Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Aspectos Geométricos da Teoria da Relatividade Restrita

Acadêmica: Bruna Vallin Simão

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista

Maringá, 2018

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Aspectos Geométricos da Teoria da Relatividade Restrita

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Acadêmica: Bruna Vallin Simão
Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista

Maringá, 2018

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao querido orientador prof. Dr. Luiz Roberto Evangelista, que sempre mostrou, em todas as ocasiões que tive o prazer de presenciar, a importância e o valor da interdisciplinaridade e das análises filosóficas dentro do contexto da Ciência de modo geral.

Agradeço, também, aos professores convidados da banca pela disponibilidade e paciência em relação a este trabalho.

Ainda, à minha querida tia Daiani, que foi de extrema importância durante esse processo, e me ofereceu ajuda com as revisões textuais. Também, meus queridos amigos Alvaro, Ana, André, Débora, e Lukas, que me forneceram suporte não só durante a construção deste texto, mas em diversos outros momentos ao longo do período de graduação. Ainda, e não menos importante, gostaria de agradecer ao meu querido colega João Muriel, que me promoveu, com seu diferente ponto de vista, intensas indagações, e debates extremamente necessários, acerca de alguns tópicos abordados neste trabalho.

Em especial, agradeço à Dani, minha querida mãe, por absolutamente tudo, que vai além da compreensão de qualquer geometria, qualquer espaço-tempo, e qualquer possível estrutura fundamentalmente lógica apresentada neste texto.

Resumo

A teoria da relatividade restrita foi publicada por Albert Einstein em 1905, propondo uma nova interpretação sobre os conceitos de espaço e tempo na Física. Em 1908, Hermann Minkowski reinterpretou geometricamente algumas formulações da teoria, mostrando que seria possível unir o tempo às outras dimensões espaciais, apresentando assim o espaço-tempo, sendo este um espaço tetra-dimensional plano. Neste trabalho, é observada a mudança nos conceitos de espaço, tempo e dinâmica, com ajuda de alguns pontos específicos, como a filosofia natural de Aristóteles, os pensamentos de Copérnico e Galileu, e também Newton, e os problemas da mecânica clássica frente à teoria eletromagnética e às altas velocidades. Ainda, apresentada a teoria da relatividade restrita, será possível analisar qualitativamente suas consequências, e também construir um ambiente geométrico propício para quantificá-las. Com isso, portanto, será possível verificar o caráter limite da velocidade da luz para a velocidade dos corpos e partículas, e também a coerência da própria teoria com as relações de causalidade.

Palavras-chave: Teoria da relatividade restrita. Espaço-tempo.

Abstract

The special theory of relativity, published by Albert Einstein in 1905, implies a new interpretation within the concepts of space and time in physics. In 1908, Hermann Minkowski geometrically reinterpreted some aspects of the theory, showing that it would be possible to attach time to other spatial dimensions, thus presenting space-time, which is a flat four-dimensional space. In this sense, it is observed the change in the concepts of space, time and dynamics, with the help of some specific points, such as the natural philosophy of Aristotle, the thoughts of Copernicus and Galileo, as well as Newton and the problems of classical mechanics versus the electromagnetic theory and high speeds. Also, presented the special theory of relativity, it will be possible to qualitatively analyze its consequences, and also to construct a geometric environment conducive to quantify them. Therefore, it will be possible to verify the limiting character of the speed of light in relation to the velocity of bodies and particles, and also the coherence of the theory itself with the the principle of causality.

Keywords: Special theory of relativity. Space-Time.

Sumário

Introdução

Em 1905, Albert Einstein publicou o artigo “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”, no qual foi apresentada a teoria da relatividade restrita (ou especial). Assim, Einstein mostrou que a mecânica de Newton falhava ao ser aplicada sobre partículas em alta velocidade, e a generalizou, conectando-a ao eletromagnetismo, o que proporcionou grandes impactos sobre a perspectiva de espaço e tempo dentro da Física.

A teoria da relatividade especial é fundamentada sobre dois postulados: O princípio da relatividade, e o princípio da constância da velocidade da luz. Estes nos dizem não apenas que inexistem referenciais inerciais preferenciais (i.e., é impossível definir um referencial como intrinsecamente estacionário ou em movimento), como define a velocidade da luz como uma velocidade constante no vácuo e, ainda, como decorre das formulações da teoria, uma velocidade limite.

Em 1908, Hermann Minkowski propôs uma nova interpretação para a teoria: Unificar as dimensões de espaço e de tempo, dando origem, assim, ao espaço-tempo de Minkowski, que nada mais é do que o espaço $\mathbb{R}^4$ munido de uma métrica de Lorentz. Com isso, foi fornecendo à teoria da relatividade um novo nível de sofisticação e uma sólida estrutura - influenciando, ainda, a formulação da teoria da relatividade geral.

1 Dinâmica, espaço e tempo durante a história

Durante a história, muitos pensadores especularam sobre a dinâmica dos corpos. Encontrar uma maneira para explicar o movimento, bem como definir o ambiente em que ele se expressa, foi uma questão fundamental para o desenvolvimento da mecânica clássica e, posteriormente, da mecânica relativística.

1.1 A Física Aristotélica

Dentre os muitos dos pensamentos que pretendem esclarecer o problema do movimento, um que se mostra extremamente pertinente e elaborado é o de Aristóteles. Aristóteles (384-322 a.C.) construiu, dentro do círculo fechado de sua filosofia, um modelo de cosmos que conseguia explicar muitas das situações representadas pelo universo físico da vivência humana. Como diz Cláudio M. Porto:

> *"A física de Aristóteles foi uma construção teórica complexa, profundamente integrada a um pensamento filosófico extremamente abrangente, e elaborada a partir dos elementos empíricos fornecidos pela vivência humana mais imediata"* [1].

No modelo cosmológico de Aristóteles, a disposição fundamental dos elementos em forma pura e livre de perturbações é definida, à princípio, por suas densidades, e estruturada por uma organização concêntrica e esférica de terra, água, ar, e fogo, respectivamente, definindo a região sub-lunar. Para além desta, define-se a região celeste, onde encontram-se as esferas planetárias e, em seguida, a esfera de estrelas fixas. A região sub-lunar, entretanto, onde estão os elementos essenciais, é diretamente influenciada pelo movimento da Lua, que faz com que estes elementos se misturem, formando todas as outras substâncias observáveis. No centro dessa região e do universo, é onde se localiza, imóvel, a esfera terrestre.

A escolha de superfícies esféricas para compor o universo é, segundo Aristóteles, a mais apropriada. Para ele, a esfera seria a figura geométrica mais perfeita e uniforme, e, portanto, melhor correspondente à representação do cosmos. Dessa forma, Aristóteles diz:

> *"E dado que a primeira figura corresponde ao primeiro corpo, e o primeiro corpo é o que se encontra na rotação extrema do mundo, segue que o que se move circularmente será necessariamente esférico. Conseqüentemente, também será esférico o que está em continuidade e aderido a ele: pois o que está*

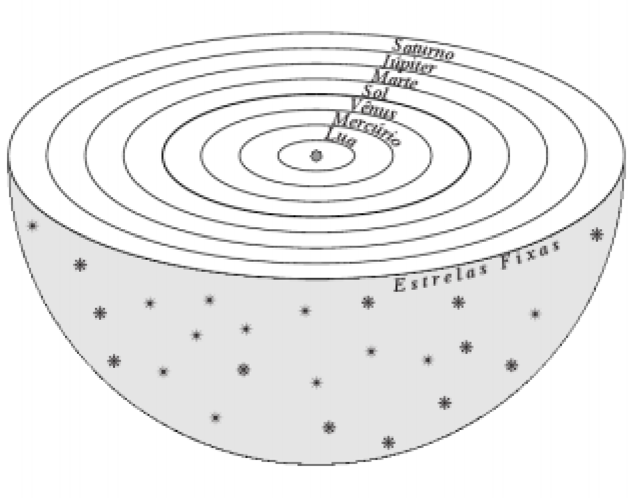

Figura 1 – Construção do universo de Aristóteles, [11].

> *aderido ao que é esférico também é esférico. De maneira análoga, também serão esféricas as coisas que estão no meio destas, pois aquelas coisas que estão limitadas por um corpo esférico e estão em contato com ele necessariamente serão todas esféricas, Agora, as coisas que estão abaixo da esfera das estrelas errantes [planetas] tocam a esfera superior. Assim, portanto, o mesmo Universo será esférico, pois todas as coisas estão em contato e continuidade com as esferas"* [2].

O primeiro corpo ao qual se refere é denominado o quinto elemento, ou quinta essência, éter. Este possui, por natureza, um movimento circular, e é do que é composta a região celeste e os corpos que ali estão.

Também o éter desempenha um papel fundamental dentro da dinâmica do cosmo aristotélico. Como pode ser observado na Figura 1, a estrutura geométrica do universo é finita. Essa construção implica, dentro dessa filosofia, que todos os corpos estão em contato com algo. Para Aristóteles, não há 'espaço vazio' entre os corpos. A noção de vácuo é completamente inconcebível, pois assumir a existência do vazio é assumir a falta de resistência ao movimento, e, como consequência, a possibilidade de um corpo terrestre possuir movimento infinito com velocidade infinita, extrapolando os limites do próprio universo. Portanto, qualquer possibilidade de um espaço vazio é substituída pela existência do éter - um elemento nem leve, nem pesado, puro e inalterável. Assim sendo, um corpo que está isolado nessa região (uma esfera planetária) ainda está em contato com o éter, que representa o preenchimento de todo espaço celeste não ocupado.

Com base neste universo, Aristóteles construiu seu modelo dinâmico, definindo o movimento dos corpos terrestres em dois tipos: Natural e forçado (violento). O movimento natural é designado pela tendência do objeto de retornar à sua origem. Por exemplo, uma flecha que é lançada horizontalmente e cai. O motivo de sua queda reside no seu elemento de formação, que é majoritariamente terra. Dessa forma, sua tendência é se juntar à Terra, que é sua preferência natural. O movimento forçado, em contrapartida, é todo aquele que não é natural - ou seja, o lançamento da mesma flecha por um ser animado.

Contrariamente à tendência circular do Éter, os movimentos naturais dos corpos terrestres, segundo Aristóteles, são retilíneos por natureza, e suas distribuições na região sub-lunar se definem de acordo com suas densidades. A Terra, por ser extremamente pesada e densa, ocupa a região central do universo. Corpos como a flecha mencionada, formados predominantemente por terra, possuem movimento natural retilíneo 'para baixo' em direção à Terra. Em oposição, corpos compostos sobretudo por ar, e fogo, possuem seu movimento natural retilíneo 'para cima', uma vez que esses são menos densos. Assim sendo, os movimentos naturais são compelidos a mudar de direção apenas sob a ação de uma contribuição violenta.

A partir disso, Aristóteles propõe que aquilo que provoca um movimento forçado, ou a alteração de um movimento natural, a força [1] deve ser diretamente proporcional à velocidade com que se desloca, e inversamente proporcional à resistência do meio. Então, ao submeter um corpo terrestre a uma força constante, sua velocidade de deslocamento também deve ser constante modularmente, e tão alta quanto maior for a força.

É a partir deste contexto que tomam forma as leis de movimento em Aristóteles. Sua dinâmica pode ser resumida ao princípio *"Omne quod movetur ab alio movetur"* [3] - que significa, simplificadamente, que aquilo que está em movimento é movido por outra coisa.

Uma visão mais atenta deste mostra que a essência fundamental do movimento é de que este é um processo mutável, e não um estado. Ao dizer "aquilo que está em movimento é movido por outra coisa", entende-se que não só o que provoca o movimento deve ser contínuo, e de contato, mas o movimento assim deve ser definido - No instante em que a causa cessa, é necessário que o movimento cesse também. O movimento é a expressão de efeito, declarando, portanto, uma profunda relação de causalidade que o define. Em Aristóteles, a dinâmica dos corpos é representada como uma consequência de um processo sucessivo, no tempo, de causa e efeito.

Como no exemplo citado nos parágrafos acima, uma flecha é lançada horizontalmente e, quando no ar, empurrada por este constantemente até que sua tendência natural de retornar à Terra supere seu movimento violento (lançamento). Aqui, tal relação causal

[1] É de extrema importância explicitar, aqui, que força não possui o significado moderno. A escolha dessa notação tem finalidades puramente práticas. O termo usado por Aristóteles é motor, ou causa.

é facilmente observada: o movimento forçado inicia esse processo (causa), fazendo com que a flecha se desloque, tomando lugar de uma porção aérea (efeito). Esta se desloca para trás, tornando-se uma nova causa e gerando um novo efeito, ou seja, empurrando outra vez a flecha, e assim sucessivamente, até o instante em que a tendência natural da flecha se sobressaia e a faça cair, atingindo o solo quando seu movimento contra-natural tenha sido completamente superado. Mostra-se evidente, também, a geometria que define tal movimento. O lançamento horizontal possui uma força e, logo, uma velocidade horizontal. Entretanto, neste meio, o movimento natural do corpo é retilíneo para baixo, fazendo com que o movimento violento horizontal da flecha se curve à medida que aquele se sobressaia a ele, formando um semi-arco de movimento oblíquo.

Todas essas considerações conduzem a acreditar que o universo de Aristóteles pode ser pensado como um espaço euclidiano. Como foi observado na figura 1, o universo possui geometria esférica (que é uma superfície tridimensional), e ainda a dinâmica desse universo, em si, é definida pelo movimento natural do primeiro corpo, o éter. Sobre isto, Évora elucida:

> *"...Se não há nenhum movimento natural contrário ao movimento circular então não há nada que seja contrário àquilo cujo movimento natural não tem contrário. Mas, se o éter não tem contrários, ele não pode estar sujeito à geração e corrupção, visto que tudo o que vem a ser por natureza, assim como tudo que se corrompe, vem a ser, ou se corrompe, ou a partir dos contrários, ou nos contrários, na presença de algum subjacente"* [2] [2].

Ou seja, sendo o primeiro corpo, do qual se constitui a esfera celeste, incorruptível, assim também deve ser a própria esfera celeste, implicando sua eternidade e, consequentemente, do universo, sendo este absoluto. Ainda, tendo a dinâmica do universo definida, como foi mencionado, por uma sucessão temporal de causa e efeito, o tempo também deve ser eterno e absoluto.

Dessa forma, é possível definir o universo aristotélico por meio de um espaço euclidiano tridimensional que será denotado aqui por $\mathbb{E}^3$. E também o tempo assim pode ser feito, sendo, então, $\mathbb{E}^1$. Ainda, o universo definido é incorruptível, o que implica que um dado ponto (x, y, z) pertencente a $\mathbb{E}^3$ deve ser o mesmo em (t) e (t'), sendo t' posterior à t, se manteve-se em repouso. Da mesma maneira, um evento que acontece em um determinado ponto (x, y, z) e outro em (x', y', z'), independentemente do deslocamento entre eles, possuem o mesmo tempo (t) se acontecem no mesmo instante. Pode-se dizer, portanto, que cada ponto de $\mathbb{E}^1$ está conectado com todos os pontos de $\mathbb{E}^3$ isoladamente.

[2] Não há movimento natural contrário ao movimento circular pois este é definido a partir de da esfericidade do universo, e também o universo por seu movimento circular, sendo a esfera uma superfície perfeita.

Em seu livro *The Road to Reality*, Roger Penrose [4] demonstra uma mesma construção, e propõe que seja apropriado definir um "espaço-tempo Aristotélico", de modo que este seria $\mathcal{A} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1$. Sendo, aqui, $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{E}^1$ geometrias euclidianas, como uma métrica, não uma cópia de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}$.

Embora seja possível considerar o ponto $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ coincidente com o centro da Terra (e do universo), para Aristóteles não existe uma definição exata de origem temporal. Cada instante de tempo é definido pelo 'agora', o que, caso fosse considerado $\mathbb{E}^1$ uma cópia de $\mathbb{R}$, faria com que qualquer medida realizada estivesse na origem do tempo, ou seja, no ponto 0. Portanto, uma métrica de maneira geral é mais bem apropriada para ilustrar essa construção.

O modelo dinâmico de Aristóteles, entretanto, apresenta algumas definições sobre as quais muitos pensadores ao longo do tempo se questionaram. Como foi mencionado, seu universo é completamente preenchido e sua dinâmica determinada pelo princípio de movimento aristotélico. Tal princípio impõe uma restrição fundamental sobre o movimento dos corpos: a impossibilidade da existência de forças a distância. Deve existir, durante todo o processo do movimento de um corpo terrestre, um motor, uma causa, que está necessariamente em contato com o corpo movido. Essa inferência provocou muitas dúvidas também em relação à própria concepção e formatação do universo aristotélico.

Com efeito, a física de Aristóteles pode ser, de maneira geral, enquadrada em uma categoria na qual muitos outras formulações, anteriores e posteriores a ele, também são encaixadas. Essa categoria é definida pela localização da esfera terrestre no universo. O modelo aristotélico é um modelo geocêntrico, o que é perfeitamente coerente com todo seu pensamento. A filosofia de Aristóteles é caracterizada, como elucidado no início do capítulo, por uma intensa expressão da observação humana. A posição privilegiada da Terra em relação a qualquer outro corpo, em um contexto relativamente primário de desenvolvimento do raciocínio humano e científico, parece ser completamente razoável. E, de fato, o modelo geocêntrico só foi realmente superado muito tempo depois de sua contemporaneidade.

Finalmente, após anos de conflitos em relação à posição da Terra no universo, um dos primeiros modelos formais a afirmar que este não era o caso, e definir a Terra em uma localização rotatória em relação a um outro sistema, foi apresentada por Copérnico, e aprimorado por Galileu Galilei.

1.2 O modelo copernicano e a dinâmica de Galileu

Em meio ao século XVI, e no ano de sua morte, Nicolau Copérnico (1473-1543) publicou o que viria a ser um grande marco na história da astronomia e no desenvolvimento da ciência - seu livro *De revolutionibus orbium coelestium*, ou Sobre a revolução dos corpos celestes. Neste, é apresentado um novo modelo cosmológico que provocou muitas críticas em meio a supremacia do modelo geocêntrico, uma vez que localizava o Sol como centro do universo, e não mais a Terra.

É sabido que muitos depois de Aristóteles propuseram novas interpretações acerca do cosmos, incluindo novas concepções de força e explicações para o movimento dos corpos. Entretanto, muitos destes modelos mantinham a noção, aparentemente essencial, de que o centro do universo é coincidente com o centro da Terra. Também Copérnico manteve-se, em alguns aspectos, preso à tradição aristotélica, mas com expressões consideravelmente diferentes.

O modelo copernicano é o primeiro modelo formal, matemático, heliocêntrico. Aqui, o Sol está localizado, imóvel, no centro do Universo e a Terra, assim como os outros planetas, orbitam circular e uniformemente em torno a ele. Ainda, Copérnico propôs que não só os planetas possuíssem uma trajetória de translação em torno do Sol, como possuíam também movimento orbital em torno de seus próprios eixos. E, por meio desta concepção, conseguiu explicar de modo consideravelmente simples os movimentos retrógrados dos planetas.

Apesar da distinção fundamental sobre a posição da Terra e o movimento dos planetas, residem no modelo copernicano, como mencionado, algumas semelhanças ao modelo aristotélico. Copérnico manteve o conceito de esfera das estrelas, que é o limiar do Universo de Aristóteles, e, consequentemente, a noção de um Universo finito. Entretanto, não mais a esfera estelar se move circularmente em relação ao centro do Universo, mas está fixa, e são as esferas planetárias que se movimentam em torno do Sol e de seus próprios eixos. Dessa forma, uma rotação completa da Terra em torno de seu eixo corresponderia ao período de um dia, explicando como após tal rotação as estrelas aparentavam estar na mesma posição.

A posição da Terra não sendo central ao Universo e seu movimento orbital provocou, ainda, fortes indagações sobre a dinâmica dos corpos terrestres. Se a esfera terrestre está em movimento, então deve haver alguma discrepância em relação à posição de um objeto que é solto de uma dada altura, de modo que este deveria ser 'deixado para trás'. Na literatura, a explicação de Copérnico sobre o problema se apresenta vaga, mas admite, de alguma forma, que o objeto participa do movimento de rotação da Terra. Ainda, como solução para o problema da queda de corpos pesados (que na concepção aristotélica é direcionada ao centro do universo, que é a Terra), Copérnico mantém a noção do movimento natural com respeito à Terra, apenas, e não mais ao Universo em si. Neste cenário, Copérnico introduz sobre a queda dos corpos pesados uma propriedade chamada gravidade, da qual ressalta:

"(...) parece-me que a gravidade não passa de uma inclinação natural

concedida às partes dos corpos pelo Criador a fim de combinar as partes no formato de uma esfera e contribuir, assim, para a sua unidade e integridade. E podemos crer que tal propriedade está presente também no Sol, na Lua e nos planetas, de modo que com isso retêm o seu formato esférico não obstante a variedade de caminhos." [5].

Novamente, e apesar de distintas concepções, a semelhança ao modelo aristotélico é nítida. A esfericidade dos planetas, seu movimento circular, e a finitude do universo, remetem à geometria perfeita adotada por Aristóteles. No entanto, por sua distinta formatação, o modelo copernicano foi um forte disparador para uma nova ciência, e uma nova noção de mundo, definida pela ruptura com o modelo geocêntrico.

O modelo heliocêntrico, entretanto, encontrou muitos obstáculos neste contexto. A concepção de um universo definido pela centralidade da Terra se expressava de maneira muito mais coerente em relação às tradições da Igreja Católica, que mantinha forte influência social na época. É muito especulado dentro da história se Copérnico realmente concebia a formulação de seu Universo como uma representação física real deste. No prefácio de seu livro, Andreas Osiander argumentou que o modelo copernicano era uma hipótese, e tinha finalidade puramente matemática e instrumental, não pretendendo, portanto, afirmar de fato que a Terra não era o centro do universo. Ainda, ao longo dos anos, a obra de Copérnico despertou interesse de muitos físicos e estudiosos, sendo passível de profundas mudanças, incluindo a ilimitação do sistema universal.

Os modelos cosmológicos formulados foram, em maioria, até então, caracterizados por uma limitação do Universo, estabelecendo-o como finito. Com Giordano Bruno (1548-1600), porém, tal concepção se mostrou não muito perfeita. Bruno alegou que não seria possível estabelecer um limite ao Universo, dado que a própria experiência humana, e sua interpretação de sentido, é limitada. Dessa forma, também não seria possível estabelecer uma centralidade absoluta ao Universo como um todo. Portanto, é com Bruno que o Universo deixa de ser extensamente indeterminado, e passa a ser infinito no mais puro sentido do termo.

Em meio a todas estas concepções, as dificuldades do sistema copernicano, e também as diferentes descobertas astronômicas decorrentes do avanço instrumental, foi então Galileu Galilei (1564-1642) quem, finalmente, propôs um rompimento significativo com as tradições aristotélicas.

Embora não admitindo, por falta de prova, a infinitude (ou finitude) do Universo, como queria Bruno, as novas observações dos corpos celestes convenceram Galileu a afirmar inexistente a hierarquia substancial defendida por Aristóteles, adotando o modelo copernicano e propondo novas explicações às entidades e manifestações dinâmicas. Galileu, desse modo, não prendeu-se às causas últimas dos fenômenos, assim como faziam os aristotélicos, mas sim, a uma descrição e análise extremamente empírica e quantitativa daqueles.

Uma das grandes distinções entre ambas as concepções está na noção de força. Galileu propôs um novo conceito para esta entidade, baseando-se na teoria do impetus. Ao considerar um corpo em um lançamento vertical, alega que este acontece por uma força impressa àquele, que consome-se durante o movimento, diminuindo até cessar no ponto em que o corpo atinge sua altura máxima, e então retorna à superfície terrestre. Ainda, conclui que o movimento de queda está associado a uma constante aceleração, e sua velocidade é proporcional e está relacionada ao tempo de queda, diferentemente de como havia imaginado no começo de suas reflexões sobre o problema[3]. Dessa forma, também, a velocidade dos corpos não deveria manter relação com suas respectivas massas.

Galileu defende, ainda, que se uma força é impressa a um corpo numa superfície lisa horizontal, na qual não há resistência ao movimento, este deveria perpetuar-se ao infinito. Esta última formulação é extremamente semelhante ao Princípio da Inércia, de Newton, que viria alguns anos depois, e, de fato, muitos estudiosos atribuem a Galileu sua autoridade. Mas, é importante ressaltar aqui que a superfície horizontal que se refere Galileu é uma superfície circular, na qual todo e qualquer ponto está equidistante do centro da Terra. Para Galileu, tal superfície horizontal é aproximada pela superfície terrestre, e este movimento é definido como movimento neutro.

Ambas as conclusões acerca dos movimentos horizontais e verticais dos corpos despertaram críticas. Novamente, para o movimento vertical, surge o argumento de que um corpo em queda livre, separado da Terra, não poderia acompanhar seu movimento de rotação. Então, por exemplo, um corpo que cai de um mastro não poderia cair exatamente aos pés do mastro, mas sim, deveria estar deslocado deste devido ao movimento rotativo da Terra. A resposta de Galileu, como elucida Júlio César Penereiro, é de que:

> *"...Um movimento não pode alterar as relações mútuas de um conjunto de corpos, desde que todos os corpos do conjunto participem daquele movimento"* [6].

Dessa forma, um observador em terra que vê um navio a navegar sabe que este se movimenta pelo mar (uniforme), mas um observador trancado dentro do navio, ao ver um corpo em queda livre de um mastro como mencionado (também dentro do navio), o veria cair exatamente nos pés desse, e nada poderia afirmar sobre o movimento do navio, porque o movimento do navio é um movimento horizontal como mencionado acima, e este é neutro e indiferente em relação à qualquer corpo.

---

3 No início de suas reflexões sobre o assunto, Galileu acreditou ser a velocidade proporcional unicamente ao deslocamento, e não ao tempo. Entretanto, experiências como a de um corpo deslizando sobre um plano inclinado o levaram a concluir como falso esse pensamento.

Embora ter assumido, erroneamente, que este fato seria uma expressão da conservação de movimento circular em torno da Terra, Galileu apresenta, aqui, o nascimento de um conceito que será de extrema importância ao longo deste texto: Um sistema, ou referencial, inercial, que também foi proposto por Bruno para explicar o problema do navio. Sobre este, Bruno diz:

> *"Imaginem-se dois homens: um no navio que está a andar e outro fora deste: que um e outro tenham a mão no mesmo ponto do ar e que desse mesmo lugar, ao mesmo tempo, um deixe cair uma pedra, e o outro, outra, sem lhes dar impulsão alguma; a pedra do primeiro, sem perder um ponto e sem se desviar da sua linha (vertical), irá para o lugar fixado antecipadamente; e a do segundo será transportada para trás. O que provém somente do fato de a pedra que parte da mão daquele que é levado pelo navio e que, por conseguinte, se move segundo o movimento deste, possuir uma certa virtude impressa que a outra não possui, a que vem da mão daquele que está fora do navio; e isto ainda que as (duas) pedras tenham a mesma gravidade e que, já que elas partiram – tanto quanto isto é possível – do mesmo ponto e sofreram a mesma impulsão, tenham o mesmo ar a atravessar. Desta diversidade não podemos dar nenhuma razão a não ser a de que as coisas que estão ligadas ao navio por uma ligação ou por uma tal presença se movem com ele; e que uma das pedras, a que se move com o navio, leva consigo a virtude do motor, enquanto a outra não tem aí participação"* [5].

Dessa forma, também a Terra há de ser como o navio - um sistema físico. E, portanto, os movimentos de quedas dos corpos devem acontecer similarmente, uma vez que estão ligados à Terra.

Então, como o movimento de um sistema físico não pode influenciar o movimento relativo entre os corpos que estão nele, impõe-se consequentemente que apenas o conhecimento deste não é suficiente para afirmar com clareza o movimento do sistema. Um observador dentro do navio, que apenas vê a queda do corpo do mastro, nada poderia afirmar sobre seu movimento. Assim sendo, conclui-se ainda que um movimento uniforme (circular, no caso) e repouso são quantitativamente equivalentes.

Ainda sobre o problema do movimento de queda em um navio, Galileu diz que, no momento em que o corpo é solto do mastro, existem nele dois movimentos diferentes: o movimento horizontal (que provém do fato de que o corpo está dentro do barco, e este está em movimento também) e o movimento vertical uniformemente acelerado, como de um corpo qualquer em queda livre. Dado que nenhuma força foi impressa ao corpo na horizontal, seu movimento nessa direção deve ser conservado, e portanto o corpo deve cair exatamente na linha vertical de onde foi solto. É neste contexto, então, onde fica explícita a relação entre a velocidade do navio e do corpo. Caso houvesse uma força horizontal aplicada a ele no momento de sua queda, seu movimento nessa direção não seria mais conservado, e haveria, portanto, uma velocidade relativa entre o objeto que cai no navio e a o sistema da Terra. Sendo assim, é possível extrair e formular as então equações de transformação de Galileu. Estas mantêm a forma:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.1}$$

E portanto, para as velocidades:

$$w' = w - v \tag{1.2}$$

Sendo o referencial com linha em movimento com relação ao referencial sem linha.

De resto, a premissa assumida no problema do navio é que este navega pelo mar com uma velocidade constante, e também o mar não apresenta qualquer tipo de resistência ao movimento. Obviamente, não é muito difícil imaginar, hoje, que talvez essas conclusões sejam correspondentes para o estado de repouso. Entretanto, em passos não muito óbvios na época e muito criticados por suas premissas, Newton postulou tal equivalência em forma de uma lei física, suscitando, assim, a base de sua mecânica, e uma nova concepção de dinâmica que, embora tenha apresentado falhas ao decorrer dos séculos, é aceita até hoje.

1.3 A mecânica newtoniana e o conflito com a teoria eletromagnética

Após anos de reflexões acerca do movimento dos corpos, e de teorias muito bem elaboradas sobre o assunto, é finalmente no século XVII que o cenário se mostra propício e nasce portanto a mecânica clássica, com a obra de Isaac Newton (1643-1727), especificamente o *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado em 1687. Neste, Newton estabelece uma sequência de definições e postulados acerca das grandezas e entidades físicas, e também leis para o movimento - Dentro destas, a já mencionada Lei da Inércia.

Como foi citado no subcapítulo anterior, Galileu já havia proposto de certa forma algo muito similar à Primeira Lei, e também outros, como Descartes (1596-1650) e Huygens (1629-1695), o fizeram alguns anos depois. Foi com a interpretação destas obras (e muitas outras), e também as observações de Kepler, que Newton construiu sua grande e completa obra, solucionando muitos dos problemas acerca do movimento e da dinâmica de maneira geral.

É introduzido nos *Principia*, antes das leis de movimento, uma sequência de definições acerca de algumas entidades físicas, como por exemplo massa, as diferentes categorias de força e também a quantidade de movimento, ou momento linear. Ainda, Newton apresenta alguns comentários que são fundamentais para compreensão daquelas. Estes são sobre a natureza do espaço e do tempo. Ambos, de acordo com Newton, são infinitos e contínuos, sendo o espaço tridimensional, estático, homogêneo e isotrópico, e o tempo unidimensional e homogêneo. Ainda, tempo e espaço são absolutos.

A dinâmica de Newton pode ser, com isso, sintetizada às suas três leis de movimento e a Lei da Gravitação Universal. Especificamente, tem-se a Primeira Lei:

I. Todo corpo (partícula) permanece no seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a mudar de estado devido à ação de forças aplicadas.

Recordando o que foi mencionado no subcapítulo 1.1, é aqui onde se mostrará nítida a diferença entre o antigo princípio aristotélico para o movimento e as novas formulações sobre este.

Para a Lei da Inércia, ao assumir a continuidade do movimento uniforme em linha reta, é necessário desprezar a resistência que o ar, ou qualquer meio, provoca em relação ao corpo, e qualquer força que possa atuar sobre este. Assim, obtém-se um espaço vazio, desprovido de manifestações mecânicas "naturais". Um vácuo. Ainda, a alteração do movimento só é estabelecida a medida que uma ou mais forças sejam aplicadas sobre o corpo. Sendo isto, concluir que os corpos necessitam permanecer em contato durante o movimento seria falsa inferência. Ao afirmar "à ação de forças aplicadas", nada se implica sobre a distância entre o que provocaria tal alteração e o corpo. Assim, em teoria, o que causa essa modificação poderia estar, ou não, em contato com o ele.

Tal conclusão não é tão surpreendente quando se leva em consideração também a obra de Kepler (1571-1630), da qual, como já mencionado, Newton usufruiu muito bem. Kepler, além de determinar o fim das órbitas circulares, já havia concluído com base em suas observações e análises astronômicas a possibilidade e existência de forças a distância, sendo estas diretamente relacionada a propriedades dos corpos. Em uma citação sua, diz:

> *"Logo, é claro que a doutrina tradicional acerca da gravidade está errada... A gravidade é a tendência corpórea mútua entre corpos cognatos (isto é, materiais) para a unidade ou contato de cuja espécie é também a força magnética, de modo que a Terra atrai uma pedra, muito mais do que uma pedra atrai a Terra... Supondo que a Terra estivesse no centro do mundo, os corpos pesados seriam atraídos, não por estar ela no centro, mas por ser um corpo cognato (material). Segue-se que independentemente de onde colocarmos a Terra... os corpos pesados hão de procurá-la sempre... Se duas pedras fossem colocadas em*

qualquer lugar do espaço, uma perto da outra, e fora do alcance da força de um terceiro corpo cognato, unir-se-iam, à maneira dos corpos magnéticos, num ponto intermediário, aproximando-se cada uma da outra em proporção à massa da outra. Se a Terra e a Lua não estivessem mantidas nas respectivas órbitas por uma força espiritual ou qualquer outra força equivalente, a Terra subiria em direção à Lua, um cinqüenta e quatro avos da distância, cabendo à Lua descer as restantes cinqüenta e três partes do intervalo, e assim se uniriam... Se a Terra cessasse de atrair as águas do mar, os mares se ergueriam e iriam ter à Lua... Se a força de atração da Lua chega à Terra, segue-se que a força de atração da Terra, com maior razão, vai até a Lua e ainda mais longe... " [7].

O conceito de força, entretanto, ainda na obra de Newton é impreciso. Suas referências a esta grandeza sempre parecem recorrer à definições primárias, nunca fornecendo, exatamente, uma independente definição, como pode ser observado na Segunda e Terceira Lei, que dizem respectivamente que:

II. A variação de movimento é proporcional à força aplicada; e dá-se na direção da qual a força está aplicada.

III. A toda ação sempre se opõe uma reação igual; ou, as ações mútuas de dois corpos são sempre iguais e em sentidos opostos.

A variação de movimento da qual se refere é a variação do momento linear, ou a quantidade de movimento. Esta, Newton define como sendo o produto entre a massa do corpo e a sua velocidade, tornando indireta a definição de força, juntamente com a Terceira Lei, que apenas caracteriza uma forma de atuação. São sobre seus três axiomas acerca do movimento, ou suas Três Leis, entretanto, em que se apoia toda a Mecânica Clássica. A Segunda Lei, ou lei das forças, em sua forma matemática é hoje definida como a equação de movimento, e por meio dela é possível obter toda informação sobre dinâmica clássica de um corpo.

Retomando a Primeira Lei, ainda, observa-se que é necessário estar em um sistema de referência no qual ela seja válida para observá-la, caso contrário nada adiantaria. De acordo com Newton, este sistema seria um referencial privilegiado. Entretanto, ele mostra que não existe apenas um referencial privilegiado, mas sim um conjunto destes, chamados de referenciais inerciais. Estes são também os sistemas de referência relativos, nos quais devem admitir, e serem invariantes, as transformações de Galileu. De acordo com o pensamento newtoniano, porém, deve existir um espaço absoluto e não cabe a sensibilidade humana negar sua existência. Mas, este não é o espaço em que são realizadas as observações e análises experimentais. O espaço em que isso acontece é, na verdade, uma classe de espaços, sendo estes, como dito, os referenciais privilegiados ou inerciais.

Novamente, de acordo com Roger Penrose, é possível classificar um espaço-tempo Newtoniano, que é também o espaço-tempo de Galileu, representado por $\mathcal{N} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^1$. Entretanto, como pode ser observado na Figura 2, diferentemente do "espaço-tempo"$\mathcal{A}$

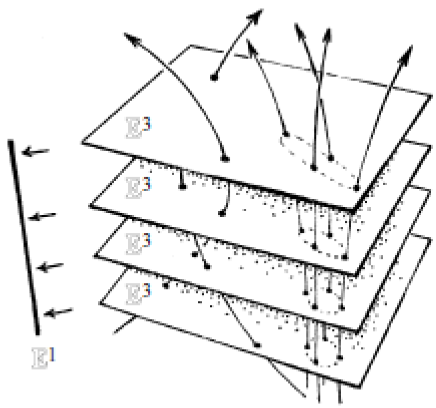

Figura 2 – Espaço-tempo Newtoniano, [4].

definido em Aristóteles, aqui não mais o espaço tem uma estrutura absoluta, mas sim é "gerado"um novo espaço a cada instante de tempo, que são espaços locais, pois, como foi dito, a consideração de Newton foi de que os referênciais inerciais são uma classe de espaços.

A mecânica Newtoniana durante muito tempo, enfim, apresentou uma boa descrição da realidade física das coisas, e, também por isso, o conceito de ação a distância das forças acabou por ser aceito. Ainda, com a introdução da noção de campos elétricos e magnéticos, feita por Faraday (1791-1867), foi natural que se desenvolvesse também o conceito de campo gravitacional, facilitando a compreensão do conceito de força. No final do século XIX, entretanto, uma outra teoria acabou por apresentar dificuldades a algumas explicações fornecidas pela Mecânica Clássica de modo geral. Esta teoria foi a teoria eletromagnética, já muito bem consolidada com as equações de Maxwell (1831-1879).

As equações de Maxwell mostram que a velocidade de uma onda eletromagnética no vácuo é uma constante, de valor igual ao da velocidade da luz, concluindo que a luz deve ser, portanto, uma onda eletromagnética com velocidade constante. Porém, é importante observar ainda que neste período (final do séc. XIX e começo do séc. XX) a ideia de um pulso eletromagnético se propagar sem um “meio” não era muito bem aceita e, então, a concepção da propagação da luz foi definida no éter.

A introdução formal de sistemas de referenciais inerciais, feita por Newton, estabelece, juntamente com as transformações de Galileu, um princípio de relatividade no qual as leis da física devem se manter invariantes sobre tais equações de transformação. Ou seja, devem ser as mesmas para qualquer que seja o sistema adotado. A problemática apresentada aqui reside justamente no funcionamentos dessas equações perante sistemas que viajam com velocidades próximas a da luz, ou iguais a ela. Supõe-se que no sistema do Éter seja feita uma medida de um pulso luminoso e se obtenha exatamente a constante c, que define a velocidade da luz. Em um outro sistema que se move com velocidade v em relação a esse, de acordo com a equação (1.2), o valor da velocidade medida para o pulso luminoso seria $c+v$ ou $c-v$, dependendo da direção de movimento relativo entre os referenciais. Sendo assim, a velocidade da luz não seria, de fato, invariante.

Essa conclusão desperta um grande problema, para o qual se apresentariam algumas possíveis respostas. A primeira delas é de que existiria um princípio da relatividade apenas para a Mecânica, mas não para a eletrodinâmica, e para esta existiria, portanto, um referencial inercial preferencial, o éter. Essa possibilidade foi completamente rejeitada com um experimento realizado por Michelson e Morley, que falhou ao tentar localizar o sistema de éter, não obtendo, como esperado, diferentes valores para a velocidade da luz em quaisquer outros sistemas. Uma outra alternativa seria admitir que um princípio da relatividade existe e é válido tanto para a mecânica quanto para a eletrodinâmica, mas a teoria eletromagnética conforme as equações de Maxwell não estaria correta, e seria possível realizar experiências que mostrassem falhas nessa teoria, o que também não foi possível encontrar. Por fim, uma última possibilidade seria de que o princípio da relatividade é válido para ambas as áreas, porém seriam as leis da mecânica que não estariam corretas, e deveriam ser corrigidas. Neste caso, as transformações perante a diferentes referenciais inerciais não poderiam ser as de Galileu, e outras deveriam ser formuladas.

Como é sabido, a última possibilidade citada acima foi a que se mostrou mais coerente e correta. Assumindo a veracidade da teoria eletromagnética e, portanto, a constância da velocidade da luz, mostra-se nítido que há algo de errado com as equações de transformação de Galileu.

Ainda, é de extrema importância observar que para a mecânica de Newton, assim como para as transformações de Galileu, não existem restrições acerca do módulo da velocidade que um corpo, ou partícula, poderia assumir. Até então, um corpo poderia viajar acelerado de maneira uniforme indefinidamente, conduzindo sua velocidade a atingir um valor infinito. Isto pode ser facilmente observado ao se pensar no exemplo seguinte [9]: Assume-se que um corpo em um referencial O' se move com velocidade máxima limite $w_{máx}$, e também o referencial inercial O' se move em relação a outro sistema O com velocidade $w_{máx}$. De acordo (1.2), a velocidade medida no referencial O seria $2w_{máx}$, contrariando a premissa assumida. Dessa forma, não deve haver um limite de valor para o qual a velocidade deve se estabelecer. Ao adotar, entretanto, como foi mencionado acima, a terceira hipótese, admitindo portanto a validade da teoria eletromagnética, isto não faz sentido.

Retomando a ideia de um referencial inercial, é evidente que ele deve estar de acordo com a Primeira Lei, e portanto deve se mostrar indistinguível para um observador neste referencial se este está em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme. Dessa forma, considera-se uma nave que parte do repouso e acelera uniformemente, e um dispositivo dentro dela no qual é emitido um feixe de luz que a ilumina e viaja com velocidade c. Estando a nave acelerada, de modo que sua velocidade aumente a ponto de ser maior que a velocidade do feixe, e se estabeleça com velocidade constante $v' > c$, deve acontecer um total apagão na nave, o que faria com que um observador dentro dela pudesse identificar se esta está se movimentando uniformemente ou em repouso. Este fato viola o princípio da relatividade, pois admite que exista um referencial inercial preferencial no qual se possa distinguir seu estado de repouso do seu movimento retilíneo uniforme por uma experiência isolada.

Essas conclusões sugerem, novamente, que há algo de errado com a teoria da mecânica clássica. Deve haver, portanto, uma restrição sobre a velocidade dos corpos, de modo a não violar o princípio de relatividade, e foi exatamente isto que propôs Einstein.

Em 1905, foi publicado por Albert Einstein (1879-1955) o artigo *"On the electrodynamics of moving bodies"*. Neste, Einstein apresenta a teoria da relatividade restrita (ou especial). A teoria, em princípio, poderia ser definida como uma teoria de invariância, uma vez que o seu objetivo primário era garantir a invariância das leis físicas em qualquer sistema inercial. Entretanto, e como será observado no capítulo seguinte, tal teoria apresentou algumas consequências não muito intuitivas, e algumas modificações dramáticas sobre conceitos que pareciam estar, até então, muito bem estabelecidos, como o caráter absoluto do espaço e do tempo. A partir daqui, não mais essas entidades são absolutas, mas sim apresentam um caráter relativo em dependência dos referenciais, mostrando também supérflua a necessidade do éter. Ainda, com contribuições que vieram após a publicação da teoria, espaço e tempo não mais são representados isoladamente do ponto de vista geométrico, mas são uma única construção contínua: o espaço-tempo.

A obra de Einstein foi, sem sombra de dúvidas, um grande marco não só na história da mecânica como na história da física. A teoria da relatividade restrita apresentou, com elegância e simplicidade, não apenas uma solução para os problemas da mecânica clássica, como foi também capaz de abrangê-la no seu limite funcional. Ainda, a teoria conseguiu explicar os resultados experimentais já existentes, e prever novos efeitos que foram confirmados experimentalmente depois, nunca tendo encontrado uma objeção experimental aos seus postulados e suas consequências.

2 A Teoria da Relatividade Restrita

A teoria da relatividade restrita (TRR), como foi mencionado no capítulo anterior, foi proposta por Einstein em 1905, em seu artigo *"On the electrodynamics of moving bodies"*, e se baseia em dois grandes postulados. O objetivo deste capítulo é introduzir tais postulados, e mostrar, qualitativamente, suas consequências físicas.

O primeiro postulado de Einstein para a TRR, do qual pode ser obtido o segundo, é o Princípio da Relatividade:

I.As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial.

É evidente que este é idêntico ao princípio de relatividade da Mecânica Clássica. E, de fato, decorre aqui também que, sendo as leis da Física as mesmas para qualquer sistema inerte, então não é possível diferenciá-los por meio de qualquer teste destas leis. Entretanto, com a aceitação da teoria eletromagnética, que automaticamente impõe falhas sobre as transformações de Galileu, este postulado terá diferentes expressões. A primeira delas, obviamente, é de que também as equações de Maxwell no vácuo deverão ser as mesmas em qualquer referencial inercial. Sendo isto, a velocidade da luz que é definida constante pela eletrodinâmica deve manter-se invariante. Assim, tem-se o que é o segundo postulado fundamental de Einstein:

II. A velocidade da luz no vácuo é a mesma independentemente do referencial inercial.

Este será aqui denominado como o Princípio da constância da velocidade da luz, por motivos óbvios.

Uma observação importante que deve ser feita acerca destes postulados, especificamente do postulado I, é de que este implica, diretamente, que todos os referenciais inerciais são, do ponto de vista das leis físicas, equivalentes. Dessa forma, o conceito de espaço absoluto se mostra redundante. Todos os referenciais são espaços absolutos, mas, sendo assim, nenhum o é. Então, até onde se pode saber, o espaço absoluto não existe.

Ainda, como será visto adiante, decorre da invariância das leis da Física em quaisquer referenciais inerciais que o tempo também não é absoluto, e, de fato, uma boa compreensão do conceito de tempo foi fundamental para o desenvolvimento da Teoria.

Será tratado, aqui, do tempo e do espaço como construções geométricas, e será associado a estes o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, com coordenadas (ct, x, y, z), por motivos que ficarão claros no capítulo seguinte. Assim sendo, um evento é definido como um ponto de $\mathbb{R}^4$, ao qual estarão associadas suas informações temporais e espaciais.

2.1 Invariância do intervalo de espaço e tempo

Antes de adentrar nas consequências impostas pela TRR, é necessário mostrar alguns resultados[4]. Apesar de espaço e tempo, como já mencionado, não terem isoladamente um caráter absoluto, a partir do Princípio da Relatividade é necessário que um intervalo entre dois eventos em $\mathbb{R}^4$ (composto por espaço e tempo) se mantenha invariante independente do referencial inercial. Sendo assim, define-se:

Definição 2.1 *O intervalo no espaço e tempo definido por dois eventos, separados por incrementos Δt, Δx, Δy e Δz, em um referencial inercial O é:*

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2.$$

É nítido que um intervalo só será idêntico a zero se, e somente se, os eventos acontecem um após o outro na velocidade da luz. Uma simples substituição da contribuição temporal por seu equivalente de um movimento uniforme evidencia isto. De modo que:

$$(\Delta t)^2 = \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{c^2}.$$

Onde o numerador está associado ao intervalo espacial, e o denominador é a própria velocidade da luz ao quadrado. Assim,

$$c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Que é exatamente a equação de uma esfera, da qual um pulso luminoso se propaga no tempo com raio $c\Delta t$, concordando com a inferência de que os eventos devem acontecer com velocidade c.

Ainda, decorre automaticamente que, sendo O e O' dois referenciais inerciais, e Δs^2 e $\Delta s'^2$ os intervalos associados, respectivamente, se $\Delta s^2 = 0$, é necessário e suficiente que $\Delta s'^2 = 0$, uma vez que a velocidade da luz é invariante com respeito aos referenciais inerciais.

A partir daqui, será usada a seguinte notação: $\Delta t = \Delta x^1$, $\Delta x = \Delta x^2$, $\Delta y = \Delta x^3$, $\Delta z = \Delta x^4$. E, por simplicidade, $c = 1$, de forma que:

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2.$$

Enfim, tem-se:

[4] As construções feitas neste capítulo, bem como no capítulo 3, são baseadas majoritariamente nas referências [10] e [12].

Teorema 2.1 (Invariância do intervalo no espaço e tempo) [5] *Para quaisquer referenciais O e O' é dado que*

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2.$$

Prova 2.1 *Por simplicidade, será assumida a coincidência da origem dos referencias. Também, as coordenadas de O' são funções lineares das coordenadas de O, e portanto pode-se escrever $\Delta s'^2$ como uma função quadrática das coordenadas daquele. Tem-se:*

$$\Delta s'^2 = \sum_{i,j=1}^{4} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j. \tag{2.1}$$

Em que M_{ij} são constantes reais, podendo, também, ser função da velocidade relativa $\boldsymbol{v}$ entre os referenciais. Abrindo a somatória, ela pode ser reescrita como:

$$\Delta s'^2 = M_{11}(\Delta t)^2 + 2(\sum_{i=2}^{4} M_{1i}\Delta x^i)\Delta t + \sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j.$$

Observando que o segundo termo ao lado direito da equação ocorre pois é possível assumir, sem perda de generalidade, que $M_{ij} = M_{ji}$. Assim sendo, fixado $i = 1$ ou $j = 1$, obtem-se dois termos equivalentes.

Como foi dito após a definição (2.1), $\Delta s^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta s'^2 = 0$. Assim, assumindo dois eventos que $\Delta s^2 = 0$, tem-se:

$$M_{11}(\Delta t)^2 + 2(\sum_{i=2}^{4} M_{1i}\Delta x^i)\Delta t + \sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = 0. \tag{2.2}$$

E, ainda, continua válido para quaisquer incrementos, de modo que pode-se admitir $\Delta x^i = -\Delta x^i$ e $\Delta x^j = -\Delta x^j$. Portanto, é possível reescrever (2.2) como:

$$M_{11}(\Delta t)^2 - 2(\sum_{i=2}^{4} M_{1i}\Delta x^i)\Delta t + \sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = 0. \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.3) de (2.2), obtém-se:

$$\sum_{i=2}^{4} M_{1i}\Delta x^i \Delta t = 0.$$

Novamente, Δx, Δy e Δz são arbitrários, de modo que admite-se aqui $\Delta x^i = \Delta t = k$, sendo k uma constante diferente de zero. Então, da solução trivial, obtém-se:

$$M_{1i} = 0, \quad i = 2, 3, 4. \tag{2.4}$$

[5] Ref. [10].

De modo que:

$$M_{11}(\Delta t)^2 + \sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j = 0. \tag{2.5}$$

É claro: se $i = j$ *e* $\Delta x^i = \Delta t = k$*, tem-se:*

$$M_{11} = -M_{ii}, \quad i = 2, 3, 4. \tag{2.6}$$

Agora, se $i \neq j$*, sejam duas escolhas: (i)* $\Delta x^i = \Delta x^j = k$ *e (ii)* $\Delta x^i = k$ *e* $\Delta x^j = -k$*, ambas com* $\Delta t = \omega$*, e* k, ω *constantes diferentes de zero. Assim, a equação (2.5) se torna, respectivamente:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & M_{11}(\omega)^2 + \sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}k^2 = 0, \\ (ii) \quad & M_{11}(\omega)^2 - \sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}k^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Que, subtraindo (ii) de (i), dá:

$$\sum_{i,j=2}^{4} M_{ij}k^2 = 0. \tag{2.8}$$

Então, da mesma forma que em (2.4):

$$M_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Portanto:

$$M_{ij} = -M_{11}\delta_{ij}, \quad i, j = 2, 3, 4. \tag{2.9}$$

Em que δ_{ij} *é uma* ***delta de Kronecker****.*

Dessa forma, substituindo estes resultados na equação (2.1), obtém-se:

$$\Delta s'^2 = M_{11}\Delta t^2 - M_{11}\sum_{i,j=2}^{4} \Delta x^i \Delta x^j \delta_{ij}. \tag{2.10}$$

Ora, se (2.6) está correta, então $M_{11} = -M_{22} = -M_{33} = -M_{44}$*. Sendo assim, substitui-se, por convenção,* M_{11} *por* $-M_{22}$*. Então, tem-se:*

$$\Delta s'^2 = -M_{22}\Delta t^2 + M_{22}\sum_{i,j=2}^{4} \Delta x^i \Delta x^j \delta_{ij}. \tag{2.11}$$

Obviamente, para $i \neq j$ *obtém-se que* $\Delta s'^2 = 0$*. E isso ocorre porque, como dito no inicio da demonstração, as constantes foram definidas tais que respeitem* $\Delta s^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta s'^2 = 0$*. Portanto, fosse esse o caso, e com* $i \neq j$*, tería-se:*

$$\Delta s'^2 = -M_{22}\Delta t^2 = 0.$$

implicando que, para dado um intervalo qualquer Δt, todas as contantes (pois (2.6)) são nulas. E, dessa forma, $\Delta s'^2 = 0$ sempre! Sendo $\Delta s'^2$ uma combinação linear dos elementos no referencial inercial O, então para qualquer $\Delta s^2 \neq 0$, estaria associado $\Delta s'^2 = 0$. Mas, $\Delta s'^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta s^2 = 0$, e então isso não faz sentido.

Ainda, se é admitido que $-M_{22} \neq 0$ de modo que Δt é sempre 0 para $i \neq j$, implicaria que

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0.$$

E isso só é verdade para a solução trivial $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Se todos os intervalos são iguais a zero, ou, em outras palavras, se não houve nenhuma variação medida entre os eventos, pode-se assumir que os eventos são idênticos em O. E, portanto, a invariância só seria verdadeira neste caso.

Agora, se $i = j$, o somatório equivale exatamente ao intervalo no referencial O. Ou seja:

$$\Delta s'^2 = -M_{22}(\Delta t)^2 + M_{22}[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]. \tag{2.12}$$

Que dá:

$$\Delta s'^2 = M_{22}\Delta s^2. \tag{2.13}$$

Que é verdadeiro para quaisquer Δs^2 e $\Delta s'^2$.

Para determinar M_{ij} foi necessário invocar eventos que satisfazem $\Delta s^2 = 0$. Esses eventos, como já mencionado, ocorrem na velocidade da luz, que é uma invariante e, portanto, satisfazem também $\Delta s'^2 = 0$. Dessa forma, a universalidade da velocidade da luz implica que o intervalo de espaço e tempo medido em um referencial inercial O' está relacionado com o intervalo medido em O por um fator M_{22}. Denota-se esse fator aqui de $\varphi(\boldsymbol{v})$, pois, como já foi dito, pode estar relacionado com a velocidade relativa entre os referenciais.

*Portanto, sejam três referenciais inerciais O, O' e O'' tal que O' se move em relação a O com velocidade constante $\boldsymbol{v}$, e O'' se move em relação a O' com velocidade constante **-v**. De acordo com (2.13), tem-se que:*

$$\begin{aligned} (i) \quad \Delta s'^2 &= \varphi(\boldsymbol{v})\Delta s^2, \\ (ii) \quad \Delta s''^2 &= \varphi(\boldsymbol{v})\Delta s'^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituindo (ii) em (i), tem-se:

$$\Delta s''^2 = \varphi^2(\boldsymbol{v})\Delta s^2.$$

*Entretanto, da suposição dos referenciais, conclui-se que O'' é idêntico a O, uma vez que O também se move em relação a O' com velocidade relativa **-v**. Portanto,*

$$\Delta s^2 = \varphi^2(\boldsymbol{v})\Delta s^2 \Rightarrow \varphi^2(\boldsymbol{v}) = 1. \tag{2.15}$$

Mas, $\varphi(\boldsymbol{v}) = \varphi(v)$, pois para eventos simultâneos em O, que também o são em O'' (pois são idênticos), acontece que de acordo com (2.13) apenas os comprimentos estão relacionados, e estes não podem depender da direção de $\boldsymbol{v}$. Ainda, deve ser tal que $\varphi(v) > 0$, pois neste caso $\varphi^2(v)$ representa a razão entre quadrados de comprimentos, que é sempre maior que zero. Sendo assim, tem-se $\varphi(v) = 1$ e, de acordo com (2.13), como se queria mostrar:

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2. \tag{2.16}$$

Para quaisquer referenciais inerciais O' e O.

Uma importante observação, ainda, é de que o intervalo de espaço e tempo também será invariante de acordo com as dimensões transversais à direção de movimento, e isso ocorre porque o espaço não possui direções preferenciais nas quais poderia sofrer alguma alteração - é o mesmo para todas elas, preservando a característica isotrópica, como queria Newton.

Entretanto, é de extrema importância enfatizar que a simultaneidade dos eventos depende do referencial inercial em que eles estão. Eventos que são simultâneos em um referencial inercial O' não são em um referencial inercial O para o qual aquele se move relativamente com uma dada velocidade constante, e este fato implica em uma importante consequência que será observada a seguir.

2.1.1 Contração espacial

Considera-se, então, um referencial O' que se movimente com velocidade constante em relação à O na direção do eixo x. Sejam dois eventos, A e B, que acontecem no referencial O' espaçados por um intervalo espacial $\Delta x' = x'_B - x'_A$. Dessa forma, de acordo com a definição de intervalo de espaço e tempo, tem-se que:

$$\Delta s'^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - \Delta t'^2.$$

Com $\Delta t' = t'_B - t'_A$, que é o intervalo de tempo do evento medido com relação ao referencial O'.

Como o referencial O' se move em relação ao referencial O, e os eventos A e B estão em repouso em relação a O', a medida da posição dos eventos A e B em O devem ser feitas simultaneamente neste referencial. É óbvio, ao pensar, como exemplo, uma barra que se move com velocidade constante em relação a um referencial inercial qualquer. Se a posição de suas extremidades não forem medidas no mesmo instante de tempo, então o intervalo da medição não corresponderá ao intervalo espacial que realmente é ocupado pela barra.

Assim sendo, para o referencial O tem-se que o intervalo espaço-temporal é:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Evidentemente, como mencionado, no referencial inercial O: $\Delta t = 0$, pois são simultâneos. Ainda, como as dimensões transversais a direção do movimento são invariantes, $\Delta y = \Delta y'$ e $\Delta z = \Delta z'$.

Dessa forma, pelo teorema (2.1), que garante que $\Delta s^2 = \Delta s'^2$, obtém-se:

$$\Delta x^2 = \Delta x'^2 - \Delta t'^2.$$

E decorre que:

$$\Delta x < \Delta x'.$$

Ou seja, o intervalo espacial medido no referencial inercial dos eventos, o referencial O', para o qual eles estão em repouso, é sempre maior que qualquer medida feita em um referencial para o qual O' se move com velocidade constante, negando o espaço absoluto e garantindo uma contração espacial com relação dependente entre os referenciais inerciais.

O parâmetro para o qual a relação entre as medidas é determinada é a velocidade da luz, então, é possível imaginar que cada evento (A e B) é, na verdade, um pulso luminoso a se propagar. Se a medida é, portanto, a de uma barra em um referencial inercial O', então os pulsos se propagam das extremidades, e atingem um observador em O simultaneamente, como pode ser observado na Figura 3.

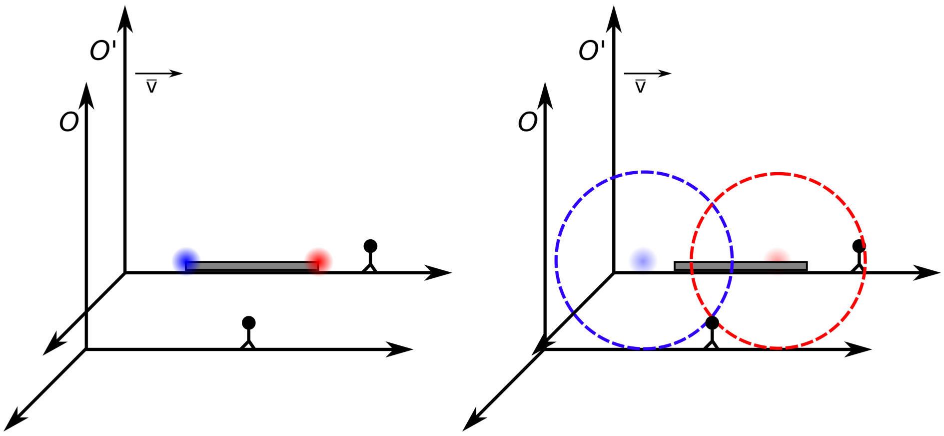

Figura 3 – Contração espacial.

Mas, O' se move com velocidade constante em relação a O, portanto, a partir do momento em que os pulsos foram emitidos, O' já não está no mesmo lugar, e esses devem se atrasar para um observador neste referencial inercial. Como pode ser observado na Figura 4, um dos pulsos (pulso azul) deve atingir o observador um dado tempo depois que o outro (pulso vermelho). Assim, o intervalo medido neste referencial inercial deve ser maior do que em O.

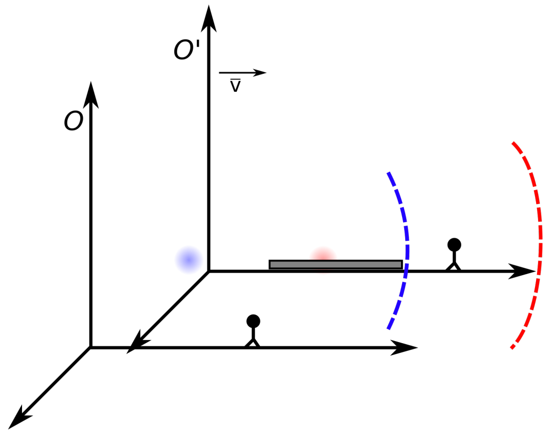

Figura 4 – Contração espacial.

Essa consequência do teorema da invariância obtida é também conhecida por contração de Lorentz.

2.1.2 Dilatação temporal

Agora, supõe-se que um referencial inercial O' está em repouso e coincide com um referencial também em repouso O no instante em que O' passa a se movimentar e atinge velocidade constante v. No instante inicial de movimento faz-se uma medida, um evento A, que dá $(x_A, t_A) = (x'_A, t'_A) = (0, 0)$. Após um determinado tempo, é feita outra medida, definida por evento B, que fornece as coordenadas (x_B, t_B) em relação ao referencial O. Para O', entretanto, tem-se que $(x'_B, t'_B) = (0, t'_B)$. O ponto x'_B da segunda medida é igual

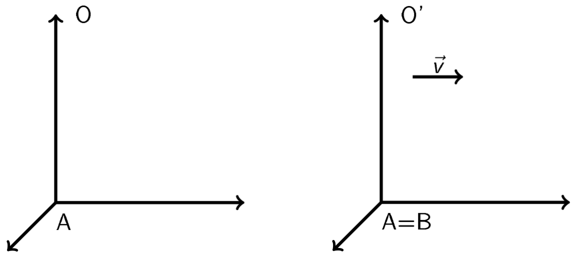

Figura 5 – Dilatação temporal.

a zero pois ele ocorre, para O', na mesma posição em que foi feita a medida no instante inicial de movimento, como na Figura 5.

Como exemplo, imagina-se hipoteticamente uma nave que parte da Terra em direção a um outro planeta localizado a anos-luz de distância. Na nave, a posição da medida do evento A e do Evento B é a mesma.

Sendo assim, os intervalos de espaço e tempo para os dois referenciais são:

$$\Delta x = x_B - x_A$$
$$\Delta x' = x'_B - x'_A = 0$$
$$\Delta t = t_B$$
$$\Delta t' = t'_B.$$

Daqui, e por diante, será omitida a variação relativa às dimensões transversais ao movimento pois, como dito, são invariantes.

Portanto, pela invariância de espaço e tempo, tem-se que:

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2,$$
$$\Rightarrow \Delta x^2 - \Delta t^2 = -\Delta t'^2,$$
$$\Rightarrow \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t'^2.$$

O que dá:

$$\Delta t > \Delta t'.$$

Ou seja, o intervalo de tempo entre os eventos no referencial O', para o qual acontecem na mesma posição, é sempre menor que o intervalo de tempo determinado no referencial O. Isso leva à conclusão estrondosa de que o tempo não é, de fato, absoluto!

Ainda, decorre da diferença entre estes intervalos de tempo que sendo dois relógios, ou marcadores de tempo, tais que um esteja em repouso em relação a um observador, e outro se move com velocidade relativa v em relação a este, então o primeiro avança com velocidade máxima possível, enquanto que o outro tem sua velocidade contraída. Se a velocidade daquele está em repouso é máxima possível, seu tempo deve ser, assim, o menor possível, e qualquer outra medida feita por um relógio que se mova em relação a esse, deve ser dilatada.

3 O espaço-tempo de Minkowski

Como consequência do teorema da invariância do espaço e tempo, foi observado que a relação entre a distância de dois eventos, que ocorrem em um referencial inercial O, e a distância deste mesmo em um referencial inercial O' diferente, está relacionada com seu tempo, e vice-versa. Aqui, essa relação ficará nítida.

Após a publicação da Teoria da Relatividade Restrita em 1905, o alemão Hermman Minkowski (1864-1909) a reformulou matematicamente utilizando a concepção de que o espaço o tempo formam um único espaço contínuo - o espaço-tempo. Neste capítulo, serão apresentados alguns aspectos da construção deste espaço e obtidas as equações de transformação de Lorentz, que fornecem, portanto, uma correção para os problemas da mecânica clássica junto às transformações de Galileu.

Dessa forma, define-se:

Definição 3.1 *Um espaço-tempo de Minkowski é um espaço vetorial real $\mathcal{V}$ de dimensão 4, ou $\mathbb{R}^4$, munido com a métrica de Lorentz, e será denotado por $\mathbb{M}$.*

O produto interno em $\mathbb{M}$ é definido por:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \eta_{ij} v^i u^j,$$

onde

$$\eta_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad i = j = 1 \\ 1 & \text{se} \quad i = j = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Assim,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = -v^1 u^1 + \sum_{i=2}^{4} v^i u^i.$$

Ou, explicitamente:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = -v^1 u^1 + v^2 u^2 + v^3 u^3 + v^4 u^4. \tag{3.1}$$

Com forma quadrática associada igual a:

$$q(\mathbf{u}) = -(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2. \tag{3.2}$$

Com a definição (2.1) é possível ver que essa forma quadrática, que é gerada pela **métrica de Lorentz**, é equivalente ao intervalo de espaço e tempo que havia sido definido, e que será daqui por diante chamado de intervalo no espaço-tempo. Assim, sendo

$\mathbf{v} = (ct_v, x_v, y_v, z_v)$ e $\mathbf{w} = (ct_w, x_w, y_w, z_w)$ dois eventos quaisquer em um sistema inercial O de $\mathbb{M}$, de modo que $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$, então:

$$\Delta s^2 = q(\mathbf{u}). \tag{3.3}$$

A formulação do espaço-tempo de Minkowski, portanto, não é simplesmente uma construção matemática, mas fornece, por meio de sua geometria, uma interpretação física para as diversas consequências da teoria da relatividade restrita. Como foi dito no início do Capítulo 2, decorre do Princípio da Relatividade, postulado I, que o intervalo de espaço-tempo deveria ser invariante com respeito a quaisquer referenciais inercias. A explicação disto reside justamnete nessa construção. Os referenciais inerciais são construídos não mais em $\mathbb{R}^3$ com uma métrica euclidiana, mas sim em $\mathbb{M}$, e é claro, com uma visão geral do espaço, que o intervalo definido, ou a forma quadrática, de um vetor neste deve ser o mesmo sempre.

Segundo o próprio Minkowski acerca de suas formulações:

> *"A sua tendência é radical. Daqui em diante os conceitos de espaço e tempo, considerados como autônomos, vão desvanecer-se como sombras e somente se reconhecerá a existência independente a uma espécie de união entre os dois"* [13].

E, então, agora tempo e espaço hão de ser um só contínuo, e absoluto.

Sendo assim, é possível determinar quantitativamente por qual fator estão relacionadas as medidas dos eventos.

Seja, então, a situação considerada no subcapítulo (2.1.2), onde os referenciais inerciais O e O' coincidem no instante inicial.

Desse modo, para dois eventos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em O' determinados neste por $\mathbf{v}' = (0, 0, y'_A, z'_A)$ e $\mathbf{w}' = (ct'_B, 0, y'_B, z'_B)$, respectivamente, e em O por $\mathbf{v} = (0, 0, y_A, z_A)$ e $\mathbf{w} = (ct_B, x_B, y_B, z_B)$. Então, tem-se que o vetor de intervalo espaço-temporal é $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$. Dessa forma,

$$\mathbf{u}_O = (ct_B, x_B, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

$$\mathbf{u}_{O'} = (ct'_B, 0, y'_B - y'_A, z'_B - z'_A).$$

Então, do resultado acima e do teorema (2.1), é dado que:

$$-c^2(t'_B)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2 = -c^2(t_B)^2 + (x_B)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2. \tag{3.4}$$

Que equivale a:

$$-c^2(t'_B)^2 = -c^2(t_B)^2 + (x_B)^2, \tag{3.5}$$

pois a direção de movimento é ao longo do eixo x-x', e as medidas transversais são invariantes. Ou seja $(y'_B - y'_A)^2 - (y_B - y_A)^2 = 0$ e $(z'_B - z'_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = 0$

Entretanto, a medida x_B pode ser escrita como $x_B = vt_B$, em que v é o módulo da velocidade relativa entre O' e O. Assim, tem-se que:

$$c^2(t'_B)^2 = c^2(t_B)^2 - (vt_B)^2,$$

$$\Rightarrow (t'_B)^2 = (t_B)^2 - \frac{v^2}{c^2}(t_B)^2,$$

Donde:

$$t_B = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} t'_B. \tag{3.6}$$

Por simplicidade, define-se:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}, \tag{3.7}$$

que é o fator de correção de Lorentz.

Ainda, define-se $\mathbf{v}$ tal que $|v| < c$, e isto implica que $\gamma \geq 1$. Então, o intervalo de tempo medido no referencial O será sempre, de fato, maior ou igual ao que é medido em O'! O tempo em O é então dilatado pelo fator γ, e, conhecendo o valor de v, é possível determinar qual é o valor desta dilatação do tempo.

Se $v \to c$, então

$$t_B \to \infty.$$

Isso significa que o comprimento do intervalo de tempo para o referencial O é infinito. Em outras palavras, durará uma eternidade.

A admissão de $v < c$, ainda, se mostra necessária. O espaço em que a métrica é definida é $\mathbb{R}^4$, de modo que fosse $v > c$ a equação (3.7) produziria uma raiz negativa, o que não faz sentido.

Agora, de maneira geral, consideram-se dois referenciais, O e O', em que O' se move com velocidade relativa $\mathbf{v}$ na direção dos eixos x-x'. Sejam dois eventos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tais que em O':

$$(ct'_A, x'_A, y'_A, z'_A) \quad \text{e} \quad (ct'_B, x'_B, y'_B, z'_B).$$

E, para O,

$$(ct_A, x_A, y_A, z_A) \quad \text{e} \quad (ct_B, x_B, y_B, z_B).$$

Os intervalos dos eventos em O podem ser reescritos como uma combinação linear dos intervalos em O'. E, de fato, estando em um espaço vetorial, essa combinação entre ambos deve ser linear. Se o eixo x em O está relacionado com x' em O' tal que $x = k(v)x'^2$, então dois eventos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ estariam relacionados por um intervalo $\Delta x = k(v)\Delta x'$. Assim,

$(x_B - x_A) = k(v)[(x'_B)^2 - (x'_A)^2]$. Se estes eventos são, por exemplo, a medida de uma barra de comprimento unitário sobre o eixo, que é designado em O' por $\mathbf{A} = (0, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = (0, 3, 0, 0)$, então para O seu comprimento seria $\Delta x = 5k(v)$. Entretanto, se a posição dos eventos é outra, como $\mathbf{A} = (0, 4, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = (0, 5, 0, 0)$, então deve gerar $\Delta x = 9k(v)$. Isto diz que a medida do intervalo depende da posição em que ela é feita, e não faz sentido, pois não concorda com o fato de que o espaço possui caráter homogêneo.

Portanto, em representação matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{bmatrix}.$$

Que produz:

$$\begin{cases} c\Delta t = a_{11}c\Delta t' + a_{12}\Delta x' + a_{13}\Delta y' + a_{14}\Delta z' \\ \Delta x = a_{21}c\Delta t' + a_{22}\Delta x' + a_{23}\Delta y' + a_{24}\Delta z' \\ \Delta y = a_{31}c\Delta t' + a_{32}\Delta x' + a_{33}\Delta y' + a_{34}\Delta z' \\ \Delta z = a_{41}c\Delta t' + a_{42}\Delta x' + a_{43}\Delta y' + a_{44}\Delta z' \end{cases} \tag{3.8}$$

Agora, as dimensões transversais ao movimento são invariantes, de modo que $\Delta y' = (y'_B - y'_A) = \Delta y = (y_B - y_A)$ e $\Delta z' = (z'_B - z'_A) = \Delta z = (z_B - z_A)$. Isto implica que $a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$. Concluindo que $a_{33} = a_{44} = 1$. Também Δx, como visto no subcapítulo (2.1.1), não deve depender de $\Delta y'$ e $\Delta z'$, então $a_{23} = a_{24} = 0$.

Ainda, pelo caráter isotrópico do espaço, $c\Delta t$ também não deve depender de $\Delta y'$ e $\Delta z'$. Se assim o fosse, duas medidas temporais feitas simetricamente no plano $y'z'$, com relação a x', teriam valores diferentes para O, dependendo da direção que são observadas. Então, dessa forma, $a_{13} = a_{14} = 0$. Assim, tem-se:

$$\begin{cases} c\Delta t = a_{11}c\Delta t' + a_{12}\Delta x' \\ \Delta x = a_{21}c\Delta t' + a_{22}\Delta x' \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{cases} \tag{3.9}$$

Agora, supõem-se eventos que acontecem na mesma posição em O', de modo que $\Delta x' = 0$. A equação (3.9) fornece:

$$\Delta t = a_{11}\Delta t' \quad \text{e} \quad \Delta x = a_{21}c\Delta t'.$$

Por comparação com (3.6), então $a_{11} = \gamma$. Ainda, $\Delta x = v\Delta t$, de modo que:

$$v\Delta t = a_{21}c\Delta t'.$$

Analogamente, $a_{21} = \gamma\frac{v}{c}$.

Enfim, substituindo estes resultados na equação (2.16), tem-se:

$$-c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 = -(\gamma c\Delta t' + a_{12}\Delta x')^2 + (\gamma v\Delta t' + a_{22}\Delta x')^2,$$

ou ainda,

$$-c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2 = \Delta t'^2[\gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2] + \Delta x'^2[(a_{22})^2 - (a_{12})^2] + 2\gamma\Delta t'\Delta x'[a_{22}v - a_{12}c].$$

Supõe-se, portanto, que o intervalo em O' seja igual a 0, de modo que um evento seja um pulso luminoso a se propagar. Assim, tem-se:

$$-\Delta t'^2[\gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2] = \Delta x'^2[(a_{22})^2 - (a_{12})^2] + 2\gamma\Delta t'\Delta x'[a_{22}v - a_{12}c].$$

Por comparação, já que isso deve ser verdade para quaisquer valores de $\Delta t'$ e $\Delta x'$, segue que:

$$\begin{cases} \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2 \\ (a_{22})^2 - (a_{12})^2 = 1 \\ a_{22}v - a_{12}c = 0 \end{cases}$$

Sendo assim, tem-se que $a_{22} = \gamma$ e $a_{12} = \gamma\frac{v}{c}$. Portanto, substituindo estes resultados na representação matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

que produz a relação entre quaisquer intervalos em um referencial inercial O de acordo com O'. A matriz 4×4 da equação acima é chamada de **matriz de boost**.

Assim:

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}) \\ \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{cases} \tag{3.11}$$

É claro, para o referencial O', é O que se move com velocidade $-v$. Dessa forma, é possível escrever a relação inversa como:

$$\begin{cases} \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}, \tag{3.12}$$

em que estas são as então equações de transformação de Lorentz. De fato, no limite em que $v << c$, acontece que $\frac{v^2}{c^2} << 1$, com $\gamma \to 1$ e elas se reduzem a:

$$\begin{cases} \Delta t' = \Delta t \\ \Delta x' = \Delta x - v\Delta t \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases},$$

que são exatamente as equações de transformação de Galileu.

Em particular, a matriz de boost obtida na equação (3.10), e denotada aqui por L, é, na verdade, um operador ortogonal de $\mathbb{M}$, pois,

$$L^T \eta_{ij} L = \eta_{ij}.$$

Assim, L transforma um sistema ortogonal em um não ortogonal, como pode ser observado na Figura 6 (para o caso em que, no instante inicial, os referenciais coincidem na origem).

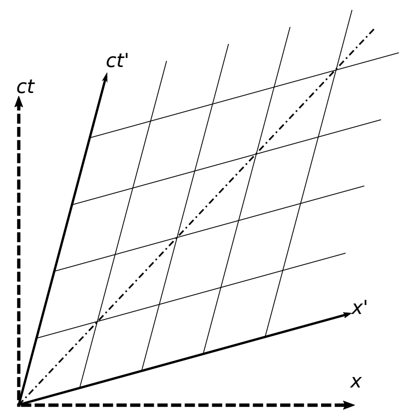

Figura 6 – Diagrama de referenciais.

Portanto, para dois eventos como a medida da extremidade de uma barra, que está em repouso em O', em O tem-se:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x),$$

pois os eventos em O são medidos simultaneamente. Assim,

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x',$$

e $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1$, portanto, o comprimento da barra para o referencial O será sempre menor que o comprimento em O'. Diz-se que o o comprimento da barra foi contraído pelo fator γ, caracterizando, então, a contração espacial que decorre da invariância do intervalo espaço-temporal.

A partir da equação (3.10), ainda, é possível mostrar uma das mais importantes conclusões da TRR. Não faz sentido, do ponto de vista físico, admitir que qualquer corpo, em qualquer referencial inercial, possa assumir uma velocidade maior que c, e o motivo disto reside justamente na demonstração do teorema que segue.

Teorema 3.1 *Dados quaisquer referenciais O e O' que se movem com velocidade relativa de módulo v, então para um corpo que se move com velocidade de módulo u, vale que $u \leq c$.*

Prova 3.1 *Seja O um referencial para o qual O' se move com velocidade relativa v, tal que dois eventos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em O estejam ligados por uma relação de causa e efeito, com velocidade $u = \alpha c$, e $\alpha > 1$.*

Para O: $\mathbf{A} = (0, 0, y_A, z_A)$ e $\mathbf{B} = (ct_B, x_B, y_B, z_B)$. Para um observador no referencial O', a equação (3.10) diz que:

$$\Delta t' = \gamma(t_B - \frac{vx_B}{c^2}).$$

Mas, como os eventos estão em repouso em relação a O, então $x_B = ut_B$. Sendo assim, tem-se que

$$\Delta t' = \gamma t_B(1 - \frac{\alpha v}{c}).$$

A única imposição para v é de $v < c$, portanto, é sempre possível escolher α tal que $v > \frac{c}{\alpha}$, e $v < c$. Assim, seja $v = \beta\frac{c}{\alpha}$ de modo que $1 < \beta < \alpha$. Substituindo, tem-se:

$$\Delta t' = \gamma t_B(1 - \beta) \Rightarrow \Delta t' < 0. \tag{3.13}$$

Mas, $\Delta t' < 0$ implica em $t'_B < t'_A$, ou seja, a posição temporal do efeito (evento $\mathbf{B}$) em O' precede a da causa (evento $\mathbf{A}$), e isso não possui sentido algum! Portanto, a hipótese de que a velocidade u pode ser tal que $u > c$ é um absurdo. Assim, para quaisquer eventos ligados por uma relação de causa e efeito, o módulo da velocidade u em que ocorrem deve ser sempre $u \leq c$.

Mas, agora, voltando na equação (3.3), é possível observar que ela pode assumir três valores diferentes, em que $\Delta s^2 = q(\mathbf{u}) > 0$, $\Delta s^2 = q(\mathbf{u}) < 0$ e $\Delta s^2 = q(\mathbf{u}) = 0$. Para os três casos, respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2} > c^2, \\
(ii) \quad & \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2} < c^2, \\
(iii) \quad & \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2} = c^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ou seja, um vetor **u** em um referencial inercial O pode produzir 3 tipos de intervalos: Aqueles que ocorrem com velocidade $v > c$ (i), aqueles com velocidade $v < c$ (ii) e aqueles em que $v = c$ (iii). Sabe-se, do teorema (3.1), que eventos em que $v > c$ violam o Princípio da Causalidade; portanto, estes eventos, para os quais não há uma relação causal entre ambos, são designados aqui de eventos *puramente espaciais*, ou, ainda, diz-se que **u** é do tipo espaço.

Agora, eventos do tipo (ii) e (iii) são permitidos, e são designados, respectivamente, por eventos *puramente temporais* e eventos *luminosos*. Ou, ainda, diz-se que o **u** é do tipo tempo, ou **u** é do tipo luz.

Desconsiderando uma das dimensões espaciais, a equação (3.14) diz que os eventos do *tipo luz* acontecem, em 3 dimensões, na superfície de um cone. Já os eventos *puramente temporais*, como será observado, acontecem dentro deste mesmo cone.

Definição 3.2 *Um cone de luz gerado por um evento* $\boldsymbol{v}$ *é tal que:*

$$\mathcal{C}_l = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{M}; q(\mathbf{v}) = 0\}.$$

Dessa forma, diz-se que dado evento **v** que acontece na velocidade da luz, **v** gera um *cone de luz* para o qual qualquer evento **w** que ocorra após **v** com essa velocidade pertence à superfície do cone, podendo, também, gerar outro *cone de luz*.

Em 3 dimensões (ct,x,y), a equação de um *cone de luz* gerado por um evento **v** é:

$$x^2 + y^2 = c^2 t^2,$$

que é um cone circular, com ângulo interno igual à $\pi/4$.

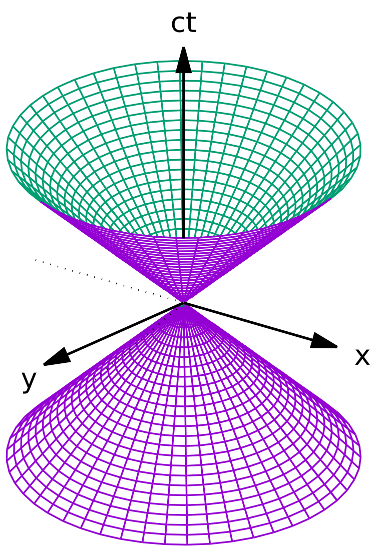

Figura 7 – *Cone de luz.*

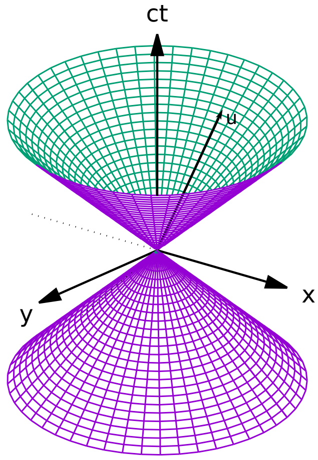

Figura 8 – Eventos no interior de um *Cone de luz*.

Agora, seja um evento **u** no interior de um *cone de luz* definido, de modo que o ângulo interno θ entre $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ é $0 \leq \theta < \pi/4$, como na Figura 8.

Então, $\tan\theta \in [0, 1)$ e, sempre, $\tan\theta < 1$.

Assim,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{c\Delta t} < 1$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} < c.$$

Ou seja, o evento **u** é do tipo tempo, e a velocidade em que ocorre é $v < c$, e isso acontece para quaisquer eventos **u** decorrentes de **v** em que **u** representa um evento puramente temporal.

Os eventos do tipo tempo, entretanto, produzem seus próprios cones: os *cones temporais*. Assim, é definida a região onde estão todos os eventos possivelmente ligados àqueles com velocidade $v < c$ (Figura 9).

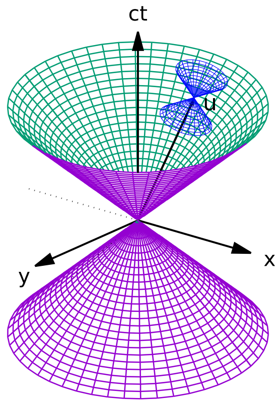

Figura 9 – *Cone temporal* gerado por um evento **u**.

Ainda, qualquer vetor nulo na superfície de um *cone de luz* pode gerar um *cone temporal*. Um dado vetor $\mathbf{v}$ do tipo luz é, na verdade, interpretado por um sinal luminoso. Este pode se relacionar com partículas massivas, e designar eventos no interior do seu cone (como na Figura 9), mas também pode se deslocar pela superfície do mesmo. Assim, novos eventos na superfície do *cone de luz* geram *cones temporais* no interior deste, como na Figura 10.

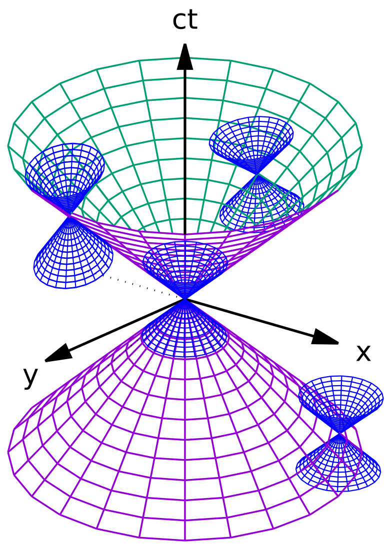

Figura 10 – *Cones temporais* no interior de um *cone de luz*.

Em particular, eventos do tipo tempo formam um subconjunto $\mathbb{M}^-$ de $\mathbb{M}$, com produto interno negativo definido, de modo que se define o *cone temporal* de um evento do tipo tempo $\mathbf{u}$ tal que

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{M}^-; \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle < 0\}. \tag{3.15}$$

E o *cone temporal oposto* de $\mathbf{v}$ é:

$$\mathcal{C}(\textbf{-u}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{M}^-; \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle > 0\}. \tag{3.16}$$

E, de fato, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ pertencem ao mesmo cone $\mathcal{C}$ se, e somente se, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle < 0$. Assim, pode-se dizer que no limite em que $q(\mathbf{u})$ vai a 0, o *cone temporal* gerado por $\mathbf{u}$ se torna um *cone de luz*. Afirmar isto equivale a dizer que quando o módulo v da velocidade entre dois eventos é tal que $v \to c$, então eles se comportam como eventos do tipo luz. Ou ainda, quando um dado corpo percorre um intervalo sob essas condições, este corpo se comporta como uma partícula de luz, ou um fóton, e, portanto, sua massa inercial deve ser igual a 0[6].

Portanto, pode-se dizer que o fecho de um *cone temporal* é um *cone causal*, que é o *cone de luz*, pois para todos os pontos neste, existe um ponto p da sua vizinhança tal que p pertence a um dado *cone temporal*.

6 Supondo, pois não foi demonstrado, que a massa inercial de um fóton é igual a 0.

De modo a orientar os cones temporais, seja então fixada uma base ortonormal $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ em $\mathbb{M}$ tal que $q(\mathbf{e}_1) = -1$, então o conjunto dos vetores tipo tempo são tais que:

$$\mathbb{M}^- = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-.$$

Em que $\mathcal{C}^+$ é o *cone temporal futuro*, de modo que:

$$\mathcal{C}(\mathbf{e}_1) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{M}^-; \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u} \rangle < 0\}.$$

E $\mathcal{C}^-$ é o *cone temporal passado*, em que:

$$\mathcal{C}(-\mathbf{e}_1) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{M}^-; \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{u} \rangle > 0\}.$$

Assim, para um dado evento do tipo tempo $\mathbf{u}$, o *cone temporal futuro* de $\mathbf{u}$ corresponde

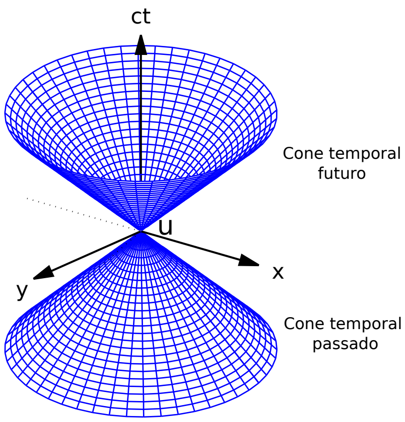

Figura 11 – *Cone temporal futuro* e *cone temporal passado*.

aos eventos do tipo tempo $\mathbf{w}$ tais que estes podem se relacionar com $\mathbf{u}$. Em contrapartida, o *cone temporal passado* de $\mathbf{u}$ corresponde aos eventos que, de alguma forma, convergiram a $\mathbf{u}$.

Então, dado um evento $\mathbf{u}$ no interior de um *cone de luz*, tal que $\mathbf{u}$ produza um *cone temporal*, e $\mathbf{v}$ um evento possivelmente ligado a $\mathbf{u}$, pode-se definir uma *linha de universo* causal que os conecta, como pode ser observado na Figura 12. Esta define, então, a trajetória no espaço-tempo que relaciona os dois eventos.

Se é pensado estritamente em eventos do tipo luz, por exemplo, então pode-se interpretar suas linhas de universo como a "informação" do fóton, ou sua "história".

Ainda, qualquer relação entre dois eventos que ocorre com velocidade $v \leq c$ classifica, de acordo com (3.14), um intervalo de eventos do tipo tempo, ou do tipo luz, e estes eventos, de acordo com o teorema (3.1), estão ligados por uma relação causal. Dessa forma, os cones de luz são cones que definem toda estrutura do universo observável. Assumir que $v \leq c$ para quaisquer eventos relacionados pelo princípio da causalidade é assumir a fundamentalidade dos cones de luz.

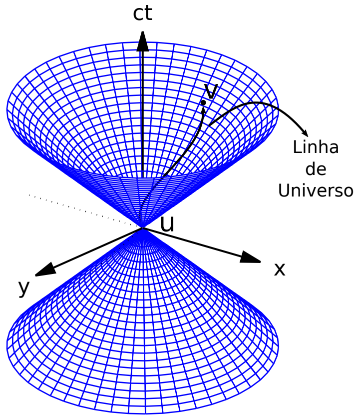

Figura 12 – *Linha de universo* em um *cone temporal*.

Por fim, ainda de acordo com a equação (3.14), foi dito que os eventos para os quais acontecem com velocidade $v > c$ são eventos do tipo espaço. Tais eventos, por sua própria definição, não estão de acordo com o princípio da causalidade, pois este não admite eventos relacionados por velocidades tais que $v > c$. A questão fundamental sobre este problema é de que a região definida como *puramente espacial* é uma região relativisticamente proibída. Nesta, não existe, absolutamente, qualquer ordem temporal.

Seja, portanto, O um referencial inercial e **O** um evento na origem. É sempre possível encontrar um sistema inercial O', que se move com velocidade relativa v, para o qual um dado evento **A** pertença ao *cone de luz*, ou *cone temporal*, de **O**. Entretando, se, como no teorema (3.1), existe um evento **B** tal que é ligado a **O** por uma velocidade $v > c$, este evento deve pertencer ao exterior do respectivo cone, como no exemplo da Figura 13, em duas dimensões.

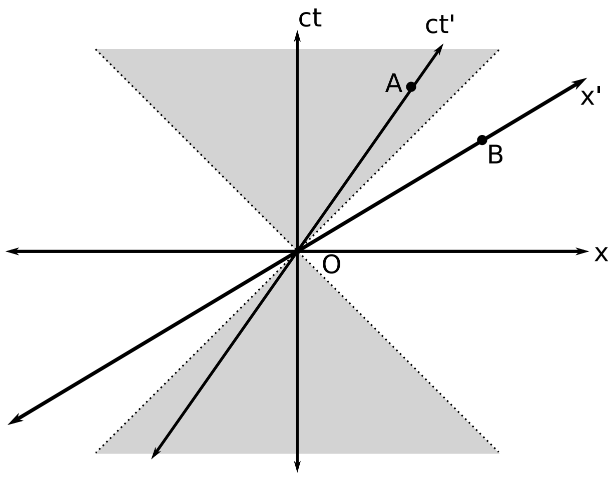

Figura 13 – Diagrama de eventos nos referenciais inerciais.

Eventos que estão localizados nessa região são, deste modo, eventos completamente isolados, e desconexos, no espaço-tempo do ponto de vista físico. A velocidade com que ocorrem é tão alta, ou, suficientemente maior que a velocidade da luz, que não é possível estabelecer qualquer parâmetro sobre eles. Em particular, eventos do tipo espaço, ligados a um dado evento **O**, de modo que são simultaneos em um dado referencial inercial O', como na Figura 13, definem o presente deste referencial. Assim, não existe ordem temporal definida e, portanto, não existe a possibilidade de uma relação física entre ambos, pois nesta região não há, absolutamente, relação causal entre eles.

Dessa forma, a construção geométrica do espaço-tempo de Minkowski, além de reproduzir as consequências da TRR, consegue definir todo o universo observável do ponto de vista físico, mostrando nítido o caráter fundamental, e limite, da velocidade da luz.

4 Conclusão

Durante a construção do Capítulo 1, foi observado que conceitos como espaço e tempo sofreram, ao longo dos séculos, intensas mudanças. Os primeiros modelos cosmológicos a serem formulados mantinham, em sua maioria, concepções baseadas no caráter absoluto destes de maneira isolada, e construções de universo definidas a partir da posição da Terra no seu centro. Com Copérnico, formalmente, mudanças significativas começaram a se apresentar dentro desse contexto e, com Galileu, a ciência de modo geral sofreu grandes alterações, derivadas não apenas de seu modelo dinâmico, mas também sobre seus métodos utilizados para construí-lo. Finalmente, com Newton, estabelceu-se portanto a grande área da mecânica clássica, que propunha explicações suficientemente adequadas às experiências reais. Entretanto, com o surgimento e consolidação da teoria eletromagnética, e consequentemente a definição da constância da velocidade da luz no vácuo, esta construção mecânica apresentou dificuldades em explicar alguns fenômenos e eventos relacionados em altas velocidades em comparação à velocidade da luz.

Finalmente no século XX, então, estes problemas foram solucionados com a apresentação de uma teoria que, admitindo a eletrodinâmica, conseguiu explicar as falhas da mecânica clássica e abrangê-la no seu limite funcional, baseando-se na inferência do seu princípio relativístico juntamente com a constância, e limite, da velocidade da luz no vácuo. Entretanto, a teoria da relatividade restrita apresentou algumas consequências que sugeriam que tempo e espaço não possuíssem caráter absoluto, uma vez que seu intervalo respectivo dependeria do referencial inercial em que seriam medidos, e, assim, o tempo poderia se dilatar com relação aos referenciais e o espaço poderia apresentar aspectos de contração.

A mecânica clássica do espaço e do tempo absoluto se mostrou predominante durante muito tempo, e ainda consegue, de fato, explicar muitos fenômenos sensíveis à experiência humana. Por esse motivo, inferências contrárias a ela não são muito intuitivas. A mecânica, de modo geral, pode ser considerada como um caso especial da mecânica relativística de Einstein. Fenômenos macroscópicos de baixa velocidade são, portanto, os fenômenos da experiência humana, e por esse motivo as consequências impostas pela TRR parecem, a princípio, muito estranhas. Entretanto, por seu caráter abrangente e porque foi capaz de explicar todas as experiências já realizadas, como também prever novos resultados, a TRR se mostra, hoje, muito bem consolidada.

Posteriormente à sua publicação, a teoria foi reinterpretada de forma matemática, e, finalmente, espaço e tempo perderam, de modo formal, seu caráter absoluto tão estimado durante a história. O espaço e o tempo passaram, portanto, a ser um único absoluto contínuo, o espaço-tempo. Essa nova formulação, por menos intuitiva que seja, conseguiu reproduzir todas as consequências impostas pela TRR, e também foi capaz de explicar por que a teoria não viola o princípio de causalidade. Eventos definidos no espaço-tempo como eventos do tipo espaço são eventos que não são, sequer, passíveis de tal relação, e todos os eventos físicos devem ser, portanto, eventos do tipo tempo ou do tipo luz, que formam, conjuntamente, os cones causais de universo. Define-se, assim, de maneira extremamente elegante e consideravelmente simples, a fundamentalidade destes cones, e, reciprocamente, da velocidade da luz, e o caráter absoluto do espaço-tempo.

5 Bibliografia

[1] PORTO, C.M., *A física de Aristóteles: uma construção ingênua?*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 31, 2010.

[2] ÉVORA, F.R., *Natureza e Movimento: um estudo da física e da cosmologia aristotélicas.* Caderno de História e Filosofia da Ciência, vol. 15, 2005.

[3] MORA, J.F., *Dicionário de Filosofia*, vol. 3. EDIÇÕES LOYOLA, 2001.

[4] PENROSE, R., *The Road To Reality.* JONATHAN CAPE, 2004.

[5] PEDUZZI, L.Q., *Força e movimento: De Thales a Galileu.* Projeto de Doutorado, Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

[6] PENEREIRO, J.C., *Galileu e a defesa da cosmologia copernicana: A sua visão de universo.* Caderno Brasileiro de Ensino de Física, vol. 36, 2009.

[7] ZANETIC, J., *Dos "Principia"da Mecânica aos "Principia"de Newton.* Caderno Catarinense de Ensino de Física, 5(número especial), 1988.

[8] EINSTEIN, A., *On the electrodynamics of moving bodies*, 1905.

[9] KOMISSAROV, S.S., *Special Relativity*, 2012.

[10] BIEZUNER, R.J., *Relatividade Especial, Geral, e Geometria Lorentziana.* Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.

[11] SOUZA, V. Notas de aula, p. 16. Disponível em:
<http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20101/FFI0127-1/aula-02.pdf>

[12] RESNICK, R., *Introdução à Relatividade Especial.* EDITORA POLÍGONO, 1971.

[13] MINKOWSKI, H., *Espaço e Tempo*, Textos fundamentais de Física Moderna, vol.1.

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN, 2001.

[14] RINDLER, W., *Relativity: Special, General and Cosmological.* OXFORD UNIVERSITY PRESS INC., New York, 2006.

[15] NABER, G. L., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, vol. 92. SPRINGER, New York, 2012.

[16] SCHUTZ, B., *A First Course in General Relativity.* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2009.