



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

**Métodos analíticos para solucionar equações
diferenciais parciais da Física**

Fernando Pelegrine Franco Villatore

Maringá, 4 de dezembro de 2018



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Métodos analíticos para solucionar equações diferenciais parciais da Física

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro

Fernando Pelegrine Franco Villatore

Maringá, 4 de dezembro de 2018

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Introdução	1
1 História das equações, métodos e seus autores	3
1.1 Equação de onda	3
1.2 Equação de difusão e transformada de Fourier	5
1.3 Separação de variáveis	7
1.4 Transformada de Laplace	8
1.5 Função de Green	8
2 Métodos de solução analíticos para equações diferenciais	10
2.1 Alguns conceitos e definições	10
2.2 Separação de variável	11
2.2.1 Método de separação de variáveis para o caso 3D em coordenadas cartesianas	13
2.3 Transformada de Fourier	15
2.3.1 Método de transformada de Fourier para o caso 3D em coordenadas cartesianas	20
2.4 Transformada de Laplace	22
2.4.1 Método da transformada de Laplace para o caso 3D em coordenadas cartesianas	25
2.5 Função de Green	27
2.5.1 Método da função de Green para o caso 3D em coordenadas cartesianas	30
3 Aplicação dos métodos	31
3.1 Transformada de Laplace	31
3.2 Transformada de Fourier	34
3.3 Função de Green	36

Conclusões	40
Apêndice	41
A Função erro e função erro complementar	41
B Função H de Fox	42
Referencias Bibliográficas	44

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos ao prof. Dr. Haroldo Valentin Ribeiro pela orientação. E, por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer a Deus, a minha família e a minha namorada pelo apoio contínuo.

Resumo

Este trabalho revisitou alguns métodos de solução analítica de equações diferenciais estudados durante a graduação do curso de Física. De modo que foram utilizadas as transformadas de Fourier e Laplace, função de Green e separação de variável. Utilizando dos métodos citados, foram resolvidas as equações de difusão e de onda em para uma e três dimensões. Além disto, esses métodos foram aplicados para dois casos presentes em situações experimentais reais, obtendo-se resultados possíveis de uma interpretação física.

Palavras chave: métodos matemáticos, transformadas integrais, equações diferenciais.

Introdução

Tendo como base o conceito de infinitesimal, com origem nos gregos antigos (2000-1200 a.C), posteriormente retomado por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C) e por Galileu Galilei (1564-1642 d.C) [1], juntamente com os estudos iniciais de cálculo de Pierre Fermat (1607 - 1665 d.C), Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647 d.C) e Isaac Barrow (1630 - 1677 d.C) [2], foi que os estudos de Isaac Newton (1643 -1727 d.C) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1642-1716 d.C) [3], no século 17, deram início e criaram de fato o cálculo diferencial e integral; conseqüentemente, dando uma formulação para equações diferenciais [4]. Cálculo este que foi aprimorado por seus sucessores, como Leonhard Euler (1707-1783 d.C), Pierre-Simon Laplace (1790-1827 d.C), Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813 d.C), entre outros, que geraram uma revolução matemática na física, iniciando em estudos sobre mecânica clássica [5].

Sendo assim, partindo do raciocínio científico utilizado por Galileu, de que uma vez estabelecida a lei matemática que governa um fenômeno, as conclusões são legítimas e não requerem o recurso ao experimento a toda hora [3], a utilização de equações diferenciais para descrição de fenômenos físicos passa a ter importância imprescindível, pois tais equações podem descrever problemas cada vez mais complexos e, conseqüentemente, com menos aproximações e mais próximos da realidade.

Deste modo, na física matemática surgem equações diferenciais que explicam desde problemas triviais, muitas vezes sendo esses fisicamente não realizáveis, mas com o único objetivo de obter alguma resposta e interpretação qualitativa de um problema abordado, até problemas envolvendo equações complexas, essas podendo inclusive usar como ponto de partida uma equação trivial para o desenvolvimento futuro de uma equação adequada, geral ou específica, ao problema envolvido. Dentre esses casos, encontram-se a equação da difusão, com origem nos estudos de condução de calor de Fourier e que futuramente foi utilizada nos estudos de Albert Einstein (1879-1955 d.C) sobre o movimento browniano [6], e a equação de onda, que descreve a evolução temporal e espacial de uma onda, inicialmente derivada da descrição do movimento de uma corda vibrante por D'Alembert (1717-1783) [4].

Uma vez tendo em mãos uma equação diferencial que descreva o sistema físico em análise, o próximo passo é obter uma solução para tal, portanto, concomitantemente com a criação de equações diferenciais foram desenvolvidos vários métodos

para solucioná-las. Tais métodos variam de acordo com o tipo de equação envolvida, sendo essa homogênea ou não, linear ou não linear, parcial ou não parcial, e se a mesma possui condição inicial ou condições de contorno. Em todo caso, o que se busca é uma solução analítica, exceto em casos em que só é possível obter soluções numéricas com auxílio de métodos computacionais.

Para equações diferenciais parciais, classe essa que descreve diversos sistemas físicos reais e possíveis, um método bastante conhecido é o método de separação de variáveis. Porém, essa abordagem não é útil para casos em que a equação tenha um termo de potencial, ou seja, quando se tem uma equação diferencial parcial não homogênea. Felizmente para esses casos, existem outros métodos que nos permitem encontrar soluções analíticas, entre as quais estão as transformadas de Fourier, Laplace e Henkel, métodos estes que, como o próprio nome sugere, propõem o uso de transformadas integrais, cada qual com um núcleo de transformação, limites de integração e condições de existência próprias [7]. Temos, ainda, a função de Green, um método operacional que propõe que uma função que satisfaz a equação diferencial em questão com um termo de potencial do tipo delta de Dirac no lugar do potencial da função estudada.

Tendo em vista a importância histórica e o papel fundamental na descrição da natureza que as equações diferenciais têm para a física, este trabalho tem como objetivo revisitar alguns métodos de solução analítica estudados no curso de graduação para duas das mais importantes equações diferenciais da Física: a equação de difusão e a equação de onda, com e sem a presença de um termo de potencial, assim como compará-las. Dentre os métodos investigados, se encontram a função de Green, transformada de Laplace, transformada de Fourier e separação de variável, os quais são desenvolvidos nos casos unidimensional e tridimensional para coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

O que segue do presente trabalho está organizado da seguinte forma. No [capítulo 1](#), é apresentada uma revisão histórica, tanto para as duas equações diferenciais citadas anteriormente, quanto para os métodos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Em seguida, no [capítulo 2](#), é desenvolvida a teoria inicial dos métodos propostos, no qual são tratados os fundamentos teóricos dos mesmos. Por fim, no [capítulo 3](#), são apresentadas aplicações dos métodos para solucionar casos relacionados a fenômenos físicos reais.

Capítulo 1

História das equações, métodos e seus autores

Este capítulo faz uma breve incursão histórica de alguns dos grandes nomes da Física e Matemática e autores de métodos e equações importantíssimas para a Física.

1.1 Equação de onda

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) foi um grande matemático francês que exerceu muita influência cultural em sua época. Em seus dias de colégio, inicialmente recebeu uma educação voltada para o ensino clássico, com pouco ênfase na matemática e uma ênfase maior na retórica. Mais tarde em sua vida, após rejeitar a carreira religiosa, assim como os estudos de direito e medicina, decidiu dedicar-se à carreira matemática. Estudou por conta própria obras de Varignon, Isaac Newton, L'Hôpital e de outros matemáticos do seu período. Sua estreia no cenário científico deu-se em 1739, ao enviar para a Academia Francesa de Ciências a sua primeira comunicação versando sobre problemas da matemática e física [5].

Seus estudos acerca da mecânica analítica foram de grande importância e forneceram contribuições para a realização e desenvolvimento de grandes trabalhos na área, como foi o caso do *Mécanique Analytique* de Joseph-Louis Lagrange, no qual o mesmo faz uso do princípio dos trabalhos virtuais¹, juntamente com o Princípio de d'Alembert, descrito por d'Alembert no *Traité de Dynamique* (1743) [5], e o *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* de Leonhard Euler, que faz uso do trabalho *Recherches sur la Précision des Équinoxes et sur la Nutation de l'Axe de la Terra Das le Système Newtonian*, feito em 1749 por d'Alembert, na qual ele demonstra a existência do eixo instantâneo de rotação [5].

Além dessas contribuições, ao estudar o problema das cordas vibrantes, d'Alembert

¹O termo "trabalhos virtuais" passou a ser utilizado mais recentemente (ver [5]).

deduz a equação de onda em 1746, cuja solução foi obtida em 1747 por ele mesmo [8]. Essa equação chamou muito a atenção de grandes nomes como Leonhard Euler, Daniel Bernouli (1700 - 1782) e Lagrange [8]. Tal equação pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Para o caso unidimensional, a solução é dada por

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \quad (1.2)$$

sendo f e g funções arbitrárias. Como mencionado anteriormente, um ano depois de divulgada tal solução, Euler formulou a equação em termos mais gerais, descrita por

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Nesse caso, v é a velocidade de propagação de onda [9] e a solução fica

$$u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt), \quad (1.4)$$

sendo f e g , novamente, funções arbitrárias.

1.2 Equação de difusão e transformada de Fourier

Ao pensar na equação da difusão o nome Jean Baptiste Joseph Fourier (1738 - 1830) é um dos primeiros que surge em nossas mentes. Fourier foi, além de político francês, um matemático que iniciou aos treze anos seus estudos na área, tornando-se um dos grandes matemáticos franceses do século XIX [5]. Em novembro de 1801, ele foi nomeado por Napoleão Bonaparte para prefeito do departamento de Isère, que fica próximo à fronteira com a Itália, onde se dedicou a dois trabalhos acadêmicos, sendo um deles o *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides* [10].

No ano de 1807, ele submeteu à *Académie des Sciences*, de Paris, o trabalho supracitado que descreve a difusão de calor com base na equação de difusão, para o caso de três variáveis espaciais, mostrando que o movimento de calor em uma esfera sólida pode ser descrita, de acordo com sua notação [5], por

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dv}{dx} \right). \quad (1.5)$$

Para resolver tal equação, Fourier valeu-se do método de separação de variáveis, inicialmente descoberto por Leibniz [4], o que o levou a uma solução na forma de séries trigonométricas infinitas, que ficaram conhecidas como séries de Fourier. Além disso, ele também obteve soluções na forma integral, que vieram a ser chamadas de transformadas de Fourier [10]. Porém, esse trabalho não foi aceito como vencedor do prêmio oferecido pela *Acedémie* por conta de uma resistência por parte de Lagrange, devido ao uso das séries e por motivos matemáticos de convergência e periodicidade algébrica [10]. Felizmente, anos mais tarde, uma versão revisada desse trabalho com-

posta por duas partes, o *Théorie des mouvements de la chaleur dans les corps solides*, que venceu tal prêmio e foi publicada em 1822, e a segunda com título *Théorie physique de la chaleur*, que acabou não sendo publicada [5].

Com isso, os trabalhos de Fourier chegaram ao conhecimento da comunidade científica após a publicação do supracitado artigo e os métodos utilizados por Fourier passaram a ser aplicados em estudos não apenas ligados à condução de calor, sendo alguns deles na área de eletricidade, teoria dinâmica de gases, análise da difusão molecular em líquidos e sólidos e mais recentemente (começo do século XX), na construção dos processos estocásticos [11]. Grandes nomes da ciência como Georg Simon Ohm (1787 - 1854), William Thomson (Lord Kelvin) (1824 - 1907), Adolf Eugen Fick (1829 - 1901) e Albert Einstein (1879 - 1955) [12] utilizaram-se dos trabalhos de Fourier para desenvolver suas teorias.

Dentre os nomes citados anteriormente, vale ressaltar o de Adolf Fick. Foi ele quem desenvolveu leis fenomenológicas, ou seja, leis cujas proposições referem-se à propriedades e relações empiricamente acessíveis entre os fenômenos observados. Em seu trabalho, ele usou como ponto de partida os estudos sobre difusão de sais em água de Thomas Graham (1805 - 1869) e fez uma analogia do mesmo com os estudos de condução de calor de Fourier e a teoria de condutividade elétrica de George Ohm [12]. Sendo assim, Fick realizou seus estudos desconsiderando a atuação de forças externas e descreveu duas leis que mais tarde foram nomeadas como primeira e segunda lei de Fick, em sua homenagem. A primeira lei de Fick diz que [12]:

1ª Lei de Fick - A taxa de difusão para espécies químicas em uma solução aumenta com a diferença na concentração entre duas regiões adjacentes. Essa diferença atua como uma força motriz para o movimento espontâneo das partículas do soluto na direção da região de menor concentração.

Matematicamente, podemos expressar a lei de Fick para o caso tridimensional, como [12]

$$\mathbf{J} = -D\nabla\rho. \quad (1.6)$$

Ao aplicar o divergente na equação anterior (considerando D constante) e combinar o resultado com a equação de continuidade (equação que expressa a conservação de matéria) dada por [12]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{J} = 0, \quad (1.7)$$

obtem-se a equação de difusão usual na da forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla^2\rho. \quad (1.8)$$

Essa equação pode apresentar alguma fonte ou sumidouro de partículas, adquirindo a forma geral descrita como [12]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2 \rho + \text{fonte}, \quad (1.9)$$

sendo *fonte* uma função da posição e do tempo.

1.3 Separação de variáveis

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filho de Friedrich Leibniz e Catharina Schmuck, nasceu em Leipzig, Alemanha. Ingressou na vida acadêmica através da Universidade de Leipzig com 14 anos e completou seu doutorado em direito na Universidade de Altdorfem, defendendo uma tese intitulada *De Casibus Perplexis in Jure*, quando tinha 20 anos [13]. O mesmo também estudou direito, teologia e matemática, sendo autodidata nessa última disciplina.

Leibniz chegou a ser convidado para integrar o corpo docente da Universidade de Altdorf; porém, preferiu ingressar no serviço público como diplomata, sob o patronato do barão Johann Christian Von Boineburg (1622-1672), passando a maior parte de sua vida viajando pelas capitais europeias em missões políticas [13].

Juntamente com Isaac Newton (1642–1727), deu os primeiros passos para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, que hoje são indispensáveis em todas as áreas da ciência. Foi um dos maiores estudiosos do século 17 e contribuiu muito com a física e a matemática de sua época. Tanto Leibniz quanto Newton aplicaram suas descobertas matemáticas na mecânica; porém cada um com sua vertente de visão física do mundo [11]. Newton com sua abordagem mecanicista influenciou outros grandes estudiosos como Laplace. Por outro lado, Leibniz com sua abordagem dinâmica, teve seguidores como Euler, Lagrange e Hamilton [11]. A diferença desses pontos de abordagem reside no fato de que o primeiro propõe que o conhecimento das forças e dos momentos do sistema (quantidade vetoriais) determina completamente seu comportamento. Em contrapartida, o último sugere que é possível descrever o mesmo sistema conhecendo o trabalho (energia) e a ação, as quais são quantidades escalares [11].

Por fim, dessa rápida perspectiva histórica sobre uma das maiores mentes da humanidade, entre algumas das contribuições matemáticas devidas a Leibniz encontram-se a descoberta do método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem, além de que, como descreve James Stewart [14], ele procurou desenvolver uma lógica simbólica e um sistema de notação que simplificassem o raciocínio lógico, dando origem a sua notação para derivada e integral. Uma prova de seu sucesso é o fato de que a mesma continua a ser utilizada até os dias de hoje.

1.4 Transformada de Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) foi um francês astrônomo, matemático e físico. Nascido em Beaumont-en-Auge, cidade da Normandia, desenvolveu o seu interesse por matemática enquanto estudava teologia na Universidade de Caen [15]. Tornou-se professor na escola militar de sua cidade natal e posteriormente professor na Academia Militar de Paris. Também foi eleito para a Academia de Ciências de Paris em 1773 e obteve grande destaque com seu trabalho *Traité de mécanique celeste*.

Ele, parafraseando Roberto Evangelista [5], foi um símbolo da procura da estabilidade solar, que surgiu durante o século XVIII. Obteve conclusões a partir de seus estudos sobre o problema celeste de três corpos usando uma análise perturbativa que desprezava termos de segunda ordem (ou mais elevados) de massa e admitia pequenos valores para a excentricidade da órbita dos planetas.

Laplace foi um seguidor da abordagem mecanicista de Newton, mas também incorporou outras teorias aos seus estudos [5]. Entre elas, encontram-se a teoria do calórico, teorias de fluidos imponderáveis associados à luz, à eletricidade e ao magnetismo [5]. Também estudou problemas de cálculo integral, cosmologia, probabilidade, física matemática, velocidade do som, entre outros. Em 1810, Laplace desenvolveu um método integral que ele utilizou na área da probabilidade, chamado posteriormente de transformada de Laplace em sua homenagem [15], que, curiosamente, só passou a ter aplicação em equações diferenciais posteriormente [4]. Além disso, ele trabalhou com uma equação diferencial em conexão com estudos de atração gravitacional [4], que ficou conhecida como equação de Laplace em sua homenagem. Vale ressaltar que a equação de Laplace passou a ser utilizada em toda física matemática e que até hoje possui um papel fundamental na física.

1.5 Função de Green

Nascido em Sneinton, condado de Nottinghamshire, Inglaterra, no dia 14 de Julho de 1793, George Green foi um físico e matemático autodidata que se consolidou como um grande nome para o meio científico. Em 1801, foi matriculado na escola Robert Godascre's Academy, onde permaneceu apenas dois anos e meio, e que posteriormente teve como tutores dois matemáticos que foram diretores da Nottingham Grammar School, o reverendo John Challand Forrest e John Toplis.

Em 1821, Green publica um ensaio chamado *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, que segundo William Thomsom (Lord Kelvin), o fez durante os intervalos do trabalho que exercia no moinho do seu pai [16]. Nesse trabalho, Green desenvolve estudos matemáticos sobre integrais de volume e técnicas de resolução de equações diferenciais, entre elas as chamadas pri-

meira fórmula de Green e o teorema de Green ou segunda fórmula de Green, além do método das funções de Green. Ele também generaliza estudos de eletricidade e magnetismo feitos por Siméon-Denis Poisson [17], nos quais ele usa o termo potencial para a eletricidade, sendo considerada a primeira vez que esse termo foi citado no meio científico.

Com 40 anos, Green decide ir para a University of Cambridge para ter uma formação mais completa em matemática, graduando-se em 1837. No ano de 1832, ele envia para Sir Edward Bromhead o seu trabalho intitulado como *Mathematical Investigations Concerning the Law of the Equilibrium of a Fluid Analogous to the Electric Fluid with other similar researche*. Bromhead, que já possuía conhecimento de seu primeiro ensaio, envia para seu amigo William Whewell os dois trabalhos de Green para que esse trabalho de 1832 fosse apresentado na *Cambridge Philosophical Society*, sendo esse publicado em 12 de novembro de 1832 e impresso no *Transactions of Cambridge Philosophical Society vol V, 1833* [16]. O revisor foi Robert Murphy que também recebeu uma cópia do ensaio de Green. Murphy publicou um artigo que citava o ensaio de Green, artigo que foi lido por William Thomsom em 1842. Apenas em 1845, Thomsom adquiriu uma cópia do ensaio de George Green. Após isso, Thomsom destacou em uma nota introdutória da revista *Journal fur Mathematic*, que investigações feitas inicialmente por Green foram encontradas em trabalhos independentes de autores posteriores a Green. Fica nítido que Thomsom procurou divulgar os trabalhos de Green assim que tomou conhecimento dos mesmos. Em 1840, George Green retorna à sua cidade Natal, acabando por falecer em 31 de maio de 1841.

Capítulo 2

Métodos de solução analíticos para equações diferenciais

Este capítulo busca desenvolver e apresentar os métodos que serão utilizados para resolver as equações diferenciais do próximo capítulo.

2.1 Alguns conceitos e definições

Antes de darmos início aos métodos, é interessante retomarmos algumas classificações e definições sobre condições de contorno e equações diferenciais. A primeira delas é a definição de uma equação diferencial geral que, como descreve James Steward [18], é uma equação que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas.

Uma equação diferencial contém uma função de uma ou várias variáveis independentes entre si, deste modo, classifica-se uma equação diferencial como equação diferencial ordinária (ou EDO) caso a mesma contenha uma função de uma variável. Definimos como equação diferencial parcial (ou EDP), uma equação que envolva uma função de duas ou mais variáveis. Além disso, define-se como grau de uma equação diferencial o valor para o expoente da derivada de mais alta ordem da equação [18].

Quando uma equação diferencial de ordem n possui uma solução analítica, essa solução é definida como solução geral se a mesma fica dependente de n constantes. Caso sejam fornecidas às condições de contorno do problema, temos então a solução particular, uma vez que se definem as n constantes.

Sendo assim, para problemas envolvendo EDOs, o mesmo fica completamente descrito se nos for dado o valor inicial da função em um ponto e for possível obter uma função que substituída na equação em questão a satisfaça. Tal problema é chamado de problema de valor inicial (PVI) [4].

De maneira semelhante, para um problema descrito por uma EDP, o mesmo fica completamente descrito se nos forem dadas as condições de contorno do problema e

for possível de obter uma função que substituída na equação a satisfaça.

De modo geral, as condições de contorno se apresentam de três formas:

- Condição de contorno de Cauchy: valor da função e sua derivada no contorno;
- Condição de contorno de Dirichlet: valor da função no contorno;
- Condição de contorno Neumann: valor da derivada da função no contorno.

Por fim, vale ressaltar que a condição inicial nada mais é que um tipo especial de condição de contorno [7].

2.2 Separação de variável

O método de separação de variável tem como ideia separar uma equação diferencial parcial (EDP) em n equações diferenciais ordinárias (EDO) com $n - 1$ constantes associadas a essas equações, de modo que n é do número de variáveis presentes na EDP. Essas constantes são determinadas pelas condições de contorno que o problema apresenta. O motivo para trabalhar com EDOs se baseia no fato de que resolver uma equação diferencial que envolve apenas em uma variável é mais fácil. Além disso, nessa abordagem inicial iremos trabalhar com coordenadas cartesianas unidimensionais para uma EDP, que no caso será a equação de calor.

Portanto, a equação do calor unidimensional em coordenadas cartesianas é dada por

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

sendo D o coeficiente de difusão, considerado constante nesse caso. Em seguida, fazemos a seguinte imposição para a função solução da EDP

$$f(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.2)$$

a qual caracteriza o método de separação de variável.

Substituindo essa expressão na equação da difusão, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (X(x)T(t))}{\partial x^2} &= \frac{1}{D} \frac{\partial (X(x)T(t))}{\partial t}, \\ T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= \frac{X(x)}{D} \frac{dT(t)}{dt}, \\ \underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{\alpha} &= \underbrace{\frac{X(x)}{DT(t)} \frac{dT(t)}{dt}}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ambos os lados da equação devem ser igualados a α porque a igualdade entre duas funções, sendo cada uma função de uma variável independente da outra, só se é possível se ambos os lados forem constantes [19]. O próximo passo consiste em resolver as EDOs separadamente, isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d^2X(x)}{dx^2} &= \alpha X(x), \\ \frac{dT(t)}{dt} &= \alpha T(t).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Essas equações têm como possíveis soluções as seguintes funções:

$$X(x) = \begin{cases} \alpha > 0 & \text{temos solução do tipo I} & X(x) = Ae^{x\sqrt{\alpha}} + Be^{-x\sqrt{\alpha}} \\ \alpha = 0 & \text{temos solução do tipo II} & X(x) = Cx + D \\ \alpha < 0 & \text{temos solução do tipo III} & X(x) = Ee^{ix\sqrt{\alpha}} + Fe^{-ix\sqrt{\alpha}} \end{cases}, \tag{2.5}$$

e

$$T(t) = \begin{cases} \alpha > 0 & \text{temos solução do tipo I}' & T(t) = A'e^{t\alpha} + B'e^{-t\alpha} \\ \alpha = 0 & \text{temos solução do tipo II}' & T(t) = C' \\ \alpha < 0 & \text{temos solução do tipo III}' & T(t) = E'e^{t\alpha} + F'e^{-t\alpha} \end{cases}, \tag{2.6}$$

sendo $A, A', B, B', C, C', D, E, E', F$ e F' constantes. Além disso, o sinal de α e, conseqüentemente, o tipo de solução descrito acima, ficam condicionados ao tipo de condição de contorno descrita no problema. Caso tenha-se condições de Dirichlet para valores finitos, analisando apenas a variável espacial, a solução do tipo III é a indicada. Por outro lado, se for fornecida condições de Dirichlet para valores infinitos, novamente fazendo o exemplo da variável espacial, o tipo de solução indicado é o I. Esse tipo de análise é válido para a qualquer variável da função f e também deve ser feita para os outros tipos de condição de contorno (Neumann e Cauchy).

Existe uma maneira mais comum de se abordar a equação 2.3, que consiste em usar a constante $-\alpha^2$ no lugar de α para não se usar a raiz quadrada que surge nas soluções $X(x)$ e $T(t)$, de modo que os possíveis tipos descritos para a solução de $X(x)$ e $T(t)$ continuam os mesmos, uma vez que são as condições de contorno que condicionam o tipo de solução e o valor de α , e não o contrário. De qualquer modo, ambas são equivalentes, pois α foi introduzida como uma constante arbitrária.

Uma vez que se sabe o tipo de solução que teremos em nas expressões 2.5 e 2.6, basta substituir os resultados na equação 2.2 para obtermos a solução particular da EDP. Sendo assim, para uma solução do tipo I das equações supracitadas, ficamos com

a solução particular dada por

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= X(x)T(t), \\
&= \left(Ae^{x\sqrt{\alpha}} + B^{-x\sqrt{\alpha}} \right) \left(A'e^{t\alpha} + B'e^{-t\alpha} \right), \\
&= AA'e^{x\sqrt{\alpha}+t\alpha} + AB'e^{x\sqrt{\alpha}-t\alpha} + BA'e^{-x\sqrt{\alpha}+t\alpha} + BB'e^{x\sqrt{\alpha}-t\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Além disso, a solução geral se escreve como

$$f(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left[A_{\alpha}e^{x\sqrt{\alpha}+t\alpha} + D_{\alpha}e^{x\sqrt{\alpha}-t\alpha} + C_{\alpha}e^{-x\sqrt{\alpha}+t\alpha} + B_{\alpha}e^{x\sqrt{\alpha}-t\alpha} \right]. \tag{2.8}$$

Por fim, obtemos os coeficientes $A_{\alpha} = AA'$, $B_{\alpha} = BB'$, $C_{\alpha} = BA'$ e $D_{\alpha} = AB'$ fazendo o uso das condições de contorno na expressão acima e realizando operações algébricas como o “truque de Fourier”, assim descrito por Griffiths [20]. Esse procedimento é válido porque a equação de difusão é uma equação linear e, ao encontrar uma solução para a mesma, ou seja, a solução particular, temos que uma combinação linear dessa solução também será solução da equação 2.1, uma vez que encontre os coeficientes dessa combinação [4].

O motivo desse último procedimento se dá pelo fato de que a solução obtida pelo método de separação de variáveis é restritiva, já que partimos do pressuposto de que a função principal $f(x, t)$ possa ser escrita como foi na equação 2.2; portanto, para uma solução qualquer se faz uso desse recurso.

2.2.1 Método de separação de variáveis para o caso 3D em coordenadas cartesianas

A generalização para o caso tridimensional em relação ao espaço do método de separação de variáveis em coordenadas cartesianas segue análoga ao caso unidimensional. Nesse caso, a equação de difusão toma a forma

$$\nabla^2 f(x, y, z, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}. \tag{2.9}$$

De modo que impomos uma solução do tipo

$$f(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t), \tag{2.10}$$

conduzindo a

$$\begin{aligned} \nabla^2 (X(x)Y(y)Z(z)T(t)) &= \frac{1}{D} \frac{\partial (X(x)Y(y)Z(z)T(t))}{\partial t}, \\ Y(y)Z(z)T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)T(t) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y)T(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= Y(y)Z(z)X(x) \frac{1}{D} \frac{dT(t)}{dt}, \\ \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} &= \frac{1}{D} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}, \\ \underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{-\alpha^2} &= \underbrace{\frac{1}{D} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}}_{-\alpha^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, temos a seguinte EDO na variável t

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha^2 DT(t). \quad (2.12)$$

Da equação 2.11, repetimos o processo, ou seja,

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{-\beta^2} = \underbrace{-\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{-\beta^2} - \alpha^2, \quad (2.13)$$

gerando a EDO em x

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\beta^2 X(x). \quad (2.14)$$

Da equação 2.13, temos ainda

$$\underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{-\gamma^2} = \underbrace{-\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{-\gamma^2} - \alpha^2 + \beta^2, \quad (2.15)$$

da qual obtemos a EDO em y

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\gamma^2 Y(y). \quad (2.16)$$

Por fim, da equação 2.15, temos

$$\underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}}_{-n^2} = \underbrace{-\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2}_{-n^2}, \quad (2.17)$$

da qual obtemos a EDO em z

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -n^2 Z(z). \quad (2.18)$$

Portanto, mais uma vez temos que cada igualdade só é válida se ambos os lados forem iguais as constantes de separação usadas. Sendo assim, a obtenção da solução particular e geral se dá de forma análoga à desenvolvida para uma dimensão, ou seja, a solução particular é obtida substituindo-se as soluções separadas de $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ e $T(t)$ na equação 2.10 e a solução geral fica

$$f(x, y, z, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} \sum_{\gamma=1}^{\infty} X(x)Y(y)Z(z)T(t). \quad (2.19)$$

Novamente, obtemos os coeficientes relacionados com as constantes de separação α , β e γ recorrendo às condições de contorno e utilizando de operações algébricas para tal.

Sendo assim, a generalização é condizente com o caso unidimensional, uma vez que obtivemos quatro EDOs para as quatro variáveis da função f , com três constantes envolvidas.

2.3 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma transformada integral. Uma transformada integral genérica é dada por [7]

$$g(\alpha) = \int f(t)K(\alpha, t)dt, \quad (2.20)$$

sendo $g(\alpha)$ a transformada da função $f(t)$ pelo núcleo $K(a, t)$ [7]. Tal transformada é linear se $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \int [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]K(\alpha, t)dt, \\ &= \int c_1 f_1(t)K(\alpha, t)dt + \int c_2 f_2(t)K(\alpha, t)dt, \\ &= c_1 \int f_1(t)K(\alpha, t)dt + c_2 \int f_2(t)K(\alpha, t)dt, \\ &= c_1 g_1(\alpha) + c_2 g_2(\alpha). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sendo assim, uma transformada integral, como o próprio nome sugere, faz uma passagem de uma função, que no caso é $f(t)$, de um espaço t qualquer para uma função em um espaço α qualquer, por meio de um núcleo que pode assumir várias formas, desde que haja convergência.

A vantagem de se trabalhar com uma operação desse tipo se justifica porque existem

facilidades de fazer operações matemáticas em alguns espaços do que em relação a outros, obtendo-se mais facilmente respostas para o problema envolvido. Portanto, uma vez obtidas essas respostas nesse espaço da transformada, basta fazer a transformada inversa, uma vez que ela exista, para obtermos a solução no espaço inicial [7].

Com isso em mente, podemos aplicar transformadas integrais para resolver equações diferenciais, procurando assim um meio de resolver com mais facilidade as mesmas. A figura (2.1), retirada do livro Arkfen [7] ilustra muito bem o objetivo de se fazer o uso de tais transformadas.

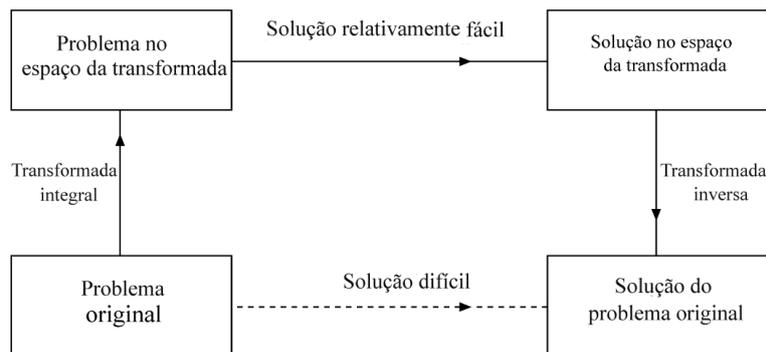


Figura 2.1: Ilustração do uso de transformadas integrais para solucionar equações diferenciais. Figura retirada do Arkfen [7].

A transformada de Fourier provém das séries de Fourier, nas quais se faz uma representação por séries de uma função periódica em uma faixa infinita. Assim como no livro Arkfen [7], podemos fazer um desenvolvimento formal e não rigoroso a partir das séries de Fourier para obtermos sua transformada. Nas séries de Fourier de uma função periódica com período arbitrário, temos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.22)$$

$$\text{Sendo}^1 = \begin{cases} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dt \end{cases}.$$

Para tornar essa série periódica em uma não periódica, basta supor que o período L tenda a infinito, conforme ilustra a figura (2.2).

Com isso e levando em consideração que a $f(x)$ deve ser integrável [7], ficamos com

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \right] + \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_1^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (2.23)$$

na qual o primeiro termo, a_0 , vai a zero pois a integral é finita. Em seguida, fazendo as substituições da equação 2.22 para a_n , b_n e também $\omega = \frac{n\pi}{L}$, além de usar a identidade

¹ $f(t)$ é a mesma função $f(x)$ uma vez que x é a variável muda nessa expressão.

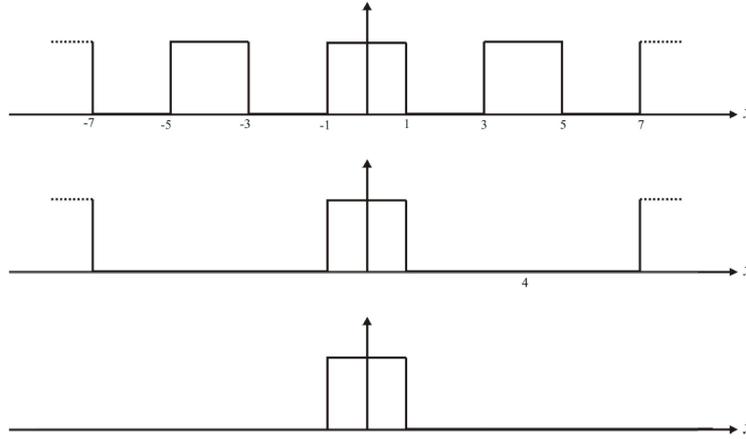


Figura 2.2: Função periódica $f(x)$ no limite em que seu período tende a infinito. Figura retirada do Arkfen [7].

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, obtemos

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sum_1^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega(x - t)) dt \right]. \quad (2.24)$$

Sendo assim, uma vez que $\Delta\omega = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$, ao substituir esse resultado na expressão anterior obtemos

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sum_1^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega(x - t)) dt \right], \quad (2.25)$$

a qual, para o limite dado ², toma a forma

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(x - t)) dt, \quad (2.26)$$

que também pode ser reescrita quando desenvolvemos o cosseno, isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)] d\omega, \quad (2.27)$$

$$\text{Sendo} = \begin{cases} A_{\omega} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega \\ B_{\omega} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega t) d\omega \end{cases}.$$

A série de Fourier também pode ser representada na forma exponencial. Tal forma é descrita por

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega x} \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.28)$$

Partindo desta forma, podemos desenvolvê-la para a sua forma integral, que tem o

²No limite $L \rightarrow \infty$, o termo $\sum_1^{\infty} \Delta\omega$ se torna $\int_0^{\infty} d\omega$.

mesmo significado da relação 2.26. Tomando novamente o limite de L indo ao infinito para a expressão 2.28 e usando novamente $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$, temos

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{2L} \int_{-L}^L f(t)e^{i\omega t} dt \right], \\
 f(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(t)e^{i\omega t} dt \right], \\
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt}_{(*)},
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

que, enfim, resulta na forma mais padrão de uma transformada, na qual o termo marcado com (*) na expressão anterior é conhecido como a transformada de Fourier. Vale ressaltar, que o sinal nas exponenciais da última expressão pode ser trocado de acordo com a forma escolhida para representar a equação 2.28, sendo $\cos[\omega(x - t)]$ ou $\cos[\omega(t - x)]$; porém, qualquer uma das representações está correta.

A equação 2.29 nos fornece um resultado interessante. Ela contém uma transformada integral, chamada de transformada de Fourier em homenagem ao mesmo, que tem como núcleo o termo exponencial positivo $e^{i\omega t}$. Além disso, obtemos automaticamente a sua inversa que apresenta como núcleo o termo exponencial negativo $e^{-i\omega x}$, de modo que a função $f(x)$ foi inicialmente levada ao espaço das transformadas por meio da transformada de Fourier e depois essa $f(t)$ retorna, por meio da inversa, para o espaço real x . Sendo assim, qualquer função não periódica que cumpra os condições de Dirichlet e seja absolutamente integrável, pode ter sua representação na forma da equação 2.29.

O próximo passo é utilizar a transformada em equações diferenciais. A vantagem de usar a transformada de Fourier para representar funções não periódicas em equações diferenciais fica clara quando calculamos a transformada de Fourier para a derivada de $f(x)$. Assim, temos para a primeira derivada que

$$\begin{aligned}
 g_1(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx, \\
 g_1(\omega) &= \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

na qual o primeiro termo da última equação se anula uma vez que $f(x)$ ³ vai a zero nos

³Isso deve ser verdade para que haja a convergência da transformada.

limites. Portanto, ficamos com

$$g_1(\omega) = \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \quad (2.31)$$

Para a segunda derivada, temos

$$\begin{aligned} g_2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} e^{i\omega x} dx, \\ g_2(\omega) &= \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} \frac{df(x)}{dx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx, \end{aligned} \quad (2.32)$$

cujo primeiro termo da última equação é nulo pelo mesmo argumento usado no caso da primeira derivada. Desse modo, o resultado final fica

$$g_2(\omega) = -(i\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx, \quad (2.33)$$

ou seja, retornamos ao caso da primeira transformada $g_1(\omega)$ a menos de um fator $-(i\omega)$, que, ao integrarmos novamente, irá retornar o mesmo fator, ficando com

$$g_2(\omega) = \frac{(-i\omega)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \quad (2.34)$$

Sendo assim, ao analisarmos os resultados de 2.34 e 2.31, fica evidente que podemos generalizar o resultado para a transformada da n -ésima ordem da derivada de $f(x)$ como

$$g(\omega)_n = (-i\omega)^n g(\omega). \quad (2.35)$$

Desse modo, ao aplicarmos a transformada na equação da difusão, por exemplo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} dx &= \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x,t) dx, \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} dx}_{(-i\omega)^2 F(\omega,t)} &= \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x,t) dx}_{F(\omega,t)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

que resulta em uma EDO de primeira ordem na variável t , uma vez que a derivada parcial em t sai da integral pois não temos nenhuma derivada em relação a ω [7], ou seja,

$$(-i\omega)^2 DF(\omega,t) = \frac{dF(\omega,t)}{dt}, \quad (2.37)$$

cuja solução é $F(\omega, t) = Ce^{-\omega^2 Dt}$.

Caso seja fornecida uma condição inicial, podemos obter a constante C que na verdade é uma função de ω , isto é,

$$F(\omega, 0) = F(\omega) = C(\omega). \quad (2.38)$$

Por fim, com todos esses resultados em mãos, podemos resolver a transformada inversa e obter a expressão para a função $f(x, t)$ no espaço real, resultando em

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega x} e^{-\omega^2 Dt} d\omega. \quad (2.39)$$

2.3.1 Método de transformada de Fourier para o caso 3D em coordenadas cartesianas

A generalização tridimensional em coordenadas cartesianas para a transformada de Fourier toma forma quando se representa os termos exponenciais do núcleo da transformada como vetores. Fazendo isso, temos

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}, \\ \omega^2 &= \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2, \\ \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Aplicando a transformada na equação de difusão, temos

$$\underbrace{\iiint \nabla^2 f(x, y, z, t) e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{parte 1}} = \underbrace{\iiint \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{parte 2}}. \quad (2.41)$$

Da parte 1, tem-se

$$\begin{aligned} &\iiint \left(\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 z} \right) e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{r}} dx dy dz = \\ &\underbrace{\iiint \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 x} e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{parte 1.1}} + \underbrace{\dots}_{\text{parte 1.2}} + \underbrace{\iiint \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 z} e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{parte 1.3}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Da subparte **1.1**, ficamos com

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_z z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_y y} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 x} e^{i\omega_x x} dx, \\ & = (-i\omega_x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_z z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_y y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, t) e^{i\omega_x x} dx, \end{aligned} \quad (2.43)$$

que resulta em

$$(-i\omega_x)^2 F(\omega, t), \quad (2.44)$$

com

$$F(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_z z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_y y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z, t) e^{i\omega_x x} dx, \quad (2.45)$$

sendo $F(\omega, t)$ a transformada de Fourier para a função $f(x, y, z, t)$.

Repetindo o processo feito para as subpartes **1.2** e **1.3** e somando com o resultado obtido da subparte **1.1**, obtemos

$$(-i\omega_x)^2 F(\omega, t) + (-i\omega_y)^2 F(\omega, t) + (-i\omega_z)^2 F(\omega, t) = (-i\omega)^2 F(\omega, t). \quad (2.46)$$

Por sua vez, a parte **2** fica

$$\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} F(\omega, t). \quad (2.47)$$

Por fim, igualando as partes **1** e **2**, obtém-se

$$\omega^2 F(\omega, t) = \frac{d}{dt} F(\omega, t), \quad (2.48)$$

com solução

$$F(\omega, t) = C e^{\omega^2 D t}. \quad (2.49)$$

Como esperado, essa generalização leva a um resultado muito similar com o caso unidimensional, no qual obtivemos uma EDO de primeira ordem em relação a variável temporal. Por fim, similarmente ao caso unidimensional, a solução para a EDP da equação de difusão é encontrada quando se usa a condição inicial, que nos permite encontrar a expressão para $C(\omega)$ e substitui esses valores de $F(\omega, t)$ e $C(\omega)$ na a transformada inversa de Fourier, resultando em

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint C(\omega) e^{\omega^2 D t} e^{-i\vec{\omega} \cdot \vec{r}} d\omega_x d\omega_y d\omega_z. \quad (2.50)$$

2.4 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace tem como forma mais utilizada a expressão

$$g(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.51)$$

conhecida também como a transformada unilateral de Laplace por conta de seu limite de integração inferior não conter o termo $-\infty$.

Diferentemente da transformada de Fourier, a transformada de Laplace busca trabalhar com funções mais abrangentes. Para transformadas de Fourier, vimos que uma das principais restrições era de que a função a ser transformada deveria ser integrável. Para transformada de Laplace, $f(t)$ já não precisa seguir tal condição. No entanto, é necessário impor duas condições. Uma para cada valor do limite de integração e que, fisicamente, são geralmente cumpridas, para que a transformada exista. A primeira delas, para o limite superior, é impor que exista uma constante s_0 que garanta a convergência da transformada no limite em que t tende a infinito. Logo, no caso em que $\int_0^{\infty} f(t)dt$ diverge, podemos garantir que existe um valor M qualquer e finito tal que $\left| \frac{f(t)}{e^{s_0 t}} \right| \leq M$. Portanto, temos que para todo valor de $s > s_0$, a equação 2.51 se tornará válida [7]. A segunda restrição é de que $f(t)$ não possua um ponto de singularidade forte em $t = 0$. Desse modo, definimos as duas restrições para que a transformada de Laplace de $f(t)$ exista.

Assim como foi ilustrado na seção 2.3, a utilização da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais torna-se visível quando aplicamos a mesma em uma derivada da função $f(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^{\infty} e^{st} \frac{df(t)}{dt} dt, \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{st} dt, \\ &= \left[f(\infty) \frac{1}{e^{s\infty}} - f(0) \cdot 1 \right] + sF(s), \\ &= -f(0) + sF(s), \end{aligned} \quad (2.52)$$

na qual o primeiro termo da penúltima equação vai a zero porque se faz uso da condição imposta para s que foi definida no começo dessa seção.

O mesmo pode ser feito para a derivada segunda de $f(t)$, isto é,

$$\begin{aligned}
 g(s) &= \int_0^{\infty} e^{st} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} dt, \\
 &= \left. \frac{df(t)}{dt} e^{st} \right|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{st} dt, \\
 &= \frac{1}{e^{s\infty}} \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{x=\infty} - \frac{1}{e^0} \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{x=0} + s \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{st} dt, \\
 &= \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{x=0} + s \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{st} dt}_{\text{caso para derivada de ordem 1}}, \\
 &= \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_0 - sf(0) + s^2 F(s).
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Portanto, vemos que a transformada de Laplace também reduz o grau de transcendência da função, só que nesse caso o resultado é uma equação algébrica linear que, como esperado, pode ser obtida para qualquer que seja a ordem da derivada de $f(t)$.

A generalização para n -ésima derivada de $f(t)$ fica expressa por [7]

$$g(s) = \left[s^n F(s) - s^{n-1} F(0) - \dots - \frac{d^{n-1} F(s)}{ds} \right]. \tag{2.54}$$

Infelizmente a sua inversa não é tão simples como no caso de Fourier. Porém, podemos obtê-la mesmo assim como segue. O primeiro passo para chegarmos a tal representação, de maneira semelhante à realizada no livro do Arkfen [7], é representar uma função $j(t)$ por meio das integrais de Fourier,

$$H(t)f(t)e^{-at} = j(t), \tag{2.55}$$

sendo $H(t)$ a função Heaviside e $a > 0$ e real. Além disso, vale mencionar que $f(t)$ pode ou não ser integrável, condição essa que a transformada de Laplace permite.

Temos agora que impor uma restrição necessária para a função $j(t)$. Obviamente, a mesma precisa ser integrável nos limites de 0 e $+\infty$ que aparecem na transformada de Laplace; portanto, fazemos com que no limite para t indo ao infinito, $f(t)$ deve crescer mais lentamente do que o termo em exponencial. Fisicamente isso geralmente é possível uma vez que o valor de a é arbitrário e pode ser escolhido para cumprir tal condição. Essa imposição pode ser resumida pela expressão

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} j(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [H(t)f(t)e^{-at}] = 0. \tag{2.56}$$

Em seguida, obtemos a transformada de Fourier para $j(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} j(t)e^{-i\omega t} dt, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{-at}e^{-i\omega t} dt, \\
&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-at}e^{-i\omega t} dt, \\
&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-t(\overbrace{i\omega + a}^= s)} dt, \\
&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

e sua inversa fica

$$j(t) = H(t)f(t)e^{-at} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{i\omega t} d\omega. \tag{2.58}$$

Ao dividirmos ambos os lados da equação anterior por e^{-at} , o termo exponencial na transformada fica

$$e^{i\omega t + at} = e^{st}$$

e a equação resultante toma a forma

$$j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{st} d\omega. \tag{2.59}$$

Por último, fazendo a troca de variáveis $d\omega = ids$ que, conseqüentemente, muda os limites de $\int_{-\infty}^{\infty}$ para $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$, obtemos

$$j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(s)e^{st} ds, \tag{2.60}$$

a qual define a expressão para transformada inversa de Laplace. A mesma é conhecida como integral de Bromwich ou integral de Fourier-Mellin. Vale comentar, novamente, que $f(t)$ não precisa ser integrável e deve estar definida para valores maiores ou iguais a zero. A constante arbitrária a deve ser escolhida de maneira que seja válida a relação

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-at} = 0, \tag{2.61}$$

satisfazendo as restrições expressas no começo dessa seção.

Além disso, com a mudança de variável $d\omega$ para ds , a transformada inversa passa a ser uma integral no eixo imaginário, ou seja, “giramos a linha de integração usando $ds = id\omega$. O caminho tornou-se uma reta vertical infinita no plano complexo [...]”, conforme descreve Arkfen [7].

Portanto, podemos, enfim, aplicar a transformada de Laplace para uma equação diferencial. Como exemplo, para a equação de onda unidimensional temos

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} e^{-sx} dx = \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} e^{-sx} dx, \quad (2.62)$$

$$-\left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} - sf(0, t) + s^2 F(s, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(s, t),$$

para a qual, caso sejam são fornecidas as condições de contorno do tipo de Cauchy para a função $f(x, t)$, pode-se usar dos mesmos argumentos usados na equação da difusão resolvida pela transformada de Fourier, que culminou em uma EDO de segunda ordem.

Se esse for o caso, teremos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem parecida com a que foi encontrada por este último método, ou seja,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(s, t) = v^2 s^2 F(s, t), \quad (2.63)$$

com solução

$$F(s, t) = Ae^{svt} + Be^{-svt}, \quad (2.64)$$

cuja transformada inversa é dada por

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (Ae^{svt} + Be^{-svt}) e^{sx} ds, \quad (2.65)$$

sendo os coeficientes A e B definidos pelas condições de contorno apropriadas para a variável t .

2.4.1 Método da transformada de Laplace para o caso 3D em coordenadas cartesianas

A transformada de Laplace tridimensional em coordenadas cartesianas para a equação de onda fica descrita quando se usa a notação vetorial para s e o r , isto é,

$$\begin{aligned} \vec{s} &= s_x \hat{i} + s_y \hat{j} + s_z \hat{k}, \\ s^2 &= s_x^2 + s_y^2 + s_z^2, \\ \vec{r} &= x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Logo, ao aplicar a transformada de Laplace à equação de onda, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y, z, t) &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2}, \\ \underbrace{\iiint \nabla^2 f(x, y, z, t) e^{-\vec{s} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{parte 1}} &= \underbrace{\frac{1}{v^2} \iiint \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} e^{-\vec{s} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{parte 2}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Da parte 1 temos

$$\begin{aligned} &\iiint \left(\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 z} \right) e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} dx dy dz = \\ &\underbrace{\iiint \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 x} e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{subparte 1.1}} + \underbrace{\dots}_{\text{subparte 1.2}} + \underbrace{\iiint \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 z} e^{i\vec{s} \cdot \vec{r}} dx dy dz}_{\text{subparte 1.3}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Da qual resolvemos a subparte 1.1 fazendo

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{is_z z} dz \int_0^\infty e^{is_y y} dy \int_0^\infty \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial^2 x} e^{is_x x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{is_z z} dz \int_0^\infty e^{is_y y} dy \int_0^\infty \left[s_x^2 f(x, y, z, t) e^{is_x x} - s_x f(0, y, z, t) - \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \right]_0 dx, \end{aligned} \quad (2.69)$$

que se assemelha muito ao que foi feito na seção 2.3.1. Aqui, considerando novamente a condição de contorno de Cauchy para a variável x da função $f(x, y, z, t)$, tem-se

$$\begin{aligned} &s_x^2 \int_0^\infty e^{is_z z} dz \int_0^\infty e^{is_y y} dy \int_0^\infty f(x, y, z, t) e^{is_x x} dx \\ &= s_x^2 F(s, t). \end{aligned} \quad (2.70)$$

E, desta forma, repetindo o processo para as subpartes 1.2 (que envolve a derivada parcial de segunda ordem em relação a y) e 1.3, a parte 1 resulta na expressão

$$\begin{aligned} &(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) F(s, t), \\ &= s^2 F(s, t). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Por outro lado, a parte 2 fica

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F(s, t)}{\partial t^2}. \quad (2.72)$$

Por fim, igualando os resultados obtidos para as partes 1 e 2, ficamos com

$$v^2 s^2 F(s, t) = \frac{\partial^2 F(s, t)}{\partial t^2}, \quad (2.73)$$

cujas possíveis soluções são

$$\begin{aligned} F(s, t) &= Ae^{ivst} + Be^{-ivst}, \text{ Para condições de contorno em que } t \rightarrow \infty; \\ F(s, t) &= Ce^{vst} + De^{-vst}, \text{ Para condições de contorno em que } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Uma vez obtidos os coeficientes da equação 2.74, basta substituí-los na transformada inversa de Laplace para obtermos a solução para equação de onda no espaço real, ou seja,

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \iiint F(s, t) e^{\vec{s} \cdot \vec{r}} ds_x ds_y ds_z. \quad (2.75)$$

2.5 Função de Green

A função de Green tem como objetivo propor uma função G que seja solução para a equação diferencial parcial não homogênea em questão, sendo essa função chamada função de Green e tendo como potencial uma fonte pontual unitária.

Essa equação diferencial original pode ser reescrita como um operador diferencial que atua em uma determinada função e produz o mesmo efeito descrito pela equação diferencial em questão. Podemos ver isso para o caso unidimensional da equação da difusão ao chamarmos este operador diferencial por $\mathcal{L}(x, t)$, sendo

$$\mathcal{L}(x, t)f(x, t) + FONTE = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right] f(x, t) + FONTE. \quad (2.76)$$

Assim, temos que a função de Green unidimensional para a equação da difusão com termo de fonte seria

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t)G(x_1, x_2, t) &= \delta(x_2 - x_1), \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right] G(x_1, x_2, t) &= \delta(x_2 - x_1), \\ \frac{\partial^2 G(x_1, x_2, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial G(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \delta(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (2.77)$$

O que fazemos a partir desse resultado é usar o teorema de Green, que em sua forma geral usa uma relação de identidade com duas funções escalares, $u \equiv u(x, y, z)$ e $v \equiv v(x, y, z)$, de modo que

$$\begin{aligned} \nabla(u\nabla v) &= u\nabla \cdot \nabla v + (\nabla u)(\nabla v), \\ \nabla(v\nabla u) &= v\nabla \cdot \nabla u + (\nabla v)(\nabla u), \end{aligned} \quad (2.78)$$

e, ao subtrairmos uma da outra, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla(v\nabla u) - \nabla(v\nabla u) &= u\nabla.\nabla v - v\nabla.\nabla u, \\ \nabla[(v\nabla u) - (v\nabla u)] &= u\nabla.\nabla v - v\nabla.\nabla u.\end{aligned}\tag{2.79}$$

Ao integramos sobre um volume em ambos os lados e usando o teorema da divergência no lado esquerdo, temos

$$\iint (u\nabla v - v\nabla u)d\sigma = \iiint (u\nabla.\nabla v - v\nabla.\nabla u) dv.\tag{2.80}$$

Utilizando esse resultado e lembrando que o teorema da divergência nada mais é que o teorema fundamental do cálculo para o caso da integral de volume, sendo que esse teorema estabelece que a integral da derivada de uma função é igual aos valor da mesma no contorno, podemos partir da versão unidimensional equação 2.80 unidimensional, obter a seguinte relação

$$\left(u(x)\frac{dv(x)}{dx} - v(x)\frac{du(x)}{dx}\right)\Big|_a^b = \int_a^b \left(u(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2} - v(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right) dx.\tag{2.81}$$

Por fim, repetindo-se a passagem feita para essa última expressão, só que agora para o operador diferencial da equação de difusão no lugar do operador ∇ da equação 2.80, temos que as derivadas $\frac{d^2}{dx^2}$ passam a ser o operador $\mathcal{L}(x, t)$ e que as funções passam a ser $u(x) \rightarrow G(x, t)$ e $v(x) \rightarrow f(x, t)$, ou seja,

$$\left(G(x, t)\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - f(x, t)\frac{\partial G(x, t)}{\partial x}\right)\Big|_a^b = \int_a^b [G(x, t)\mathcal{L}(x, t)f(x, t) - f(x, t)\mathcal{L}(x, t)G(x, t)] dx.\tag{2.82}$$

Todos esses cálculos foram realizados porque na equação anterior, usando da primeira relação 2.77, temos que o termo que envolve o $\mathcal{L}(x, t)G(x, t)$ nos dá $\delta(x_2 - x_1)$ que anula a integral em questão, de modo que nos resta

$$\begin{aligned}\left(G(x, t)\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - f(x, t)\frac{\partial G(x, t)}{\partial x}\right)\Big|_a^b &= \int_a^b G(x, t)\mathcal{L}(x, t)f(x, t)dx - f(x_1, t), \\ \left(-G(x, t)\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + f(x, t)\frac{\partial G(x, t)}{\partial x}\right)\Big|_a^b + \int_a^b G(x, t)\mathcal{L}(x, t)f(x, t)dx &= f(x_1, t),\end{aligned}\tag{2.83}$$

resultando na solução $f(x_1, t)$ para a equação 2.76. Aqui, as condições de contorno podem anular todo o primeiro termo do lado esquerdo da equação anterior, caso elas sejam de Neumann ou Dirichlet para as funções $f(x, t)$ e $G(x, t)$. De qualquer modo, podemos encontrar a expressão para a função $G(x, t)$ da equação 2.77 por outros métodos conhecidos, como a transformada de Laplace ou de Fourier e, uma vez obtida

tal expressão, substituímos a mesma na relação 2.83 para obtermos o resultado da função $f(x_1, t)$ ⁴ para o problema dado em 2.76.

⁴O subíndice 1 diz apenas que obtemos o valor da função $f(x, t)$ no ponto x_1 , no qual atua o termo de fonte da equação 2.76.

2.5.1 Método da função de Green para o caso 3D em coordenadas cartesianas

Segue-se que a função de Green para três coordenadas espaciais no sistema cartesiano de equação de difusão fica representada por

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x, y, z, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} + \text{FONTE}, \\ \nabla^2 G(x, y, z, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial G(x, y, z, t)}{\partial t} + \delta(x_2 - x_1)\delta(y_2 - y_1)\delta(z_2 - z_1). \end{cases} \quad (2.84)$$

Usando-se o teorema de Green da equação 2.80 e sendo $f \equiv f(x, y, z, t)$ e $g \equiv g(x, y, z, t)$, temos que

$$\oiint (G\nabla f - f\nabla G)d\sigma = \iiint (G\mathcal{L}f - f\mathcal{L}G)dv. \quad (2.85)$$

Do mesmo modo que no caso unidimensional, ao substituírmos os valores da equação 2.84 temos

$$\oiint (-G\nabla f + f\nabla G)d\sigma + \frac{1}{D} \iiint G\mathcal{L}f = f(x_1, y_1, z_1, t). \quad (2.86)$$

sendo $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x, y, z, t) = \left[\nabla^2 - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \right]$.

Novamente, as considerações sobre o modo de encontrar a função $G(x, y, z, t)$ e sobre a influência das condições de contorno para obtermos a solução são as mesmas que foram feitas para o caso unidimensional.

Capítulo 3

Aplicação dos métodos

Neste capítulo, são aplicados os métodos de transformada de Laplace e Fourier para a equação de difusão-advecção e o método de função de Green para a equação da difusão com um termo de fonte não-local.

3.1 Transformada de Laplace

A equação da difusão-advecção com termo de decaimento de primeira ordem descreve a transferência de uma quantidade escalar física para dentro de um sistema devido a ação da difusão e advecção. Transcrevendo [21], podemos definir difusão e advecção da seguinte forma:

“O fenômeno da difusão é o processo pelo qual uma substância é transferida de uma parte de um sistema para outra, advindo de movimentos moleculares aleatórios ou de efeitos de turbulência. O transporte advectivo é provocado por agentes externos, como a movimentação das partículas e o fluxo direcionado que é resultante [por exemplo] de ventos e padrões circulatorios”.

Sendo assim, a equação geral da difusão-advecção com termo de decaimento é dada por

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = -v\nabla f(x, y, z, t) + D^2\nabla^2 f(x, y, z, t) - b^2 f(x, y, z, t), \quad (3.1)$$

na qual b^2 , v e D são constantes positivas. Aqui, $f(x, y, z, t)$ é uma grandeza escalar como a concentração de uma substância, b^2 um coeficiente de decaimento de primeira ordem (podendo ser fisicamente entendido como a destruição da grandeza escalar $f(x, y, z, t)$), v a velocidade de advecção e D^2 o coeficiente de difusão, uma constante nesse caso constante.

Essa equação surgiu em decorrência de estudos de modelagem da temperatura da água de um rio sujeito ao lançamento de efluentes térmico e é utilizada em hidrologia para modelagem unidimensional de problemas de qualidade da água em rios, como menciona [22]. Além disso, tal equação incorpora fatores diversos, microscópicos e macroscópicos, ou seja, fontes de ingresso de poluentes, transporte advectivo e

difusibilidade.

Sendo assim, iremos resolver essa equação no caso unidimensional, uma vez que tal equação é geralmente aplicada ao estudo de dispersão de poluentes em rios ou lugares onde a extensão dos mesmos é muito maior que sua profundidade ou largura [21]. Portanto, para o problema em questão, temos as seguintes condições de contorno

$$f(0, t) = f_0, \quad (3.2)$$

$$f(x, 0) = 0, \quad (3.3)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, t) = 0. \quad (3.4)$$

Aplicando a transformada de Laplace em relação a variável t para a equação 3.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= v \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - D^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + b^2 f(x, t), \\ \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt &= - \int_0^\infty e^{-st} v \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt - \int_0^\infty e^{-st} D^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} dt + \int_0^\infty e^{-st} b^2 f(x, t) dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

como visto no capítulo 2, as derivadas parciais em relação a variável x saem da integral, uma vez que a mesma é em relação a t . Além disso, integrando por partes a segunda linha da equação anterior e usando a condição de inicial 3.4, obtemos

$$\begin{aligned} s \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt &= -v \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt + D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt - b^2 \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt, \\ s \hat{f}(x, s) &= -v \frac{\partial}{\partial x} \hat{f}(x, s) + D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{f}(x, s) - b^2 \hat{f}(x, s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

de modo que $\hat{f}(x, s)$ representa a transformada de Laplace de $f(x, t)$.

O que se faz a seguir é resolver a equação descrita na segunda linha de 3.6, sendo essa uma EDO homogênea na variável x . Esse procedimento nos leva a calcular a equação característica da mesma [4]. Supomos que $\hat{f}(x, s) = e^{\lambda x}$ e isso nos leva a

$$\begin{aligned} s e^{\lambda x} &= -v \frac{e^{\lambda x}}{x} + D^2 \frac{e^{\lambda x}}{x^2} - b^2 e^{\lambda x}, \\ s e^{\lambda x} &= -v \lambda e^{\lambda x} + D^2 \lambda^2 e^{\lambda x} - b^2 e^{\lambda x}, \\ s &= -v \lambda + D^2 \lambda^2 - b^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

rearranjando a última linha, temos a equação polinomial de segundo grau abaixo

$$-D^2 \lambda^2 + v \lambda + s + b^2 = 0 \quad (3.8)$$

cujas raízes são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{v - \sqrt{v^2 + 4b^2(b^2 + s)}}{2D^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{v + \sqrt{v^2 + 4b^2(b^2 + s)}}{2D^2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Assim, a equação diferencial homogênea 3.6 fica com solução geral dada por

$$f(x, s) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},\tag{3.10}$$

na qual as constantes c_1 e c_2 são obtidas usando as condições 3.2 e 3.4, resultando em

$$c_1 = \frac{1}{s}, c_2 = 0.\tag{3.11}$$

Logo, $f(x, s)$ ficamos com

$$f(x, s) = \frac{e^{\lambda_1 x}}{s}.\tag{3.12}$$

Por fim, aplica-se a transformada inversa de Laplace em 3.10 a fim de obter-se a solução no espaço real. Fazendo isso, temos

$$\begin{aligned}f(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \hat{f}(x, s) ds, \\ f(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \frac{1}{s} e^{\lambda_1 x} ds.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Essa última integral possui solução analítica [22] e é dada por

$$f(x, t) = \frac{f_0}{2} \left[(1 + \operatorname{erf}(\zeta)) e^{\frac{\lambda_1 x}{2D^2}} + (1 - \operatorname{erf}(\eta)) e^{\frac{\lambda_2 x}{2D^2}} \right],\tag{3.14}$$

sendo η e ζ definida por

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{-x + \sqrt{v^2 + 4D^2 b^2 t}}{2D \sqrt{t}}, \\ \eta &= \frac{x + \sqrt{v^2 + 4D^2 b^2 t}}{2D \sqrt{t}}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Aqui, $\operatorname{erf}(x)$ representa a função erro descrita pela integral (Apêndice A)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-x'^2} dx' .\tag{3.16}$$

Desse modo, a equação 3.14 representa a solução geral da equação de difusão-advecção com um termo de decaimento.

3.2 Transformada de Fourier

Uma outra maneira de desenvolver uma solução analítica para a equação de difusão-advecção é usar transformada de Fourier no lugar da transformada de Laplace. Porém, um primeiro problema surge devido ao fato que a versão unidimensional da equação 3.1 possui condições de contorno nula para $f(x, t)$ para $t < 0$, ou seja, uma vez que a transformada de Fourier apresenta uma simetria de integração indo de $-\infty$ a ∞ , a mesma fica incompatível para resolver a equação em questão. Felizmente esse problema pode ser contornado fazendo a extensão ímpar da função $f(x, t)$, de modo que sua transformada fica

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)e^{-i\omega x} dx, \\ \hat{f}_1(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) [\cos(\omega t) - i\text{sen}(\omega t)] dx, \\ \hat{f}_1(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\cos(\omega t)dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\text{sen}(\omega t)dx, \\ \hat{f}_1(\omega, t) &= -2i \int_0^{\infty} f(x, t)\text{sen}(\omega, t)dx.\end{aligned}\tag{3.17}$$

na qual a integral que contém o termo $f(x, t)\cos(\omega t)$ da equação 3.17 se anula, uma vez que esse produto de funções gera uma expressão ímpar integrada num intervalo simétrico.

Um segundo problema surge ao fazermos a primeira derivada de $f(x, t)$, pois a derivada de uma função ímpar é par e vice-versa. Sendo assim, temos que considerar $v = 0$ na equação 3.1 a fim de mantermos uma solução puramente ímpar, atendendo assim as exigências que fizemos ao considerar a extensão ímpar para $f(x, t)$.

Para a segunda derivada de $f(x, t)$, que é ímpar, ficamos com

$$\begin{aligned}\hat{f}_2(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx, \\ \hat{f}_2(\omega, t) &= -2i\omega f_0 - \omega^2 g_1(\omega, t).\end{aligned}\tag{3.18}$$

em que as condições de contorno já foram utilizadas e $\hat{f}_1(\omega, t)$ é a transformada de Fourier para $f(x, t)$ da equação 3.17.

O que se faz então é aplicar a transformada de Fourier na equação 3.1, lembrando

que $v = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= D^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2 x} - b^2 f(x, t), \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx &= D^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2 x} dx - b^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x, t) dx, \\
\frac{\partial \hat{f}(\omega, t)}{\partial t} &= D^2 [-2i\omega f_0 - \omega^2 \hat{f}(\omega, t)] - b^2 \hat{f}(\omega, t), \\
\frac{\partial \hat{f}(\omega, t)}{\partial t} + \underbrace{[b^2 + D^2 \omega^2]}_{C_2} \hat{f}(\omega, t) &= \underbrace{-2i\omega f_0}_{C_1}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A última linha da expressão anterior nos remete a uma equação diferencial ordinária na variável t , de modo que podemos resolvê-la com uma solução do tipo

$$f(\omega, t) = Ke^{-\lambda t} + \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.20}$$

sendo K uma constante a ser definida. Deste modo, temos que ao substituirmos essa solução na EDO mencionada, temos

$$\begin{aligned}
-\lambda Ke^{-\lambda t} + \left(Ke^{-\lambda t} + \frac{C_2}{C_1}\right)C_2 &= C_1, \\
-\lambda Ke^{-\lambda t} + C_2Ke^{-\lambda t} &= 0, \\
\lambda &= C_2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Por fim, λ pode ser encontrado utilizando-se da condição 3.3, resultando assim que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega, t = 0) = 0 &= K + \frac{C_1}{C_2}, \\
K &= -\frac{C_1}{C_2}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Logo, $\hat{f}(\omega, t)$ fica

$$\hat{f}(\omega, t) = \frac{-C_1}{C_2} e^{-C_2 t} + \frac{C_1}{C_2} \tag{3.23}$$

Por fim, a transformada inversa de Fourier fica

$$\begin{aligned}
f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega, \\
f(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f} [\cos(\omega x) + i \operatorname{sen}(\omega x)] d\omega, \\
f(x, t) &= \frac{2i}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega, t) \operatorname{sen}(\omega x) d\omega, \\
f(x, t) &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{-C_1}{C_2} e^{-C_2 t} + \frac{C_1}{C_2} \right] \operatorname{sen}(\omega x) d\omega, \\
f(x, t) &= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-2if_0\omega D^2}{b^2 + D^2\omega^2} \left[1 - e^{b^2 + D^2\omega^2} \right] \operatorname{sen}(\omega t) d\omega, \\
f(x, t) &= \frac{2D^2 f_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{b^2 + D^2\omega^2} \left[1 - e^{b^2 + D^2\omega^2} \right] \operatorname{sen}(\omega x) d\omega,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

cuja solução tabelada é dada por [22]

$$f(x, t) = f_0 \left[e^{-\frac{bx}{D}} + \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc}(\eta) e^{\frac{bx}{D}} - \operatorname{erfc}(\zeta) e^{-\frac{bx}{D}} \right) \right] \tag{3.25}$$

com η e ζ expressas em 3.15 e

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

sendo a função erro complementar (Apêndice A).

3.3 Função de Green

Para a aplicação de função de Green iremos seguir o trabalho [23] e resolver a equação da difusão com um termo de fonte não local dada por

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2} - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x - x', t - t') f(x', t'). \tag{3.26}$$

na qual o segundo termo do lado direito da igualdade representa uma fonte não local que é descrita de acordo com $K(x - x', t - t')$. Além disso, vale ressaltar que as variáveis marcadas com um apóstrofo (') se referem ao tempo e posição em relação ao termo de fonte.

Sendo assim, iremos estudar o primeiro caso que o trabalho de referência supracitado descreve. Para este caso, temos que o termo $k(x - x', t - t')$ é proporcional a $\frac{\delta(t)}{|x|^{1+\mu}}$, com $0 < \mu < 2$.

O que fazemos então é começar com a transformada de Fourier para a parte espacial.

Assim, de 3.26, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} d\omega &= D \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2} d\omega \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i\omega x} K(x - x', t - t') f(x', t'), \quad (3.27) \\ \frac{\partial \hat{f}(\omega, t)}{\partial t} &= -D\omega^2 \hat{f}(\omega, t) - \int_0^t dt' \hat{K}(\omega, t - t') \hat{f}(\omega, t'). \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega x} dx, \\ \hat{K}(\omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-i\omega x} \hat{K}(x - x', t - t'). \end{aligned} \quad (3.28)$$

a transformada de Fourier de $f(x, t)$. Vale ressaltar que em 3.27 integramos em relação a x e não x' , restando, assim, apenas uma função nas variáveis ω e t .

O próximo passo consiste em usar a transformada de Laplace para t em 3.27, resultando em

$$s\hat{f}(\omega, s) - \hat{f}(\omega, 0) = -D\omega^2 \hat{f}(\omega, s) - \hat{K}(\omega, s) \hat{f}(\omega, s). \quad (3.29)$$

sendo

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega, s) &= \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega, t) e^{-st} dt, \\ \hat{K}(\omega, s) &= \int_0^{\infty} dt' \int_0^{\infty} e^{-st} \hat{K}(\omega, t - t') dt. \end{aligned} \quad (3.30)$$

De modo que no termo à esquerda da igualdade 3.27 foi utilizada a transformada de Laplace para a primeira derivada, conforme visto na seção 2.4.

Desse modo, temos que a equação 3.29 tem como solução $\hat{f}(\omega, s) = \hat{f}(\omega, 0)G(\omega, s)$, ou seja,

$$\begin{aligned} s\hat{f}(\omega, 0)G(\omega, s) - \hat{f}(\omega, 0) &= -D\omega^2 \hat{f}(\omega, 0)G(\omega, s) - \hat{K} \hat{f}(\omega, 0)G(\omega, s), \\ sG(\omega, s) - 1 &= -D\omega^2 G(\omega, s) - \hat{K}(\omega, s)G(\omega, s), \\ G(\omega, s) &= \frac{1}{s + D\omega^2 + \hat{K}(\omega, s)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

em que $\hat{f}(\omega, 0)$ é a transformada de Fourier de $f(x, t)$ na condição inicial e $G(\omega, s)$ a função de Green da equação 3.26.

O motivo de assumirmos uma solução que envolva a função de Green se justifica quando substituimos o termo de fonte por $K(x - x', t - t') = \delta(x - x')\delta(t - t')$ na equação

3.26. Fazendo isso, resolvemos a equação 3.26 para a função de Green $g(x, t)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)g(x, t) &= \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x - x')\delta(t - t')g(x', t'), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)g(x, t) &= -g(x, t), \end{aligned} \quad (3.32)$$

que pode ser resolvida por transformada de Fourier, ou seja,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)g(x, t) &= -g(x, t), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} - D \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} g(x, t), \\ \frac{\partial \hat{g}(\omega, t)}{\partial t} - \omega^2 \hat{g}(\omega, t) &= -\hat{g}(\omega, t), \\ \frac{\partial \hat{g}(\omega, t)}{\partial t} &= \underbrace{[\omega^2 - 1]}_{\alpha} \hat{g}(\omega, t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

na qual a última linha da expressão acima nos leva a uma EDO de primeira ordem com solução

$$\hat{g}(\omega, t) = e^{\alpha t}. \quad (3.34)$$

O resultado descrito anteriormente é a solução válida apenas para o potencial do tipo delta de Dirac utilizado. Para obtermos a solução geral deste problema, ou seja, $f(x, t)$, basta tomarmos a combinação linear dessas soluções, portanto

$$\hat{f}(\omega, t) = C(\omega)e^{\alpha t}. \quad (3.35)$$

sendo $C(\omega)$ o coeficiente da solução geral acima, que pode ser obtido quando fornecida a condição inicial de $\hat{f}(\omega, t)$, logo

$$\hat{f}(\omega, 0) = C(\omega). \quad (3.36)$$

Por último, basta tomar a transformada de Laplace de 3.35, sendo $e^{\alpha t}$ a solução $g(\omega, t)$ de Green para a equação 3.26, para obtermos a solução proposta anteriormente de $\hat{f}(\omega, s) = \hat{f}(\omega, 0)G(\omega, s)$, ou seja

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega, t) &= C(\omega)e^{\alpha t}, \\ \hat{f}(\omega, t) &= \hat{f}(\omega, t)e^{\alpha t}, \\ \int_0^{\infty} dt e^{-st} \hat{f}(\omega, t) &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} \hat{f}(\omega, t)e^{\alpha t}, \\ \hat{f}(\omega, s) &= \hat{f}(\omega, 0)G(\omega, s). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sendo assim, com a última linha da expressão 3.31 obtemos a solução para a equação diferencial 3.26 no espaço de Fourier-Laplace. Portanto, o que nos resta fazer são as transformadas inversas. Começando pela transformada de inversa Laplace, temos que para a equação anterior com o termo $\hat{K}(\omega, s) = \hat{K}|\omega|^\mu$, ficamos com

$$f(\omega, t) = \frac{\hat{f}(\omega, 0)}{-D\omega^2 t - \hat{K}|\omega|^\mu t}. \quad (3.38)$$

Uma vez que é bem conhecida a transformada inversa de uma função semelhante à expressão anterior, sendo essa do tipo $\frac{1}{s+a}$, na qual a é uma constante em relação à variável de transformação. Em seguida, basta fazer a transformada inversa de Fourier e obtermos a solução de 3.26 no espaço real. Temos então

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x', t) f(x', 0), \quad (3.39)$$

com $G(x, t)$ sendo

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\hat{K}}{(Dt)^{\frac{\mu}{2}}} \right)^n \times H_{1,1}^{2,2} \left[\frac{|x|}{\sqrt{Dt}} \left| \begin{matrix} (1-n\mu, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right]. \quad (3.40)$$

Aqui, H é a função H de Fox [24] (Apêndice B). Portanto, como descreve referência [23], a presença desse tipo de função indica que o termo de fonte não-local produz uma difusão anômala, ou seja, um processo de difusão com uma relação de dispersão não linear no tempo. Além disso, a solução encontrada na equação 3.40 apresenta dois tipos de regimes, um para tempos curtos e outro para tempos longos (solução assintótica), na qual o primeiro nos leva para o caso usual Gaussiano dado por

$$G(x, t) \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}, \quad (3.41)$$

que retrata a equação da difusão na ausência de forças e termos de reação. O segundo caso nos leva para uma distribuição do tipo de Lévy, expressa por

$$G(x, t) \approx \frac{1}{\mu|x|} H_{1,1}^{2,2} \left[\frac{x}{(Kt)^{\frac{1}{\mu}}} \left| \begin{matrix} (\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}) \\ (1,1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right]. \quad (3.42)$$

Conclusão

Nesse trabalho foram desenvolvidos métodos de solução para equações diferenciais, dentre eles o método de separação de variáveis, transformada de Fourier, transformada de Laplace e função de Green. Obtemos soluções analíticas para dois exemplos: no primeiro resolvemos usamos as duas transformadas integrais citadas e no segundo empregamos o método da função de Green.

Desse modo, verificamos que é possível obter resultados analíticos interessantes para o estudo de problemas próximos aos que vemos na natureza, possibilitando um modo de analisarmos e tirarmos conclusões gerais acerca do fenômeno físico que a equação diferencial aborda. Esse procedimento contrasta com os métodos de solução numérica, os quais, ao contrário de abordagens analítica, são específicos para o problema em que questão com todas as suas particularidades, gerando assim um resultado único e que dificilmente conduz à generalizações para as possíveis variações da equação diferencial estudada.

Apêndice A

Função erro e função erro complementar

A função erro $erf(x)$ [25] é definida como

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt. \quad (\text{A.1})$$

Na estatística, ela representa (para valores não negativos de x) a probabilidade de uma variável aleatória, gaussiana, de média nula e variância 1/2 ocorrer no intervalo $[-x, x]$.

Já a função erro complementar $erfc(x)$ [25] é dada pela seguinte relação

$$erfc(x) = 1 - erf(x). \quad (\text{A.2})$$

Apêndice B

Função H de Fox

A função H de Fox foi introduzida em 1961 por Charles Fox (1897-1977) [24]. Trata-se de um função bastante geral que inclui muitas outras funções especiais da matemática aplicada como casos particulares. Podemos definir esse função como

$$H_{p,q}^{m,n} \left[x \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \kappa(s) e^s ds \quad (\text{B.1})$$

com $z \neq 0$, $0 \leq n \leq p$, $z^s = \exp(s[\ln(|z|) + i \arg(z)])$ e $\kappa(s)$ sendo o núcleo da integral que varia de acordo com o caso da generalização para a função H de Fox.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Alexander, *Infinitesimal: A teoria matemática que revolucionou o mundo*. 1º ed, Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2016.
- [2] M. A. Fulini, *História do Cálculo Diferencial e Integral*. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2016.
- [3] L. R. Evangelista, *Perspectivas Em História da Física: Dos Babilônios à Síntese Newtoniana*. 1º ed, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.
- [4] W. E. Boyce; R. C. Dippima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Tradução e revisão de Valéria de Magalhães Iório. 9º ed, Rio de Janeiro: Editora LTC, 2010.
- [5] L. R. Evangelista, *Perspectivas Em História da Física Volume: Da física dos gases à mecânica estatística*. 1º ed, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.
- [6] M. A. F. Santos, *Sobre difusões normal e anômala - Formalismos e aplicações*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.
- [7] G. B. Arkenf; H. J. Weber, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Tradução de Arlete Simille Marques. 6º ed, Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2007.
- [8] S. H. N. Cerqueira; J. J. S. Soares, *Métodos das curvas características para solução de equações diferenciais parciais de primeira ordem*. Monografia de Pós-graduação - curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, São Luís, 2009.
- [9] H. M. Nussenzveig, *Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. 4º ed, São Paulo: Editora Blucher, 2002.
- [10] A. A. Tateishi, *Desenvolvimento do conceito de difusão: de Fourier ao modelo de pente*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.
- [11] T. N. Narasimhan, *Fourier's heat conduction equation: history, influence, and connections*. *Reviews of Geophysics*, 37(1):151–172, 1999.

- [12] D. S. Vieira, *Equações de difusão e o cálculo fracionário*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.
- [13] Leibniz Brasil, www.leibnizbrasil.pro.br/leibniz-vida.htm.
- [14] J. Stewart, *Cálculo - Volume 1*. Tradução da edição norte-americana versão métrica internacional. tradução EZ2Translate. 7º ed, São Paulo: Editora Cengage Learning, 2013.
- [15] FEM Unicamp, www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/laplace.htm.
- [16] M. V. Teixeira, *O Método das Funções de Green*. Revista Brasileira de História da Matemática Especial nº 1, 527-536. Rio Clarom, dezembro 2007.
- [17] Enciclopedia Britânica, www.britannica.com/biography/George-Green.
- [18] J. Stewart, *Cálculo - Volume 2*. Tradução da edição norte-americana . 6º ed, São Paulo: Editora Cengage Learning, 2009.
- [19] E. Butkov, *Física matemática*. 1º ed, Rio de Janeiro: Editora LTC, 1988.
- [20] D. J. Griffiths, *Mecânica quântica 2e*. 2º ed, São Paulo: Editora Pearson, 2011.
- [21] L. A. Danconi; E. C. Poletti; A. F. Angelis, *Modelagem e simulação numérica da dispersão de poluentes via equação de difusão-advvecção*. Faculdade de Tecnologia UNICAMP.
- [22] L. D. Nelson, *Obtenção de uma Solução Analítica da Equação de Difusão-Advvecção com Decaimento de 1ª Ordem pelo Método da Transformação de Similaridade Generalizada*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos Volume 8 n.1 Jan/Mar 2003, p. 181–188.
- [23] E. K. Lenzi; M. K. Lenzi; L. C. M. Filho, *Soluções para a equação de difusão com um termo não-local*. Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, 2008.
- [24] C. Fox, "The g and h functions as symmetrical fourier kernels," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 98, no. 3, pp. 395–429, 1961.
- [25] L. C. Andrews and L. C. Andrews, *Special functions of mathematics for engineers*. McGraw-Hill New York, 1992.