



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

# **SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Acadêmica: Anna Laura Ferreira Lucchi  
Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 2018



Universidade Estadual de Maringá  
Centro de Ciências Exatas  
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

## **SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física, da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Física.

Acadêmica: Anna Laura Ferreira Lucchi  
Orientador: Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira

Maringá, 2018

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>1</b>
Agradecimentos . . . . .	3
Resumo . . . . .	4
Introdução . . . . .	5
<b>1 Métodos Numéricos</b>	<b>6</b>
1.1 Método de Runge-Kutta de primeira ordem . . . . .	7
1.2 Método de Runge-Kutta de segunda ordem . . . . .	8
1.3 Erro de Truncamento Local dos Métodos de Runge-Kutta . . . . .	9
1.3.1 Erro do Método de Runge-Kutta de Primeira Ordem . . . . .	10
1.3.2 Erro do Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem . . . . .	10
1.3.3 Comparação Gráfica dos Erros . . . . .	12
<b>2 Oscilador Harmônico</b>	<b>13</b>
2.1 Movimento Harmônico Simples . . . . .	13
2.2 Oscilações Amortecidas . . . . .	15
2.2.1 Amortecimento Subcrítico . . . . .	16
2.2.2 Amortecimento Supercrítico . . . . .	17
2.2.3 Amortecimento Crítico . . . . .	17
2.3 Oscilações Forçadas . . . . .	18
2.3.1 Oscilações Amortecidas Forçadas . . . . .	18
2.4 Soluções numérica e analítica do oscilador harmônico . . . . .	20
2.4.1 Simples . . . . .	21
2.4.2 Amortecido Subcrítico . . . . .	21
2.4.3 Amortecido Supercrítico . . . . .	22
2.4.4 Amortecido Crítico . . . . .	23
2.4.5 Forçado com Amortecimento . . . . .	24
<b>3 Equações de Lotka-Volterra</b>	<b>27</b>
3.1 Solução . . . . .	28
3.1.1 Análise qualitativa . . . . .	28
3.1.2 Exemplos . . . . .	29
Conclusões . . . . .	33
<b>A Comparação entre os métodos analíticos e numéricos</b>	<b>34</b>
A.1 Método de Euler . . . . .	34
A.2 Método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK-2) . . . . .	35
<b>B Implementação do código para resolver a equação do oscilador harmônico</b>	<b>37</b>
<b>C Implementação do código para resolver as equações de Lotka-Volterra</b>	<b>39</b>



# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que sempre me deu forças para seguir em frente.

A minha família, em especial, minha mãe Lúcia, que me deu a oportunidade de me dedicar exclusivamente aos estudos, e que com minhas queridas Lola e Mel, sempre me deram a certeza de que eu tenho com quem contar. E ao meu pai Jorge (in memoriam), que infelizmente não pôde participar desse momento.

Ao meu orientador, Breno Ferraz de Oliveira, pela atenção, paciência, e por sempre fazer questão de tornar as aulas leves e divertidas.

A todos os professores da UEM com os quais eu tive a oportunidade de aprender valores importantes que vão além da ementa do curso, e a todos que contribuíram, direta e indiretamente, com a minha formação.

Aos meus amigos, pelas conversas e risos.

## Resumo

O aprendizado de equações diferenciais é de grande importância para a ciência, especialmente para a física, mas nem sempre é possível encontrar uma solução de maneira simples. Assim, surge a motivação para se estudar os métodos numéricos. Neste trabalho, apresentaremos os métodos de Runge-Kutta de primeira e segunda Ordens e, com o segundo método, resolveremos dois tipos de equações de grande importância: a equação do oscilador harmônico, que pertence à física, e as equações de Lotka-Volterra, que fazem parte da ecologia, especificamente, da dinâmica de populações.

A equação do oscilador harmônico será resolvida para diversas situações, verificaremos a eficiência do método comparando a solução obtida numericamente com a solução analítica. Para o caso das equações de Lotka-Volterra abordaremos apenas a solução numérica.

**Palavras-chave:** equações diferenciais, método de Runge-Kutta de primeira ordem, método de Runge-Kutta de segunda ordem, oscilador harmônico, Lotka-Volterra.

# Introdução

Equações são igualdades entre expressões e são verificadas para determinados valores das incógnitas nelas contidas [1]. Quando falamos de equações algébricas as incógnitas são números, no caso de equações diferenciais as incógnitas são funções.

A descrição do mundo físico e suas leis torna-se muito limitada sem o entendimento de equações diferenciais. O desenvolvimento da própria Matemática não seria o mesmo sem este ramo. As equações diferenciais foram impulsionadas com a descoberta do cálculo diferencial e integral, com Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz no século XVII [2].

Em sua atuação na área de equações diferenciais, Newton desenvolveu um método para resolver um tipo específico da equação de primeira ordem. O seu desenvolvimento do cálculo e a solução dos princípios básicos da mecânica foram essenciais para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler [3].

Leibniz foi um autodidata em Matemática, descobriu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem [3].

A contribuição de Leibniz é muito significativa; porém, nos permite solucionar apenas determinados tipos de equações diferenciais, e não todas as equações diferenciais que existem. Assim surge a necessidade de encontrar outras maneiras para resolvê-las ou, ao menos, obter sua solução aproximada. Dos diversos métodos existentes, serão elaborados neste trabalho os métodos numéricos de Runge-Kutta. Abordaremos, especificamente, os métodos de primeira e de segunda ordens.

Como esses métodos nos dão uma solução aproximada, que nem sempre é igual à solução exata da equação diferencial, existe um erro associado aos métodos, que também será discutido.

Este trabalho possui o objetivo de apresentar os métodos mencionados e utilizá-los para resolver a equação do oscilador harmônico unidimensional e as equações de Lotka-Volterra.

# Capítulo 1

## Métodos Numéricos

Chamamos problema de valor inicial (P.V.I.) de primeira ordem a seguinte expressão

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

cujo significado geométrico é encontrar uma solução para a equação diferencial  $y' = f(t, y)$  que passe pelo ponto  $(t_0, y_0)$  [4]. O ponto  $(t_0, y_0)$  recebe o nome de condição inicial ou condição de contorno, a depender se as variáveis do problema são temporais ou espaciais.

No caso de um P.V.I. de segunda ordem, temos

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y'), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

Procuramos a solução  $y(t)$  que passe pelo ponto  $(t_0, y_0)$  de forma que a inclinação da curva nesse ponto seja  $y_1$  [4].

Os métodos numéricos que serão trabalhados aqui devem ser aplicados em equações diferenciais de primeira ordem (1.1). Para o caso de problemas de valor inicial de segunda ordem (1.2), podemos fazer uma redução de ordem, transformando uma equação diferencial de segunda ordem em duas equações diferenciais de primeira ordem. Esse procedimento será feito em breve.

A existência e unicidade das soluções é geralmente garantida pela teoria (veja a referência [5]) e os métodos numéricos são extremamente valiosos para os casos em que não conseguimos obter a solução analítica das equações diferenciais.

Vamos discutir os métodos numéricos de Runge-Kutta de primeira e segunda ordens, demonstrar sua eficiência e aplicar o segundo método para resolver os problemas propostos.

Os métodos de Runge-Kutta são generalizações da fórmula básica de Euler, isto é,

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2 + \dots + w_mk_m), \quad (1.3)$$

em que o termo entre parênteses é uma média ponderada das inclinações ao longo do intervalo em que queremos calcular a aproximação da função. Os pesos  $w_i = 1, 2, \dots, m$  são constantes que geralmente satisfazem  $w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1$ , e cada  $k_i$  é o resultado da função num dado ponto  $(t, y)$  no intervalo. A ordem do método é igual a  $m$  [4].

O fato de que os métodos de Runge-Kutta não dependem do cálculo das derivadas de  $y$  nos pontos  $t_i$  os tornam muito vantajosos.

## 1.1 Método de Runge-Kutta de primeira ordem

O método de Runge-Kutta de primeira ordem, também chamado de Método de Euler, é obtido quando  $m = 1$ ,  $w_1 = 1$  e  $k_1 = f(t_n, y_n)$  na equação (1.3), isto é,

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

A dedução geométrica do método de Euler é feita a seguir [6].

Considere além do P.V.I. (1.1), a Figura 1.1, que mostra uma função  $f(t, y)$ , representada em vermelho, que queremos determinar, e que contém o ponto  $A = (t_0, y_0)$ .

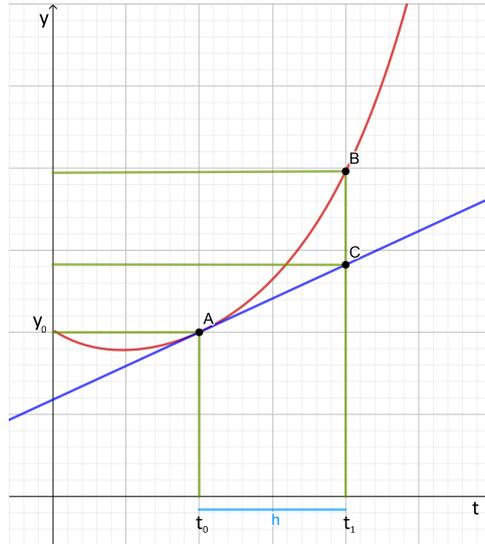


Figura 1.1: Dedução geométrica do método de Runge-Kutta de primeira ordem [7].

Tome um ponto  $(t_1, y_1)$  posterior a  $(t_0, y_0)$ , de modo que  $t_0 + h = t_1$ . Dado que  $y' = f(t, y)$  é a inclinação da reta tangente à função  $f(t, y)$  em qualquer ponto, temos para o ponto  $A$  (cuja reta tangente está representada na cor azul):

$$y'(t_0) = f(t_0, y_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$hf(t_0, y_0) \approx y_1 - y_0$$

$$y_1 \approx y_0 + hf(t_0, y_0).$$

O ponto  $C = (t_1, y_1)$  ficará mais próximo do gráfico da função conforme a distância  $h$ , também chamada de passo, seja diminuída. Assim, no limite em que  $h \rightarrow 0$ , o sinal de aproximação poderá ser substituído por um sinal de igualdade:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0),$$

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1),$$

⋮

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \tag{1.4}$$

O método de Euler consiste na equação de recorrência (1.4). Pela Figura 1.1, percebe-se que o ponto calculado pelo método de Euler ( $C$ ) está um pouco distante da função (ponto  $B$ ).

Esse método pode ser aprimorado, como é o caso do método do ponto médio.

## 1.2 Método de Runge-Kutta de segunda ordem

O método de Runge-Kutta de segunda ordem consiste em encontrar valores para a equação (1.3) considerando [4]:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(w_1k_1 + w_2k_2), \\ k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + h\alpha, y_n + h\beta k_1). \end{cases} \quad (1.5)$$

Para o método de segunda ordem, os parâmetros devem satisfazer:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1, \\ w_2\alpha = \frac{1}{2} \\ w_2\beta = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Como  $w_2 \neq 0$  pode ser escolhido arbitrariamente, há muitos métodos de Runge-Kutta possíveis. No método tratado aqui, consideramos  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 1$  e  $\alpha = \beta = 1/2$  nas equações (1.5) e (1.6), o que nos leva à equação:

$$y_{n+1} = y_n + hf \left[ t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \right],$$

que é também conhecida como método do ponto médio ou método de Euler modificado [5]. Para compreender sua dedução geométrica considere a Figura 1.2, em que, novamente, o ponto  $A = (t_0, y_0)$  é uma condição inicial do P.V.I. e com o método de Euler vamos estimar o valor de  $f(t, y)$  em  $y(t) = y(t_0 + \frac{h}{2})$ , ou seja,

$$y \left( t_0 + \frac{h}{2} \right) = y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0).$$

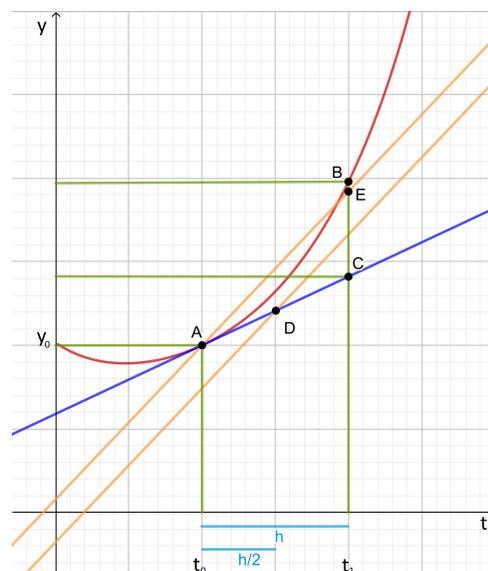


Figura 1.2: Dedução geométrica do método de Runge-Kutta de Segunda Ordem [8].

Note que o passo dado aqui foi de  $\frac{h}{2}$  e chame  $k_1 = f(t_0, y_0)$ . Com esse ponto, que na figura é chamado de  $D = (t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1)$ , calculamos a inclinação  $k_2$  da curva  $f(t, y)$  na metade do caminho, isto é,

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right),$$

essa inclinação corresponde à reta laranja do gráfico que passa pelo o ponto  $D$ . Ao transladar essa reta para que ela intercepte o ponto  $A$  e dando um passo completo a partir de  $t_0$ , ou seja,  $t = t_0 + h$ , somos levados ao ponto  $E$ , que é a aproximação para a solução em  $y(t_0 + h)$ :

$$y_1(t) = y_0 + hk_2,$$

$$y_1(t) = y_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right).$$

O método do ponto médio consiste na seguinte relação de recorrência

$$y_{n+1} = y_n + hf\left[t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right]. \quad (1.7)$$

O ponto  $B$  destaca por onde a função passa,  $C$  é o resultado obtido com o método de Euler, e  $E$  é o resultado com o método do ponto médio. É visível na Figura 1.2 que o segundo método se aproxima melhor da função exata, o que será provado de forma analítica a seguir.

### 1.3 Erro de Truncamento Local dos Métodos de Runge-Kutta

Os erros nos métodos numéricos possuem duas causas principais: uma delas é o erro de arredondamento, que possui natureza aleatória, pois os cálculos são realizados com um número finito de termos, e depende de diversos fatores, como o computador utilizado e o método de arredondamento. Outro fator de erro se deve ao utilizar uma fórmula aproximada para calcular  $y_{n+1}$ , o erro de cada passo depende da função  $f(t, y)$  e recebe o nome de erro de truncamento local, e o erro acumulado em todos os passos é o erro de truncamento global [3].

Calcularemos aqui o erro de truncamento local dos métodos. Para isso, suponha que a solução do P.V.I. possa ser escrita como

$$\phi(t_n) = y_n, \quad (1.8)$$

que possui a seguinte derivada de primeira ordem (em relação a  $t$ )

$$\phi'(t_n) = y'_n = f(t_n, y_n), \quad (1.9)$$

para a derivada de segunda ordem em relação a  $t$  utilize a regra da cadeia, temos assim,

$$\begin{aligned} \phi''(t_n) = y''_n &= \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} \frac{\partial y_n}{\partial t} = \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} y'_n, \\ \phi''(t_n) = y''_n &= \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Considere que a solução  $y = \phi(t)$  tem uma série de Taylor em torno de  $t_n$

$$\phi(t) = \phi(t_n) + h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(t_n) + (\dots).$$

As reticências representam os termos seguintes da série. Considerando  $t \rightarrow t_{n+1}$ , temos

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(t_n) + (\dots). \quad (1.11)$$

Além disso, admitindo que a solução  $\phi(t_n)$  tem derivadas contínuas até a terceira ordem e, portanto,  $f$  tem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem, o Teorema de Clairault-Schwarz [2] expresso por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t},$$

é válido, de modo que erro de truncamento local dos métodos pode ser escrito como

$$\epsilon_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1}. \quad (1.12)$$

### 1.3.1 Erro do Método de Runge-Kutta de Primeira Ordem

O erro é calculado substituindo-se as equações (1.4) e (1.11) na equação (1.12)

$$\epsilon_{n+1} = \phi(t_n) + h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(t_n) + (\dots) - [y_n + hf(t_n, y_n)]. \quad (1.13)$$

Organizando os termos semelhantes, temos

$$\epsilon_{n+1} = \phi(t_n) - y_n + h\phi'(t_n) - hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(t_n) + (\dots). \quad (1.14)$$

Considerando as equações (1.8) e (1.9) chegamos ao resultado

$$\epsilon_{n+1} = \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(t_n) + (\dots), \quad (1.15)$$

que mostra que o erro de truncamento local do método é proporcional a  $h^2$  mais termos de ordens superiores.

### 1.3.2 Erro do Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Calculamos o erro da mesma forma que antes, utilizaremos as equações (1.12) e (1.11), mas agora  $y_{n+1}$  é dado pela equação (1.7), ou seja,

$$\epsilon_{n+1} = \phi(t_n) + h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + (\dots) - \left\{ y_n + hf \left[ t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \right] \right\}.$$

Após rearranjar os termos, temos

$$\epsilon_{n+1} = \phi(t_n) - y_n + h\phi'(t_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) - hf \left[ t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \right] + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + (\dots),$$

e recordando a equação (1.8), podemos escrever

$$\epsilon_{n+1} = hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(t_n) - hf \left[ t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \right] + \frac{h^3}{3!}\phi'''(t_n) + (\dots). \quad (1.16)$$

Para continuar, precisamos da seguinte relação

$$F(a+h, b+k) = F(a, b) + h \frac{\partial F(a, b)}{\partial t} + k \frac{\partial F(a, b)}{\partial y} + \frac{1}{2!} \left( h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2hk \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \Bigg|_{\substack{t=\xi \\ y=\eta}},$$

intitulada aproximação de Taylor com resto para uma função  $F(t, y)$  de duas variáveis. Em nosso caso, temos que  $a \rightarrow t_n$ ,  $h \rightarrow h/2$ ,  $b \rightarrow y_n$  e  $k \rightarrow (h/2)f(t_n, y_n)$ , o que nos leva a

$$f \left[ t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \right] = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} + 2 \frac{h}{2} \frac{h}{2} f(t, y) \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} + \left( \frac{h}{2} f(t, y) \right)^2 \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \right] \Bigg|_{\substack{t=t_n \\ y=y_n}}.$$

Para simplificar a notação, considere

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t^2} \Bigg|_{\substack{t=t_n \\ y=y_n}} &= \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} \Bigg|_{\substack{t=t_n \\ y=y_n}} &= \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t \partial y}, \\ \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^2} \Bigg|_{\substack{t=t_n \\ y=y_n}} &= \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

E então:

$$f \left[ t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) \right] = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t^2} + 2 \frac{h}{2} \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t \partial y} + \left( \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)^2 \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial y^2} \right].$$

Retornando à equação (1.16):

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} \left[ \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} \right] + \\ &\quad - h \left[ f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial t} + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \frac{\partial f(t_n, y_n)}{\partial y} \right] + \\ &\quad - \frac{h}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t^2} + 2 \frac{h}{2} \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t \partial y} + \left( \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)^2 \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial y^2} \right] + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \phi'''(t_n) + (\dots), \end{aligned}$$

$$\epsilon_{n+1} = \frac{h^3}{3!} \phi'''(t_n) - \frac{h^3}{8} \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t^2} - \frac{h^3}{4} f(t_n, y_n) \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial t \partial y} - \frac{h^3}{8} f(t_n, y_n)^2 \frac{\partial^2 f(t_n, y_n)}{\partial y^2} + (\dots),$$

concluimos, assim, que o erro do método é proporcional a  $h^3$  mais termos de ordens superiores.

### 1.3.3 Comparação Gráfica dos Erros

Produzimos os gráficos das soluções analítica e numéricas da equação diferencial  $\frac{dy}{dt} = \cos(10t)$  para comparar os métodos. Perceba na Figura 1.3 o quanto o método de Runge-Kutta de segunda ordem é mais preciso que o método de Euler (Runge-Kutta de primeira ordem) quando comparados à solução analítica:

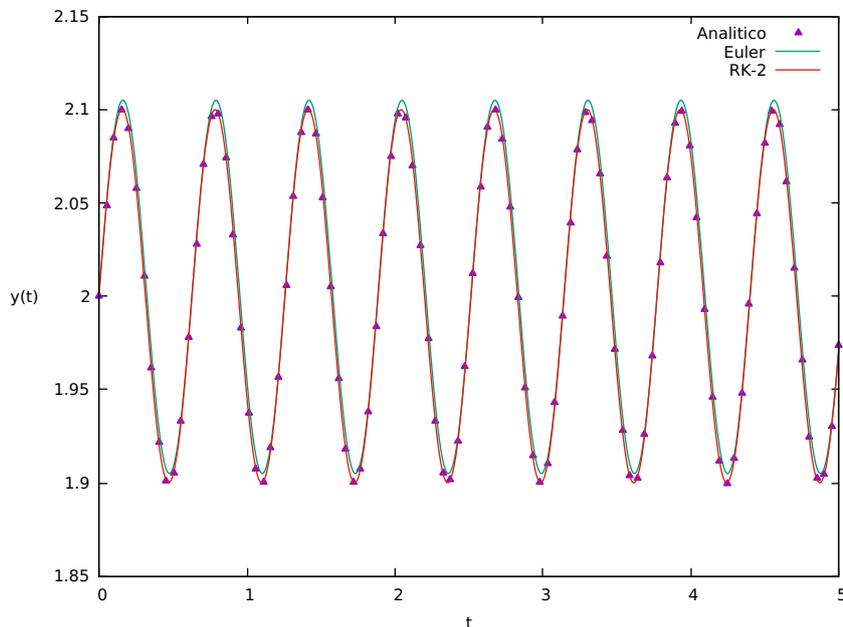


Figura 1.3: Comparação entre os métodos analítico e numéricos.

Uma comparação mais detalhada entre os métodos é mostrada na Figura 1.4.

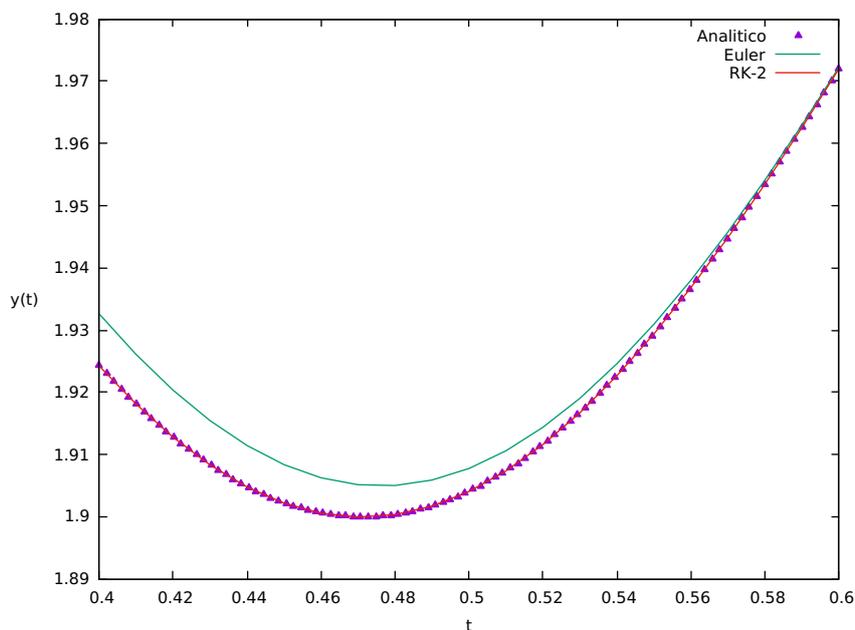


Figura 1.4: Comparação mais detalhada entre os métodos analítico e numéricos.

Para mais detalhes sobre a solução numérica consulte o Apêndice A.

Apresentados os métodos numéricos, vamos agora aplicá-los aos problemas propostos para este trabalho.

# Capítulo 2

## Oscilador Harmônico

O movimento oscilatório, ou periódico, é aquele em que um corpo se move de um lado para o outro alternadamente em torno de uma posição de equilíbrio [9].

As oscilações estão presentes não apenas na ciência, como no movimento de moléculas de sólidos que oscilam em função da temperatura, ondas eletromagnéticas e acústica [10], mas também no cotidiano, como é o caso do balançar das folhas de uma árvore e o movimento de cordas e palhetas em instrumentos musicais [9].

Ao provocar uma perturbação em um sistema que está em equilíbrio estável ele passa a oscilar, e a propagação dessas vibrações localizadas são as ondas.

### 2.1 Movimento Harmônico Simples

Consideremos inicialmente que o sistema seja dado por um corpo sólido de massa  $m$  preso a uma mola de constante elástica  $k$  (medida da rigidez da mola) conforme ilustra a Figura 2.1. As forças que atuam sobre o sistema se igualam na posição de equilíbrio.

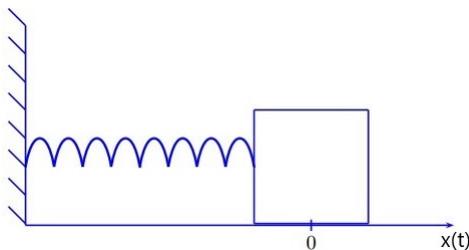


Figura 2.1: Sistema massa-mola [11].

Após deslocar o corpo em uma distância  $x$  a partir da posição de equilíbrio, surge uma força que tende a fazer com que o corpo retorne à posição de equilíbrio. Esta força é chamada restauradora e, no caso de um sistema massa-mola, é dada pela Lei de Hooke

$$F = -kx. \quad (2.1)$$

O sinal negativo na força indica que ela possui sentido oposto ao do deslocamento a partir da posição de equilíbrio. No caso de pequenos deslocamentos, a Lei de Hooke rege a maioria das forças restauradoras [12].

A força resultante sobre o corpo é dada pela 2ª Lei de Newton

$$\Sigma F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.2)$$

Se lembrarmos que estamos considerando o caso unidimensional, não é preciso colocar a notação vetorial. Portanto, usando as leis de Hooke e de Newton, temos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x. \quad (2.3)$$

$$\omega^2 = k/m. \quad (2.4)$$

A equação (2.3) nos mostra que a aceleração e a posição são proporcionais uma a outra, com sinal oposto. Para uma equação dessa forma, podemos supor uma solução do tipo:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \quad (2.5)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (2.6)$$

É simples provar que as equações acima são soluções da equação (2.3). Por se tratar de uma equação diferencial de segunda ordem, devemos encontrar suas duas constantes, que denominamos  $a$  e  $b$  na equação (2.5), e de  $A$  e  $\phi$  na equação (2.6). Essas constantes são determinadas a partir da posição e velocidade iniciais ( $x_0$  e  $v_0$ ), de modo que  $A$  é a amplitude do movimento (deslocamento máximo a partir do equilíbrio) e  $\phi$  é denominada constante de fase, que nos permite ajustar a solução para o caso em que ela se dê por uma função seno.

O período  $T$  é o tempo necessário para que o corpo percorra um ciclo completo, isto é, deixe a distância  $x$ , passe por  $-x$  e retorne à posição de partida ( $x$ ). O número de ciclos por unidade de tempo é a frequência

$$f = \frac{1}{T}. \quad (2.7)$$

O período  $T$  é o menor intervalo de tempo que satisfaz para todo  $t$  a equação

$$x(t) = x(t + T). \quad (2.8)$$

Usando a condição anterior na solução (2.6), temos

$$A \cos(\omega t + \phi) = A \cos[\omega(t + T) + \phi],$$

$$A \cos(\omega t + \phi) = A \cos[\omega t + \omega T + \phi], \quad (2.9)$$

Para que a equação (2.9) seja satisfeita,  $\omega T = 2\pi n$ , com  $n$  sendo um número inteiro. Considerando  $n = 1$  temos  $\omega T = 2\pi$ . Substituindo a expressão da frequência (2.7) e recordando que  $\omega = \sqrt{k/m}$  (da equação (2.4)), temos

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T},$$

e, portanto,

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) nos informa que o período de oscilação não depende da amplitude (distância a partir do ponto de equilíbrio), mas sim de  $k$  e  $m$ . Assim, se dois sistemas idênticos tiverem suas massas deslocadas da posição de equilíbrio a diferentes distâncias, atingirão à posição de equilíbrio simultaneamente [12].

## 2.2 Oscilações Amortecidas

Consideremos o caso em que o amortecimento ocorre de forma linear e é dado pela expressão empírica [12]

$$F = -bv, \quad (2.11)$$

em que  $b$  é o coeficiente do amortecimento (é uma constante de proporcionalidade), e  $v$  é a velocidade do oscilador. A força de amortecimento é proporcional à velocidade, e o sinal negativo indica que essa força se opõe ao movimento do oscilador, reduzindo-o. A Figura 2.2 ilustra como seria um sistema amortecido.

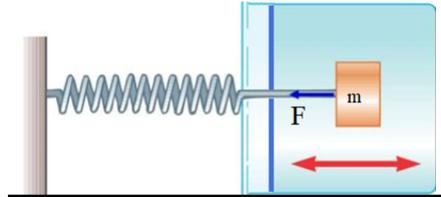


Figura 2.2: Representação de um sistema massa-mola unidimensional (horizontal) com amortecimento [13].

Para esse sistema, a força resultante é dada por [14]

$$\Sigma F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}. \quad (2.12)$$

Rearranjando os termos e considerando  $\gamma = b/m$  e  $\omega_0^2 = k/m$  obtemos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.13)$$

Supondo uma solução do tipo

$$x(t) = Ae^{\alpha t}, \quad (2.14)$$

cujas derivadas temporais são

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Substituindo os termos correspondentes na equação (2.13), encontramos a equação do segundo grau

$$\alpha^2 Ae^{\alpha t} + \gamma\alpha Ae^{\alpha t} + \omega_0^2 Ae^{\alpha t} = 0,$$

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (2.15)$$

Para encontrar  $\alpha$ , basta resolver a equação (2.15) usando a fórmula de Bhaskara<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bhaskara Acharya não descobriu a expressão para resolver equações do segundo grau, mas tratou sobre ela em seu livro de álgebra *Bijaganita*. Esta equação já era conhecida pelo matemático Sridara, que viveu há mais de 100 anos antes de Bhaskara [15].

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (2.16)$$

Temos três resultados possíveis dentro da raiz: pode ser maior, menor ou igual a zero. Cada caso nos leva a uma solução e todas serão abordadas em seguida.

### 2.2.1 Amortecimento Subcrítico

Ocorre quando o termo dentro da raiz é negativo, isto é,

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0 \Rightarrow \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0,$$

portanto,  $\alpha$  será um número complexo

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{(-1) \left[ \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 \right]} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\left[ \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma}{2}\right)^2 \right]}. \quad (2.17)$$

Definindo  $\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 > 0$ , obtemos

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega,$$

que corresponde a

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega, \\ \alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - i\omega. \end{cases}$$

A solução da equação diferencial é dada por uma combinação linear das duas soluções,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Mas não do jeito que está, pois depende de termos imaginários e a solução procurada deve ser real. Isso porque a solução real possui significado físico, enquanto que a solução imaginária não tem. Para isso, considere uma função complexa  $z(t)$  dada em termos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$

$$z(t) = a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega t} + a_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega t}.$$

Recordando a equação de Euler<sup>2</sup>  $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$ , podemos escrever  $z(t)$  da forma

$$z(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} a_1 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + e^{-\frac{\gamma}{2}t} a_2 [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)].$$

A solução da equação do oscilador harmônico é obtida tomando a parte real de  $z(t)$

$$\text{Re}[z(t)] = [a_1 + a_2] e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t).$$

Semelhante ao caso do oscilador harmônico simples, vemos que a solução geral da equação (2.13) é dada por

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi). \quad (2.18)$$

---

<sup>2</sup>Esta é uma das equações de Euler, já que ele possui importantes contribuições na mecânica, dinâmica dos fluidos e em todas as áreas da matemática que existiam na época em que viveu, como geometria, cálculo e teoria dos números, entre tantas outras [16].

## 2.2.2 Amortecimento Supercrítico

Ocorre quando o termo dentro da raiz é positivo, então  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (2.19)$$

Definindo  $\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$ , temos dois resultados para  $\alpha$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \beta, \\ \alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \beta. \end{cases}$$

Assim a solução  $x(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t + \beta t} + a_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t - \beta t}, \\ x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Quanto maior  $t$  se torna, mais rápido o segundo termo decai, e neste caso o decaimento segue o primeiro termo  $a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t + \beta t}$ . O movimento não é mais periódico, e o amortecimento prevalece.

## 2.2.3 Amortecimento Crítico

É caso em que o termo dentro da raiz quadrada é zero ( $\gamma/2 = \omega_0$ ) e o polinômio terá apenas uma raiz

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2}, \quad (2.21)$$

que substituída na equação (2.14) resulta na solução

$$x_1(t) = a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \quad (2.22)$$

Precisamos de mais uma solução, chame-a de  $x_2(t)$ , que pode ser escrita da forma:

$$x_2(t) = f(t)x_1(t) = f(t)a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

e procurar a função  $f(t)$  que permite que  $x_2(t)$  satisfaça a equação diferencial (2.13).

Calculando as derivadas de  $x_2(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{df(t)}{dt} a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + f(t) a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(-\frac{\gamma}{2}\right), \\ \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + 2 \frac{df(t)}{dt} a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(-\frac{\gamma}{2}\right) + f(t) a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

e substituindo-as em (2.13), temos

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f(t)}{dt^2} a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + 2 \frac{df(t)}{dt} a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(-\frac{\gamma}{2}\right) + f(t) a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \\ &+ \gamma \left[ \frac{df(t)}{dt} a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + f(t) a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(-\frac{\gamma}{2}\right) \right] + \omega_0^2 f(t) a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - \gamma \frac{df(t)}{dt} + \frac{\gamma^2}{4} f(t) + \gamma \frac{df(t)}{dt} + -\frac{\gamma^2}{2} f(t) + \omega_0^2 f(t) = 0,$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) \left[ -\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2 \right] = 0.$$

Como estamos no caso em que  $\gamma/2 = \omega_0$ , o termo entre colchetes se anula e

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0,$$

conduzindo a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dt} \right) = 0 \implies \frac{df}{dt} = c_1,$$

$$f(t) = c_1 t + c_2 \implies f(t) = c_1 t$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Além disso, foi considerado que  $c_2 = 0$  para simplificar um pouco. Assim a outra solução é

$$x_2(t) = a_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

com  $a_2 = c_1 a_1$ . A solução geral  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  é dada por

$$x(t) = a_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + a_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a_1 + a_2 t). \quad (2.23)$$

## 2.3 Oscilações Forçadas

Estudamos os casos em que, após dado o impulso inicial, o oscilador evolui livremente. E cujo período de oscilação é determinado pela natureza do oscilador (por sua inércia e pelas forças restauradoras que atuam sobre ele). Quando levamos em conta as forças dissipativas atuantes o movimento é amortecido [14].

Abordaremos o caso em que uma força externa periódica é aplicada sobre o sistema. Em geral, o período dessa força não coincide com o período próprio do oscilador e as oscilações produzidas serão ditas forçadas. A força externa supre continuamente a energia do oscilador, compensando a dissipação.

Consideremos que a força externa periódica seja dada por  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ .

### 2.3.1 Oscilações Amortecidas Forçadas

Na equação (2.12), basta somar o termo de força externa à força resultante, conduzindo a

$$\Sigma F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t),$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (2.24)$$

Com  $\gamma = b/m$  e  $\omega_0^2 = k/m$ . A frequência da força externa é dada por  $\omega$ , enquanto que  $\omega_0$  é a frequência natural do sistema (frequência em que o sistema oscilaria caso não houvesse uma força externa).

A equação diferencial (2.24) é linear e inhomogênea, e o Princípio da Superposição para equações lineares inhomogêneas afirma que se  $x_1(t)$  é solução para o primeiro termo inhomogêneo  $F_1(t)$ , e  $x_2(t)$  para o segundo termo inhomogêneo  $F_2(t)$ , então  $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$  é solução para o segundo termo  $F(t) = a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t)$ .

Tomando  $F_2(t) = 0$ , vemos que somando a uma solução da equação inhomogênea uma solução da equação homogênea, obtemos uma solução da mesma equação inhomogênea.

A solução particular é a solução estacionária, a parte de oscilações livres é um transiente, ou seja, tem efeito transitório, que depende das condições iniciais. Em geral, nas oscilações forçadas, interessa-nos apenas a solução estacionária, que será calculada adiante.

Empregando a notação complexa  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , a solução será a parte real de  $z(t)$ , isto é,  $x(t) = \text{Re}[z(t)]$ , porque apenas a solução real tem significado físico. É de se esperar que a solução produzida pela força externa tenha a mesma frequência que essa força. Isso nos leva a pensar na equação (2.24) da forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (2.25)$$

com a solução particular

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}, \quad (2.26)$$

em que  $z_0 = Ae^{i\phi}$  é uma constante. As derivadas temporais de (2.26) são  $\dot{z}(t) = z_0(i\omega)e^{i\omega t}$  e  $\ddot{z}(t) = z_0(i\omega)^2 e^{i\omega t}$ . Substituindo-os na equação (2.25), temos

$$z_0(i\omega)^2 e^{i\omega t} + \gamma z_0(i\omega)e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t},$$

$$z_0[-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2] = \frac{F_0}{m}.$$

Assim,

$$Ae^{i\phi} = z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (2.27)$$

Admita que a solução  $z(t)$  depende de duas funções,  $z_1(t) = r_1 e^{i\phi_1}$  e  $z_2(t) = r_2 e^{i\phi_2}$ . E que cada uma das soluções  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  estão relacionadas a uma constante de fase, respectivamente,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , de modo que

$$z_0 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\phi_1}}{r_2 e^{i\phi_2}}.$$

Podemos supor que  $\phi_1 = 0$ , fazendo com que  $z_1(t)$  seja uma função real, isto é,

$$z_1 = \frac{F_0}{m} = r_1,$$

e supor que o termo que faz com que a solução seja imaginária dependa de  $z_2(t)$  e, então,  $\phi_2 \neq 0$ , de modo que

$$z_2 = \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega = r_2 e^{i\theta_2}. \quad (2.28)$$

A notação fasorial simplifica o trabalho com funções senoidais no tempo. Representados por números complexos, os fasores possuem módulo e fase. Vamos utilizá-los para obter o módulo de  $r_2$ , veja sua representação na Figura 2.3.

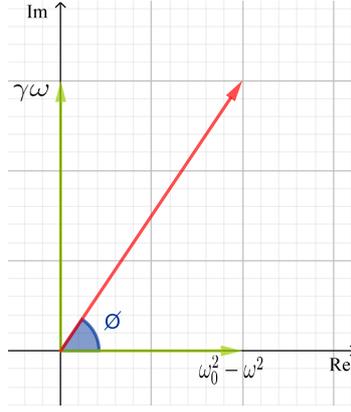


Figura 2.3: Gráfico de  $z_2$ . O fasor  $\vec{r}_2$  é representado em vermelho. No eixo horizontal está representada a parte real do vetor e no eixo vertical está a parte imaginária. O ângulo que  $\vec{r}_2$  faz com o eixo horizontal é  $\phi$  [17].

O módulo de  $r_2$  é um número real dado por:

$$|r_2|^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2 \implies |r_2| = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.$$

E a fase  $\phi_2$  é

$$\tan \phi_2 = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \implies \phi_2 = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

A diferença de fase  $\phi = \phi_2 - \phi_1 = \phi_2$ , pois consideramos  $\phi_1 = 0$ .

A equação (2.27) possui um termo imaginário, mas com as relações acima podemos tomar sua parte real,  $z_0^2 = (Ae^{i\phi})^2 = A^2$ . Desta forma chegamos a:

$$A = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad (2.29)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (2.30)$$

A parte real de  $z(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)}$  é a solução:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

Perceba que, por (2.29) e (2.30), tanto a amplitude de movimento,  $A$ , quanto a constante de fase,  $\phi$ , são funções que dependem da frequência  $\omega$ , portanto,  $A = A(\omega)$  e  $\phi = \phi(\omega)$ .

## 2.4 Soluções numérica e analítica do oscilador harmônico

Para calcular a expressão para as soluções analíticas, basta aplicar na solução  $x(t)$  dos sistemas correspondentes às condições

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases},$$

em que  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . Considere os parâmetros do sistema em todos os casos que serão resolvidos: massa presa à mola, constante elástica da mola, deslocamento inicial em que a massa é solta

em relação à posição de equilíbrio, velocidade inicial da massa, e no caso de sistemas em que seja aplicada uma força externa, a frequência dessa força.

Vamos comparar a solução analítica com a obtida pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem, os programas implementados estão no Apêndice B.

### 2.4.1 Simples

Para comparar os métodos podemos escolher valores para os parâmetros do sistema, esses parâmetros podem ser alterados conforme o sistema que se queira representar. Assim, considerando que uma massa de  $2kg$  seja solta da posição inicial  $x(t=0) = x_0 = 1m$  (para simplificar a notação) ligada à uma mola de constante elástica  $k = 50 \frac{N}{m}$ , temos que  $\omega = \frac{5}{s}$ .

Substituindo os parâmetros na solução do oscilador harmônico simples (equação (2.6))

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

com a seguinte condição inicial

$$x(t=0) = x_0 = A \cos(\phi) = 1, \quad (2.31)$$

será dada por

$$x(t) = \cos(5t). \quad (2.32)$$

A Figura 2.4 mostra a comparação entre as soluções analítica e numérica do sistema massa-mola simples (em todos os gráficos aqui discutidos  $x(t)$  é expresso em metros e  $t$  em segundos). A solução numérica é feita pelo método de Runge-Kutta de segunda ordem, e sua implementação será discutida adiante.

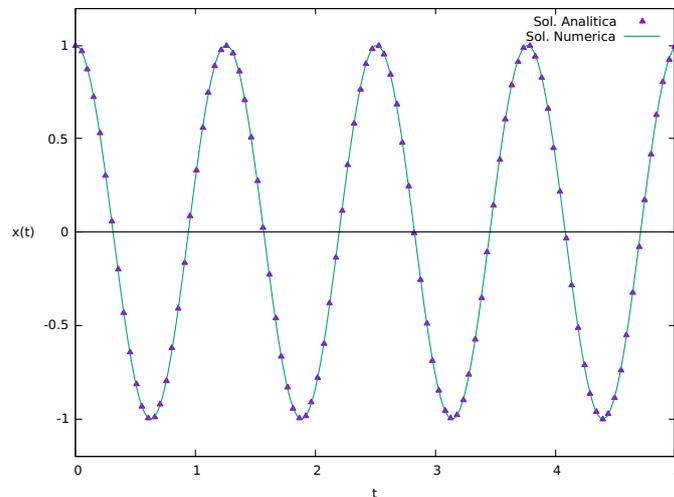


Figura 2.4: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico simples.

No oscilador harmônico simples não existem forças dissipativas, portanto, o sistema oscila sempre com a mesma amplitude máxima.

### 2.4.2 Amortecido Subcrítico

Escolhemos os parâmetros  $\omega_0 = \frac{5}{s}$  e  $\gamma = \frac{4}{s}$ , isso para que eles obedeçam a relação  $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ . Considere também  $x(t=0) = 1$  e  $v(t=0) = v_0 = 0$  na solução obtida anteriormente, que nos conduz à

$$x(t) = e^{-2t}[\cos(5t) + 0,4 \sin(5t)],$$

a comparação entre as soluções analítica e numérica é mostrada na Figura 2.5.

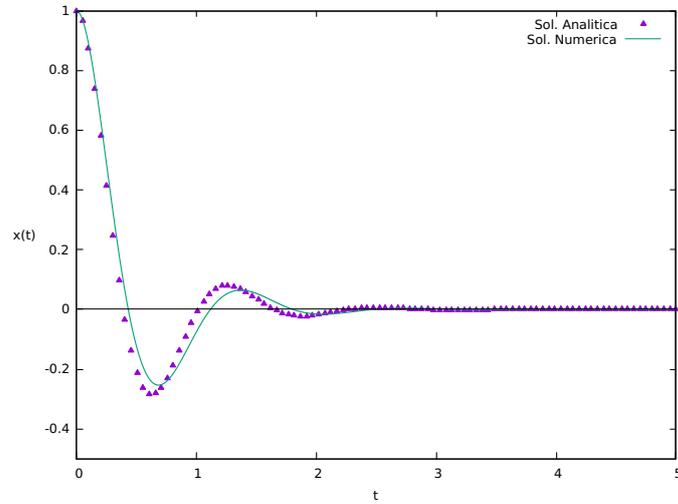


Figura 2.5: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico com amortecimento subcrítico.

O amortecimento faz com que a amplitude da oscilação diminua até que o corpo fique em repouso.

### 2.4.3 Amortecido Supercrítico

Considere os parâmetros  $\omega_0 = \frac{5}{s}$ ,  $\gamma = \frac{20}{s}$ , que obedecem a relação  $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ , e a solução analítica (2.20)

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}].$$

A partir das condições iniciais para a posição e velocidade temos que:

$$\begin{cases} a_1 = 1,07735m \\ a_2 = -0,07735m \\ \beta = \frac{8,66025}{s} \end{cases}$$

Plotando os gráficos das soluções analítica e numérica obtemos:

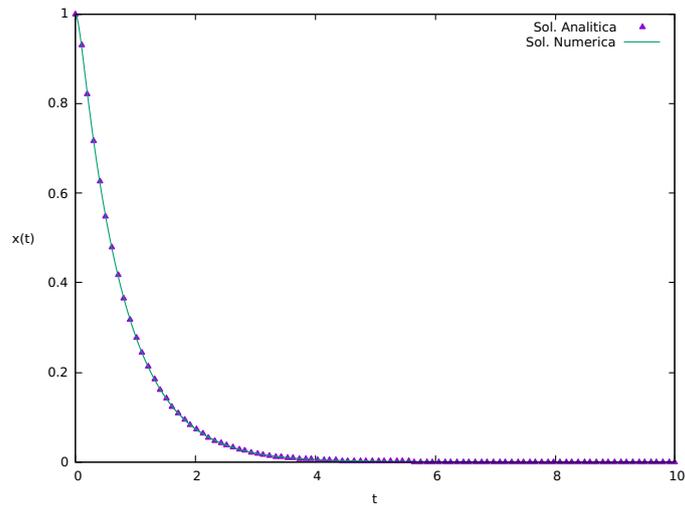


Figura 2.6: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico com amortecimento supercrítico.

### 2.4.4 Amortecido Crítico

Consideramos aqui  $\omega_0 = \frac{5}{s}$  e  $\gamma = \frac{10}{s}$ , que satisfazem  $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ . Vejamos a solução analítica e o gráfico com as soluções analítica e numérica:

$$x(t) = e^{-5t}[1 + 5t].$$

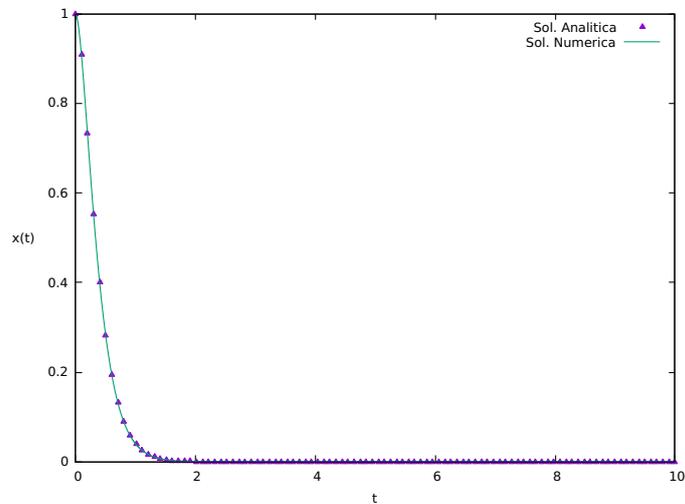


Figura 2.7: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico com amortecimento supercrítico.

É possível ver na figura que a amplitude do movimento diminui tão rapidamente que não ocorre oscilação.

Observe nas figuras a seguir as comparações entre os métodos numérico e analítico:

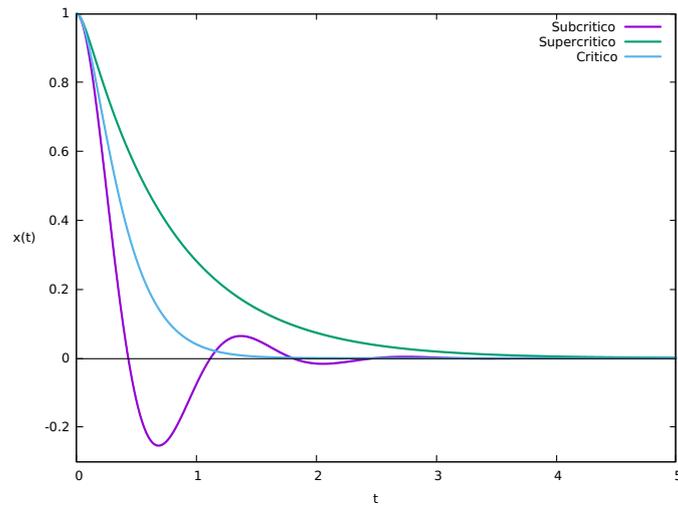


Figura 2.8: Comparação entre as soluções numéricas do oscilador harmônico com amortecimento.

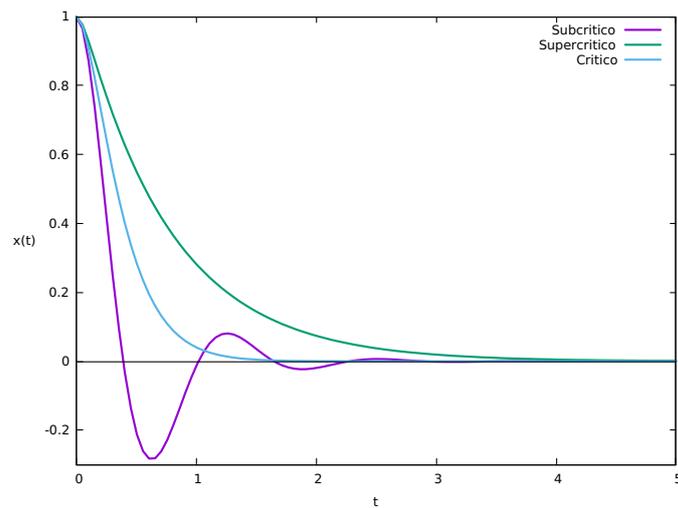


Figura 2.9: Comparação entre as soluções analíticas do oscilador harmônico com amortecimento.

### 2.4.5 Forçado com Amortecimento

Em todos os casos, considere  $F_0 = 20N$ ,  $m = 2kg$ ,  $\omega = \frac{10}{s}$ ,  $x(t = 0) = x_0 = 1m$ . Além disso,

$$A = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}},$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right),$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

## Subcrítico

Para o oscilador harmônico forçado com amortecimento subcrítico nós consideramos  $\omega_0 = \frac{5}{s}$  e  $\gamma = \frac{4}{s}$ , além das condições iniciais mencionadas anteriormente. Obtemos assim a seguinte solução

$$x(t) = 0,11765 \cos[10t + \arctan(-0,53333)],$$

cuja representação gráfica é apresentada a seguir

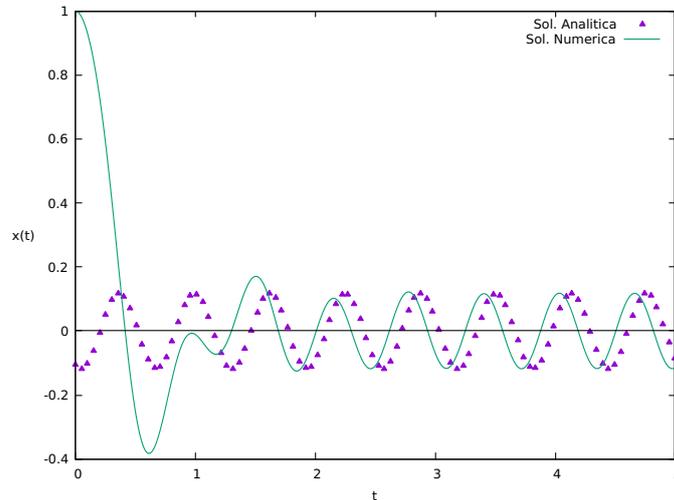


Figura 2.10: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico forçado com amortecimento subcrítico.

Como podemos obter de forma analítica apenas a solução estacionária do problema, isto é, a solução cuja amplitude não varia no tempo, a solução analítica na Figura 2.10 não coincide com a solução numérica próximo da origem.

A divergência no início dos gráficos se deve ao fato de calculamos a solução estacionária do problema, mas nas proximidades de  $t = 0$  a solução é um transiente, o que significa que ao menos uma variável do problema está variando com o tempo, neste caso é a amplitude da oscilação.

## Supercrítico

Para o oscilador harmônico forçado com amortecimento supercrítico, considere  $\omega_0 = \frac{5}{s}$ ,  $\gamma = \frac{20}{s}$  e as condições iniciais do problema para obter a solução

$$x(t) = 0,04682 \cos[10t + \arctan(-2,66667)],$$

com o seguinte gráfico

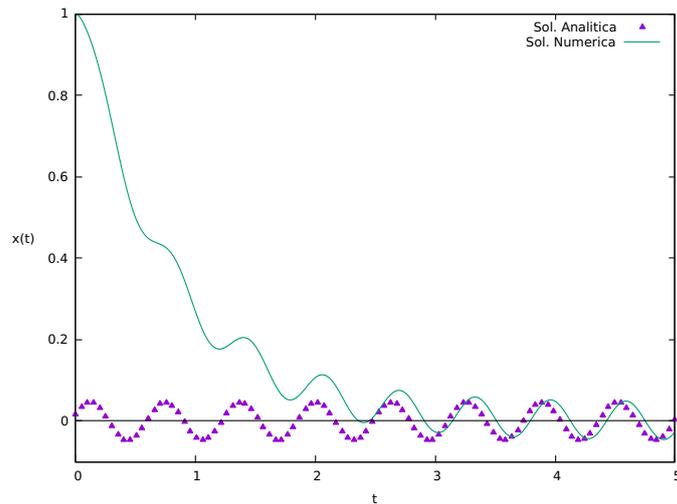


Figura 2.11: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico forçado com amortecimento supercrítico.

A solução analítica obtida é a estacionária, e não coincide com a solução numérica, que possui um transiente. Note que as soluções começam a coincidir em  $t = 3s$ .

### Crítico

Para o oscilador harmônico forçado com amortecimento crítico, podemos escolher  $\omega_0 = \frac{5}{s}$ ,  $\gamma = \frac{10}{s}$  e as condições iniciais. A solução é dada por

$$x(t) = 0,08 \cos[10t + \arctan(-1,33333)],$$

com o seguinte gráfico

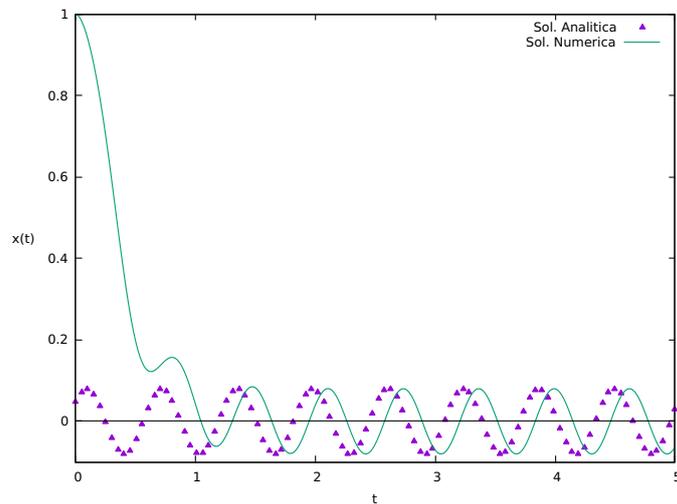


Figura 2.12: Comparação entre as soluções analítica e numérica do oscilador harmônico forçado com amortecimento crítico.

Novamente, a solução analítica obtida é a estacionária e não coincide com a solução numérica, que possui um transiente. Note que as formas das soluções começam a se assemelhar em  $t = 1s$ .

# Capítulo 3

## Equações de Lotka-Volterra

Podemos considerar que os trabalhos de Fibonacci, Euler, Malthus, Verhulst, Lotka e Volterra foram os pioneiros no estudo de dinâmica de populações [18].

Vito Volterra procurava descrever um aumento da população de uma espécie de peixe predador e a consequente diminuição da população uma espécie de peixe presa no Mar Adriático durante a Primeira Guerra Mundial. Enquanto que o químico e matemático Alfred J. Lotka buscava um modelo para descrever reações químicas em que as concentrações dos elementos químicos oscilavam de maneira semelhante a que ocorre com populações em competição [18].

Lotka e Volterra propuseram de forma independente um par de equações diferenciais de primeira ordem não lineares que frequentemente são utilizadas para descrever a dinâmica de sistemas biológicos, particularmente quando duas espécies interagem, uma como presa e outra como predadora [19]. Esse conjunto de equações é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha yx \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (3.1)$$

A primeira equação representa a variação do número de presas ( $x$ ), que cresce à medida que a população atual aumenta (primeiro termo à direita do sinal de igualdade) e decresce conforme a efetividade em que a predação ocorre (segundo termo). A segunda equação refere-se à variação do número de predadores ( $y$ ), que diminui com a morte dos predadores (primeiro termo à direita) e aumenta à medida que os predadores conseguem se reproduzir (segundo termo).

Os coeficientes  $a$ ,  $\alpha$ ,  $b$  e  $\beta$  são constantes positivas, que representam a taxa com que as presas nascem ( $a$ ), predadores morrem ( $b$ ) e interações entre as espécies ( $\alpha$  e  $\beta$ ) ocorrem.

A dinâmica de Lotka-Volterra é um modelo bastante simplificado, que mostra o comportamento geral das populações, mas não leva em conta fatores como: que a taxa de predadores possa saturar por saciedade ou incapacidade de consumir mais que uma certa quantidade de presas, ou ainda que, na ausência de predadores, o número de presas cresce exponencialmente, e não de forma logística<sup>1</sup>.

Tratamos aqui as relações de *predação*, em que a presença de uma espécie A é favorável para B e B é prejudicial a A. Existem também as relações de *competição*, quando ambas as espécies prejudicam uma à outra e a de *simbiose* (ou *mutualismo*), quando ambas as espécies se favorecem, entre outras interações (como amensalismo, comensalismo e neutralismo) [21].

---

<sup>1</sup>Crescimento exponencial: a taxa de crescimento por indivíduo da população se mantém independentemente do seu tamanho.

Crescimento logístico: a taxa de crescimento populacional per capita diminui conforme o tamanho da população se aproxima de um máximo imposto pelo ambiente [20].

## 3.1 Solução

### 3.1.1 Análise qualitativa

Para fazer uma análise qualitativa das equações de Lotka-Volterra, divide a segunda equação de (3.1) pela primeira

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y(-b + \beta x)}{x(a - \alpha y)},$$

separando os termos que dependem de  $y$  dos termos dependentes de  $x$  e integrando, temos

$$\int \frac{(a - \alpha y)}{y} dy = \int \frac{(-b + \beta x)}{x} dx.$$

Logo,

$$a \ln(y) - \alpha y + c_1 = -b \ln(x) + \beta x + c_2, \quad (3.2)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que surgem do fato de que a integral estava indefinida (sem os limites de integração). Reorganizando a equação (3.2) e considerando  $c_1 - c_2 = k$ , temos

$$-b \ln(x) + \beta x = a \ln(y) - \alpha y + k,$$

ou seja,

$$\beta x + \alpha y - b \ln(x) - a \ln(y) = k.$$

Como  $x$  e  $y$  são funções que dependem do tempo,

$$\beta x(t) + \alpha y(t) - b \ln(x(t)) - a \ln(y(t)) = k. \quad (3.3)$$

A solução das equações (3.1) devem satisfazer (3.3), sendo que a segunda não possui solução trivial e cada valor de  $k$  corresponde a uma curva na trajetória de fase *Predadores*  $\times$  *Presas*.

Por conta disso, vamos abordar apenas as soluções numéricas, cuja implementação do método numérico para obtê-las está no Apêndice C.

Apresentaremos em seguida alguns exemplos de gráficos que podemos obter ao variar os parâmetros  $a$ ,  $\alpha$ ,  $b$  e  $\beta$  (escolheremos valores quaisquer). Neles é possível ver que as variações do número de presas e predadores são cíclicas, comportamento que é observado na natureza. Como é o caso do trabalho de Eugene P. Odum e Gary W. Barrett, que fizeram a modelagem da população de lebres e linces do Canadá e perceberam que a variação de linces e lebres é periódica com períodos entre 9 e 10 anos, e que os picos estão defasados de 1 a 2 anos [22].

A interpretação para o comportamento oscilatório é que conforme a população de presas aumenta, há mais alimento disponível para a população de predadores, que também cresce, o que faz com que a população de presas diminua, gerando maior competição por alimento, fazendo com que o número de predadores diminua. Com a predação menor, o número de presas cresce e o processo se repete indefinidamente, como podemos ver tanto nos gráficos de *Indivíduos*  $\times$  *Tempo*<sup>2</sup>, quanto nos gráficos do espaço de fase dos exemplos aqui mostrados.

---

<sup>2</sup>Nos casos tratados aqui, pense no tempo como expresso em anos.

### 3.1.2 Exemplos

#### Exemplo I

Na equação (3.1), se forem escolhidos  $a = \alpha = b = \beta = 1$  e que a relação inicial de presas e predadores seja de 2:1. A evolução do número de indivíduos em função do tempo pode ser vista na Figura 3.1.

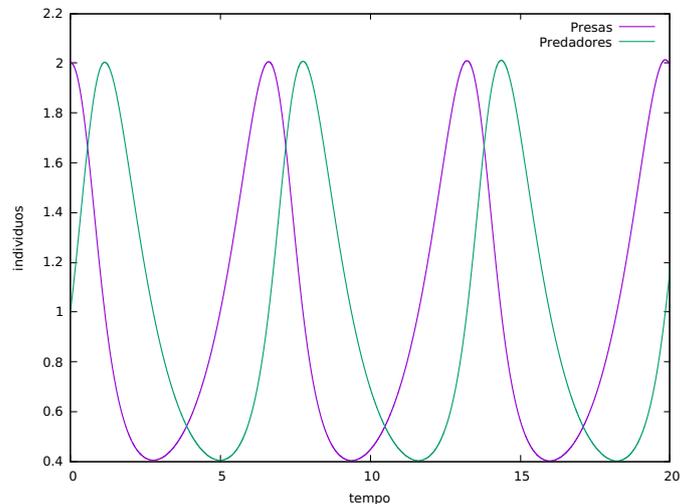


Figura 3.1: Solução numérica das equações de Lotka-Volterra para os parâmetros  $a = \alpha = b = \beta = 1$ .

É possível relacionar o número de predadores em função do número de presas, por meio do gráfico que também é chamado de espaço de fase, representado na Figura 3.2.

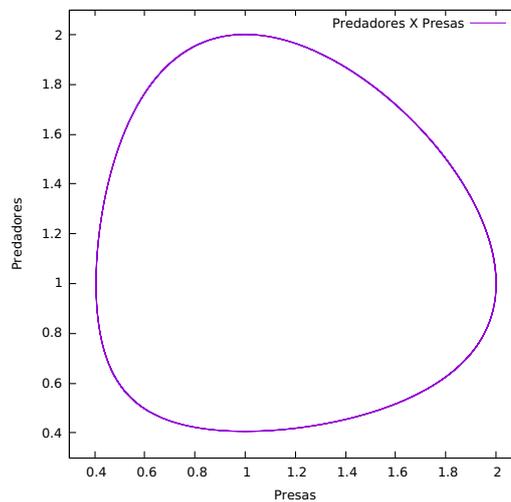


Figura 3.2: Espaço de fase: relação entre o número de predadores em função do número de presas.

Note que o sentido do espaço de fase é anti-horário (é mais fácil perceber isso comparando o número de indivíduos na Figura 3.1), e é possível demonstrar que suas trajetórias são órbitas fechadas (mas não o faremos aqui).

## Exemplo II

Na equação (3.1), tome  $a = 5$ ,  $\alpha = 2$  e  $b = \beta = 1$ . A população inicial de presas em relação à população inicial de predadores novamente é de 2:1. A Figura 3.3 mostra a quantidade de indivíduos em relação ao tempo.

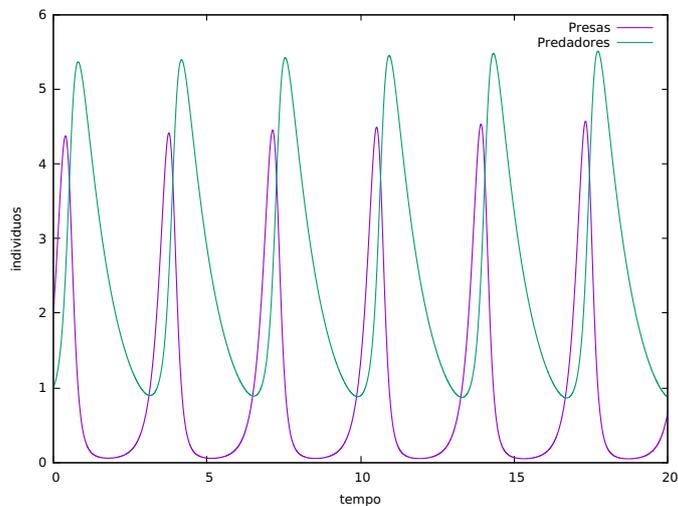


Figura 3.3: Solução numérica das equações de Lotka-Volterra para os parâmetros  $a = 5$ ,  $\alpha = 2$  e  $b = \beta = 1$ .

Na Figura 3.4 podemos ver gráfico do espaço de fase.

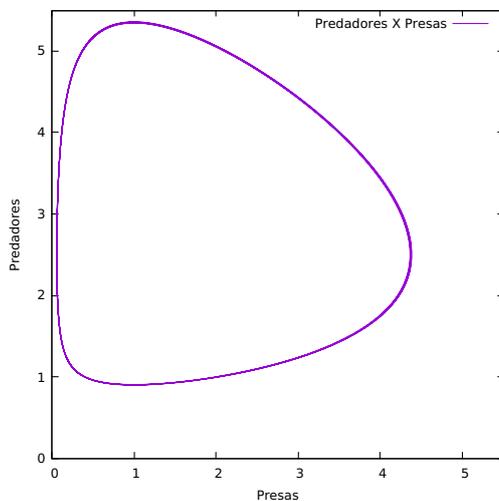


Figura 3.4: Número de predadores em função do número de presas.

### Exemplo III

Na equação (3.1), considere  $a = \alpha = 1$ ,  $b = 5$  e  $\beta = 2$ . A população inicial de presas em relação à população inicial de predadores novamente é de 2:1. Vemos na Figura 3.5 a quantidade de indivíduos em relação ao tempo.

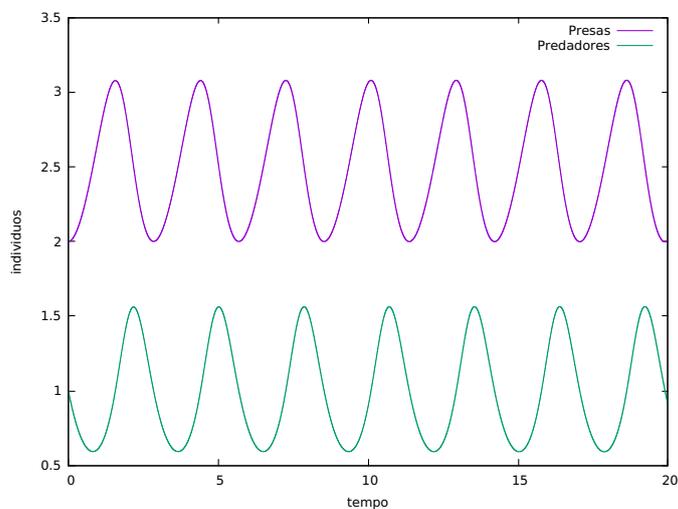


Figura 3.5: Solução numérica das equações de Lotka-Volterra para os parâmetros  $a = \alpha = 1$ ,  $b = 5$  e  $\beta = 2$ .

O gráfico do espaço de fase pode ser visto na Figura 3.6.

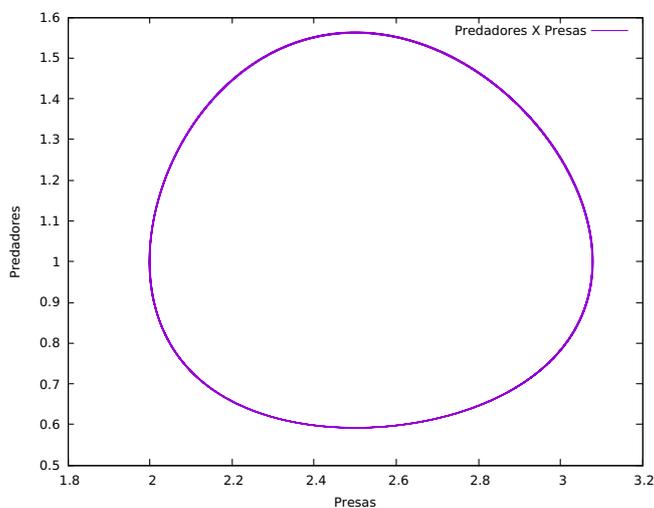


Figura 3.6: Número de predadores em função do número de presas.

Perceba que na Figura 3.6 a escala do gráfico para os predadores é muito menor que a escala para as presas.

## Exemplo IV

Ao seguir a sugestão da referência [23], considere  $a = 0,5$ ;  $\alpha = 0,01$ ;  $b = 0,2$  e  $\beta = 0,001$  na equação (3.1). E que inicialmente a população de presas seja de 200 indivíduos e a de predadores 80. Para este exemplo utilizamos  $t_f = 40$  (pois  $t_f = 20$  não foi um tempo suficiente para que o espaço de fase ficasse fechado). A solução será então

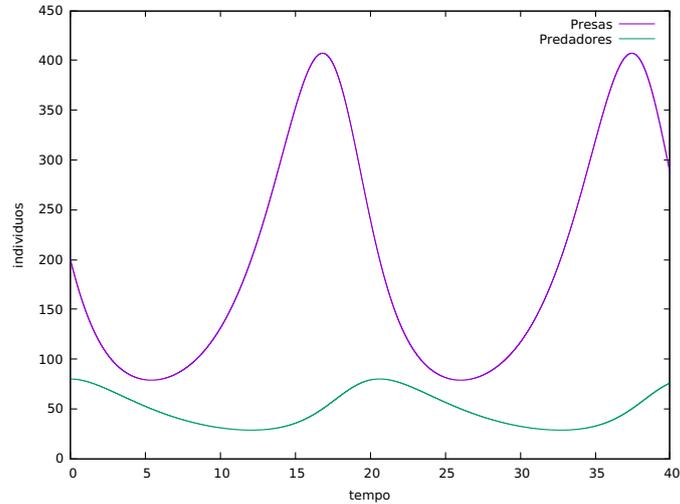


Figura 3.7: Solução numérica das equações de Lotka-Volterra para os parâmetros  $a = 0,5$ ;  $\alpha = 0,01$ ;  $b = 0,2$  e  $\beta = 0,001$ .

Na Figura 3.8 temos espaço de fase.

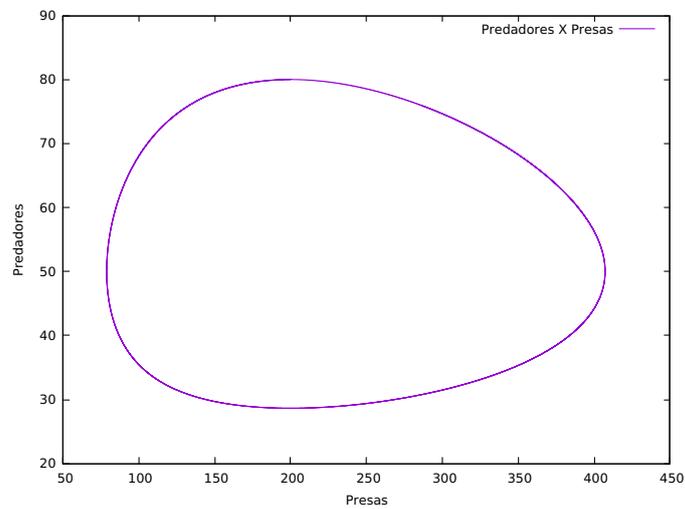


Figura 3.8: Número de predadores em função do número de presas.

Note que na Figura 3.8 a escala do gráfico é muito maior para as presas do que para os predadores.

## Conclusões

Métodos numéricos são extremamente valiosos para obter a solução de equações diferenciais. Existem métodos ainda mais precisos, como o método de Runge-Kutta de terceira ordem (menos utilizado), o de quarta ordem (muito empregado), o de quinta ordem (método de Runge-Kutta-Fehlberg), e assim sucessivamente. Conforme aumentamos a ordem do método, a precisão é maior quando comparado ao método analítico, em contrapartida o trabalho computacional é maior.

O método de Runge-Kutta de primeira ordem foi abordado para introduzir um dos métodos de segunda ordem, ambos foram abordados detalhadamente, e com o segundo método obtivemos as soluções numéricas para diversos casos do oscilador harmônico unidimensional, vimos que nossos resultados coincidem com a teoria. Resolvemos também as equações de Lotka-Volterra, apenas numericamente, mas de acordo com a pesquisa realizada para o trabalho, foi possível ver que os resultados obtidos coincidem com a teoria.

# Apêndice A

## Comparação entre os métodos analíticos e numéricos

Para mostrar que o método do ponto médio é mais preciso que o de Euler, considere como exemplo o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \cos(10t) \\ y(t=0) = 2 \end{cases}$$

cuja solução facilmente obtida de forma analítica é:

$$y(t) = \frac{\sin(10t)}{10} + 2.$$

Todos os códigos implementados para este trabalho foram feitos em linguagem C, os programas foram compilados e executados pelo terminal do Linux e os gráficos produzidos com o Gnuplot. Como o terminal não permite acentuação, as palavras dos gráficos e programas não estão acentuadas. A respeito dos separadores decimais, usamos vírgula no texto e ponto nos gráficos (pois este é o estilo padrão do Gnuplot).

Para obter os arquivos de extensão "\*.dat" que serão mencionados, consideramos  $dt = 0,01$ ;  $y_0 = 2$ ;  $t_0 = 0$  e  $t_f = 5$ .

### A.1 Método de Euler

Considere que o programa receba o nome "euler.c"

```
1
2 //compilacao      : gcc euler.c -lm
3 //execucao       : ./a.out dt y0 t0 tf
4
5 //bibliotecas necessarias para o funcionamento do programa:
6 #include <stdio.h>
7 #include <stdlib.h>
8 #include <math.h>
9
10 //declara uma funcao f(t,y) que recebe valores reais:
11 double f(double t, double y){
12 // dy/dt = f(t,y)
13 return cos(10*t); //podemos colocar qualquer funcao no lugar de "cos
    (10*t)"
```

```

14 }
15
16 //inicio do programa:
17 int main(int argc, char **argv){
18
19 //declaracao das variaveis necessarias para o programa:
20 double dt, y0, y, t, tf;
21
22
23 //verifica se os parametros para que o programa funcione foram
    digitados:
24 if(argc != 5){
25 printf("%s dt y0 t0 tf\n", argv[0]);
26 exit(0);
27 }
28
29 //atribui para as variaveis os parametros inseridos:
30 dt= atof(argv[1]); // variacao do passo (dt = h)
31 y= atof(argv[2]); // valor inicial de y [y0 = y(t0)]
32 t= atof(argv[3]); // valor inicial de t
33 tf= atof(argv[4]); // valor final de t
34
35 //cria um arquivo de nome "euler.dat", nele serao escritos os valores
    obtidos:
36 FILE *file= fopen("euler.dat", "w");
37 fprintf(file, "%e %e\n", t, y);
38
39 //calculo do Metodo de Euler:
40 while (t<=tf){
41 fprintf(file,"%e %e\n", t, y);
42 y+= dt*f(t, y);
43 t+= dt;
44 }
45
46 //encerramento do arquivo de escrita e do programa:
47 fclose(file);
48 return 0;
49 }

```

## A.2 Método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK-2)

Considere que o nome do programa seja "rk2.c" e a única diferença entre ele e o programa "euler.c" está dentro do comando "while"

```

1
2 //compilacao      : gcc rk2.c -lm
3 //execucao       : ./a.out dt y0 t0 tf
4
5 #include <stdio.h>
6 #include <stdlib.h>
7 #include <math.h>
8

```

```

9  double f(double t, double y){
10 // dy/dt = f(t,y)
11 return cos(10*t);
12 }
13
14 int main(int argc, char **argv){
15 double dt, y0, y, t, tf;
16
17 if(argc != 5){
18 printf("%s dt y0 t0 tf\n", argv[0]);
19 exit(0);
20 }
21
22 dt= atof(argv[1]); // variacao do passo (dt = h)
23 y=  atof(argv[2]); // valor inicial de y [y0 = y(t0)]
24 t=  atof(argv[3]); // valor inicial de t
25 tf= atof(argv[4]); // valor final de t
26
27 FILE *file= fopen("rk2.dat", "w");
28 fprintf(file, "%e %e\n", t, y);
29
30 while(t <= tf){
31 y+= dt*f(t+0.5*dt, y+0.5*dt*f(t,y));
32 t+= dt;
33 fprintf(file, "%e %e\n", t, y);
34 }
35
36
37 fclose(file);
38 return 0;
39 }

```

# Apêndice B

## Implementação do código para resolver a equação do oscilador harmônico

Para obter os arquivos de extensão "\*.dat" que serão mencionados, consideramos  $dt = h = 10^{-3}$ ;  $v_0 = 0$ ;  $x_0 = 1$ ;  $t_0 = 0$  e  $t_f = 20$ .

As equações diferenciais obtidas no Capítulo 2 são de segunda ordem, para poder aplicá-las no método de Runge-Kutta basta recordar que

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \\ \frac{dx}{dt} = v. \end{cases}$$

O código para resolver numericamente a equação do oscilador harmônico está no quadro abaixo.

```
1
2 //compilacao           : gcc oscilador.c -lm
3 //execucao            : ./a.out dt v0 x0 t0 tf
4
5 //bibliotecas importantes para o funcionamento do programa:
6 #include <stdio.h>
7 #include <stdlib.h>
8 #include <math.h>
9
10 //declara a funcao que recebe valores reais:
11 double f(double v, double x, double t){
12 return -25*x;
13 //funcao f : d2x/dt2 = dv/dt = f(v, x, t)
14 }
15
16 // inicia o programa:
17 int main(int argc, char **argv){
18
19 //declaracao das variaveis inteiras:
20 int i, j, n;
21
22 //declaracao das variaveis reais:
23 double dt, v, x, t, tf, x_temp, v_temp;
24
25 //verifica se todas as condicoes iniciais foram digitadas e nao inicia
    o programa se estiver faltando alguma delas:
26 if(argc != 6){
```

```

27 printf("%s dt v0 x0 t0 tf\n", argv[0]);
28 exit(0);
29 }
30
31 //atribui para as variaveis os parametros inseridos:
32 dt= atof(argv[1]);           // variacao do tempo (passo h)
33 v=  atof(argv[2]);           // valor inicial de v0 = v(t0)
34 x=  atof(argv[3]);           // valor inicial de x0 = x(t0)
35 t=  atof(argv[4]);           // valor inicial do tempo
36 tf= atof(argv[5]);           // tempo final
37
38 //cria um arquivo de nome "oscilador-simples.dat":
39 FILE *file= fopen("oscilador-simples.dat", "w");
40
41 //escreve o tempo, posicao e velocidades iniciais em "oscilador-
42 //simples.dat":
43 fprintf(file, "%e %e %e\n", t, x, v);
44
45 while(t <= tf){
46
47 //Passo intermediario no RK-2:
48 v_temp= v + 0.5*dt*f(v, x, t); //para a velocidade
49 x_temp= x + 0.5*dt*v;          //para a posicao
50
51 //Passo completo no RK-2:
52 v+= dt*f(v_temp, x_temp, t+0.5*dt); //para a velocidade
53 x+= dt*v_temp;                      //para a posicao
54
55 //da um passo de tamanho h= dt no tempo:
56 t+= dt;
57
58 //escreve o tempo, posicao e velocidades calculados pelo metodo RK-2
59 //em "oscilador-simples.dat":
60 fprintf(file, "%e %e %e\n", t, x, v);
61 }
62
63 //fecha o arquivo "oscilador-simples.dat":
64 fclose(file);
65
66 //termina o programa:
67 return 0;
68 }
69 }

```

O código implementado acima é para o caso do oscilador harmônico simples, para os outros sistemas trabalhados aqui basta substituir o "return -25\*x;" por:

Amortecimento Subcrítico: "return -4\*v -25\*x;"

Amortecimento Supercrítico: "return -20\*v -25\*x;"

Amortecimento Crítico: "return -10\*v -25\*x;"

Forçado com Amortecimento Subcrítico: "return -4\*v -25\*x+10\*cos(10\*t);"

Forçado com Amortecimento Supercrítico: "return -20\*v -25\*x+10\*cos(10\*t);"

Forçado com Amortecimento Crítico: "return -10\*v -25\*x+10\*cos(10\*t);"

# Apêndice C

## Implementação do código para resolver as equações de Lotka-Volterra

Para obter os arquivos de extensão "\*.dat" que serão mencionados, consideramos  $dt = h = 10^{-4}$ ;  $t_0 = 0$  e  $t_f = 20$ . Além de  $y_0 = 1$  e  $x_0 = 2$  para os exemplos I, II e III; e  $y_0 = 80$  e  $x_0 = 200$  para o exemplo IV.

```
1
2 // compilacao           : gcc lotka-volterra.c -lm
3 // execucao            : ./a.out dt y0 x0 t0 tf np
4
5 //bibliotecas necessarias para funcionamento do programa:
6 #include <stdio.h>
7 #include <stdlib.h>
8 #include <math.h>
9
10 double f(double x, double y, double t){
11 //declara a funcao que representa a populacao de presas:
12 //dx/dt= a*x - (alpha)*x*y = f(x,y,t)
13 // return a*x - (alpha)*x*y;
14 return 1*x-1*x*y;
15 }
16
17 double g(double x, double y, double t){
18 //declara a funcao que representa a populacao de predadores:
19 //dy/dt= - b*y + (beta)*x*y = g(x,y,t)
20 // return - b*y + (beta)*x*y;
21 return -1*y+1*x*y;
22 }
23
24 int main(int argc, char **argv){
25 //declara variaveis inteiras:
26 int i, j, n , np;
27
28 //declara variaveis reais:
29 double dt, x, y, t, tf, y_temp, x_temp;
30
31 //verifica se todas as condicoes do problema foram inseridas:
32 if(argc!= 6){
33 printf("Execute com: %s dt y0 x0 t0 tf \n", argv[0]);
```

```

34 exit(0);
35 }
36
37 //atribui para as variaveis os parametros inseridos:
38 dt= atof(argv[1]) ; // variacao do tempo (dt = h)
39 y= atof(argv[2]) ; // numero inicial de predadores (y0)
40 x= atof(argv[3]) ; // numero inicial de presas (x0)
41 t= atof(argv[4]) ; // valor inicial do tempo (t0)
42 tf= atof(argv[5]) ; // valor final do tempo (tf)
43
44 //cria um arquivo com o nome "lotka-volterra.dat" para escrever os
    dados:
45 FILE *file= fopen("lotka-volterra.dat", "w");
46
47 //escreve os valores iniciais de x, y e t:
48 fprintf(file, "%e %e %e \n", x, y, t);
49
50 while(t <= tf){
51 //Para as presas:
52 //passo intermediario de RK-2:
53 x_temp= x +0.5*dt*f(x,y,t);
54
55 //passo completo de RK-2:
56 x+= dt*f(x_temp, y_temp, t+0.5*dt);
57
58 //Para os predadores:
59 //passo intermediario de RK-2:
60 y_temp= y +0.5*dt*g(x,y,t);
61
62 //passo completo de RK-2:
63 y+= dt*g(x_temp, y_temp, t+0.5*dt);
64
65 //passo de tamanho dt no tempo:
66 t+=dt;
67
68 //impressao de t, x e y apos cada passo:
69 fprintf(file, "%e %e %e \n", x, y, t);
70 }
71 //fecha o arquivo:
72 fclose(file);
73
74 //encerra o programa:
75 return 0;
76 }

```

O código apresentado é para o Exemplo I, para os outros casos basta substituir o "return 1\*x-1\*x\*y;" em  $f$  (população de presas) e o "return -1\*y+1\*x\*y;" em  $g$  (população de predadores) por:

Exemplo II:

$$\begin{cases} f : \text{"return } 5 * x - 2 * x * y \text{"} \\ g : \text{"return } - 1 * y + 1 * x * y; \text{"} \end{cases}$$

Exemplo III:

$$\begin{cases} f : \text{"return } 1 * x - 1 * x * y; \text{"} \\ g : \text{"return } - 5 * y + 2 * x * y; \text{"} \end{cases}$$

Exemplo IV:

$$\begin{cases} f : \text{"return } 0.5 * x - 0.01 * x * y; \text{"} \\ g : \text{"return } - 0.2 * y + 0.001 * x * y; \text{"} \end{cases}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Significado de Equação. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/equacao/>>. Acesso em 15 de Out. de 2018.
- [2] J. Stewart, *Cálculo, Volume 2*. Cengage Learning, 2011.
- [3] W. E. Boyce, *Equações Diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Editora LTC, 2002.
- [4] D. G. Zill, *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Cengage Learning, 2016.
- [5] M. A. G. Ruggiero, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Makron Books, 1996.
- [6] L. C. Barroso, *Cálculo numérico (com aplicações)*. Editora Harbra, 1987.
- [7] Dedução Geométrica do Método de Runge-Kutta de Primeira Ordem. Imagem criada com o aplicativo Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic>.
- [8] Dedução Geométrica do Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem. Imagem criada com o aplicativo Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic>.
- [9] R. D. Knight, *Física 1: uma abordagem estratégica*. Bookman, 2009.
- [10] Edmilson Manganote, Oscilações, Ondas Audição e Fala. Disponível em: [https://sites.ifi.unicamp.br/graduacao/files/2013/12/F-107\\_20162S\\_16.11.01\\_M05-1.pdf](https://sites.ifi.unicamp.br/graduacao/files/2013/12/F-107_20162S_16.11.01_M05-1.pdf). Acesso em 12 de Out. de 2018.
- [11] Sistema massa mola. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sistema\\_massa\\_mola.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sistema_massa_mola.jpg). Acesso em 03 de Out. de 2018.
- [12] P. A. Tipler, *Física para cientistas e engenheiros, Volume 1*. Editora LTC, 2009.
- [13] Adaptado de Movimento Oscilatório. Disponível em: <https://www.slideserve.com/sopoline-mendoza/movimento-oscilat-rio>. Acesso em 03 de Out. de 2018.
- [14] H. Nussenzveig, *Curso de física básica: Fluidos, oscilações e ondas, calor*. Curso de física básica, Edgard Blucher, 2001.
- [15] Autor não informado, Bhaskara descobriu a fórmula de Bhaskara? Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/bhaka.html>. Acesso em 03 de Out. de 2018.
- [16] Gauss Cordeiro, 300 anos de um gênio. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~abe/lista/msg02545.html>. Acesso em 03 de Out. de 2018.
- [17] Representação gráfica de um número complexo. Imagem criada com o aplicativo Geogebra: <https://www.geogebra.org/classic>.

- [18] Jefferson Adriany R. da Cunha, Não-Localidade e Formação de Padrão na Equação de Fisher-Kolmogorov. Disponível em: [repositorio.unb.br/handle/10482/3729](http://repositorio.unb.br/handle/10482/3729). Acesso em 20 de Out. de 2018.
- [19] Jaqueline Maria da Silva, Adilson Pereira Andrade Júnior, Anna Karolina Guimarães Ataíde, Mhaessa Batista Franco, Flávio Henrique dos Santos, Modelagem matemática de predação com comportamento logístico. Disponível em: <http://site.ufvjm.edu.br/revistamultidisciplinar/files/2017/03/Jaqueline2102.pdf>. Acesso em 20 de Out. de 2018.
- [20] Autor não informado, Crescimento exponencial e logístico. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth>. Acesso em 20 de Out. de 2018.
- [21] Roberto André Kraenkel, Ecologia de Populações. Disponível em: <http://ecologia.ib.usp.br/ecopop/lib/exe/fetch.php?media=matapoiio:aula5.pdf>. Acesso em 20 de Out. de 2018.
- [22] E. Odum, *Fundamentos de ecologia*. Cengage Learning, 2007.
- [23] Paulo Roberto Guimarães, Alexandre Adalardo de Oliveira, Roberto André Kraenkel, Modelo Predador-Presa. Disponível em: [ecologia.ib.usp.br/ecopop/doku.php?id=exercicios:exe\\_lvpp](http://ecologia.ib.usp.br/ecopop/doku.php?id=exercicios:exe_lvpp). Acesso em 20 de Out. de 2018.