a Eq. (1.5) possibilita encontrar as equações de movimento responsáveis pela definição de um sistema mecânico genérico.

⁽³⁾Devido à Jean le Rond d'Alembert (1717 — 1783), filósofo, matemático e físico francês.

1.3 Equações de Lagrange

Utilizando o conceito de coordenadas generalizadas (Apêndice A) e reescrevendo a Eq. (1.5) em termos das massas e dos vetores de posição das N partículas do sistema, temos

$$\sum_{i=1}^N (m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (1.6)$$

Se o vetor posição \vec{r}_i depende das coordenadas generalizadas q_k , um deslocamento virtual $\delta \vec{r}_i$ é representado da seguinte forma

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Substituindo na Eq. (1.6), vem que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (1.7)$$

O termo referente a soma em i do lado direito da igualdade é nomeado **Força generalizada** e tem a seguinte notação

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \quad (1.8)$$

Q_k não necessariamente terá dimensão de força, mas a multiplicação $Q_k \delta q_k$ sempre terá dimensão de energia [5]. Substituindo Q_k na Eq. (1.7), ela será dada por

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (1.9)$$

Note que o termo esquerdo da igualdade pode ser reescrito como

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (1.10)$$

e, neste momento, vamos fazer uma análise da derivada temporal de \vec{r}_i . Como \vec{r}_i é um vetor que depende das coordenadas generalizadas $q_k(t)$, \vec{r}_i é dependente implicitamente do tempo. Além disso, \vec{r}_i também pode depender explicitamente do tempo, de modo que sua derivada torna-se

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Portanto

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (1.12)$$

pois o único termo \dot{q}_k está multiplicando apenas o primeiro termo da soma, na Eq. (1.11). Temos ainda que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right).$$

Supondo as funções \vec{r}_i diferenciáveis o número necessário de vezes e com derivadas contínuas, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_l \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Utilizando as transformações das Eqs. (1.12) e (1.13) na Eq. (1.10), temos

$$m_i \dot{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k},$$

que também pode ser reescrita como

$$m_i \dot{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right).\tag{1.14}$$

Inserindo a expressão à esquerda da igualdade da Eq. (1.14) na Eq. (1.9) e colocando os termos em evidência, ficamos com

$$\sum_k \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right) \delta q_k = \sum_{k=1} Q_k \delta q_k.\tag{1.15}$$

Nota-se que os termos entre parênteses somados em todos os valores de i , é a energia cinética T do sistema. Além disso, como cada descolamento δq_k é arbitrário e podemos escolhê-lo de modo que todos sejam iguais a zero, exceto um, a Eq. (1.15) resulta em

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \right) = Q_k.\tag{1.16}$$

Analisando agora a força generalizada Q_k à direita da igualdade, consideremos que ela provenha de um potencial escalar que dependa apenas dos vetores de posição e do tempo, isto é, $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, t)$. Neste caso

$$\begin{aligned}Q_k &= \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= - \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q_k}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Substituindo a Eq. (1.17) na Eq. (1.16), temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial q_k} \right) = 0.\tag{1.18}$$

A inserção da Eq. (1.17) na derivada referente a \dot{q}_k pode ser feita sem perde de generalidade, uma vez que ela será sempre nula, pois Q_k dependerá apenas de q_k . Portanto, denotando $L = T - V$, a Eq. (1.18) finalmente será [6]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (1.19)$$

Essas são as **Equações de Lagrange** ⁽⁴⁾, onde $k = 1, 2, 3, \dots, n$. É fundamental compreender que as equações de Lagrange têm algumas condições para serem válidas, tais condições são as mesmas impostas para o Princípio de d'Alembert e para a segunda lei de Newton. É importante ressaltar que T e V devem ser ambas expressas relativamente a um mesmo referencial inercial, pois a segunda lei de Newton é válida apenas em referenciais inerciais [3]. Desta forma, as equações de Lagrange admitem que os vínculos tem que ser ideais, ou seja, apenas forças conservativas são consideradas, porém também será possível dar uma forma Lagrangiana considerando forças não conservativas, uma abordagem está presente no Capítulo 3. Além disso, os vínculos também tem que ser holônomos para que seja possível considerar coordenadas generalizadas ao sistema.

Em conclusão, podemos perceber que as equações de Lagrange exigem apenas as forças aplicadas no sistema, note que a energia potencial é dependente apenas das forças aplicadas, $\vec{F} = F(\vec{r})$. Logo não são consideradas as forças de vínculo. Além disso, as coordenadas generalizadas independentes entre si fornecem apenas o número necessário de variáveis para a resolução do problema e, por fim, as equações de Lagrange não usam a forma vetorial em sua formulação, admitindo apenas equações escalares para descrever todo o sistema.

1.4 Cálculo de Variações

Até o momento foram expressas as equações de Lagrange em termos de um princípio diferencial, mas também é possível reformular a lei dinâmica fundamental como um princípio integral, que tem como fundamento o cálculo de variações [6].

Resolver problemas de otimização consiste em buscar o melhor resultado considerando os pré-requisitos estabelecidos, e a área da matemática que aborda esses problemas é o **Cálculo de Variações**, que generaliza a teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial para funções cujo domínio é constituído por um conjunto de curvas admissíveis, isto é, o Cálculo de Variações procura determinar extremos (máximos ou mínimos) de um funcional [2]. Um **Funcional** é aquilo que pertence ou é relativo à funções, ou seja, é uma regra de correspondência que associa a cada função de uma certa classe, um único número real. O conjunto de todas as funções é chamada domínio de um funcional e o conjunto de números reais associados com as funções é chamado conjunto imagem de um funcional [7].

O problema primordial do cálculo variacional consiste em encontrar uma função $y(x)$ que possui valores fixos nos pontos inicial e final $x = x_1$ e $x = x_2$, respectivamente, tal que a integral de linha de uma dada função $f(y, y'; x)$ ⁽⁵⁾, é dada por

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x) dx, \quad (1.20)$$

⁽⁴⁾"Équations différentielles pour la solution de tous les problèmes de Dynamique- Obtidas por Joseph-Louis Lagrange em 1788 no seu livro *Mécanique Analytique*.

⁽⁵⁾Nesta equação, $y' \equiv dy/dx$ e o ponto-e-vírgula em f separa a variável independente x da variável dependente $y(x)$.

seja um extremo (máximo, mínimo ou um ponto de inflexão), ou seja, um ponto estacionário ou apenas um ponto crítico⁽⁶⁾. Assim, queremos encontrar $y(x)$ com valores fixos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ tal que a integral $J[y]$ seja estacionária. O problema está esboçado na figura abaixo:

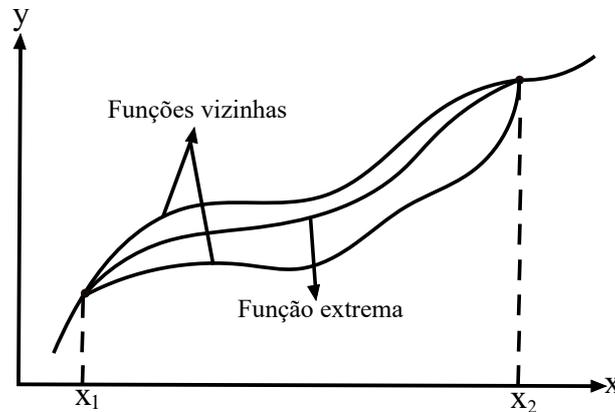


Figura 1.2: A função extrema $y(x, 0)$ é a que faz o funcional J ser um máximo ou um mínimo. As funções vizinhas $y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x)$ diferem da função extrema por uma variação δy , infinitésimas de primeira ordem.

Uma vez que $y(x)$ representa um extremo de $J[y]$, qualquer função vizinha representada parametricamente por

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x), \quad (1.21)$$

deve fazer com que o funcional aumente seu valor, onde $\eta(x)$ deve ter valor zero nos extremos, dado que $y(\alpha, x) = y(0, x)$ nos pontos finais e, portanto, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

Considerando as funções paramétricas $y(\alpha, x)$ apresentadas acima, a integral de $J[y]$ é resolvida para x , restando um funcional que dependerá apenas de α , como segue

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x] dx, \quad (1.22)$$

mas vimos que para $J[y]$ ter um valor estacionário, ele deve ser independente de α em primeira ordem ao longo do caminho, ou seja, a variação do funcional $J[y]$ em relação ao parâmetro α deve ser nula ao longo do caminho, pois a função que otimiza o funcional deve ser independente do parâmetro. Deste modo, $\alpha = 0$ para a função que buscamos, $y(x)$, temos então

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0, \quad (1.23)$$

para todos os valores de $\eta(x)$ [3].

1.5 As Equações de Euler

Para determinar o resultado da condição imposta pela Eq. (1.23) é preciso fazer a derivada da Eq. (1.22), como segue

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x] dx.$$

⁽⁶⁾Ponto no domínio de uma função onde a primeira derivada é nula.

Fazendo a derivada da função composta $f(y, y'; x)$, temos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx, \quad (1.24)$$

em que

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \text{ e } \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \eta'(x),$$

consideremos aqui que $y \equiv y(\alpha, x)$ e as derivadas foram feitas para a equação Eq. (1.21). Note que a variação de $y(\alpha, x)$ em relação à α , quando diferente de zero, nos fornece as funções paramétricas $\eta(x)$ e, quando somadas a função ideal $y(0, x)$, resultam nas funções "vizinhas", $y(\alpha, x)$. A partir disso, a Eq. (1.24) torna-se

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx. \quad (1.25)$$

Integrando por partes o segundo termo da soma na equação anterior, temos que o primeiro membro da integral anula-se, pois $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, como segue

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta'(x) dx = \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (1.26)$$

Substituindo o resultado da Eq. (1.26) na Eq. (1.25), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \end{aligned}$$

Neste momento é importante ressaltar que as funções $y(\alpha, x)$ e $y'(\alpha, x)$ ainda são dependentes de α , mas as condições impostas anteriormente explicita que a variação de J em relação a α deve desaparecer no extremo (onde $\alpha = 0$). Além disso, a condição procurada é que a integração seja nula, ou seja

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx = 0.$$

Renomeando a equação acima, temos

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0.$$

A integral será nula apenas se $M(x)$ for identicamente nula em todo o intervalo de integração⁽⁷⁾, uma vez que $\eta(x)$ é uma função arbitrária. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Deste modo, $y(\alpha, x)$ e $y'(\alpha, x)$ agora são independentes de α e esta é chamada **Equação de Euler**.⁽⁸⁾ Note que essa é uma equação diferencial de segunda ordem e é necessário

⁽⁷⁾Esta consideração provém do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, que pode ser melhor compreendido na Ref. [7].

⁽⁸⁾Deduzida por Euler em 1744. Quando aplicada a sistemas mecânicos é conhecida como equação de Euler-Lagrange.

duas constantes arbitrárias para resolvê-la. É possível escolher as constantes de modo que a curva procurada passe pelos pontos extremos, uma vez que estamos considerando uma classe de funções, todas passando por extremos fixos e queremos saber dentre elas a que extremiza o funcional J . Portanto, num problema específico, a função procurada deve passar pelos extremos pertinentes ao problema [5].

1.6 Princípio de Hamilton

Um funcional pode depender de várias funções, de modo que a Eq. (1.20) torna-se

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y_1(\alpha, x), y_2(\alpha, x), \dots, y_n(\alpha, x), y_1'(\alpha, x), y_2'(\alpha, x), \dots, y_n'(\alpha, x); x] dx,$$

e as funções paramétricas representadas anteriormente serão

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x). \quad (1.27)$$

É possível realizar a mesma análise feita na Seção 1.4 para as equações acima, porém agora surge uma soma sobre todas as funções $y_i(\alpha, x)$ e $y_i'(\alpha, x)$, como segue

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i(x) + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \eta_i'(x) \right) dx.$$

Como cada $\eta_i(x)$ é independente e arbitrário, os coeficientes entre parênteses tem que ser identicamente nulos. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0. \quad (1.28)$$

A expressão fornece uma equação de Euler para cada valor de i , onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e o número de equações irá depender de quantas funções J é dependente.

Fazendo uma mudança de notação na forma

$$\begin{aligned} y_i &\rightarrow q_i, \\ x &\rightarrow t, \\ f(y_i, y_i'; x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i; t). \end{aligned}$$

As equações (1.28) tornam-se

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Essas são as **Equações de Lagrange** de um sistema holônomo e podem ser enunciadas na forma de um princípio variacional, uma vez que precisamos considerar variações em torno da função desejada e impor que as derivadas dessas funções sejam nulas, em primeira ordem, sendo esta uma condição necessária mas não suficiente, pois o resultado nos fornece um extremo, porém não especifica se será um máximo, mínimo ou um ponto de inflexão⁽⁹⁾.

Ao funcional que está relacionado com as equações de Lagrange denotaremos por S , assim como J era o funcional em relação às funções $y(\alpha, x)$. A integral será

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t] dt. \quad (1.29)$$

⁽⁹⁾A garantia que a otimização nos dará um máximo ou um mínimo dependerá do problema proposto.

A esse funcional S chamamos de **ação** e o movimento que o sistema mecânico executa entre dois pontos fixos do espaço de configuração no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ será aquele que minimiza a ação S [5]. Esse é um princípio dinâmico, chamado **Princípio de Hamilton**, no qual é possível basear toda a mecânica e pode ser anunciado como a seguir:

"De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais."⁽¹⁰⁾

A partir da generalização das equações de Euler e do conhecimento das equações de Lagrange, é possível denotar a Eq. (1.27) como

$$q_i(\alpha, t) = q_i(0, t) + \alpha\eta_i(t). \quad (1.30)$$

Podemos introduzir uma nova notação para $\alpha\eta_i(t)$, em que

$$\alpha\eta_i(t) = \delta q_i(t). \quad (1.31)$$

Esta é a notação variacional e representa uma variação da função y , isto é, uma variação entre a função extrema e uma função vizinha, como na Figura 1.2 [3]. Com isso, temos que a Eq. (1.30) e a sua derivada temporal são, respectivamente

$$q_i(\alpha, t) = q_i(0, t) + \delta q_i(t), \quad (1.32)$$

$$\dot{q}_i(\alpha, t) = \dot{q}_i(0, t) + \delta \dot{q}_i(t). \quad (1.33)$$

Por definição $\delta \dot{q}_i(t) = d\delta q_i(t)/dt$, e a variação do funcional S será

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt,$$

e uma integração por partes no segundo membro entre parênteses é feita de maneira análoga a integração presente em (1.26), resultado em uma variação δS da forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Como a variação do funcional deve ser nula para um extremo e como cada δq_i deve ser arbitrário, temos as equações de movimento de Lagrange escritas em função das coordenadas generalizadas para o sistema

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (1.34)$$

Em vista disso, através do Princípio de Hamilton, é possível enunciar as leis da Mecânica de modo independente do sistema de coordenadas adotado. Outras leis da física também são descritas na forma de um princípio variacional, de modo que para cada teoria física existe uma quantidade que faz o papel da ação, tal que as equações que descrevem as leis físicas daquele ramo específico estudado são equações provenientes da afirmação que uma certa quantidade, que faz o papel da ação, é mínima [5].

⁽¹⁰⁾Em dois artigos publicados em 1834 e 1835, Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865) anunciou o princípio dinâmico.

Capítulo 2

Dinâmica de Hamilton

Este capítulo tem como objetivo estruturar uma outra forma, tendo como ponto de partida a mecânica formulada por Lagrange, para as equações de movimento de um sistema, dada pelas equações de Hamilton. Em seguida, assim como foi feito para as equações de Lagrange, demonstrar a forma variacional das equações de Hamilton. A segunda parte deste capítulo se baseia em uma introdução sobre as transformações canônicas e a teoria de Hamilton-Jacobi, usadas no Capítulo 3 em uma aplicação na Mecânica Quântica.

2.1 Equações canônicas do movimento

Buscamos neste momento equações que procuram substituir as n equações diferenciais de 2ª ordem no tempo, isto é, as equações de Lagrange, onde $L(q, \dot{q}; t)$, por equações diferenciais de 1ª ordem no tempo, mas que agora dependam de $2n$ variáveis, dadas por $H(q, p; t)$. Para isto, o procedimento adotado por Hamilton provém da substituição das velocidades pelos momentos canônicos conjugados, definidos por [3]

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.1)$$

lembrando que $q = q_1, \dots, q_n$ e $p = p_1, \dots, p_n$. Essas equações podem ser resolvidas para as velocidades generalizadas⁽¹⁾, \dot{q}_i , ou seja, é possível resolver as n equações para os momentos canônicos conjugados encontrando as n velocidades generalizadas e, a partir desse resultado realizar a substituição das variáveis (q, \dot{q}) por (q, p) e a função que contém essas variáveis será $H(q, p, t)$, chamada de Hamiltoniana e definida por [4]

$$H(q, p; t) = \sum_{i=1}^n [p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i; t)]. \quad (2.2)$$

Com a afirmação de que a Eq. (2.1) pode ser resolvida, as equações para as velocidades serão $\dot{q}_i = f_i(q, p, t)$ e os termos referentes às coordenadas generalizadas presente à direita da igualdade sempre são substituídos por $f_i(q, p, t)$. Portanto, temos uma mudança nas variáveis das quais a Eq. (2.2) dependerá e também a adição de uma nova função que será substituída na Hamiltoniana sempre que esta estiver em termos de uma velocidade generalizada⁽²⁾.

⁽¹⁾A garantia desta afirmação é feita pelo teorema da função implícita [8].

⁽²⁾A transformação que leva do conjunto de variáveis (q, \dot{q}) em um novo conjunto de variáveis (q, p) e, ao mesmo tempo, de $L(q, \dot{q}; t)$ para $H(q, p; t)$ é chamada Transformação de Legendre. [6]

Tomando a diferencial da Eq. (2.2):

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i (p_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Das equações de Lagrange, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

e usando a Eq. (2.1) na equação acima, a diferencial torna-se

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.3)$$

A diferenciação da Eq. (2.2) também pode ser feita formalmente:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.4)$$

Comparando a Eq. (2.3) com a Eq. (2.4), chegamos às seguintes igualdades:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.5)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.7)$$

As Eqs. (2.5), (2.6) e (2.7) são conhecidas como equações de Hamilton ou equações canônicas de Hamilton [6]. Este é um sistema de equações equivalente às equações de Lagrange, mas expresso de uma forma diferente para representar as equações que governam o movimento do sistema. Além disso, a Eq. (2.7) nos informa que se a lagrangiana não depender do tempo explicitamente, a hamiltoniana também não dependerá.

É importante ressaltar que as equações de Hamilton são equivalentes às equações de Lagrange, porém enquanto as equações de Lagrange são de segunda ordem e consideram as posições e velocidades generalizadas, as equações de Hamilton são reduzidas à equações de primeira ordem e, como consequência, uma outra variável é adicionada à hamiltoniana, de forma que agora ela é expressa em termos das coordenadas generalizadas, do momento canônico conjugado e também podendo depender explicitamente do tempo.

É possível agora buscar um significado físico para a Hamiltoniana, para isso, tomando a expressão para a lagrangiana:

$$L = T - V, \quad (2.8)$$

supomos que V não dependa das velocidades e T é uma função puramente quadrática das velocidades. Então a Eq. (2.2) será

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) - (T - V) \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - V). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mas, pelo teorema de Euler das funções homogêneas [6]:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T,$$

e, portanto, a Eq. (2.9) será

$$H = T + V, \quad (2.10)$$

ou seja, para a grande maioria das situações a hamiltoniana representará a energia total do sistema [5].

Portanto, de acordo com o problema, são escolhidas as coordenadas generalizadas a serem usadas e a lagrangiana correspondente. Após, as equações que envolvem o momento canônico conjugado e as velocidades são resolvidas para encontrar as velocidades generalizadas como funções de (q, p, t) e, com essas informações, constrói-se a hamiltoniana para o problema. Por fim, as equações de Hamilton são obtidas e descrevem todo o movimento do sistema.

2.2 Equações de Hamilton: Formulação Variacional

A formulação variacional das equações de Hamilton baseia-se na formulação variacional das equações de Lagrange. Sabemos que as equações de Lagrange obedecem ao seguinte princípio variacional:

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0,$$

com variações nulas nos extremos temporais, isto é, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ com $i = 1, \dots, n$. Porém, a hamiltoniana dada pela Eq. (2.2) pode ser expressa em termos da seguinte diferença:

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t). \quad (2.11)$$

Isto sugere que as equações de Hamilton podem ser obtidas do princípio variacional

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0. \quad (2.12)$$

Impondo a variação na equação entre colchetes, temos

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = 0. \quad (2.13)$$

Assim como na formulação lagrangiana, procuramos colocar todos os termos em função de uma variação na coordenada de posição δq_i e, neste caso, também em função de uma variação nos momentos, δp_i . Para isto, é possível realizar uma integração por partes no termo que contém a derivada temporal na coordenada q_i , da seguinte forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt.$$

Pelo mesmo argumento usado na Seção 1.5, o primeiro termo à direita da igualdade é zero devido à variação nula nos extremos temporais. Deste modo, a Eq. (2.13) será

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] = 0.$$

Se cada δq_i e δp_i é arbitrário e independente, chegamos novamente às equações de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} &= 0, \\ \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} &= 0.\end{aligned}$$

Como conclusão, chegamos à confirmação que se escrevermos a ação em termos da Hamiltoniana e se estabelecermos que a variação da ação é zero sob variações arbitrárias dos q_s e p_s , com a imposição que as variações nos extremos temporais sejam nulas, chegamos às equações de Hamilton decorrentes de um princípio variacional.

2.3 Transformações Canônicas

2.3.1 Transformações canônicas e Funções Geradoras

No formalismo lagrangiano as equações de movimento são invariantes sob qualquer mudança de coordenadas generalizadas [5], por exemplo, uma transformação do tipo

$$q_i \rightarrow Q_i,$$

nos fornece agora uma lagrangiana dependente da variável transformada, onde

$$L(q, \dot{q}; t) \rightarrow L(Q, \dot{Q}; t),$$

de modo que as equações de Lagrange continuam da mesma forma [4].

Agora, no formalismo hamiltoniano as coordenadas são independentes, de forma que podemos buscar transformações, restringindo-nos à mudanças que preservam a forma das equações de movimento de Hamilton. Desta maneira, dadas as equações como em (2.5) e (2.6), buscamos transformações do tipo:

$$Q_i = Q_i(q, p; t), \tag{2.14}$$

$$P_i = P_i(q, p; t). \tag{2.15}$$

De modo que exista uma função, chamando-a de K , denotada também por hamiltoniana transformada, que fará o papel da hamiltoniana em termos das variáveis transformadas (2.14) e (2.15) e as equações de Hamilton agora são expressas por [5]

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.$$

Se o princípio variacional dado por (2.12) é válido para as variáveis (q, p, t) , por hipótese podemos também deferir a validade do mesmo princípio para as variáveis (Q, P, t) :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) dt = 0. \tag{2.16}$$

Uma vez que as variáveis transformadas preservam a forma hamiltoniana, podemos verificar a validade do princípio afirmando que a expressão entre parênteses da Eq. (2.16)

difere da expressão entre parênteses da Eq. (2.12) apenas por uma derivada temporal exata, isto é

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) + \frac{d\phi}{dt},$$

em que $\phi = \phi(q, p, t)$. Tomando a integral em ambos os termos da igualdade acima e analisando-a para $\phi(q, p, t)$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \phi[q(t_2), p(t_2); t_2] - \phi[q(t_1), p(t_1); t_1],$$

mas, por definição, os extremos temporais para as coordenadas e momentos são nulos, de modo que a integral acima é zero e o princípio variacional se aplica também às variáveis transformadas. Assim, podemos definir uma variável reversível, onde $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, dada por (2.14) e (2.15) como sendo canônica se, e somente se, existem funções $\phi(q, p, t)$ e $K(Q, P; t)$, tal que vale a equação

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\phi, \quad (2.17)$$

escrita na sua forma diferencial [6]. Suponha que possamos resolver as equações (2.14) para todos os momentos canônicos, com isso

$$p_i = f_i(q, Q, t), \quad (2.18)$$

em que, mais uma vez, f_i é uma solução possível. Desta forma, podemos substituir (2.18) em (2.15), de modo que P_i seja

$$P_i = P_i(Q, q, t).$$

Definindo a função $F_1(q, Q; t)$ por

$$F_1(q, Q; t) = \phi[q, p(q, Q; t); t],$$

a equação que define a transformação canônica será

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = dF_1. \quad (2.19)$$

A equação acima nos fornece as seguintes igualdades:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (2.20)$$

e o termo que acompanha a diferencial em relação ao tempo na Eq. (2.17) fica na forma

$$K(Q, P; t) = H(q, p; t) + \frac{dF_1}{dt}. \quad (2.21)$$

Portanto, (2.20) e (2.21) nos fornecem a transformação canônica das variáveis minúsculas (q, p) para as variáveis maiúsculas (Q, P) e F_1 é a chamada **função geradora da transformação canônica** [5].

Podemos buscar outro tipo de função geradora, desta vez supomos que podemos tomar (q, P) como variáveis independentes, de modo que

$$\sum_i P_i dQ_i = d\left(\sum_i Q_i P_i\right) - \sum_i Q_i dP_i.$$

Substituindo o termo à esquerda, da equação acima, em (2.17), temos

$$\sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (K - H)dt = d \left(\sum_i Q_i dP_i + \phi[q_i, p(q_i, P_i; t)] \right), \quad (2.22)$$

em que

$$\sum_i Q_i dP_i + \phi[q_i, p(q_i, P_i; t)] = F_2, \quad (2.23)$$

e F_2 é um outro tipo de função geradora [6]. Logo, das Eqs. (2.22) e (2.23), podemos concluir que

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (2.24)$$

e a nova hamiltoniana será

$$K(Q, P; t) = H(q, p; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Logo, dada uma função F_2 , as Eqs. (2.24) e (2.25) definem uma transformação canônica, determinam a transformação de variáveis e a hamiltoniana transformada.

À vista disso, o objetivo de utilizar uma transformação canônica é facilitar a resolução das equações de Hamilton e, note que, por conta da forma original da definição de transformação canônica (Eq.(2.17)), sempre aparecem diferenciais em relação às variáveis antigas e novas. Logo, F_1 e F_2 também são funções de ambas as variáveis ⁽³⁾ [5].

2.3.2 Colchetes de Poisson

Suponha que estejamos usando variáveis canônicas (q, p) cuja hamiltoniana associada seja $H(q, p, t)$, de modo que as equações de Hamilton são da forma (2.5) e (2.6). Chamando uma função qualquer das variáveis canônicas e podendo depender explicitamente ou não do tempo, $F(q, p, t)$, estamos interessados em encontrar a variação de $F(q, p, t)$ com o tempo. Para isso, tomando a derivada total da função $F(q, p, t)$ em relação ao tempo, temos

$$\frac{dF}{dt} = \sum_l \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Usando as equações de Hamilton, (2.5) e (2.6), e substituindo na equação acima, ficamos com

$$\frac{dF}{dt} = \sum_l \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Os colchetes de Poisson de duas variáveis dinâmicas $F(q, p, t)$ e $G(q, p, t)$ são, por definição [5]

$$\{F, G\}_{(q,p)} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right), \quad (2.28)$$

e a Eq. (2.26) será

$$\frac{dF}{dt} = \{F, G\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.29)$$

A partir dessa definição, é possível escrever as equações de Hamilton através dos colchetes de Poisson. Se $F = q_i$ e, em seguida, $F = p_i$ temos, respectivamente

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\},$$

⁽³⁾Existem outros tipos de funções geradoras, mas que não conceituaremos neste trabalho [6].

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\},$$

em que q_i e p_i não dependem explicitamente do tempo e, neste caso, a função G será a hamiltoniana. Os colchetes de Poisson podem ser calculados tanto em função das variáveis originais, quanto em função das variáveis transformadas, desde que a transformação seja canônica. Isto é, qualquer conjunto de variáveis dinâmicas ligadas entre si através de uma transformação canônica geram o mesmo resultado para o colchetes de Poisson. [5].

É possível relacionar as transformações canônicas com os colchetes de Poisson. Assim, na notação tradicional, usando as variáveis originais como sendo (q, p) e as variáveis transformadas como sendo (Q, P) , uma transformação será canônica se, e somente se [6]

$$\begin{aligned}\{Q_i, Q_j\}_{(q,p)} &= 0, \\ \{P_i, P_j\}_{(q,p)} &= 0, \\ \{Q_i, P_j\}_{(q,p)} &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Transformações que não sejam canônicas não irão nos interessar, uma vez que não preservam a forma hamiltoniana das equações de movimento.

A importância das transformações canônicas está em, por uma escolha adequada de variáveis canônicas, conseguirmos simplificar a função hamiltoniana e, conseqüentemente, simplificarmos as equações de movimento. Com isso, podemos resolver as equações de movimento simplificadas para as variáveis transformadas e depois voltar para as variáveis originais, pela transformação inversa.

Os colchetes de Poisson apresentam algumas propriedades. Dadas três variáveis dinâmicas A, B e C , tem-se [5]:

- Antissimetria: $\{A, B\} = -\{B, A\}$.
- Linearidade: $\{\alpha_1 A + \alpha_2 B, C\} = \alpha_1 \{A, C\} + \alpha_2 \{B, C\}$, com α_1 e α_2 independentes dos q_s e p_s .
- $A\{B, C\} = \{AB, C\} + \{A, CB\}$.
- Identidade de Jacobi: $\{\{A, B\}, C\} = \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$, para qualquer trio de variáveis dinâmicas.⁽⁴⁾

2.3.3 Transformações Canônicas Infinitesimais

Estamos interessados em estudar transformações canônicas que diferem ligeiramente da transformação identidade [5]

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i,$$

de modo que as novas coordenadas só diferem das coordenadas originais por pequenas quantidades e, de forma análoga, para os momentos. Com isso, temos [5]

$$Q_i = q_i + \epsilon f_i = q_i + \delta q_i, \quad (2.30)$$

$$P_i = p_i + \epsilon g_i = p_i + \delta p_i, \quad (2.31)$$

em que $f_i \equiv f_i(q, p, t)$, $g_i \equiv g_i(q, p, t)$ e ϵ considerado como um parâmetro infinitesimal⁽⁵⁾. Como condição para que uma transformação seja canônica, usamos a Eq. (2.17),

⁽⁴⁾Na Mecânica Quântica, o comutador de dois operadores também satisfaz estas quatro propriedades [9]. Num processo de quantização canônica, através dos colchetes de Poisson passa-se de maneira mais imediata de uma teoria clássica para uma teoria quântica correspondente.

⁽⁵⁾O acréscimo dado à coordenada q_i também pode ser denotado por δq_i , como na Seção 1.6.

considerando um tempo fixo

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) = d\phi, \quad (2.32)$$

lembrando que $\phi \equiv \phi(q, p, t)$.

Buscamos então qual a forma que as funções f_i e g_i devem ter para que a transformação seja canônica e infinitesimal. Pra isto, vamos substituir (2.30) e (2.31) em (2.32), ficando com

$$\sum_{i=1}^n [p_i dq_i - (p_i + \epsilon g_i)(dq_i + \epsilon df_i)] = d\phi.$$

Ignorando termos de ordem igual ou superior a dois e considerando que $p_i df_i = d(p_i f_i) - f_i dp_i$, a equação acima transforma-se em

$$\sum_{i=1}^n (\epsilon f_i dp_i - \epsilon g_i dq_i) - d\left(\sum_{i=1}^n \epsilon p_i f_i\right) = d\phi. \quad (2.33)$$

Tendo em vista que a função $\phi(q, p, t)$ será proporcional à uma função $F(q, p, t)$ ou seja, $\phi(q, p, t) = \epsilon F(q, p, t)$. A Eq. (2.33) torna-se

$$\sum_{i=1}^n (f_i dp_i - g_i dq_i) = dG, \quad (2.34)$$

em que $G(q, p, t) = F(q, p, t) + \sum_{i=1}^n p_i f_i(q, p, t)$ e chamada de **função geradora da transformação canônica infinitesimal**.

Portanto, da Eq. (2.34), podemos concluir que:

$$f_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad (2.35)$$

$$g_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (2.36)$$

A transformação em Q_i e P_i é uma transformação canônica infinitesimal se, e somente se, existe uma função geradora $G(q, p, t)$ de tal maneira que as funções f_i e g_i são dadas por (2.35) e (2.36) [6].

Escrevendo as funções acima em termos dos colchetes de Poisson, usando a Eq. (2.28)

$$\{q_i, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_i},$$

$$\{p_i, G\} = -\frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Logo, as variações infinitesimais das coordenadas e momentos para uma transformação canônica podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\delta q_i = \epsilon \{q_i, G\}, \quad (2.37)$$

$$\delta p_i = \epsilon \{p_i, G\}. \quad (2.38)$$

A partir dessa análise, tomando a função geradora G como sendo a hamiltoniana, podemos investigar qual a transformação canônica gerada por $H(q, p, t)$ e qual o significado da transformação. Logo, vamos considerar $G(q, p, t) = H(q, p, t)$ e $\epsilon = dt$ ⁽⁶⁾, e as expressões (2.37) e (2.38) serão

$$\delta q_i = dt\{q_i, H\} = dt\dot{q}_i,$$

$$\delta p_i = dt\{p_i, H\} = dt\dot{p}_i.$$

À vista disso, as expressões para as variáveis transformadas (2.30) e (2.31) ficarão na forma

$$Q_i(t) = q_i + dt\dot{q}_i = q_i(t + dt),$$

$$P_i(t) = p_i + dt\dot{p}_i = p_i(t + dt).$$
⁽⁷⁾

A conclusão que pode ser feita a partir das novas variáveis é que, tomando a hamiltoniana como a função geradora para a transformação canônica, $H(q, p, t)$ leva os valores das coordenadas e momentos num instante de tempo t para seus valores num instante de tempo posterior $t + dt$. Isto é, a hamiltoniana gera a evolução temporal do sistema como uma sucessão de transformações canônicas infinitesimais [5].

Lembrando que $\phi = \epsilon F$, no caso em que temos $G = H$, vem que

$$F = H - \sum_i p_i \dot{q}_i = H - \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Comparando com a Eq. (2.2), a hamiltoniana, o termo à direita da igualdade, a menos de um sinal, é a lagrangiana. Portanto, considerando $\epsilon = dt$,

$$d\phi = -Ldt.$$

Isto é, a transformação canônica que leva o sistema do seu estado inicial t_0 até seu estado final no instante t será

$$\phi = - \int_{t_0}^t Ldt,$$

e, da mesma forma, a transformação canônica do estado no instante t até um instante fixo t_0 será

$$\phi = \int_t^{t_0} Ldt = S,$$

em que S representa a ação, como visto na Eq. (1.29). Isto significa que, se encararmos a ação como uma função geradora da transformação canônica, temos que a ação faz com que levemos o sistema de coordenadas (Q, P) ⁽⁸⁾ em um instante de tempo qualquer para as coordenadas transformadas (q, p) em um instante de tempo fixo. Ou seja, a ação faz com que agora as coordenadas sejam independentes no tempo e, portanto, a hamiltoniana é identicamente zero, uma vez que suas derivadas serão todas nulas e suas equações tenham constantes como resultados [6].

⁽⁶⁾A dimensão deste parâmetro dependerá da natureza da transformação. Por exemplo, se a transformação for uma rotação infinitesimal, ϵ será um ângulo infinitesimal de rotação.

⁽⁷⁾A segunda igualdade é correta pois consideramos termos até primeira ordem no tempo.

⁽⁸⁾Pois tomamos a inversa da transformação canônica em ϕ . Portanto, agora a transformação será a inversa, ou seja, de (Q, P) para (q, p) .

2.4 Teoria de Hamilton-Jacobi

2.4.1 Integral completa da Equação de Hamilton-Jacobi

O método onde se constrói a teoria de Hamilton-Jacobi se baseia na busca de uma transformação canônica que seja capaz de tornar a hamiltoniana transformada identicamente nula. Suponha que sejamos capazes de encontrar uma transformação canônica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ com a propriedade de fazer com que a hamiltoniana transformada seja identicamente nula, isto é

$$K(Q, P, t) = 0,$$

e as equações de Hamilton transformadas serão

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0,$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0.$$

Mas como, por hipótese, a nova hamiltoniana $K(Q, P, t) = 0$, as soluções para as coordenadas transformadas serão, respectivamente

$$Q_i = \beta_i,$$

$$P_i = \alpha_i,$$

em que β_i, α_i são constantes arbitrárias. Considerando a transformação canônica inversa, resultando nas variáveis originais em função das novas, temos

$$q_i = q_i(Q, P, t) \rightarrow q_i(t) = q_i(\beta, \alpha, t),$$

$$p_i = p_i(Q, P, t) \rightarrow p_i(t) = p_i(\beta, \alpha, t).$$

Note que nos restam funções dependentes do tempo e de $2n$ constantes arbitrárias que podem ser fixadas pelas condições iniciais, sendo soluções das equações de Hamilton [5].

Para saber qual as equações que uma função geradora dessa transformação deve satisfazer, consideremos uma função geradora do tipo $F_2(q, P, t)$ ⁽⁹⁾, também denotada por $S(q, P, t)$, notação que carregaremos daqui em diante. Para uma função geradora deste tipo, as equações de transformação usadas serão

$$\sum_i Q_i dP_i + \phi[q_i, p(q_i, P_i; t)] = F_2,$$

e a hamiltoniana transformada será

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Como queremos que ela seja identicamente nula,

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{2.39}$$

⁽⁹⁾Como visto na Seção 2.3.

Substituindo $p_i = \partial S / \partial q_i$, como na Eq. (2.24) para o tipo de transformação dada pela função F_2 , na equação acima, temos

$$\sum_i \left[H \left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t \right) \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (2.40)$$

esta é uma equação diferencial parcial de primeira ordem em $n + 1$ variáveis, isto é, soma dos n valores de q mais o tempo, e conhecida como a **Equação de Hamilton-Jacobi** [5]. Com isso, se for possível resolver esta equação, fica determinada uma transformação canônica que anula a nova hamiltoniana e, por fim, temos a solução completa das equações de Hamilton para as variáveis originais [6].

É necessário ressaltar que, uma vez que encontramos a função geradora S , estamos interessados em soluções da equação diferencial particulares contendo n constantes não-aditivas. Isto por que a Eq (2.40) não contém diretamente a função S , mas apenas as suas derivadas. Isto significa que, se S é solução, então S acrescida de uma constante também será uma solução da equação diferencial. Portanto, acrescentar uma constante à S não modifica a transformação canônica e as soluções possíveis encontradas envolvem n constantes não-aditivas.

Em resumo, suponha que se tenha uma solução para as equações de Hamilton-Jacobi da forma

$$F_2(q_i, P_i, t) \equiv S(q_i, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t),$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são n constantes de integração não-aditivas, arbitrárias e independentes. Uma solução desse tipo é chamada de **Integral Completa** das equações de Hamilton-Jacobi [5]. Fazendo a identificação $\alpha_i = P_i$, as equações de transformação

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}, \quad (2.41)$$

são soluções das equações de Hamilton⁽¹⁰⁾ e podemos concluir que, ao resolver a equação de Hamilton-Jacobi estamos obtendo ao mesmo tempo uma solução do problema mecânico [6].

2.4.2 Separação de Variáveis

Tipicamente, o método de Hamilton-Jacobi funciona quando somos capazes, por separação de variáveis, de encontrar uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi⁽¹¹⁾.

Suponha que a hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo, ou seja, $H \equiv H(q, p)$. Neste caso, a equação de Hamilton-Jacobi é dada por

$$H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.42)$$

Separando S como uma soma de termos que dependam apenas da posição e termos que dependam apenas do tempo, temos

$$S = W(q_1, \dots, q_n) + T(t). \quad (2.43)$$

⁽¹⁰⁾A garantia de que a função S constitui uma solução completa para as equações de Hamilton é garantida pelo Teorema de Jacobi.

⁽¹¹⁾É também possível, por transformações de coordenadas, passar de uma equação que não era separável para uma equação de Hamilton-Jacobi separável [5].

Substituindo (2.43) em (2.42), ficamos com

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Como ambos os termos são independentes, eles tem que ser igual à uma constante, uma vez que, uma variação da posição não alteraria o valor da derivada temporal e a igualdade, portanto, não seria satisfeita. Diante disso, considerando que

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha,$$

em que $\alpha = \text{constante}$. A Eq. (2.43) torna-se

$$S = W(q_1, \dots, q_n) - \alpha t. \quad (2.44)$$

Note que agora resta-nos resolver a equação diferencial que depende apenas de $W(q)$, já que a parte temporal está resolvida⁽¹²⁾.

2.4.3 Relação Entre a Integral Completa e a Ação

Como analisado na Seção 2.3.3, a ação desempenha o papel de função geradora da transformação canônica infinitesimal, que leva o sistema de um estado em um tempo genérico t para um estado em um tempo fixo t_0 . Como consequência disso, as variáveis canônicas transformadas são independentes do tempo e, portanto, a hamiltoniana para esse estado é identicamente nula. Diante disso, a ação realiza uma transformação canônica com as mesmas propriedades que a integral completa da equação de Hamilton-Jacobi e é possível buscar uma relação entre ambas⁽¹³⁾.

Fazendo a derivada total da integral completa $S(q, \alpha, t)$,

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t},$$

como $p_i = \partial S / \partial q_i$, de acordo com a Eq. (2.24) e $\partial S / \partial t = -H$ conforme (2.39), temos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L.$$

Com isso

$$S = \int L dt, \quad (2.45)$$

em que, a menos de uma constante aditiva, quando a integral completa S é vista como em função do tempo, qualquer $S(q, \alpha, t)$ da equação de Hamilton-Jacobi coincide com a ação, isto é, a integral no tempo da lagrangiana [5]. É possível considerar a Eq. (2.45) como em função das coordenadas, com o objetivo de construir uma função $S(q, t)$ que represente a ação como função das coordenadas.

Vamos considerar, no espaço de configuração, uma configuração $q(0)$ onde o tempo é considerado fixo, e uma outra configuração $q(t)$ em que o tempo não é fixo. Uma representação é feita na Figura 2.1.

⁽¹²⁾Quando a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, α é o valor constante da hamiltoniana e a energia do sistema [5].

⁽¹³⁾Isso implica o uso da mesma notação para ambas as quantidades.

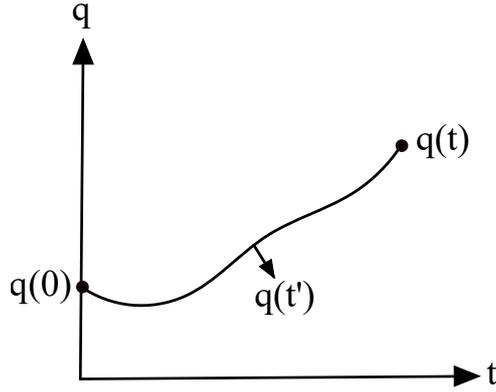


Figura 2.1: Configuração fixa em $q(t = 0)$ e uma outra configuração em um instante de tempo qualquer $q(t)$.

Em que $q(t')$ é a trajetória física que liga $q(t = 0)$ até $q(t' = t)$. Com essa consideração, a Eq. (2.45) pode ser escrita como

$$S(q, q_0, t) = \int_0^t L(q(t'), \dot{q}(t'); t') dt'. \quad (2.46)$$

A expressão acima é a ação como função das coordenadas e também chamada de **Função Principal de Hamilton** [6]. Se fixarmos uma configuração q_0 em $t = 0$, podemos obter a ação como função das coordenadas de uma outra configuração qualquer, num instante t , integrando ao longo da trajetória física.

Queremos mostrar que $S(q, q_0, t)$ é uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi. Para isso, vejamos como S varia em relação à q , mantendo t fixo:

$$\delta S = \int_0^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt'. \quad (2.47)$$

Considerando que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i,$$

a Eq. (2.47) torna-se

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^t \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt' + \int_0^t \sum_i \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt' \\ &= \int_0^t \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt' + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_0^t. \end{aligned}$$

O primeiro termo à direita da igualdade é zero pois satisfaz as equações de Lagrange. Restando apenas

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i, \quad (2.48)$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (2.49)$$

Vejamos agora como S varia em função do tempo. Da Eq. (2.46), temos

$$\frac{dS}{dt} = L(q, \dot{q}; t). \quad (2.50)$$

Mas a derivada total de $S(q, q_0, t)$ também pode ser expressa como

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.51)$$

Igualando (2.50) e (2.51), ficamos com

$$\sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = L(q, \dot{q}; t),$$

$$[\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}; t)] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

em que usamos a relação dada pela Eq. (2.49) para p_i . O termo entre colchetes é a Eq. (2.2), isto é, a hamiltoniana do sistema. Por fim, a expressão torna-se

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Este resultado nos mostra que a função $S(q, q_0, t)$ gera uma transformação canônica que reduz as variáveis transformadas em constantes de movimento, isto é, não dependem explicitamente do tempo, em que $S(q, q_0, t)$ é solução completa das equações de Hamilton. A função principal de Hamilton produz uma integral completa, onde q_0 fazem o papel de α , vistos anteriormente [6].

O trabalho daqui em diante se baseará na aplicação do formalismo apresentado até aqui para alguns ramos da Física, com o objetivo de mostrar e discutir como a dinâmica Lagrangiana e Hamiltoniana é capaz de descrever uma variedade de problemas físicos.

Capítulo 3

Aplicações

Este capítulo tem como objetivo usar os conceitos vistos anteriormente para a aplicação em três exemplos diferentes. Primeiramente foi construída a lagrangiana para uma corda vibrante e, após, encontrada a equação de Lagrange para o sistema. Em seguida, o sistema analisado foi uma partícula em um campo eletromagnético externo, encontrando a lagrangiana e a hamiltoniana para o problema, além da equação de Lagrange e das equações de Hamilton. Por fim, os conceitos introdutórios finais estudados neste trabalho foram aplicados como um exemplo da influência da equação de Hamilton-Jacobi e pela relação feita por Hamilton entre a mecânica clássica e a óptica geométrica para a mecânica quântica, devido à Schrödinger.

3.1 Mecânica Clássica: A Corda Vibrante

Considere uma corda de comprimento l no plano zx e que está fixa em suas extremidades $x = 0$ e $x = l$, a corda pode movimentar-se verticalmente ao longo da direção z e sua propagação será ao longo da direção x , de modo que a posição em cada ponto da corda e em cada instante é determinada por uma função $z \equiv z(x, t)$, isto é, z dependerá da posição de cada ponto da corda ao longo do eixo x e em cada instante de tempo t . As coordenadas generalizadas para este problema serão $q_1 = x$ e $q_2 = z$ e uma representação é feita na Figura 3.1.

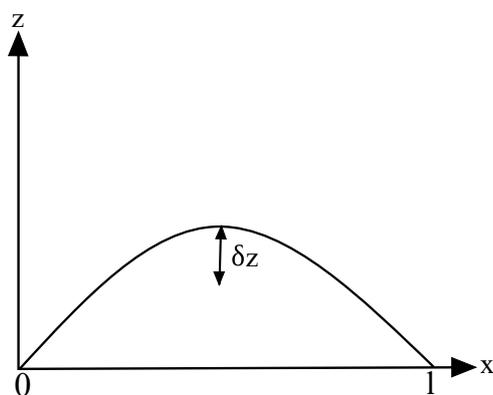


Figura 3.1: Plano zx contendo a corda, cujo comprimento vai de $x_1 = 0$ até $x_2 = l$. A variação δz indica que a corda movimentar-se em z , com propagação ao longo do eixo x .

Considerando λ como sendo a densidade linear da corda e dx um comprimento infini-

tesimal ao longo do eixo x , um elemento de massa da corda pode ser definido como

$$dm = \lambda dx.$$

A equação da onda unidimensional para uma corda vibrante cuja as extremidades são fixas será

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde λ/τ é o quadrado da velocidade de propagação [10]. A função $z(x, t)$ pode ser expressa como uma série de Fourier, na forma

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \text{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right). \quad (3.2)$$

Realizando as segundas derivadas em relação à posição e ao tempo na equação acima, temos, respectivamente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k(t) \text{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{q}_k(t) \text{sen} \left(\frac{k\pi}{l} x \right). \quad (3.4)$$

Substituindo as derivadas expressas por (3.3) e (3.4) em (3.1) e rearranjando os termos, a expressão para a equação da onda torna-se

$$\ddot{q}_k(t) + \frac{\tau}{\lambda} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k(t) = 0. \quad (3.5)$$

Com isso, o objetivo deste exemplo é chegar na mesma expressão dada pela equação da onda, como escrita acima, porém usando a dinâmica lagrangiana. Para isto, lembrando que a lagrangiana será a diferença entre a energia cinética e potencial, começaremos encontrando qual será a energia cinética, calculada por [4]

$$T = \int_0^l \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (3.6)$$

onde a massa da corda é expressa como uma integral ao longo de todo o comprimento da corda, vezes a sua densidade linear λ . Fazendo a derivada da Eq. (3.2) em relação ao tempo, temos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} [\dot{q}_k(t)]^2 \text{sen}^2 \left(\frac{k\pi}{l} x \right).$$

Substituindo este resultado na Eq. (3.6), resta-nos resolver uma integral ao longo de todo o comprimento da corda, dada por

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{2} [\dot{q}_k(t)]^2 \int_0^l \text{sen}^2 \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx,$$

mas

$$\int_0^l \text{sen}^2 \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx = \frac{l}{2}. \quad (3.7)$$

Com isso, a expressão para a energia cinética será [4]

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{2} [\dot{q}_k(t)]^2 \frac{l}{2}.$$

Rearranjando os termos, a energia cinética para uma corda vibrante unidimensional consistirá em

$$T = \frac{\lambda l}{4} \sum_{k=1}^{\infty} [\dot{q}_k(t)]^2,$$

onde podemos concluir que o problema se passa como se tivéssemos infinitas partículas de massa $\lambda l/2$, cada em uma posição $q_k(t)$ em um instante de tempo.

Para o cálculo da energia potencial, iremos usar o conceito de força generalizada, abordada no Capítulo 1, onde a força depende apenas das coordenadas, como é o caso deste problema. E, para isto, precisamos encontrar uma expressão como na Eq. (1.8). O trabalho virtual gerado por um deslocamento $\delta \vec{r}$ de um elemento da corda de comprimento dx será

$$\delta W = \int d\vec{F} \cdot \delta \vec{r}.$$

Temos que o deslocamento é dado na direção z , ou seja, $\delta \vec{r} = \delta z \hat{z}$ e, além disso, a equação da onda permite escrever a aceleração em termos da força aplicada e da derivada em relação à posição, dada por

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\lambda} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Como $d\vec{F}$ será

$$d\vec{F} = \lambda dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \hat{z},$$

o trabalho virtual resultante tem a forma

$$\delta W = \tau \int_0^l dx \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \delta z. \quad (3.8)$$

Lembrando que a segunda derivada em relação à posição é dada como na Eq. (3.3) e um deslocamento virtual em z será um deslocamento virtual de cada coordenada δq_k ao longo da corda, escrito como

$$\delta z = \sum_{k=1}^{\infty} \delta q_k \text{sen} \left(\frac{k\pi x}{l} \right). \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. (3.3) e a Eq. (3.9) na Eq. (3.8), ficamos com

$$\delta W = -\tau \int_0^l dx \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k \text{sen} \left(\frac{k\pi x}{l} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \delta q_p \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{l} \right).$$

Isolando os termos a integrar, temos

$$\delta W = -\tau \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k \sum_{p=1}^{\infty} \delta q_p \int_0^l \text{sen} \left(\frac{k\pi x}{l} \right) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{l} \right) dx.$$

A integral a ser calculada é da mesma forma que na Eq. (3.7), cujo resultado será $\delta_{kp} l/2$. Como a delta faz com que todos os termos sejam nulos, exceto quando $k = p$, o trabalho virtual torna-se

$$\delta W = -\tau \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{l}{2} q_k \delta q_k. \quad (3.10)$$

Mas também vimos que o trabalho virtual pode ser escrito em termos das forças generalizadas, como

$$\delta W = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \delta q_k. \quad (3.11)$$

Comparando a Eq. (3.10) com a Eq. (3.11), a força generalizada é encontrada como

$$Q_k = -\frac{l\tau}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k.$$

Com isso, Q_k pode ser obtida a partir de uma energia potencial que tem a forma

$$V = \frac{l\tau}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 q_p^2,$$

pois $Q_k = -\partial V / \partial q_k$ [4].

Em mãos da energia cinética T e da energia potencial V para a corda vibrante, é possível escrever a lagrangiana para esse sistema, que será

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{\lambda l}{4} \sum_{k=1}^{\infty} [\dot{q}_k(t)]^2 - \frac{\tau l}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 [q_k(t)]^2. \end{aligned}$$

Agora, partindo das equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (3.12)$$

vamos calcular quais são as equações diferenciais para este problema. Realizando as derivadas em relação à velocidade e posição, teremos, respectivamente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda l}{2} \dot{q}_k(t) \right) = \frac{\lambda l}{2} \ddot{q}_k(t),$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\tau l}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k(t).$$

Substituindo as expressões calculadas acima na Eq. (3.12), chegamos em

$$\frac{\lambda l}{2} \ddot{q}_k(t) + \frac{\tau l}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k(t) = 0,$$

de outra forma

$$\ddot{q}_k(t) + \frac{\tau}{\lambda} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k(t) = 0.$$

Esta é a equação de Lagrange para uma corda vibrante, ou seja, a equação diferencial que descreve o movimento unidimensional de uma corda vibrante e, além disso, a expressão encontrada têm a mesma forma que a a Eq. (3.5), isto é, equação da onda para este problema, como esperado.

3.2 Eletromagnetismo: Partícula em um Campo Eletromagnético Externo

3.2.1 Potenciais Generalizados

Até agora abordamos potenciais que são dependentes apenas das coordenadas, porém também é possível que os potenciais sejam dependentes das velocidades. Neste caso, é necessário modificar a expressão para a força generalizada, expressa na Eq. (1.8). Deste modo, iremos introduzir o conceito de potenciais generalizados, que representam uma função da forma

$$U \equiv U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t),$$

tal que as forças generalizadas Q_k podem ser escritas como [5]

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right). \quad (3.13)$$

As equações de Lagrange, considerando agora um potencial generalizado, serão

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U) = 0.$$

3.2.2 Partícula em um Campo Eletromagnético Externo

Uma partícula submetida à um campo eletromagnético externo terá um potencial generalizado, uma vez que a força presente dependerá das coordenadas e das respectivas velocidades. Essa força é denominada força de Lorentz e expressa como

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

onde e é a carga da partícula, \vec{E} e \vec{B} são os campos elétrico e magnético, respectivamente, e \vec{v} é a velocidade da partícula [11]. O que buscamos é expressar essa força em termos de uma força generalizada, que nos permitirá encontrar o potencial generalizado para o sistema e, por fim, a sua lagrangiana.

Neste momento é importante lembrar algumas consequências das equações de Maxwell, considerando a lei de Gauss para o magnetismo e a lei de Faraday, dadas respectivamente por [11]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.15)$$

ambas descritas no vácuo. A Eq. (3.14) nos diz que o campo magnético pode ser expresso em termos de um rotacional de um vetor⁽¹⁾, como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.16)$$

onde \vec{A} é chamado de potencial vetor. Substituindo a Eq. (3.16) na Eq. (3.15), temos

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] = 0. \quad (3.17)$$

⁽¹⁾Lembre-se que qualquer campo vetorial com divergente nulo pode ser expresso como um rotacional de um potencial vetorial [11].

A Eq. (3.17) permite escrever o termo entre colchetes como o gradiente de um escalar⁽²⁾, chamados de V , e a Eq. (3.17) torna-se

$$\vec{E} + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla}V, \quad (3.18)$$

isolando o campo elétrico, \vec{E} será

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \vec{\nabla}V, \quad (3.19)$$

onde V é chamado de potencial escalar [11].

Retomando o objetivo do problema, buscamos agora uma expressão para o potencial generalizado U , que dependerá dos potenciais escalar e vetor e, além disso, as coordenadas generalizadas consideradas neste problema serão as coordenadas cartesianas, dadas por

$$q_1, q_2, q_3 \rightarrow x, y, z.$$

Uma vez que temos a expressão para o campo elétrico e para o campo magnético em termos dos potenciais, iremos substituir a Eq. (3.19) e a Eq. (3.16) na força de Lorentz. A substituição resulta em

$$\vec{F} = e \left[-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]. \quad (3.20)$$

Para colocar a expressão acima como na Eq. (3.13), é preciso expressar o potencial \vec{A} em termos de uma derivada total. Derivando \vec{A} em relação ao tempo, temos

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Isolando a derivada parcial em relação ao tempo na expressão acima, ficamos com

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}. \quad (3.21)$$

Definindo um operador que atue apenas nas velocidades, é possível escrever o vetor \vec{A} como

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial \dot{x}} \hat{i} + \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial \dot{y}} \hat{j} + \frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial \dot{z}} \hat{k} \\ &= \vec{\nabla}_v(\vec{v} \cdot \vec{A}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

note que como o operador atua apenas nas velocidades, a operação nas componentes v_x, v_y, v_z irá resultar nas componentes A_x, A_y, A_z , ou seja, o vetor \vec{A} [6]. Substituindo a Eq. (3.21) e a Eq. (3.22) na Eq. (3.20), resultamos em

$$\vec{F} = e \left[-\vec{\nabla}V - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_v(\vec{v} \cdot \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]. \quad (3.23)$$

⁽²⁾Se o rotacional de um campo vetorial se anula (em toda parte), então o campo vetorial pode ser escrito como o gradiente de um potencial escalar [11].

Usando a regra do produto abaixo [11]

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}), \quad (3.24)$$

para \vec{v} e \vec{A} , ficamos com

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (3.25)$$

onde o segundo e o quarto termo da soma na Eq. (3.24) serão nulos, pois o operador gradiente e rotacional irá agir apenas nas coordenadas, e não nas velocidades. Substituindo o resultado da Eq. (3.25) na Eq. (3.23), ficamos com

$$\vec{F} = e \left[-\vec{\nabla}V + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_v(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right],$$

também escrita como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} [eV - e(\vec{v} \cdot \vec{A})] - \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_v e(\vec{v} \cdot \vec{A}). \quad (3.26)$$

Esta expressão para a força nos permite encontrar qual é o potencial generalizado para esse problema, pois note que a equação acima tem os mesmos termos que impõe a força generalizada, considerada anteriormente. Diante disso, o potencial generalizado será

$$U = eV - e(\vec{v} \cdot \vec{A}). \quad (3.27)$$

Reescrevendo a força generalizada, temos

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_v U).$$

Portanto, a lagrangiana para uma partícula em um campo eletromagnético externo será dada pela energia cinética da partícula, considerando a soma das velocidades em x, y e z , ou seja, $v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = \vec{v}$, menos o potencial generalizado, dado pela Eq. (3.27) [6]. A lagrangiana será

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m(\vec{v} \cdot \vec{v})^2}{2} - eV + e(\vec{v} \cdot \vec{A}). \end{aligned}$$

Que também pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - eV(x, y, z, t) + e[\vec{v} \cdot \vec{A}(x, y, z, t)]. \quad (3.28)$$

Encontrada a expressão para a lagrangiana, as equações de Lagrange para o problema, usando a Eq. (1.19) e fazendo suas respectivas derivadas, será

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{e}{m} \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \right) = -\frac{e}{m} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

onde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

A segunda parte do problema consiste em encontrar a hamiltoniana para o mesmo sistema. Usando a lagrangiana da forma (3.28), os respectivos momentos canônicos serão

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z.$$

É necessário resolver essas equações para as velocidades, uma vez que teremos que substituir esses valores na hamiltoniana para que essa fique dependente apenas de (q, p, t) , como esperado. Isolando as velocidades nas três coordenadas, o valor de \vec{v} é dado por

$$\vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p} - e\vec{A}). \quad (3.29)$$

Substituindo o valor das Eqs. (3.28) e (3.29) na Eq. (2.2), a hamiltoniana para o sistema será

$$\begin{aligned} H &= \vec{v} \cdot \vec{p} - L \\ &= \frac{1}{m} (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{p} - \frac{m}{2} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + eV - \frac{e}{m} [(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{A}] \\ &= \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + eV. \end{aligned}$$

Por fim, as equações de Hamilton são da forma

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})}{m}, \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} H = \frac{\vec{\nabla}(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\vec{\nabla}V, \end{aligned}$$

e descrevem o movimento de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético externo [6].

3.3 Mecânica Quântica: A Teoria de Hamilton-Jacobi e a Equação de Schrödinger

O objetivo principal deste exemplo é estabelecer como a mecânica clássica, mais precisamente a formulada por Hamilton-Jacobi em conjunto com a relação feita por Hamilton, entre a mecânica clássica e a óptica geométrica, foram partes essenciais no desenvolvimento da mecânica quântica, devido à Schrödinger.

Iniciaremos a discussão analisando a relação proposta por Hamilton, no período de 1828 a 1837. Primeiramente, consideremos uma partícula sob a ação de uma força conservativa cuja energia potencial associada é $V(x, y, z)$ ⁽³⁾, e as coordenadas generalizadas adotadas são as cartesianas. A sua hamiltoniana será [6]

$$H = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{p})^2}{2m} + V(x, y, z),$$

⁽³⁾Abordaremos o exemplo de forma simplificada, embora a análise possa ser estendida a sistemas mais gerais.

em que $\vec{p} = m\vec{v}$. Lembrando a relação expressa pela Eq. (2.41), a equação de Hamilton-Jacobi (Eq. (2.40)) para essa hamiltoniana é escrita como

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.30)$$

Como na equação acima temos termos que dependem apenas das posições e termos dependentes apenas do tempo, uma integral completa $S(x, y, z, t)$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$S(x, y, z, t) = W(x, y, z) - Et, \quad (4) \quad (3.31)$$

em que E é uma constante e a energia total da partícula [5]. Substituindo a Eq. (3.31) na Eq. (3.30), ficamos com

$$\frac{1}{2m} (|\vec{\nabla} W|^2) + V = E, \quad (3.32)$$

em que $W(x, y, z)$ satisfaz

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 = (|\vec{\nabla} W|^2).$$

Hamilton supôs que, para cada tempo t fixo, a Eq. (3.31) representará uma superfície e, com isso, a expressão pode ser escrita como

$$S(x, y, z, t) = W(x, y, z) - Et = C, \quad (3.33)$$

em que C é uma constante e a segunda igualdade representará uma família de superfícies, cada uma em um instante de tempo diferente. Desta forma, S é uma superfície móvel, pela condição da variação do tempo [6]. Uma representação qualitativa é feita na figura abaixo:

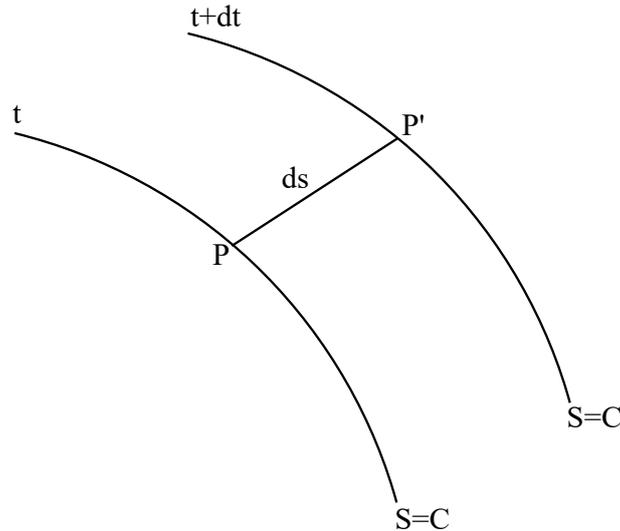


Figura 3.2: Superfícies em um tempo fixo, cuja distância entre o ponto P e P' será ds e estão separadas por um intervalo de tempo dt .

⁽⁴⁾Pois, lembre-se que neste caso, S pode ser expressa como uma separação de variáveis, como feito na Seção 2.4.2.

Note que, para cada valor de t , a superfície S nesse instante terá seu vetor velocidade perpendicular à superfície, uma vez que, se o tempo é fixo, a Eq. (3.33) pode ser expressa em termos de $W(x, y, z)$ e uma constante, ou seja

$$W = Et_{fixo} + C = \text{constante.} \quad (3.34)$$

Pois lembre-se que, se a hamiltoniana não depende explicitamente do tempo, ela é a energia total do sistema, em que E é uma contante. Deste modo, tomando o gradiente de W , temos

$$\vec{\nabla}W = \vec{p} = m\vec{v},$$

pois

$$p_x \hat{i} = \frac{\partial S}{\partial x} \hat{i} = \frac{\partial W}{\partial x} \hat{i}, \quad p_y \hat{j} = \frac{\partial S}{\partial y} \hat{j} = \frac{\partial W}{\partial y} \hat{j}, \quad p_z \hat{k} = \frac{\partial S}{\partial z} \hat{k} = \frac{\partial W}{\partial z} \hat{k}.$$

Portanto, se o gradiente de W representa um vetor perpendicular à superfície W e também é o vetor momento linear, então a trajetória que a partícula possui será sempre perpendicular às superfícies. Isso sugere interpretar essas superfícies como frentes de onda, cuja fase é constante, e a trajetória da partícula como um raio luminoso associado à um processo ondulatório cuja fase é S . Com isso, a ação clássica poderia ser interpretada como uma fase de um processo ondulatório fictício, de tal forma que as trajetórias possíveis são como raios luminosos [6].

Vamos agora supor uma superfície em um instante de tempo t e uma outra superfície muito próximo em um instante de tempo $t + dt$, como na Figura 3.2. É possível então calcular a velocidade de fase dessa partícula, dada por [12]

$$\frac{dS}{dt} = u.$$

Tomando o diferencial da Eq. (3.34), temos

$$dW - E dt = 0. \quad (3.35)$$

Note que

$$dW = \vec{\nabla}W \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}W| |dS| = |\vec{\nabla}W| dS,$$

e substituindo na Eq. (3.35), ficamos com

$$|\vec{\nabla}W| dS = E dt.$$

A velocidade de fase então pode ser calculada por

$$u = \frac{E}{|\vec{\nabla}W|},$$

isolando $|\vec{\nabla}W|$ na Eq. (3.32) e substituindo na equação acima, temos a expressão final para a velocidade

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}.$$

A relação proposta por Hamilton considera que o movimento de uma partícula num espaço tridimensional pode ser interpretado como representando um raio luminoso, como na óptica geométrica, associado à um processo ondulatório fictício cuja fase é S , de modo

que as trajetórias das partículas são sempre perpendiculares às várias superfícies, em cada instante de tempo fixo [6].

A partir dessa relação foi que Schrödinger, em 1926⁽⁵⁾, fez uma suposição, em que agora S é a fase de um processo ondulatório verdadeiro, representado por uma função ψ cuja fase é S ⁽⁶⁾. Desta forma, a função ψ pode ser expressa por

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{\frac{i}{\hbar}[-Et+W]}. \quad (3.36)$$

Se ψ representa um processo ondulatório, ela satisfaz a equação da onda (3.1), representada para esta função como

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.37)$$

Substituindo a velocidade de fase u encontrada anteriormente e realizando a derivada temporal na Eq. (3.36). A Eq. (3.37) torna-se

$$\nabla^2\psi - \frac{2m(E-V)}{E^2} \frac{E^2}{\hbar^2}\psi = 0,$$

que também pode ser reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z). \quad (3.38)$$

Esta é a equação de Schrödinger independente do tempo [9] e encontrada através da relação de Hamilton proposta anteriormente e da equação de Hamilton-Jacobi. É também possível escrevê-la com a dependência temporal, tomando a Eq. (3.36) e fazendo a primeira derivada em relação ao tempo, temos

$$E\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Substituindo na Eq. (3.38), torna-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z,t) + V(x,y,z)\psi(x,y,z,t) = i\hbar \frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t}, \quad (3.39)$$

e esta é a equação de Schrödinger dependente do tempo [9].

É importante ressaltar que os argumentos utilizados neste exemplo não constituem uma dedução da equação de Schrödinger, mas nos revela que a equação de Hamilton-Jacobi pode ser interpretada como um caso limite entre a mecânica clássica e quântica. Isto pois, supondo o procedimento inverso, a função S que satisfaz a Eq. (3.39), tomando ψ como na Eq. (3.36) é dada por

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S = 0. \quad (3.40)$$

Note que, se tomarmos $\hbar \rightarrow 0$, ou seja, no limite clássico, a Eq. (3.40) se reduz à equação de Hamilton-Jacobi e a fase ψ coincide com a ação clássica S . Podemos ver então que a mecânica clássica possui em sua vasta base para a teoria quântica e que a formulação de Hamilton-Jacobi é adequada para mostrar como generalizar os conceitos que partem da mecânica clássica para a mecânica ondulatória.

⁽⁵⁾Publicada em sua segunda comunicação da série intitulada "Quantização Como um Problema de Autovalores".

⁽⁶⁾Se a mecânica clássica fosse apenas uma forma aproximada de uma mecânica com características ondulatórias, sua falha em escala microscópica poderia ser entendida como análoga ao fracasso da óptica geométrica na explicação dos fenômenos tipicamente ondulatórios de interferência e difração [5].

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos a Mecânica Clássica formulada por Lagrange e Hamilton através do estudo de seus formalismos. O trabalho se deu início com a dinâmica proposta por Lagrange e, para atingirmos esse objetivo inicial, foi necessário uma apresentação sobre os vínculos, deslocamento virtual e trabalho virtual. O uso desses conceitos e da segunda lei de Newton nos possibilitou chegar no princípio de d'Alembert. Após, a partir desse princípio diferencial, chegamos à expressão para as equações de Lagrange.

Dando sequência, estudamos as equações de Lagrange através do cálculo das variações e de um princípio variacional. Damos início apresentando o problema primordial que o cálculo variacional estuda e a resolução formal do problema nos permitiu chegar nas equações de Euler, em que, quando aplicada à sistemas mecânicos, são as chamadas equações de Euler-Lagrange. Como parte final deste primeiro capítulo, podemos dar continuidade com a generalização das equações de Euler e, através de uma mudança de notação, resultamos também em uma generalização, agora para as Equações de Lagrange. Com isso, enunciamos o princípio de Hamilton, sendo esse um princípio variacional para a mecânica. Por meio dele, foi possível chegar nas equações de movimento de Lagrange escritas em função das coordenadas generalizadas para o sistema e enunciar as leis da mecânica de modo independente do sistema de coordenadas adotado.

Dando continuidade ao trabalho, a segunda parte se baseou no estudo da dinâmica proposta por Hamilton e na teoria de Hamilton-Jacobi. Demos início com as equações de Hamilton, tendo como ponto de partida a mecânica formulada por Lagrange. As equações foram obtidas através das definições dos momentos canônicos conjugados e da hamiltoniana. Podemos concluir que as equações de Hamilton formam um sistema de equações equivalentes às de Lagrange, mas expressas de um modo diferente para representar as equações que governam o movimento do sistema. Também, assim como feito para as equações de Lagrange, as equações de Hamilton foram expressas através de um princípio variacional.

Como parte final deste segundo capítulo, para chegarmos à teoria de Hamilton-Jacobi foi preciso uma introdução sobre três conceitos. Primeiramente, as transformações canônicas e funções geradoras dessas transformações, restringindo-nos àquelas que preservam a forma das equações de Hamilton e surgem no contexto da Mecânica Clássica com o objetivo de facilitar a resolução das equações. Outros dois conceitos estudados foram os colchetes de Poisson e as transformações canônicas infinitesimais, tendo como conclusão que, quando tomamos a hamiltoniana como função geradora da transformação canônica, essa gera uma evolução temporal no sistema através de uma sucessão de transformações canônicas infinitesimais. Após isto, demos continuidade com uma introdução da teoria proposta por Hamilton e Jacobi e chegamos à equação de Hamilton-Jacobi, que tem como objetivo encontrar uma transformação canônica que torne a hamiltoniana transformada identicamente nula, fazendo com que as equações de movimento sejam trivialmente solucionadas.

Por fim, atingimos o objetivo proposto para o fim deste trabalho, que foi descrever alguns sistemas estudados em diferentes áreas da Física, através da dinâmica de Lagrange e Hamilton. O estudo começou com o primeiro exemplo: a corda vibrante, em que chegamos na expressão para a lagrangiana e nas equações de Lagrange para o sistema, condizentes com a equação da onda que a corda vibrante obedece, como esperado. Após, demos continuidade com um problema amplamente estudado no contexto do Eletromagnetismo: uma partícula sujeita à um campo eletromagnético externo. Também foi possível encontrar as expressões para a lagrangiana e hamiltoniana, bem como as equações de Lagrange e Hamilton, que descrevem toda a sua dinâmica. Como um último exemplo, a teoria de Hamilton-Jacobi foi utilizada no contexto da Mecânica Quântica, como um exemplo de como esta teoria, juntamente com uma relação feita por Hamilton entre a Mecânica Clássica e a óptica geométrica foi de grande influência para a Mecânica Quântica, devido à Schrödinger. Desta forma, assim como a óptica geométrica é encarada como o caso limite da óptica ondulatória, a Mecânica Quântica também pode ser encarada como um caso limite da Mecânica Clássica.

Todo o trabalho foi realizado na tentativa de mostrar a elegância e completude que a Mecânica Clássica possui. Toda a sua formulação é capaz de descrever inúmeros sistemas, das mais diversas áreas da Física e, também, descrever as principais leis que a compõe. Assim, este trabalho trouxe alguns dos principais conceitos e fundamentos essenciais para o entendimento da dinâmica de Lagrange e Hamilton. Além de uma base introdutória da dinâmica de Hamilton e Jacobi, para estudos posteriores da teoria quântica.

Apêndice A

Coordenadas Generalizadas

Em sistemas holônomos é possível introduzir um certo número n de variáveis independentes, denotadas genericamente por q_1, \dots, q_n e denominadas **coordenadas generalizadas**. Elas obedecem às seguintes propriedades:

- São independentes entre si, de modo que o vetor posição de cada partícula é determinado univocamente em cada instante pelos valores dos q_n .
- Os vínculos, considerados todos holônomos, são identicamente satisfeitos se expressos em termos de q_n .

Para um sistema de N partículas, os vínculos são descritos apenas como funções das posições e do tempo, como

$$\begin{aligned} f_1 &= (r_1^{\vec{}}, r_2^{\vec{}}, \dots, r_N^{\vec{}}, t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f_p &= (r_1^{\vec{}}, r_2^{\vec{}}, \dots, r_N^{\vec{}}, t), \end{aligned}$$

onde podemos ter um número p de vínculos holônomos. Das $3N$ coordenadas, apenas $n = 3N - p$ podem ser tomadas como independentes entre si, e diz-se que o sistema possui n **graus de liberdade**. Sejam q_1, q_2, \dots, q_n as coordenadas generalizadas, tais que

$$\vec{r}_i = (q_1, q_2, \dots, q_n, t), \tag{A.1}$$

e tais que todos os vínculos são identicamente satisfeitos. De modo geral, as partículas de um sistema podem estar submetidas à um número de vínculos, aos quais dependem das posições de cada uma dessas partículas e também do tempo. Como o sistema deverá conter $3N$ coordenadas, ou seja, $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$, para cada vetor de posição, é possível definir quantos graus de liberdade esse sistema terá e ele será o número de coordenadas responsáveis por definir a posição de cada partícula, menos o número de vínculos aos quais elas estarão sujeitas. A partir disso, o vetor posição pode ser expresso em termos das coordenadas generalizadas, como na Eq. (A.1), que são independentes entre si, pois levam em conta o grau de liberdade n do sistema. Coordenadas generalizadas podem ser quaisquer que caracterizam o sistema, por exemplo retangulares, esféricas ou cilíndricas e cujo grau de liberdade será um número, em que $n = 3N - p$.

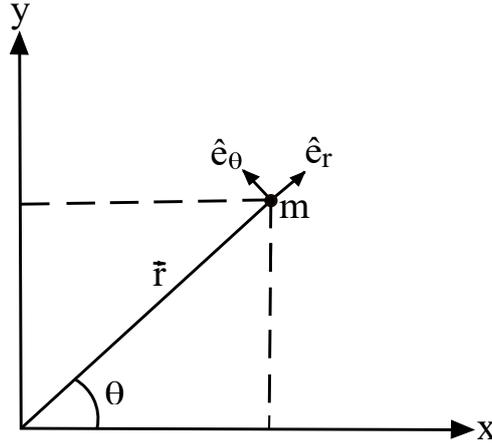


Figura A.1: Partícula num plano yx cujo vetor posição é \vec{r} , o ângulo que o vetor posição faz com o eixo x será θ e os vetores polares unitários serão \hat{e}_r e \hat{e}_θ .

Para fixar melhor a noção de coordenadas generalizadas, vamos discutir dois exemplos simples, ambos ilustrados na Figura A.1. Primeiramente, o movimento de uma partícula no plano yx é descrito por meio das coordenadas cartesianas, ou seja, neste caso as coordenadas generalizadas escolhidas são as cartesianas. O vetor posição da partícula será

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j},$$

e as coordenadas generalizadas serão

$$q_1 = x, \quad q_2 = y.$$

As componentes da força generalizada serão

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{F} \cdot \hat{i} = F_x,$$

$$Q_y = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{F} \cdot \hat{j} = F_y.$$

Por fim, consideremos uma partícula movendo-se num mesmo plano, mas agora as coordenadas polares são usadas como as coordenadas generalizadas e descrevem seu vetor posição, dado por

$$\vec{r} = r\cos(\theta)\hat{i} + r\sin(\theta)\hat{j},$$

e as componentes da força generalizada serão

$$Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot [\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}] = F_r,$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot [-r\sin(\theta)\hat{i} + r\cos(\theta)\hat{j}] = rF_\theta.$$

Apêndice B

Espaço de Configuração e Espaço de Fase

Este apêndice tem como objetivo uma breve introdução dos conceitos básicos sobre espaço de configuração e espaço de fase. Ambos conceitos importantes na formulação da mecânica de Lagrange e Hamilton, presentes neste trabalho.

B.1 Espaço de Configuração

Na formulação de Lagrange, o espaço de configuração é definido como o espaço formado pelas coordenadas generalizadas q_n , em que n é o número de graus de liberdade. Um ponto nesse espaço representa todas as possíveis posições instantâneas do sistema mecânico, isto é, específica a sua configuração naquele instante. À medida em que o tempo passa, a configuração do sistema se modifica, de modo que podemos representar a sua evolução com o tempo através de uma curva no espaço de configuração. Uma representação é feita na Figura B.1.

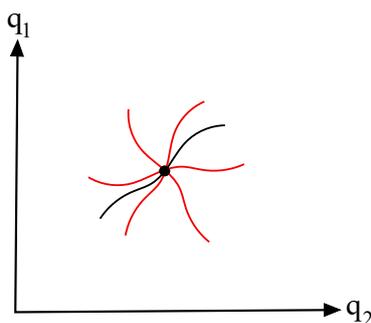


Figura B.1: Espaço de configuração para duas coordenadas, q_1 e q_2 . A curva em preto representa uma possível trajetória para a configuração e as outras, em vermelho, são também possíveis, para q_1 e q_2 iniciais.

Temos então que $q_i(t)$ é a representação paramétrica de uma curva no espaço de configuração e que, de modo geral, tem dimensão N para um sistema com n graus de liberdade.

Note que um ponto no espaço de configuração não caracteriza o estado do sistema mecânico, uma vez que um **estado** é uma situação do sistema tal que fique determinado uma única evolução temporal. Isto porque, não basta dar apenas as posições das partículas, como é o caso do espaço de configuração, mas também é preciso saber as velocidades de

cada partícula naquele instante, de modo que, por um ponto no espaço de configuração podem passar inúmeras trajetórias, cada uma com uma velocidade diferente.

B.2 Espaço de Fase

Na formulação hamiltoniana, o espaço de fase é definido como o espaço formado pelas coordenadas generalizadas q_i e seus respectivos momentos canônicos conjugados, p_i , cuja dimensão é $2n$. Uma representação deste espaço é feito na Figura B.2.

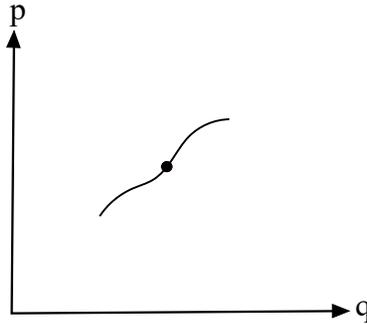


Figura B.2: Espaço de fase representado pelas coordenadas e pelos momentos canônicos, que definem a velocidade em um dado instante de tempo. A curva em preto representa a única evolução temporal possível do sistema.

Neste caso, $q_i(t)$ e $p_i(t)$ são as representações paramétricas de uma curva no espaço de fase. Note que, um ponto no espaço especifica completamente um estado do sistema mecânico, uma vez que, além de saber a posição, dada por $q_i(t)$, também especifica-se as velocidades associadas, pois $p_i(t)$ é associado a cada velocidade, em que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (\text{B.1})$$

como definido no Capítulo 2.

Com isso, cada ponto do espaço de fase representa um possível estado do sistema mecânico, isto é, em cada ponto no espaço vetorial passa uma, e somente uma, trajetória. Uma **trajetória** no espaço de fase representa a evolução temporal do sistema, através da evolução temporal de suas variáveis. Por fim, no espaço de fase, trajetórias clássicas nunca se cruzam, isto por que, se duas trajetórias pudessem se cruzar, teríamos duas evoluções dinâmicas distintas originadas do mesmo estado inicial, e isto é impossível, pois as equações de movimento definem univocamente o movimento futuro, se as posições e velocidades das partículas forem conhecidas num instante de tempo inicial.

Referências Bibliográficas

- [1] A. P. X. Flores, *Cálculo Variacional: aspectos teóricos e aplicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2011.
- [2] G. L. de Lima, *Cálculo Variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2004.
- [3] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. Cengage Learning São Paulo, 2011.
- [4] K. R. Symon, *Mechanics*. Addison-Wesley, 1971.
- [5] N. A. Lemos, *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [6] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical mechanics*. AAPT, 2002.
- [7] G. Leitmann, *The calculus of variations and optimal control: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [8] J. E. Marsden, A. J. Tromba, and M. L. Mateos, *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [9] J. J. Sakurai and E. D. Commins, *Modern quantum mechanics, revised edition*. AAPT, 1995.
- [10] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists*. AAPT, 1999.
- [11] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. AAPT, 2005.
- [12] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. Editora Blucher, 2018.